SOBRE LA DETERMINACIÓN DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE SUS NÚMEROS DERIVADOS

POR

F. SUNYER BALAGUER

1. SCHEEFFER fué el primero que dió una respuesta al problema siguiente:

Hallar una familia Q de conjuntos de puntos de la recta real, tal que si $C \varepsilon Q$, sea suficiente conocer, en todo punto de C, el valor finito del número derivado superior a derecha (1) *de una función continua, para que esta función quede determinada salvo en una constante aditiva.*

La respuesta de SCHEEFFER [4, teorema IV] (2) afirma que *es suficiente que la familia Q esté formada por los conjuntos cuyo complementario es numerable* (3).

El mismo SCHEEFFER [4, pág. 287-288] dice:

« Die Frage, deren Beantwortung wir eingangs als das Ziel unserer Untersuchungen hingestellt haben, lautete: In welchem Umfange muss die Gleichung $D^+ F(x) - D^+ f(x) = 0$ erfüllt sein, damit der Schluss $F(x) - f(x) = Const.$ gezogen werden darf? »

« Diese Frage würde als vollständig beantwortet anzusehn sein, wenn sich im Anschluss an den Satz IV Folgendes nachweisen liesse: Bedeutet P eine im Intervall $x_0 x_1$ beliebig gegebene Menge von Werten x, deren Mächtigkeit *höher, als diejenige der abzählbaren Mengen ist,* so existiren immer stetige Funktionen $\psi(x)$, welche nicht im ganzen Intervall $x_0 x_1$ constant sind und dennoch an allen Stellen, die nicht sur Menge P gehören, den Differentialquotienten Null besitzen. »

(1) Y lo mismo para los números derivados inferior a derecha, superior a izquierda e inferior a izquierda.

(2) Los números entre paréntesis angulares remiten a la bibliografía del final del trabajo.

(3) LEBESGUE [2, pág. 82] indica que la misma demostración de SCHEEFFER permite hallar una familia Q tal vez más general, a saber: *La formada por los conjuntos cuyo complementario es de potencia inferior a la del continuo.*

« Der Nachweis der Existenz solcher Funktionen $\psi(x)$ ist uns indes nicht in voller Allgemeinheit, sondern nur unter der Voraussetzung gelungen, dass die Menge P entweder selbst *perfekt* ist oder doch einen *perfekten* Bestandteil enthält. Die von uns aufgeworfene Frage wird also im Folgenden nicht vollständig erledigt; denn es bleibt der Fall übrig, dass die Menge P von höherer als der ersten Mächtigkeit ist, ohne einen perfekten Bestandteil zu enthalten. Freilich ist es zweifelhaft, ob solche Mengen überhaupt vorkommen können; Beispiele dieser Art dürften wenigstens bisher nicht bekannt sein. Sollte es sich daher in der weiteren Entwickelung der Mengenlehre herausstellen, dass wirklich jede Punktmenge, derén Mächtigkeit höher als diejenige der abzählbaren Mengen ist, einen perfekten Bestandteil enthält, so würde damit gleichzeitig der letzte Schritt zur Beantwortung unserer Frage gethan sein. Bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Theorie muss jedenfalls die Bedingung, dass die nicht abzählbare Menge P einen perfekten Bestandteil enthalten solle, ausdrücklich angegeben werden. »

Posteriormente BERNSTEIN demostró la existencia de los conjuntos que SCHEEFFER ponía en duda, es decir, la existencia de los conjuntos de potencia del continuo y totalmente imperfectos. (4)

Por lo tanto, en el caso en que C es el complementario de un conjunto de potencia del continuo totalmente imperfecto, cabe preguntar si la función queda determinada por el conocimiento, en la totalidad de C, del valor finito de uno de sus números derivados. Ultimamente nosotros [5] dimos una respuesta afirmativa a esta pregunta e indicamos que la familia Q más general que puede utilizarse en el problema señalado al principio es la familia formada por los complementarios de los conjuntos totalmente imperfectos. (5)

Los resultados de SCHEEFFER y LEBESGUE daban la impresión que la determinación de la función era debida a que el conjunto complementario de C era *poco numeroso*. Pero nuestro resultado contradice esta impresión, pues según BERNSTEIN existen dos conjuntos de potencia del continuo totalmente imperfectos y complementarios el uno del otro. Por lo tanto, basta el conocimiento del valor finito de un número deri-

(4) En la recta real, *conjunto totalmente imperfecto* es equivalente a *conjunto que no contiene ningún perfecto*. Para una demostración muy simple del resultado de BERNSTEIN puede verse C. KURATOWSKI y W. SIERPIŃSKI [1, páginas 193-195].

(5) Puesto que, según ya indica SCHEEFFER, si el complementario de C contiene un perfecto la función no queda determinada, la condición de que los complementarios de los conjuntos $C \in Q$ sean totalmente imperfectos es necesaria y suficiente para que Q sea la solución del problema que hemos indicado al principio.

vado en uno de ellos (siendo indiferente el que se elija) para que la función quede determinada, como siempre salvo en una constante aditiva.

El objeto de este trabajo es la demostración de los resultados que en la Nota citada [5] dimos sin demostrar.

En primer lugar daremos una demostración del resultado principal obtenida introduciendo una modificación a la que utiliza P. Pi Calleja para demostrar el clásico resultado de Scheeffer, demostración que por otra parte es una modificación de la de este último (6). Luego demostraré de nuevo mi resultado utilizando las propiedades de los conjuntos donde los números derivados son menores (o mayores) que una constante. Este empleo de las propiedades de los conjuntos $\{f^+(x) < a\}$ (7) me fué sugerida, durante una conversación, por P. Pi Calleja. No obstante, la primera demostración que obtuve por este método aplicaba la propiedad de los borelianos de que cuando no contienen ningún perfecto son numerables y luego tenía que utilizar el resultado de Scheeffer, y, por lo tanto, carecía de interés ; pues, según veremos en la primera demostración, casi el mismo método que permite demostrar el resultado de Scheeffer nos permite obtener directamente nuestra generalización. Sin embargo, últimamente he podido hallar un procedimiento que permite demostrar que cuando el conjunto $\{f^+(x) < a\}$ no contiene ningún perfecto este conjunto es nulo. Es este procedimiento que daremos en segundo lugar.

Finalmente emplearemos nuestra generalización del teorema de Scheeffer para generalizar los principales resultados que se obtienen a partir de este último.

2. El enunciado del teorema objeto principal de este trabajo es el siguiente :

Teorema I. *Una función continua en un intervalo* (a, b), *queda completamente determinada, salvo en una constante aditiva, cuando se conoce para todo valor de* $x \in (a, b)$, *excepto en un conjunto* A *totalmente imperfecto, el valor finito del número derivado superior a derecha* (8) *de esta función.*

---

(6) Young [6, pág. 104-105] emplea una demostración muy parecida a la de Pi Calleja.

(7) $f^+(x)$ representa el número derivado superior a derecha, y $\{f^+(x) < a\}$ el conjunto de valores de x en los cuales se verifica $f^+(x) < a$.

(8) E igualmente para el inferior a derecha, superior e izquierda e inferior a izquierda.

Primera demostración. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que para todo valor de $x \in (a, b)$ y que no pertenezca al conjunto A, se cumple

$$-\infty < f^+(x) = g^+(x) < +\infty.$$

Para demostrar el teorema es suficiente demostrar que la función

$$F(x) = f(x) - g(x) \tag{1}$$

es constante ; y para probar esto, basta demostrar que $F(x)$ es no decreciente, puesto que permutando $f(x)$ y $g(x)$ demostraríamos del mismo modo que es no creciente, y por lo tanto, constante.

En consecuencia, tendremos que demostrar, según acabamos de ver, que con las condiciones admitidas la función (1) es no decreciente. Supongamos contrariamente que

$$F(b) < F(a) \tag{2}$$

y veremos como se llega a un absurdo.

En primer lugar, según (2), existirán necesariamente dos números positivos K y p tales que, para todo k del intervalo $(0, K)$, se cumplirá

$$F(b) - F(a) + k(b - a) + p < 0.$$

Considerando, pues, la función continua

$$\varphi(x, k) = F(x) - F(a) + k(x - a) + p,$$

se verificará

$$\varphi(a, k) > 0, \qquad \varphi(b, k) < 0,$$

y, por tratarse de una función continua, existirá necesariamente un conjunto no nulo de valores de $x \in (a, b)$, en los cuales

$$\varphi(x, k) = 0.$$

Además, por la misma razón, el extremo superior de este conjunto pertenecerá al mismo. Representemos, pues, para cada valor de $k \in (0, K)$, por $c(k)$ este extremo superior, entonces tendremos

$$\varphi(c(k), k) = 0, \qquad \varphi(x, k) < 0 \quad \text{cuando} \quad c(k) < x \leq b.$$

Esto demuestra que

$$\varphi^+ (c(k),\ k) \leq 0,$$

y, por lo tanto,

$$F^+ (c(k)) \leq -k < 0.$$

Y puesto que en todo punto que no pertenezca a A,

$$F^+ (x) \geq f^+ (x) - g^+ (x) = 0,$$

$c(k)$ pertenece al conjunto A.

Ahora bien, sean k_1 y k_2 dos valores tales que $k_1 < k_2$. De las desigualdades

$$\varphi (c(k_1),\ k_2) > 0, \qquad \varphi (b,\ k_2) < 0,$$

se deduce fácilmente que $c(k_1) < c(k_2)$, o sea que $c(k)$ es una función creciente de k.

A pesar de que se trata de un resultado conocido, vamos ahora a demostrar que el conjunto que se obtiene transformando un intervalo (en nuestro caso el $(0, K)$) mediante una función creciente (la $c(k)$) contiene necesariamente un subconjunto perfecto. En efecto, la función creciente $c(k)$ tiene solamente a lo sumo un conjunto numerable de discontinuidad. Sea, pues, $\{H_n\}$ una sucesión de intervalos abiertos que cubran todos los puntos de discontinuidad, pero cuya longitud total sea inferior a $K/2$. Entonces el conjunto

$$B = (0,\ K) - \bigcup H_n$$

será cerrado, y, puesto que es no numerable, contendrá un conjunto perfecto P. Además, en todo punto de B, y por lo tanto, en todo punto de P, la función $c(k)$ será continua. Por consiguiente, el conjunto $M = c(P)$, transformado de un conjunto perfecto mediante una transformación biunívoca y continua en P, será también un conjunto perfecto.

Como suponiendo que se cumple la (2), hemos demostrado que todos los valores de $c(k)$ pertenecen al conjunto A, tendremos, pues, $M \subset A$, es decir, A contendría un conjunto perfecto, contrariamente a las hipótesis del teorema. Este absurdo demuestra que la (2) no puede cumplirse, y, según hemos indicado, con esto queda demostrado el teorema.

3. Segunda demostración. Sea $E(\alpha, n)$ el conjunto de valores de $x \,\varepsilon\, (a, b)$ en los cuales

$$\max \frac{F(y) - F(x)}{y - x} < \alpha \quad \text{para} \quad 1/n \leq y - x \leq 1/(n-1)$$

evidentemente, este conjunto es abierto. Por otra parte, de la definición de $F^+(x)$ resulta fácilmente

$$\{F^+(x) < \alpha\} \subset G(\alpha) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E(\alpha, n) \subset \{F^+(x) \leq \alpha\}$$

y, por lo tanto,

$$\{F^+(x) < \alpha\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} G(\alpha - 1/m) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E(\alpha - 1/m, n).$$

Por consiguiente, este conjunto es un $G_{\delta\sigma}$. Es evidente que si el conjunto $\{F^+(x) < \alpha\}$ no es nulo, existen dos números k y m tales que

$$B(\alpha - 1/m, k) = \bigcap_{n=k}^{\infty} E(\alpha - 1/m, n) \neq 0.$$

Ahora vamos a demostrar dos lemas que nos permitirán terminar la demostración rápidamente.

Lema 1. *El conjunto $B(\alpha - 1/m, k)$, que es un G_δ, es denso en sí.*

En efecto, sea x_1 un punto cualquiera de $B = B(\alpha - 1/m, k)$. De la definición de este B resulta que existe una cantidad $r > 1/(k-1)$ tal que, para $0 < y - x_1 \leq r$,

$$\frac{F(y) - F(x_1)}{y - x_1} < \alpha - 1/m$$

y puesto que a $F(x)$ la suponemos continua, dada una $\varepsilon > 0$, tal que $r > 1/(k-1) + \varepsilon$, será posible hallar un $\eta > 0$ tal que $\eta < \varepsilon$ y que para todo x' y todo y que verifiquen

$$0 < x' - x_1 < \eta \qquad \varepsilon < y - x_1 < r,$$

se cumpla

$$\frac{F(y) - F(x')}{y - x'} < \alpha - \frac{1}{m}.$$

Tomemos para x' un valor fijo que satisfaga a las condiciones anteriores y representemos por x_2 el mayor valor de x tal que

$$0 \leq x_2 - x_1 < r, \qquad F(x_2) - F(x') = (\alpha - 1/m)(x_2 - x');$$

es fácil demostrar que x_2 verifica la desigualdad $x_2 - x_1 < \varepsilon$ y que además para todo y que cumpla $0 < y - x_2 < 1/(k-1)$ se verificará

$$\frac{F(y) - F(x_2)}{y - x_2} < \alpha - \frac{1}{m}$$

es decir, x_2 pertenece a B. La arbitrariedad de $x_1 \in B$ y de ε demuestra, pues, que B es denso en sí.

LEMA 2. *Un G_δ denso en sí y no nulo, contiene necesariamente un subconjunto perfecto* (9).

Es sabido que cualquier G_δ puede considerarse como la intersección de una sucesión de conjuntos abiertos decrecientes, es decir, si representamos por G el G_δ considerado podremos suponerlo formado del siguiente modo:

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

donde los G_n son conjuntos abiertos tales que

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$$

Si G contiene un intervalo, evidentemente contendrá un subconjunto perfecto. Supondremos, pues, que G no contiene ningún intervalo. Sean x_1 y x_2 dos puntos de G y sea n_1 el menor valor de n tal que G_{n_1} no contiene el intervalo (x_1, x_2), puesto que los G_n son abiertos podremos hallar dos intervalos I_1 y I_2 tales que

$$x_1 \in I_1 \subset G_{n_1}, \qquad x_2 \in I_2 \subset G_{n_1}, \qquad I_1 \cap I_2 = 0.$$

Como se supone que G es denso en sí, en el intervalo I_1 que contiene x_1 podremos hallar dos puntos distintos x_{11} y x_{12} que pertenezcan asimismo a G. Igualmente en I_2 existen dos puntos x_{21} y x_{22} que pertenecen a G. Sea ahora n_2 el menor valor de n tal que G_{n_2} no contenga ni la tota-

(9) A pesar de que este lema puede deducirse de los resultados conocidos

lidad de (x_{11}, x_{12}) ni la totalidad de (x_{21}, x_{22}). Del mismo modo que anteriormente nos será posible hallar cuatro intervalos disyuntos I_{11}, I_{12}, I_{21} y I_{22} de longitud inferior a la mitad de la longitud máxima de I_1 y I_2 y de modo que

$$I_{11} \subset I_1, \qquad I_{12} \subset I_1, \qquad I_{21} \subset I_2, \qquad I_{22} \subset I_2, \text{ (}^{10}\text{)}$$
$$x_{11} \,\varepsilon\, I_{11} \subset G_{n_2}, \qquad x_{12} \,\varepsilon\, I_{12} \subset G_{n_2}, \qquad x_{21} \,\varepsilon\, I_{21} \subset G_{n_2}, \qquad x_{22} \,\varepsilon\, I_{22} \subset G_{n_2}.$$

Continuando de este modo indefinidamente obtendremos una sucesión de intervalos $\{I_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}\}$ donde las ν únicamente toman los valores 1 y 2. Según la definición de estos intervalos, cualquiera que sea la sucesión $\{\nu_n\}$ se verificará

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} = x(\{\nu_n\}) \,\varepsilon\, G.$$

Es fácil demostrar que la suma de los $x(\{\nu_n\})$, para todas las sucesiones $\{\nu_n\}$ formadas según indicamos, es un conjunto perfecto. Por lo tanto, G contiene un perfecto.

Con estos dos lemas podemos terminar la demostración del teorema del siguiente modo. Como en la demostración primera, sea $F(x) = f(x) - g(x)$, según hemos demostrado en la misma demostración primera, el conjunto $\{F^+(x) < 0\}$ está comprendido en el conjunto totalmente imperfecto A, pero, según lo indicado al principio de este número y aplicando el lema 1, resulta que si $\{F^+(x) < 0\}$ no es nulo, éste conjunto contendrá un G_δ denso en sí, y aplicando el lema 2, veremos que $\{F^+(x) < 0\}$ contiene un perfecto. Lo cual está en contradicción con la relación $\{F^+(x) < 0\} \subset A$. Por lo tanto, $\{F^+(x) < 0\}$ debe ser nulo, o sea $F(x)$ es no decreciente. Como, igual que anteriormente, permutando $f(x)$ y $g(x)$ se demostraría que $F(x)$ es no creciente, habremos demostrado finalmente que $f(x)$ y $g(x)$ difieren únicamente en una constante. Esto termina la segunda demostración del teorema I.

4. Evidentemente en todos los resultados que se deducen habitualmente del teorema de Scheeffer se pueden substituir los conjuntos numerables por conjuntos totalmente imperfectos. En particular, se puede demostrar fácilmente que:

---

(10) Las cuatro inclusiones de estos intervalos deben entenderse en sentido estricto, es decir, que ninguno de los extremos de I_1 y I_2 son extremos de

Los límites superior e inferior de un número derivado son los mismos, tanto si se suprimen como si no se suprimen los conjuntos totalmente imperfectos.

Asimismo en los resultados dados por P. Pi Calleja [3] sobre las funciones vectoriales de una variable real o compleja, pueden substituirse los conjuntos numerables por los totalmente imperfectos.

5. En algunos de los teoremas de Young [6] puede escribirse asimismo conjunto totalmente imperfecto en lugar de conjunto numerable. En particular, el teorema 2 de Young puede generalizarse del siguiente modo :

Teorema II. *Si $f(x)$ es, en todo punto de un intervalo cerrado (a, b), semicontinua inferiormente a izquierda y semicontinua superiormente a derecha, y si el valor en el extremo izquierdo a es menor que el valor en el extremo derecho b, entonces el conjunto de los puntos en los cuales uno de los cuatro números derivados de $f(x)$ es positivo (no nulo) contiene un subconjunto perfecto.*

Demostracion. La demostración es casi igual a la que da Young de su teorema, unicamente al final hay que demostrar que la correspondencia entre el punto X y el valor de β es una función monótona (en sentido estricto), entonces igual que en la demostración de nuestro teorema I, resulta que el conjunto de valores de X que corresponde al intervalo que recorre β debe contener un subconjunto perfecto.

De este teorema se sigue inmediatamente el siguiente

Corolario. *Si $f(x)$ es, en todo punto de un intervalo cerrado, semicontinua inferiormente a izquierda y semicontinua superiormente a derecha, y si uno de los cuatro números derivados sabemos que es ≤ 0, salvo en un conjunto totalmente imperfecto, entonces $f(x)$ es no creciente en la totalidad del intervalo, de modo que incluso en los puntos excepcionales los números derivados son ≤ 0.*

Igual que Young puede substituirse en este teorema y corolario la semicontinuidad superior por la semicontinuidad inferior y viceversa, pero en este caso hay que permutar asimismo los signos $<$ y $>$ y también $\leq$ y $\geq$.

Finalmente, el teorema 3 de Young puede generalizarse en la misma forma que lo hemos hecho para el teorema 2, resultando el siguiente enunciado :

Teorema III. *Si $g(x)$ y $h(x)$ son dos funciones de las cuales la primera es, en un intervalo dado, semicontinua inferiormente a izquierda y* *semicontinua superiormente a derecha, y la segunda es, en el mismo intervalo, semicontinua superiormente a izquierda y semicontinua inferiormente a derecha, y si uno de los cuatro números derivados de $g(x)$ es menor que el correspondiente de $h(x)$ o igual a él y finito, salvo en un conjunto de puntos totalmente imperfecto, entonces $g(x) - h(x)$ es no creciente en la totalidad del intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue el mismo curso que la de YOUNG, pero utilizando, en lugar del corolario de su teorema 2, el corolario de nuestro teorema II.

BIBLIOGRAFÍA

1. KURATOWSKI (C.) et SIERPIŃSKI (W.). — *Sur un problème de M. Fréchet concernant les dimensions des ensembles linéaires* (Fund. math. 8, 1926, p. 193-200).
2. LEBESGUE (H.). — *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (París, 1928).
3. PI CALLEJA (P). — *Los números derivonormados de funciones vectoriales* (Revista de la Unión Mat. Argentina 17, 1955, p. 161-172).
4. SCHEEFFER (L.). — *Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veranderlichen* (Acta. Math. 5, 1884, p. 183-194, 279-296).
5. SUNYER BALAGUER (F.). — *Sur la détermination d'une fonction par ses nombres dérivés* (C. R. Acad. Sci. París, 245, 1957, p. 1690-1692).
6. YOUNG (W. H.). — *On term-by-term integration of oscillating series* (Proc. London Math. Soc. 2.ª serie 8, 1910, p. 99-116).

Seminario Matemático de Barcelona, 5-XII-1958