SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE UNA VARIEDAD ALGEBRAICA EN LAS EXTENSIONES DEL CUERPO DE REFERENCIA

POR

RAFAEL MALLOL

Mediante la teoria de la *forma asociada* a una variedad algebraica debida a B. L. VAN DER WAERDEN y W. L. CHOW (*), se pueden estudiar las propiedades de la variedad cuando el cuerpo de referencia es una extensión del primitivo; así proceden v.d. WAERDEN en (3) (**), KESHAVA HEGDE en (2), y, limitándose al caso de un cuerpo de característica nula, HODGE y PEDOE en (1). En (5), pág. 123, se utiliza para dicho estudio la teoría de eliminación. Nuestro propósito, en este artículo, es tratar algunos aspectos de esa cuestión, basándonos, principalmente, en el concepto de *especialización* debido a v. d. WAERDEN y en algunas propiedades relativas al concepto de *disjunción lineal* introducido por A. WEIL en (7).

Este trabajo consta de dos partes. En la primera, de contenido puramente algebraico, cabe destacar: *a)* el teorema 3 que es equivalente a la proposición 18 del Cap. I de (7), y del cual damos una demostración independiente de la teoría de derivación; y *b)* los teoremas 4 y 5, de los cuales se deduce, esencialmente, el contenido de la segunda parte dedicada a las aplicaciones geométricas.

I

Sea Ω un cuerpo algebraicamente cerrado, Δ un subcuerpo de Ω, Δ_s el constituido por los elementos algebraicos y separables sobre Δ, Σ y Γ subcuerpos de Ω extensiones del Δ. Si $\Sigma \cap \Delta_s = \Delta$ diremos que Δ es *separablemente cerrado* en Σ.

DEFINICIÓN. *Se dice que Σ y Γ son linealmente disjuntos sobre Δ, si cada sistema de elementos de Σ linealmente dependientes sobre Γ, depende linealmente sobre Δ.* (***).

(*) W. L. CHOW y B. L. VAN DER WAERDEN, Z. A. G. IX, Math. Ann. 113, (1937), pág. 692.

(**) Los números entre paréntesis se refieren a la nota bibliográfica.

(***) Esta definición es equivalente a la de A. WEIL (7), pág. 6, prop. 3.

TEOREMA 1. *Si $\omega_1, \ldots, \omega_r$ son elementos de Ω algebraicamente independientes sobre Σ, Σ y $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ son linealmente disjuntos sobre Δ.*

Demostración. Es suficiente demostrar la proposición cuando es $r = 1$, pues el aserto, para $r > 1$ se deduce por recurrencia.

Sea ω_1 un elemento de Ω trascendente sobre Σ. Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$ son elementos de Σ linealmente dependientes sobre $\Delta(\omega_1)$ tendremos:

$$a_1 \sigma_1 + \ldots + a_h \sigma_h = 0 \qquad [1]$$

siendo a_i, $i = 1, \ldots, h$, elementos no todos *cero* de $\Delta[\omega_1]$ que podemos suponer primos entre sí. La relación [1] y la trascendencia de ω_1 sobre Δ, exigen

$$a_{10} \sigma_1 + \ldots + a_{h0} \sigma_h = 0 \qquad [2]$$

siendo a_{i0} el término de a_i independiente de ω_1, y como no todos los a_{i0} son cero, la relación [2] implica la dependencia lineal de $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$ sobre Δ.

LEMA 1. *Si α es un elemento de Δ_s, se verifica:*

$$\Sigma(\alpha) : \Sigma = (\Sigma \cap \Delta_s)(\alpha) : (\Sigma \cap \Delta_s). \qquad [3]$$

Demostración. Sean f y g los polinomios (normalizados) definidores de las extensiones $\Sigma(\alpha)$ y $(\Sigma \cap \Delta_s)(\alpha)$ respectivamente; como g es divisible por f, los ceros de f son ceros de g y por consiguiente pertenecen a Δ_s, luego los coeficientes de f pertenecen a $\Sigma \cap \Delta_s$, y en consecuencia $f = g$ que implica la relación [3].

TEOREMA 2. *Σ y Δ_s son linealmente disjuntos sobre $\Sigma \cap \Delta_s$.*

Demostración. Sean $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ elementos de Σ tales que

$$\sigma = \alpha_1 \sigma_1 + \ldots + \alpha_k \sigma_k \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \Delta_s, \qquad i = 1, \ldots, k \qquad [4]$$

Si α es un elemento primitivo de la extensión $(\Sigma \cap \Delta_s)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ y $m + 1$ su grado sobre $\Sigma \cap \Delta_s$ tendremos

$$\alpha_i = b_{i0} + b_{i1} \alpha + \ldots + b_{im} \alpha^m \quad \text{con} \quad b_{ij} \in (\Sigma \cap \Delta_s), \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, \ldots, k \\ j = 0, \ldots, m \end{array} \right. \qquad [5]$$

De las relaciones [4] y [5] resulta

$$\sigma = b_{10} \sigma_1 + \ldots + b_{k0} \sigma_k +$$
$$+ (b_{11} \sigma_1 + \ldots + b_{k1} \sigma_k) \alpha + \ldots + (b_{1m} \sigma_1 + \ldots + b_{km} \sigma_k) \alpha^m$$

pero según [3], 1, α ,..., α^m son linealmente independientes sobre Σ, luego

$$\sigma = b_{10}\sigma_1 + \dots + b_{k0}\sigma_k.$$

La dependencia lineal de σ, σ_1 ,..., σ_k sobre Δ_s implica su dependencia lineal sobre $\Sigma \cap \Delta_s$ de donde se deduce el aserto.

LEMA 2. *Si* ω_1 ,..., ω_r *son elementos de* Ω *algebraicamente independientes sobre* Σ, *se verifica*

$$\Sigma(\omega_1 ,\dots, \omega_r) \cap \{\Delta(\omega_1 ,\dots, \omega_r)\}_s = (\Sigma \cap \Delta_s)(\omega_1 ,\dots, \omega_r) \qquad [6]$$

Demostración. Basta demostrar la proposición cuando es $r = 1$, ya que para $r > 1$ el aserto se deduce por recurrencia.

Sea ω un elemento de Ω trascendente sobre Σ, ζ un elemento de $\Sigma(\omega)$ algebraico y separable sobre $\Delta(\omega)$. Es suficiente demostrar que ζ pertenece a $(\Sigma \cap \Delta_s)(\omega)$.

Sean f y g elementos de $\Sigma[\omega]$, primos entre sí tales que $\zeta = fg^{-1}$; como ζ es algebraico sobre $\Delta(\omega)$, se verifica:

$$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} g + \dots + a_0 g^n = 0 \qquad [7]$$

en donde a_i, $i = 0, 1 ,\dots, n$, son elementos de $\Delta[\omega]$ primos entre sí y $a_n \neq 0$. De [7] se deduce que a_n es divisible por g, luego $a_n . \zeta \in \Sigma[\omega]$ y, en consecuencia, basta probar el aserto cuando es $g = 1$, es decir, cuando es $\zeta = \sigma_0 + \sigma_1 \omega + \dots + \sigma_k \omega^k$, $\sigma_j \in \Sigma$. Ahora bien, la relación [7] y la hipótesis de trascendencia de ω sobre Σ exigen:

$$a_{n0}\sigma_0^n + \dots + a_{00} = 0$$

siendo a_{i0} el término de a_i independiente de ω, y como no todos los a_{i0} son cero, σ_0 es algebraico sobre Δ; por consiguiente $(\zeta - \sigma_0)\omega^{-1}$, o sea, $\zeta_1 = \sigma_1 + \dots + \sigma_k \omega^{k-1}$ es algebraico sobre $\Delta(\omega)$, lo cual permite reiterar el procedimiento llegando a la conclusión de que σ_0, σ_1 ,..., σ_k son algebraicos sobre Δ. Si Δ es perfecto, la proposición está demostrada. Si Δ no es perfecto y p es su característica, existe un número entero no negativo m tal que la potencia p^m-ésima de $\zeta = \sigma_0 + \sigma_1 \omega + \dots + \sigma_k \omega^k$ pertenece a $(\Sigma \cap \Delta_s)[\omega]$, pero ζ es separable sobre $(\Sigma \cap \Delta_s)(\omega)$, luego ζ pertenece a $(\Sigma \cap \Delta_s)(\omega)$ y queda probado el aserto.

TEOREMA 3. *Si $\omega_1, \ldots, \omega_r$ son elementos de Ω algebraicamente independientes sobre Σ, Σ y $\{\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_r)\}_s$ son linealmente disjuntos sobre $\Sigma \cap \Delta_s$.*

Demostración. Aplicando a $\Sigma(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ y $\{\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_r)\}_s$ el teorema 2 resulta, teniendo en cuenta la relación [6], su disjunción lineal sobre $(\Sigma \cap \Delta_s)(\omega_1, \ldots, \omega_r)$; luego si $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$ son elementos de Σ linealmente dependientes sobre $\{\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_r)\}_s$ también lo son sobre $(\Sigma \cap \Delta_s)(\omega_1, \ldots, \omega_r)$; ahora bien, en virtud del teorema 1, Σ y $(\Sigma \cap \Delta_s)(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ son linealmente disjuntos sobre $\Sigma \cap \Delta_s$, luego $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$ son también linealmente dependientes sobre $\Sigma \cap \Delta_s$, y la proposición está demostrada.

LEMA 3. *Si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ son elementos de Ω tales que Σ y $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ sean linealmente disjuntos sobre Δ, las Σ-especializaciones del sistema $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ son sus Δ-especializaciones.* (*)

Demostración. Sea $(\omega'_1, \ldots, \omega'_n)$ una Δ-especialización de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Es suficiente probar que $(\omega'_1, \ldots, \omega')$ es Σ-especialización de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Sea f un polinomio del anillo $\Sigma[X_1 \ldots X_n]$ que posea el cero $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$ es un sistema maximal de elementos linealmente independientes sobre Δ, elegidos entre los coeficientes de f, se verifica:

$$f = \sigma_1 f_1 + \ldots + \sigma_h f_h$$

siendo f_j, $j = 1, \ldots, h$, polinomios del anillo $\Delta[X_1, \ldots, X_n]$. La disjunción lineal de Σ y $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ sobre Δ, exige que f_j, $j = 1, \ldots, h$, posea el cero $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, luego $(\omega'_1, \ldots, \omega'_n)$, que es Δ-especialización de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, es cero de cada uno de los polinomios f_j y por tanto es cero de f.

TEOREMA 4. *Sea $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ un sistema de elementos de Ω que posea sobre Σ y Δ el mismo grado de trascendencia r. Si Δ es separablemente cerrado en Σ, las Σ-especializaciones de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ son sus Δ-especializaciones.*

Demostración. A) Δ es perfecto. Si $r = 0$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ pertenecen a Δ_s; si $r > 0$, una proposición de v. d. WAERDEN (4), pág. 620 (LEMMA), asegura la existencia de r números naturales $j_k \leq n$ de modo que $\omega_1, \ldots, \omega_n$ pertenecen a $\{\Delta(\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_n})\}_s$; luego, según el teorema 3, Σ y $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ son linealmente disjuntos sobre Δ y el aserto se deduce del lema 3.

B) Si Δ no es perfecto y p es su característica, sea Δ_1 el cuerpo constituído por los elementos ξ de Ω tales que $\xi^{p^m} \in \Delta$, siendo m un número entero. Los cuerpos $\Sigma(\Delta_1)$ y Δ_1 satisfacen las hipótesis de nuestra proposición:

(*) Se dice que $(\omega_1, \ldots, \omega')$ es Δ-especialización de $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, si de $f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = 0$ se deduce $f(\omega'_1, \ldots, \omega') = 0$, siendo $f \in \Delta[X_1, \ldots, X_n]$.

a) $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *posee el grado de trascendencia r sobre cada uno de los cuerpos* Δ_1 *y* $\Sigma(\Delta_1)$

Pues Δ_1 y $\Sigma(\Delta_1)$ son extensiones algebraicas de Δ y Σ respectivamente.

b) Δ_1 *es algebraicamente cerrado en* $\Sigma(\Delta_1)$.

Si $\eta \in \Sigma(\Delta_1)$, existe un entero m tal que $\eta^{p^m} \in \Sigma$; luego, si η es algebraico sobre Δ_1, como por hipótesis es $\Sigma \cap \Delta_s = \Delta$, existe un entero m' tal que la potencia $p^{m'}$-ésima de η^{p^m} pertenece a Δ, y por consiguiente $\eta \in \Delta_1$.

El cuerpo Δ_1 contiene la raíz p-ésima de cada uno de sus elementos y en consecuencia es perfecto, luego de *A)* resulta, que las $\Sigma(\Delta_1)$-especializaciones de $(\omega_1, ..., \omega_n)$ son sus Δ_1-especializaciones y como éstas son las Δ-especializaciones de $(\omega_1, ..., \omega_n)$, (*), queda probado el aserto.

Consecuencia. *Si* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *es un sistema de elementos de* Ω *que posee sobre* Σ *y* Δ *el mismo grado de trascendencia, las* Σ*-especializaciones de* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *son sus* $(\Sigma \cap \Delta_s)$*-especializaciones.*

Pues $\Sigma \cap \Delta_s$ es separablemente cerrado en Σ.

Teorema 5. *Sea* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *un sistema de elementos de* Ω *que posea sobre* Σ *y* Δ *el mismo grado de trascendencia. Si* Δ *es separablemente cerrado en* $\Delta(\omega_1, ..., \omega_n)$, *las* Σ*-especializaciones de* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *son sus* Δ*-especializaciones.*

Demostración. Aplicando a $\Delta(\omega_1, ..., \omega_n)$ y Δ_s el teorema 2, se deduce su disjunción lineal sobre Δ, ya que por hipótesis es $\Delta(\omega_1, ..., \omega_n) \cap \Delta_s = \Delta$, luego $\Delta(\omega_1, ..., \omega_n)$ y $\Sigma \cap \Delta_s$ son linealmente disjuntos sobre Δ, lo cual implica, según el lema 3, que las Δ-especializaciones de $(\omega_1, ..., \omega_n)$ son sus $(\Sigma \cap \Delta_s)$-especializaciones, que en virtud de la consecuencia del teorema 4 coinciden con sus Δ-especializaciones.

II

Sea Δ un cuerpo conmutativo cualquiera, Ω un cuerpo algebraicamente cerrado extensión del Δ, tal que, para cada número natural m, posea m elementos algebraicamente independientes sobre Δ. Sea $A_n(\Omega)$ el espacio afín, sobre Ω, de n dimensiones.

Adoptando la terminología de B. L. van der Waerden, llamaremos «*variedad algebraica sobre* Δ *de* $A_n(\Omega)$», o simplemente «Δ*-variedad*

(*) Pues si $f \in \Delta_1[X_1, ..., X_n]$ existe una potencia q de p tal que $f^q \in \Delta[X_1, ..., X_n]$; luego, si $(\omega_1', ..., \omega_n')$ es Δ-especialización de $(\omega_1, ..., \omega_n)$, de $f(\omega_1, ..., \omega_n) = 0$ se deduce $[f(\omega_1', ..., \omega_n')]^q = 0$ y por tanto $f(\omega_1', ..., \omega_n') = 0$.

algebraica», a cada subconjunto de $A_n(\Omega)$ formado por los ceros comunes a un sistema de polinomios del anillo $\Delta[X_1,\ldots,X_n]$. Cada Δ-variedad algebraica V, es reunión finita de Δ-variedades algebraicas irreducibles, determinadas, que reciben el nombre de *Δ-componentes irreducibles* de V. Es propiedad característica de una Δ-variedad algebraica irreducible W, la de coincidir con el sistema de las Δ-especializaciones de un punto P, determinado salvo una isomorfia sobre Δ, denominado « *punto genérico de W con relación a Δ* ». Se llama *dimensión* de W a la de P sobre Δ, es decir, al grado de trascendencia, sobre Δ, del sistema constituído por las coordenadas de P. Si r es la dimensión de W y Σ es una *extensión de Δ*, (*), existe un punto genérico de W con relación a Δ de dimensión r sobre Σ. Se dice que W es *indivisible*, si W es irreducible respecto de cualquier *extensión de Δ*.

TEOREMA 1. *Las Σ-componentes irreducibles de una Δ-variedad algebraica V, son sus $(\Sigma \cap \Delta_s)$-componentes irreducibles.*

Demostración. Sean W_i, $i = 1,\ldots,k$, las $(\Sigma \cap \Delta_s)$-componentes irreducibles de V, d_i la dimensión de W_i y P_i un punto genérico de W_i respecto de $\Sigma \cap \Delta_s$ de dimension d_i sobre Σ. En virtud de la consecuencia del teorema 4 de I, las $(\Sigma \cap \Delta_s)$-especializaciones de P_i, son sus Σ-especializaciones, y, por consiguiente W_i es el lugar geométrico de las Σ-especializaciones de P_i, luego W_i es irreducible, considerada como Σ-variedad algebraica, de donde se deduce el aserto.

CONSECUENCIA 1. *Las Δ_s-componentes irreducibles de una Δ-variedad algebraica, son indivisibles.*

CONSECUENCIA 2. *Si $\omega_1,\ldots,\omega_r$ son elementos de Ω algebraicamente independientes sobre Δ, las $\Delta(\omega_1,\ldots,\omega_r)$-componentes irreducibles de una Δ-variedad algebraica, son sus Δ-componentes irreducibles.*

Pues siendo $\omega_1,\ldots,\omega_r$ algebraicamente independientes sobre Δ_s, del teorema 1 de I se deduce la disjunción lineal de Δ_s y $\Delta(\omega_1,\ldots,\omega_r)$ sobre Δ, y, en consecuencia, $\Delta(\omega_1,\ldots,\omega_r) \cap \Delta_s = \Delta$.

OBSERVACIÓN. 1. Si J_i es el ideal de $(\Sigma \cap \Delta_s)[X_1,\ldots,X_n]$ constituído por los polinomios que poseen el cero P_i, y si Δ_i es el cuerpo extensión del Δ obtenido por la adjunción de los coeficientes de una base

(*) Por convenio « *extensión de Δ* » equivale a « subcuerpo de Ω, extensión del Δ, tal que Ω posee m elementos algebraicamente independientes sobre él, para cada número natural m ».

de J_i, entonces W_i es Δ_i-componente irreducible de V; luego, las Σ-componentes irreducibles de V son sus Δ'-componentes irreducibles siendo $\Delta' = \Delta(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$; pero en virtud del *teorema de la base* (Hilbert), cada Δ_i y en consecuencia Δ' es una extensión finita de Δ; pero los generadores de Δ_i pertenecen a Δ_s, luego $\Delta' = \Delta(\alpha)$ con $\alpha \in \Delta_s$.

Teorema 2. *Si W es una Δ-variedad algebraica irreducible, cada Σ-componente irreducible de W tiene la misma dimensión que W.*

Demostración. En virtud de la observación que precede, podemos suponer $\Sigma = \Delta(\alpha)$ con $\alpha \in \Delta_s$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ los conjugados de α sobre Δ y β un elemento primitivo de la extensión $\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_h)$. Sea $P = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un punto genérico de W con relación a Δ, W_i una Σ-componente irreducible de W y P_i un punto genérico de W_i respecto de Σ; P_i es Δ-especialización de P, y como β es algebraico sobre Δ, existe una Δ-especialización de (β, P) de la forma (β_i, P_i), luego β_i es elemento conjugado del β sobre Δ, y, por consiguiente β y β_i se corresponden en una isomorfía sobre Δ, la cual es prolongable a una isomorfía

$$\Delta(\beta, \xi_1, \dots, \xi_n) \cong \Delta(\beta_i, \xi_1, \dots, \xi'_n) \qquad [8]$$

en donde ξ_j, ξ_j', $j = 1, \dots, n$, son pares de elementos homólogos.

De [8] se deduce: 1) *$(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$ es un punto genérico P' de W con relación a Δ* y 2) *(β, P) es Δ-especialización de (β_i, P').*

De la definición de (β_i, P_i) y de 2) se deduce que (β_i, P_i) es Δ-especialización de (β_i, P'), luego P_i es $\Delta(\beta_i)$-especialización de P'; pero $\Delta(\beta)$ es una extensión normal de Δ, por consiguiente $\beta_i \in \Delta(\beta)$, luego $\Delta(\beta_i) = \Delta(\beta)$ P_i es, pues, $\Delta(\beta)$-especialización de P', y a fortiori $\Delta(\alpha)$-especialización de P'; ahora bien, P_i es punto genérico de una $\Delta(\alpha)$-componente irreducible de W, luego P_i y P' tienen la misma dimensión sobre $\Delta(\alpha)$, que en virtud de 1) equivale a decir que W_i tienen la dimensión de W.

Teorema 3. *Sea W una Δ-variedad algebraica irreducible $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ un punto genérico de W con relación a Δ. La condición necesaria y suficiente para que W sea indivisible, es que Δ sea separablemente cerrado en $\Delta(\xi_1, \dots, \xi_n)$.*

Demostración. 1) *La condición es suficiente.* Sea Σ cualquier *extensión de Δ*; según el teorema 1, las Σ-componentes irreducibles de W son sus $(\Sigma \cap \Delta_s)$-componentes irreducibles. Ahora bien $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ tiene el mismo grado de trascendencia sobre Δ y $\Sigma \cap \Delta_s$, luego según el teorema 5 de I, las Δ-especializaciones de $(\xi_1, ..., \xi_n)$ son sus $(\Sigma \cap \Delta_s)$-especializaciones, y, por tanto W es irreducible respecto de $\Sigma \cap \Delta_s$, luego W es irreducible respecto de Σ.

2) *La condición es necesaria.* Sea α un elemento de $\Delta(\xi_1, ..., \xi_n) \cap \Delta_s$, α' un conjugado del α sobre Δ ; α y α' se corresponden en una isomorfia sobre Δ, que es prolongable a una isomorfia :

$$\Delta(\alpha, \xi_1, ..., \xi_n) \approx \Delta(\alpha', \xi_1', ..., \xi_n') \qquad [9]$$

siendo ξ_j, ξ_j', $j = 1, ..., n$, pares de elementos correspondientes; luego, $(\xi_1, ..., \xi')$ es punto genérico de W con relación a Δ, pero siendo W indivisible, $(\xi_1, ..., \xi_n)$ y $(\xi_1', ..., \xi')$ son puntos genéricos de W con relación a $\Delta(\alpha)$ y en consecuencia ξ_j, ξ_j' se corresponden en una isomorfia sobre $\Delta(\alpha)$

$$\Delta(\alpha, \xi_1, ..., \xi_n) \approx \Delta(\alpha, \xi_1', ..., \xi') \qquad [10]$$

α como elemento de $\Delta(\xi_1, ..., \xi_n)$, tiene el mismo homólogo en las isomorfias [9] y [10]; luego $\alpha = \alpha'$, y como $\alpha \in \Delta_s$ es $\alpha \in \Delta$.

Consecuencia 1. *Cada Δ-variedad algebraica racional es indivisible.*

Pues entonces es $\Delta(\xi_1, ..., \xi_n) = \Delta(\omega_1, ..., \omega_r)$ en donde $\omega_1, ..., \omega_r$ son elementos algebraicamente independientes sobre Δ, y la disjunción lineal de Δ_s y $\Delta(\omega_1, ..., \omega_r)$ sobre Δ exige :

$$\Delta(\xi_1, ..., \xi_n) \cap \Delta_s = \Delta.$$

Consecuencia 2. *Si W es una Δ-variedad algebraica indivisible, también es indivisible cada Δ-transformada racional de W.*

Pues si Δ es separablemente cerrado en $\Delta(\xi_1, ..., \xi_n)$ también lo es en cada subcuerpo del $\Delta(\xi_1, ..., \xi_n)$.

Teorema 4. *Sea W una Δ-variedad algebraica irreducible. Si $P^{(1)} = (\xi_1^{(1)}, ..., \xi_n^{(1)})$ es un punto genérico de W con relación a Δ, $\Delta^{(1)} = \Delta(\xi_1^{(1)}, ..., \xi_n^{(1)}) \cap \Delta_s$ es una extensión simple de Δ y existe correspondencia « uno a uno » entre los conjugados $\Delta^{(j)}$ de $\Delta^{(1)}$ sobre Δ y las componentes indivisibles de W. Si Σ es una extensión de Δ, la condición necesaria y suficiente para que las Σ-componentes irreducibles de W sean indivisibles, es que cada $\Delta^{(j)}$ pertenezca a Σ.*

Demostración. En virtud de la consecuencia 1 del teorema 1, y de la observación 1, se deduce que las componentes indivisibles de W son sus

$\Delta(\alpha)$-componentes irreducibles siendo α un elemento de Δ_s; $P^{(1)}$ es punto genérico de una de ellas $W^{(1)}$ con relación a $\Delta(\alpha)$, luego según el teorema 3 se verifica:

$$\Delta(\alpha) = \Delta(\alpha, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \cap \{\Delta(\alpha)\}_s = \Delta(\alpha, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \cap \Delta_s$$

en consecuencia $\Delta(\alpha) \supseteq \Delta^{(1)}$ y $\Delta^{(1)}$ es, pues, una extensión simple $\Delta(\beta^{(1)})$.

Si $\beta^{(j)}$ es elemento conjugado del $\beta^{(1)}$ sobre Δ, $\beta^{(1)}$ y $\beta^{(j)}$ se corresponden en una isomorfía sobre Δ que es prolongable a una isomorfía

$$\Delta(\beta^{(1)})(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \simeq \Delta(\beta^{(j)}, \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \qquad [11]$$

siendo $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$, pares de elementos homólogos, de la cual se deduce

$$\Delta(\beta^{(1)}) \simeq \Delta(\beta^{(j)}, \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \cap \Delta_s$$

que implica

$$\Delta(\beta^{(j)}, \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \cap \Delta_s = \Delta(\beta^{(j)}). \qquad [12]$$

De [11] se deduce que $P^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)})$ es punto genérico de W con relación a Δ, y, por consiguiente, $P^{(j)}$ es punto genérico de una $\Delta(\beta^{(j)})$-componente irreducible $W^{(j)}$ de W que según [12] es indivisible; además si $\Delta^{(1)} \neq \Delta^{(j)}$ es $W^{(1)} \neq W^{(j)}$ pues de no ser así $P^{(j)}$ sería punto genérico de $W^{(1)}$ respecto de $\Delta(\beta^{(1)})$, y por consiguiente $\xi_i^{(1)}$ y $\xi_i^{(j)}$, $i = 1, \ldots, n$ se corresponderían en una isomorfía sobre $\Delta(\beta^{(1)})$

$$\Delta(\beta^{(1)})(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \cong \Delta(\beta^{(1)})(\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \qquad [13]$$

y como $\beta^{(1)} \in \Delta(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)})$ los homólogos de $\beta^{(1)}$ en las isomorfías [11] y [13] coincidirían, o sea $\beta^{(1)} = \beta^{(j)}$. Sea $P^{(k)}$ un punto genérico de una componente indivisible $W^{(k)}$ de W; según el teorema 2, $P^{(k)}$ es punto genérico de W respecto de Δ, y, en consecuencia $\xi_i^{(1)}$ y $\xi_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, se corresponden en una isomorfía sobre Δ

$$\Delta(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \simeq \Delta(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$$

de la cual se deduce

$$\Delta(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \cap \Delta_s \simeq \Delta(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}) \cap \Delta_s \text{ o sea } \Delta(\beta^{(1)}) \simeq \Delta(\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}) \cap \Delta_s$$

luego $\Delta(\xi_1^{(k)},\dots,\xi_n^{(k)}) \cap \Delta_s$ es un cuerpo conjugado del $\Delta^{(1)}$ sobre Δ. Existe, pues, correspondencia « *uno a uno* » entre los cuerpos conjugados del $\Delta^{(1)}$ sobre Δ y las componentes indivisibles de W.

Sea Σ una *extensión de* Δ tal que las Σ-componentes irreducibles de W sean indivisibles. En virtud de la consecuencia 1 del teorema 1, podemos suponer $\Sigma \subseteqq \Delta_s$ luego $P^{(j)}$ es punto genérico de una de ellas respecto de Σ y según el teorema 3 tendremos:

$$\Sigma = \Sigma(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_n^{(j)}) \cap \Sigma_s = \Sigma(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_n^{(j)}) \cap \Delta_s$$

y por consiguiente

$$\Sigma \supseteqq \Delta(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_n^{(j)}) \cap \Delta_s = \Delta^{(j)}$$

luego Σ contiene a todos los conjugados de $\Delta^{(1)}$ sobre Δ. Sean $\beta^{(j)}$, $j = 1,\dots,h$, los elementos conjugados del $\beta^{(1)}$ sobre Δ; cada punto genérico $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ de W con relación a Δ, es punto genérico de una $\{\Delta(\xi_1,\dots,\xi_n) \cap \Delta_s\}$-componente irreducible de W que es indivisible; pero $\Delta(\xi_1,\dots,\xi_n) \cap \Delta_s$ es uno de los cuerpos conjugados $\Delta(\beta^{(k)})$ de $\Delta(\beta^{(1)})$ sobre Δ. Luego las $\Delta(\beta^{(1)},\dots,\beta^{(h)})$-componentes irreducibles de W son indivisibles así como las Σ-componentes irreducibles de W si Σ es una *extensión de* Δ que contiene a $\Delta(\beta^{(1)},\dots,\beta^{(h)})$.

OBSERVACIÓN 2. Una variedad algebraica $\mathbf{V}$ sobre Δ del espacio proyectivo de n dimensiones $P_n(\Omega)$ está definida mediante un sistema de formas (polinomios homogéneos) F_i del anillo $\Delta[X_0, X_1,\dots,X_n]$, las cuales definen también un cono C algebraico sobre Δ del espacio afín $A_{n+1}(\Omega)$ de vértice en el punto $(0, 0,\dots, 0)$. Se verifica:

a) De $\mathbf{V} \neq \mathbf{V}'$ *se deduce* $C \neq C'$, *y si* $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$ *es* $C_1 \cup C_2 = C$.

Basta tener en cuenta que los puntos de C distintos del $(0, 0,\dots, 0)$ son los representantes de los puntos de $\mathbf{V}$.

b) Si $\mathbf{V}$ *es irreducible también lo es* C, *y se verifica dim.* $C =$ $=$ *dim.* $V + 1$.

Si $\mathbf{V}$ es irreducible posee un punto $P = (\omega_0, \omega_1,\dots,\omega_n)$, de modo que si F es una forma de $\Delta[X_0, X_1,\dots,X_n]$ tal que $F(\omega_0,\dots,\omega_n) = 0$ también es $F(\omega_0', \omega_1',\dots,\omega_n') = 0$, para todo punto $P' = (\omega_0', \omega_1',\dots,\omega_n')$ de $\mathbf{V}$. Sea $(\omega_0^*, \omega_1^*,\dots,\omega_n^*)$ un representante normalizado de P, es decir, $\omega_i^* = 1$ para algún índice i, y sea t un elemento de Ω trascendente sobre $\Delta(\omega_0^*, \omega_1^*,\dots,\omega_n^*)$. El punto $(t\omega_0^*, t\omega_1^*,\dots,t\omega_n^*)$ es punto genérico de C con relación a Δ, pues si f es un polinomio de $\Delta[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ tal que $f(t\omega_0^*, t\omega_1^*, \ldots, t\omega_n^*) = 0$ tendremos,

$$f_m(\omega_0^*, \ldots, \omega_n^*) t^m + \ldots + f_0(\omega_0^*, \ldots, \omega_n^*) = 0 \qquad [14]$$

siendo f_k, $k = 0, 1, \ldots, m$ la parte homogénea de grado k de f; la hipótesis de trascendencia de t sobre $\Delta(\omega_0^*, \ldots, \omega_k^*)$ y la relación [14] exigen: $f_k(\omega_0^*, \ldots, \omega_n^*) = 0$, luego si $(\omega_0', \ldots, \omega_n')$ es un punto de C tendremos: $f_k(\omega_0', \ldots, \omega_n') = 0$, y en consecuencia $f(\omega_0, \omega_1', \ldots, \omega_n') = 0$. Además el grado de trascendencia de $\Delta(t\omega_0^*, t\omega_1^*, \ldots, t\omega_n^*)$, sobre Δ supera en una unidad al de $\Delta(\omega_0^*, \ldots, \omega_n^*)$ sobre Δ, pues $\Delta(t\omega_0^*, t\omega_1^*, \ldots, t\omega_n^*) = \Delta(t, \omega_0^*, \ldots, \omega_n^*)$.

c) Si Δ es separablemente cerrado en $\Delta(\omega_0^*, \ldots, \omega_n^*)$ también lo es en $\Delta(t\omega_0^*, t\omega_1^*, \ldots, t\omega_n^*)$.

En efecto:

$$\Delta(t, \omega_0^*, \ldots, \omega_n^*) \cap \Delta_s = \Delta(t, \omega_0^*, \ldots, \omega_n) \cap \{\Delta(\omega_0^*, \ldots, \omega_n^*)\}_s \cap \Delta_s$$

pero la disjunción lineal de $\{\Delta(\omega_0^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*)\}_s$ y $\Delta(t, \omega_0^*, \ldots, \omega_n^*)$ sobre $\Delta(\omega_0^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*)$, (teorema 1 de I), exige:

$$\Delta(t, \omega_0^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*) \cap \{\Delta(\omega_0^*, \omega_1^*, \ldots, \omega_n^*)\}_s = \Delta(\omega_0^*, \ldots, \omega_n^*)$$

luego

$$\Delta(t, \omega_0^*, \ldots, \omega_n^*) \cap \Delta_s = \Delta$$

como se quería demostrar.

De *a)*, *b)* y *c)* se deduce fácilmente que los teoremas 1, 2, 3 y 4 subsisten en el espacio proyectivo.

NOTA BIBLIOGRÁFICA

(1) W. V. D. HODGE y D. PEDOE. — *Methods of Algebraic Geometry*. Vol. II. Cambridge, 1952.

(2) S. V. KESHAVA HEGDE. — *The associated form of a variety over a field of prime characteristic*. Comment. Math. Helv. 30, 1956.

(3) B. L. VAN DER WAERDEN. — *Z. A. G.* X. Math. Ann. 113, 1937.

(4) B. L. VAN DER WAERDEN. — *Z. A. G.* XIV. Math. Ann. 115, 1938.

(5) B. L. VAN DER WAERDEN. — *Einführung in die Algebraische Geometrie*. Berlín, 1939.

(6) B. L. VAN DER WAERDEN. — *Moderne Algebra*, Berlín, 1937.

(7) A. WEIL. — *Foundations of Algebraic Geometry*, New York, 1946.

GRAFESA: Torres Amat, 9 — Barcelona   Depósito legal. B. 5254 - 1958