

UEBER HOMOLOGIEKLASSEN GEWISSE TOPOLOGISCHER LOESUNGEN

JOSEPH WEIER

Seien M eine dreidimensionale und N eine zweidimensionale orientierbare zusammenhängende geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, $a_1 = a_2$ Punkte aus N und f eine simpliziale Abbildung von M in N . Für $i = 1, 2$ bestehe $f^{-1}(a_i)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden geschlossenen Streckenzügen $A_{i1}, A_{i2}, \dots$. Sei x_{ik} die unten definierte « natürliche Orientierung » von A_{ik} . Es mögen x_{ij} und x_{ik} zur gleichen « Klasse » gehören, wenn eine in M gelegene Kurve $(c_\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ mit $c_0 \in A_{ij}$ und $c_1 \in A_{ik}$ existiert derart, dass die geschlossene Kurve $(f(c_\tau), 0 \leq \tau \leq 1)$ innerhalb N nullhomolog ist. Sind $y_1, y_2, \dots$ gewisse der $x_{i1}, x_{i2}, \dots$ und bilden die y_k eine Klasse, so heisse $\sum y_k$ ein « Lösungszyklus » von (f, a_i) . Seien

$$z_{i1}, z_{i2}, \dots$$

die Lösungszyklen von (f, a_i) .

Befindet sich unter den Zyklen z_{1k} keiner, der bezüglich M berandet, so habe f den « Verschlingungstyp » Null. Sonst seien

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots$$

diejenigen der Zyklen $z_{11}, z_{12}, \dots$, die beranden. Es bezeichne B die Menge aller ganzen Zahlen β derart, dass eine in M gelegene endliche ganzzahlige 2-Kette w existiert mit $\dot{w} = \sum \zeta_k$ und der Eigenschaft: die Schnittzahl von $(w, \sum z_{2k})$ ist gleich β . Dann heisse B der « Verschlingungstyp » der Abbildung f . Im allgemeinen ist B eine einzige Zahl. Es gilt das folgende.

THEOREM. *Der Verschlingungstyp ist eine Homotopieinvariante.*

Wenn M und N Sphären, so bilden die $x_{i1}, x_{i2}, \dots$ für $i = 1, 2$ eine einzige Klasse X_i , und es berandet X_1 bezüglich M . Der Verschlingungstyp ist hier gleich der Hopfschen Invariante.

Bemerkt sei noch, dass die Ueberlegungen dieser Arbeit *mutatis mutandis für alle Dimensionspaare* $(2n-1, n)$ richtig sind. Die obige Voraussetzung, dass $n = 2$, dient nur dem Zweck, das folgende Beweisverfahren abzukürzen.

1. UEBER GEWISSE UMFORMUNGEN UND ABWANDLUNGEN

Die obigen Lösungszyklen sind als Homologieklassen definiert. Es erhebt sich die Frage, ob sich die Lösungszyklen, indem man sich an eine klassische Definition (vgl. [4]) anlehnt, auch als Homotopieklassen erklären lassen und ob der diesen letzteren Klassen entsprechende Verschlingungstyp gleichfalls deformationsinvariant ist. Diese Frage ist zum Beispiel für projektive Räume, die reell, komplex oder quaternionial sind, zu bejahen. Im reellen und komplexen Falle lässt sich das übliche Verfahren, dem Sphären zugrunde liegen, ohne weiteres so ergänzen, dass es die in Rede stehenden Fälle einschliesst. Im quaternionalen Falle gelangt man, die speziellen Struktureigenschaften dieser Räume (vgl. [1]) ausnutzend und diesen Eigenschaften das bekannte Sphärenverfahren anpassend, zu einem Beweis.

Von Interesse ist auch die Frage, welche Gestalt die weiterhin behandelten Verschlingungseigenschaften stetiger Transformationen gewinnen, bedient man sich der Co-Terminologie. Hier sei zunächst an Verschlingungszahlen in [3] erinnert, wo bereits gewisse Cozyklen in die Definitionen eingehen. Wie man überhaupt Schnitt- und Verschlingungseigenschaften in einer eleganten Co-Ausdrucksweise formulieren kann, entnimmt man [2].

In einer $(2n + 1)$ — dimensionalen Mannigfaltigkeit besitzt jede n -dimensionale Homologieklassse endlicher Ordnung eine sogenannte Eigenverschlingungszahl. «Der Wertevorrat möglicher Eigenverschlingungszahlen von 1-Ketten einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist eine topologische Invariante, die unter Umständen noch da Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden gestattet, wo das stärkste uns bisher bekannte Unterscheidungsmerkmal, die Fundamentalgruppe, versagt» (vgl. [5]). Dennoch dienen die in der vorliegenden Arbeit definierten Verschlingungstypen weniger dem Zwecke, Abbildungen zu klassifizieren, als dem Ziel, Bedingungen für die Existenz von Lösungen gewisser Gleichungssysteme zu gewinnen.

Die Integraldarstellungen des Brouwerschen Grades, denen man in [7] als Integraldarstellungen der Hopfschen Invariante wieder begeg-

net, lassen sich auch auf den hier behandelten Fall ausdehnen. Schon um ihrer präzisen Gestalt willen sind solche Darstellungen höchst interessant.

2. VERSCHLINGUNGSTYPEN STETIGER TRANSFORMATIONEN

Seien P, Q orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten mit $\dim P - \dim Q = 1$, a ein Punkt aus Q , f eine stetige Abbildung von P in Q und $A = f^{-1}(a)$ ein endliches eindimensionales Polyeder. Zwei Punkte p, p' aus A mögen zur gleichen Klasse gehören, wenn in P eine p mit p' verbindende Kurve $(c_\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ existiert von der Beschaffenheit, dass $(f(c_\tau), 0 \leq \tau \leq 1)$ in Q nullhomolog ist. Dadurch zerfällt A in endlich viele paarweis zueinander fremde Klassen $A_1, A_2, \dots$. Hierauf seien K eine simpliziale Zerlegung von A , K_i die von K in A induzierte Orientierung und $x_{ik}, k = 1, 2, \dots$, die mit einer Orientierung versehenen 1-Simplexe von K_i , ferner α_{ik} der Grad (vgl. [6]) von x_{ik} bei (f, a) . Dann ist $\sum_k \alpha_{ik} x_{ik}$ ein ganzzahliger Zyklus z_i (vgl. [6]). Wir nennen z_i einen « *Lösungszyklus* » von (f, a) . Die Zyklen

$$z_1, z_2, \dots$$

bilden ein « *vollständiges System von Lösungszyklen* » von (f, a) . Jene z_i , die innerhalb P beranden, bilden ein « *vollständiges System berandender Lösungszyklen* » von (f, a) .

Wenn K eine simpliziale Zerlegung von P , L eine simpliziale Zerlegung von Q , a ein Punkt aus einem n -Simplex von L und φ eine simpliziale Abbildung von K auf L , so besteht $\varphi^{-1}(a)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden doppelpunktfreien geschlossenen Streckenzügen $S_1, S_2, \dots$. Man überlegt sich leicht: sind S_i^* eine Orientierung von S_i und σ_i der Grad von S_i^* bei (φ, a) , so ist $|\sigma_i| = 1$. Als « *natürliche Orientierung* » von S_i bezüglich (φ, a) wollen wir diejenige bezeichnen, die bei (φ, a) den Grad 1 hat. Ist γ irgendeine simpliziale Abbildung von P in Q , besteht $\gamma^{-1}(a)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden doppelpunktfreien geschlossenen Streckenzügen $T_1, T_2, \dots$ und bezeichnen T_i^* eine Orientierung von T_i und τ_i den Grad von T_i^* bei (γ, a) , so ist $|\tau_i| \leq 1$. Im allgemeinen befinden sich also unter den T_i auch solche mit $\tau_i = 0$. In der Einleitung wird angenommen, ohne dass dies dort ausdrücklich erwähnt ist, es sei f von der Art der Abbildung φ .

Sind M eine orientierbare dreidimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, weiter z, z' zueinander fremde in M gelegene endliche ganzzahlige eindimensionale Zyklen und berandet z in bezug auf M nicht,

so wollen wir sagen, der « Verschlingungstyp » von (z, z') bezüglich M sei Null. Gibt es in M eine endliche ganzzahlige zweidimensionale Kette y mit $\dot{y} = z$, so heiße die Schnitzzahl von (y, z') eine « Verschlingungszahl » von (z, z') bezüglich M . Besitzt das geordnete Zyklenspaar (z, z') eine Verschlingungszahl $\neq 0$ bezüglich M , so heiße z ein mit z' bezüglich M « verschlungener » Zyklus. Die Menge aller Verschlingungszahlen von (z, z') bezüglich M bezeichnen wir im folgenden mit $\Omega(z, z')$ und nennen sie auch den « Verschlingungstyp » von (z, z') bezüglich M . Im allgemeinen ist $\Omega(z, z')$ eine einzige Zahl.

Nunmehr mögen M eine dreidimensionale und N eine zweidimensionale zusammenhängende orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit bezeichnen. Es seien $a \neq b$ Punkte aus N , f eine stetige Abbildung von M in N und die Menge $f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Wenn die letztere Dimension < 1 , so sei der « Verschlingungstyp » von (f, a, b) Null. Ebenso sei der Verschlingungstyp von (f, a, b) Null, wenn (f, a) keinen berandenden Lösungszyklus besitzt. Sonst seien

$$z_1^a, z_2^a, \dots$$

ein vollständiges System berandender Lösungszyklen von (f, a) und $z_1^b, z_2^b, \dots$ ein vollständiges System von Lösungszyklen von (f, b) . Hier heiße der bezüglich M gebildete Verschlingungstyp von $(\sum z_i^a, \sum z_i^b)$, den wir oben mit $\Omega(\sum z_i^a, \sum z_i^b)$ bezeichnet haben, der « Verschlingungstyp » von (f, a, b) . Wir bezeichnen diesen letzteren Verschlingungstyp auch mit $\Omega(f, a, b)$, so dass also $\Omega(f, a, b) = \Omega(\sum z_i^a, \sum z_i^b)$. Dass $\Omega(f, a, b)$ in Wirklichkeit nur von f , jedoch nicht von a und b abhängt, zeigt sich im letzten Abschnitt.

3. HILFSSÄTZE

Für diesen Abschnitt bedeuten n eine natürliche Zahl, P eine $(n+1)$ -dimensionale und Q eine n -dimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit. Die weiterhin auftretenden Simplexe sind offen und gradlinig. Endliche Polyeder sind aus endlich vielen solcher Simplexe zusammengesetzt. Wenn S ein Simplex und t eine eindeutige simpliziale Abbildung von $\bar{S}$ in einen Euklidischen Raum, so heiße $t(S)$ eine Zelle. Sind a, b Punkte aus dem gleichen Euklidischen Raum, so ist $d(a, b)$ ihr Abstand.

Seien a ein Punkt aus Q und $(f^t, 0 \leq t \leq 1)$ eine Homotopie von P in Q , weiter $f^{-\tau}(a)$ für alle Zahlen τ ein endliches Polyeder A^τ einer Dimension ≤ 1 , ferner $(t^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie simplizialer Abbildungen

von A^0 in Q , f^0 die Identität, f^τ für $\tau < 1$ eine eindeutige Abbildung von A^0 auf A^τ und $f^1(A^0) \subset A^1$. Dann heiße (f^τ, a) , $0 \leq \tau \leq 1$ eine «Zylinderhomotopie» und $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Zylinderhomotopie bezüglich a .

LEMMA 1. Seien U eine in P offene Menge, a ein Punkt aus Q , ε eine positive Zahl und f eine stetige Abbildung von $\bar{U}$ in Q mit $a \in f(\bar{U} - U)$. Dann existiert eine stetige Abbildung f' von $\bar{U}$ in Q mit $d(f, f') < \varepsilon$, $f|_{\bar{U} - U} = f'|_{\bar{U} - U}$ und der weiteren Eigenschaft: die Menge $f^{-1}(a)$ ist ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 .

Beweis. Es existieren eine positive Zahl ζ , eine in U offene Menge V mit $\bar{V} \subset U$ und eine n -Zelle S in Q , so dass $a \cup f(\bar{V}) \subset S$ und $d(a, f(\bar{U} - V)) > \zeta$. Alsdann bedeute P_1 ein in U gelegenes endliches Polyeder, so dass, wenn W das Innere von P_1 bezüglich P bedeutet, $\bar{V} \subset W$ und $\bar{W} \subset U$. Man kann weiterhin annehmen, es sei S ein Simplex.

Wegen $\dim P - \dim Q = 1$ gibt es weiter eine simpliziale Abbildung g von P_1 in S mit $d(f|_{P_1}, g) < \min(\varepsilon, \zeta)$ und der Eigenschaft, dass $g^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.

Mit $x(p) = d(p, V) / (d(p, V) + d(p, \bar{W} - W))$ kann man dann $f'(p) = x(p)f(p) + (1 - x(p))g(p)$ für $p \in P_1$ setzen. In allen übrigen Punkten sei $f'(p) = f(p)$.

LEMMA 2. Seien a ein Punkt aus Q , $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 2)$ eine Homotopie von P in Q , U eine in P offene Menge, $f^{-1}(a) \subset U$ und δ, ε positive Zahlen < 1 . Dann gibt es eine Homotopie $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 2)$ von P in Q derart, dass $f^\tau = g^\tau$ für $|1 - \tau| \geq \delta$, $f^\tau(p) = g^\tau(p)$ für $p \in U$ und alle τ , $d(f^\tau, g^\tau) < \varepsilon$ für alle τ und dass $g^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 .

Beweis. Es gibt eine n -Zelle S mit $a \in S \subset Q$ und eine in U offene Menge V mit $f^{-1}(a) \subset V$ und $f(V) \subset S$. Man kann fürs folgende S als Simplex voraussetzen. Nach Lemma 1 existiert eine stetige Abbildung g^1 von P in Q , so dass $f^1(p) = g^1(p)$ für $p \in V$, $g^1(\bar{V}) \subset S$, $d(f^1, g^1) < \varepsilon/2$ und $g^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 ist.

Nun bezeichne ζ eine Zahl mit $0 < \zeta < \delta$ derart, dass $d(f^\tau(p), f^1(p)) < \varepsilon/2$ für alle (p, τ) mit $p \in \bar{V}$ und $|1 - \tau| \leq \zeta$. In allen (p, τ) der vorgenannten Art sei alsdann

$$\begin{aligned} \gamma^\sigma(p) &= f^{(1-\tau)\sigma + \tau}(p) \quad \text{für } 0 \leq \sigma \leq 1, \\ \gamma^\sigma(p) &= (2 - \sigma)f^1(p) + (\sigma - 1)g^1(p) \quad \text{für } 1 \leq \sigma \leq 2. \end{aligned}$$

Für alle (p, τ) , so dass $p \in V$ oder $|1 - \tau| \geq \zeta$, sei $g^\tau(p) = f^\tau(p)$. In den verbleibenden (p, τ) mit $p \in V$ und $0 < |1 - \tau| < \zeta$ kann man $g^\tau(p) = \gamma^{\xi(p)}(p)$ setzen, wobei $\xi(p)$ eine gewisse Zahl zwischen 0 und 2 bedeutet.

LEMMA 3. Seien E der n -dimensionale Euklidische Raum, a ein Punkt aus E , U eine in P offene Menge, $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie von P in E , weiter

$$f^{-\tau}(a) \subset U \text{ für alle } \tau$$

und $(f^i)^{-1}(a)$ für $i = 0, 1$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Dann gibt es eine Homotopie $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von P in E und Zahlen $0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_m = 1$ mit den Eigenschaften: aus $f^\tau(p) \neq g^\tau(p)$ folgt $p \notin U$ und $0 < \tau < 1$, für alle i ist $((g^\tau, a), \zeta_i \leq \tau \leq \zeta_{i+1})$ eine Zylinderhomotopie.

Beweis. Es bedeute V eine in U offene Menge, so dass $\bar{V}$ ein endliches Polyeder $\subset U$ und $f^{-\tau}(a) \subset V$ für alle τ . Dann setzen wir zunächst $g^\tau(p) = f^\tau(p)$ in allen (p, τ) , für die nicht gleichzeitig $p \notin V$ und $0 < \tau < 1$.

Man überlegt sich leicht: wenn A ein endliches $(n+2)$ -dimensionales Polyeder, B ein in A gelegenes $(n+1)$ -dimensionales Polyeder, φ eine stetige Abbildung von B in E und $\varphi^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 , so gibt es eine stetige Fortsetzung φ' von φ über A derart, dass $\varphi'^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 2 ist.

Ist dann W die Menge aller (p, τ) mit $p \in V$ und $0 < \tau < 1$, so existiert eine stetige Abbildung γ von $\bar{W}$ in E derart, dass $\gamma(p, \tau) = f^\tau(p)$ für alle $(p, \tau) \in \bar{W} - W$ und $\gamma^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder C einer Dimension ≤ 2 ist. Bedeute K eine simpliziale Zerlegung von C .

Durch eine kleine Verschiebung von γ , die γ auf $\bar{W} - W$ unverändert lässt, kann man eine Abbildung γ' von $\bar{W}$ in E gewinnen, so dass, wenn C' das Polyeder $\gamma'^{-1}(a)$ und K' eine simpliziale Zerlegung von C' bedeuten, jedes 2-Simplex S aus K' die Eigenschaft hat: es gibt Punkte (p_1, τ_1) und (p_2, τ_2) in S mit $\tau_1 \neq \tau_2$.

Bedeutet also $X(\tau)$ die Menge aller Punkte (p, τ) aus W mit $p \in V$, so ist $\gamma'^{-1}(a) \cap X(\tau)$ ein endliches Polyeder C^τ einer Dimension ≤ 1 . Und es gibt Zahlen $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_r = 1$ derart, dass die C^τ innerhalb eines jeden offenen Intervalles (ξ_i, ξ_{i+1}) untereinander homöomorph sind. Alsdann kann man $g^\tau(p) = \gamma'(p, \tau)$ in allen (p, τ) mit $p \in V$ und $0 < \tau < 1$ setzen. Sei $\zeta_{2i} = \xi_i$, $\zeta_{2i+1} = (\xi_i + \xi_{i+1})/2$ und $m = 2r$.

LEMMA 4. Seien U eine in P offene Menge, $(a^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von τ stetig abhängende Punkte aus Q , weiter f eine stetige Abbildung von $\bar{U}$ in Q und $a^\tau \in f(\bar{U} - U)$ für alle τ . Die Menge $f^{-1}(a^0 \cup a^1)$ sei ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Dann existieren eine Homotopie $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von $\bar{U}$ in Q und Zahlen $0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_m = 1$, die die Eigenschaften haben: aus $f(p) \neq g^\tau(p)$ folgt $p \notin U$ und $0 < \tau < 1$, für alle i ist $((g^\tau, a^\tau), \zeta_i \leq \tau \leq \zeta_{i+1})$ eine Zylinderhomotopie.

Beweis. Es existieren Zahlen $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_r = 1$, zu jedem ξ_i eine in U offene Menge U_i und eine n -Zelle V_i in Q derart, dass

$$f^{-1}(a^\tau) \subset U_i \text{ für } \xi_i \leq \tau \leq \xi_{i+1} \text{ und } f(\bar{U}_i) \subset V_i.$$

Wegen Lemma 2 gibt es dann weiter eine Homotopie $(\varphi^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von $\bar{U}$ in Q , die die Eigenschaften hat: aus $f(p) = \varphi^\tau(p)$ folgt $p \in U$ und $0 < \tau < 1$, weiter $\varphi^{-\tau}(a^\tau) \subset U_i$ und $\varphi^\tau(\bar{U}_i) \subset V_i$ für $\xi_i \leq \tau \leq \xi_{i+1}$, jede der Mengen $\varphi^{-\xi_i}(a^{\xi_i})$ ist ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 .

Offenbar bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn man annimmt, V_i sei ein Simplex und es gelte $a^\tau = a^{\xi_i}$ für $\xi_i \leq \tau \leq \xi_{i+1}$. Alsdann führt eine Anwendung von Lemma 3 den Beweis zu Ende.

4. INVARIANZ DES VERSCHLINGUNGSTYPUS BEI FESTEN BEZUGSPUNKTEN

Bis zum Ende dieses Abschnittes mögen M eine dreidimensionale und N eine zweidimensionale zusammenhängende orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit und $a \neq b$ feste Punkte aus N bedeuten. Der Begriff einer Zylinderhomotopie ist im letzten Abschnitt erklärt.

In [6] wird nachgewiesen, dass der Verschlingungstyp gegenüber Zylinderhomotopien invariant ist, näherhin ist dort gezeigt:

THEOREM 1. Sei $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie von M in N , die sowohl bezüglich a wie bezüglich b eine Zylinderhomotopie ist. Dann ist der Verschlingungstyp von (f^0, a, b) gleich dem von (f^1, a, b) .

Zum Nachweis der Invarianz des Verschlingungstyps gegenüber beliebigen Deformationen genügt es daher zu zeigen:

THEOREM 2. Sind f, f' homotope Abbildungen von M in N und $f^{-1}(a \cup b) \cup f'^{-1}(a \cup b)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 , so existieren eine f in f' überführende Homotopie $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ und Zahlen $0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_m = 1$, die die Eigenschaft haben: für alle i ist $(f^\tau, \zeta_i \leq \tau \leq \zeta_{i+1})$ eine Zylinderhomotopie sowohl bezüglich a wie bezüglich b .

Beweis. Es existieren Zahlen $0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_m = 1$, zwei n -Zellen V^a, V^b in N und zu jeder Zahl ζ_i zwei in M offene zueinander fremde Mengen U^a, U^b derart, dass $a \in V^a, b \in V^b$ und

$$f^{-\tau}(a) \subset U^a, f^{-\tau}(b) \subset U^b, f^\tau(\bar{U}^a) \subset V^a, f^\tau(\bar{U}^b) \subset V^b$$

für $\zeta_i \leq \tau \leq \zeta_{i+1}$. Wegen Lemma 2 kann man annehmen, es sei jede der Mengen $f^{-\zeta_i}(a \cup b)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Alsdann folgt Theorem 2 aus Lemma 3.

Damit ist nachgewiesen:

THEOREM 3. Sind f, f' homotope Abbildungen von M in N und $f^{-1}(a \cup b) \cup f'^{-1}(a \cup b)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 , so ist der Verschlingungstyp von (f, a, b) gleich dem von (f', a, b) .

5. UNABHÄNGIGKEIT DES VERSCHLINGUNGSTYPUS VON DEN BEZUGSPUNKTEN

Die Bedeutung von M und N sei die gleiche wie im letzten Abschnitt. Die hier nachgewiesene Unabhängigkeit des Verschlingungstyps von den Bezugspunkten beseitigt auch eine Unsymmetrie in der obigen Definition des Verschlingungstyps. Sind $a \neq b$ Punkte aus N , f eine stetige Abbildung von M in N und $f^{-1}(a \cup b)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 , weiter $z_1^a, z_2^a, \dots$ ein vollständiges System berandender Lösungszyklen von (f, a) und $z_1^b, z_2^b, \dots$ ein vollständiges System von Lösungszyklen von (f, b) , so hatten wir ja $\Omega(f, a, b) = \Omega(\sum z_i^a, \sum z_i^b)$ definiert. Offenbar ist diese Erklärung bezüglich der Punkte a und b formal unsymmetrisch: Während für a nur die berandenden Lösungszyklen herangezogen werden, gehen für b sämtliche Lösungszyklen in die Definition ein.

Durch die Ueberlegungen dieses Abschnittes wird aber nachgewiesen, dass $\Omega(f, a, b) = \Omega(f, b, a)$. Sind $\zeta_1^b, \zeta_2^b, \dots$ ein vollständiges System berandender Lösungszyklen von (f, b) und wäre oben $\Omega(f, a, b)$ als $\Omega(\sum z_i^a, \sum \zeta_i^b)$ definiert, so hätte von Anfang eine symmetrische Erklärung des Verschlingungstyps vorgelegen. Und auch dieser letztere Verschlingungstyp fiel bei sphärischem M und N mit der Hopfschen Invariante zusammen. Doch ist im allgemeinen die Anzahl der z_i^b grösser als, die der ζ_i^b , es kann daher der Fall eintreten: z_i^a ist mit z_k^b bezüglich M für wenigstens ein (i, k) verschlungen, doch gibt es kein (i, k) von der Beschaffenheit, dass z_i^a mit ζ_k^b verschlungen wäre. In gewissem Sinne ist also $\Omega(\sum z_i^a, \sum z_i^b)$ schärfer als $\Omega(\sum z_i^a, \sum \zeta_i^b)$.

Seien $(f_i^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, 2$, Homotopien von M in N , für alle τ die Menge A^τ aller Punkte p aus M mit $f_1^\tau(p) = f_2^\tau(p)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 und $(t^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie simplizialer Abbildungen von M in N , t^0 die Identität, t^τ für $\tau < 1$ eine eindeutige Abbildung von A^0 auf A^τ , schliesslich $t^1(A^0) \subset A^1$. Dann heisse

$\{(f_1^\tau, f_2^\tau)\}$ eine « Zylinderhomotopie ». Wenn $f_2^\tau(M)$ ein Punkt a^τ aus N , so schreiben wir statt (f_1^τ, f_2^τ) auch (f_1^τ, a^τ) .

Eine elementare Modifikation von Theorem 1 ist

THEOREM 4. Seien b ein Punkt aus N , $(a^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von τ stetig abhängende Punkte aus $N - b$, weiter $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie von M in N , ferner $((f^\tau, a^\tau), 0 \leq \tau \leq 1)$ und $((f^\tau, b), 0 \leq \tau \leq 1)$ Zylinderhomotopien. Dann ist der Verschlingungstyp von (f, a^0, b) gleich dem von (f, a^1, b) , also $\Omega(f, a^0, b) = \Omega(f, a^1, b)$.

Auf Lemma 4 wollen wir zurückführen :

THEOREM 5. Seien b ein Punkt aus N und a, a' Punkte aus $N - b$, weiter f eine stetige Abbildung von M in N und $f^{-1}(a \cup a' \cup b)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Dann existieren von τ stetig abhängende Punkte $(a^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ aus $N - b$ mit $a^0 = a$ und $a^1 = a'$, weiter eine Homotopie $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von M in N und Zahlen $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = 1$ mit den Eigenschaften: $g^0 = g^1 = f$, für alle i sind $((g^\tau, a^\tau), \xi_i \leq \tau \leq \xi_{i+1})$ und $((g^\tau, b), \xi_i \leq \tau \leq \xi_{i+1})$ Zylinderhomotopien.

Beweis. Sind $\{a^\tau\}$ von τ stetig abhängende Punkte aus $N - b$ mit $a^0 = a$ und $a^1 = a'$, so gibt es eine in M offene Menge U derart, dass

$$f^{-1}(a^\tau) \subset U \text{ für alle } \tau \text{ und } \bar{U} \cap f^{-1}(b) = \emptyset.$$

Setzt man noch $\varphi = f|_{\bar{U}}$, so existieren nach Lemma 4 Zahlen $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m = 1$ und eine Homotopie $\{\gamma^\tau\}$ von $\bar{U}$ in N mit den Eigenschaften: $\gamma^i = \varphi$ für $i = 0, 1$, $\gamma^\tau|_{\bar{U} - U} = \varphi|_{\bar{U} - U}$ für alle τ , für alle i ist $((\gamma^\tau, a^\tau), \xi_i \leq \tau \leq \xi_{i+1})$ eine Zylinderhomotopie. Hierauf kann man $g^\tau|_{\bar{U}} = \gamma^\tau$ und $\gamma^\tau|_{M - U} = f|_{M - U}$ für alle τ setzen.

Aus den beiden letzten Theoremen folgt :

THEOREM 6. Seien b ein Punkt aus N und a, a' Punkte aus $N - b$, weiter f eine stetige Abbildung von M in N und $f^{-1}(a \cup a' \cup b)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Dann ist $\Omega(f, a, b) = \Omega(f, a', b)$.

Wie Theorem 6 beweist man :

THEOREM 7. Seien a ein Punkt aus N und b, b' Punkte aus $N - a$, weiter f eine stetige Abbildung von M in N und $f^{-1}(a \cup b \cup b')$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Dann ist $\Omega(f, a, b) = \Omega(f, a, b')$.

Aus den beiden letzten Sätzen ergibt sich wie folgt, dass der Verschlingungstyp von den zugrundegelegten Bezugspunkten unabhängig ist.

THEOREM 8. Seien $a \neq b$ Punkte aus N , ebenso $a' \neq b'$ Punkte aus N , weiter f, f' homotope Abbildungen von M in N und $f^{-1}(a \cup b) \cup$

$f'^{-1}(a' \cup b')$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 . Dann ist $\Omega(f, a, b) = \Omega(f', a', b')$. Unabhängig von den Bezugspunkten ist also der Verschlingungstyp eine Homotopie invariante.

Beweis. Wie man sich leicht überlegt, gibt es Punkte a^* und b^* in N derart, dass die Punkte a, b, a^*, b^* paarweis verschieden und dass auch die Punkte a', b', a^*, b^* paarweis verschieden sind.

Nach Lemma 1 gibt es eine zu f homotope Abbildung f^* von M in N , so dass $f^{*-1}(p)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 für jeden der Punkte $p = a, b, a', b', a^*, b^*$.

Wendet man hierauf die Theoreme 4, 6 und 7 an und zwar in der Reihenfolge 4, 6, 7, 6, 7, 4, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}\Omega(f, a, b) &= \Omega(f^*, a, b) = \Omega(f^*, a^*, b) = \Omega(f^*, a^*, b^*) = \Omega(f^*, a', b^*) = \\ &= \Omega(f^*, a', b') = \Omega(f', a', b').\end{aligned}$$

Es sind also die Verschlingungstypen von (f, a, b) und (f', a', b') einander gleich.

L I T E R A T U R

- [1] N. BOURBAKI. — *Topologie générale, Chap. VI (espaces numériques et espaces projectifs)*. — Act. Sci. et Industrielles 1029. Paris (1947).
- [2] H. HOPF. — *Die Coinzidenz-Cozyklen und eine Formel aus der Fasertheorie*, in: R. H. FOX, D. C. SPENCER, A. W. TUCKER. — *Algebraic Geometry and Topology*. — Princeton Math. Series 12 (1957), 263-279.
- [3] S. LEFSCHETZ. — *Algebraic Topology*. — Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 27 (1942), 124 und 228.
- [4] J. NIELSEN. — *Untersuchungen zur Topologie geschlossener zweiseitiger Flächen II*. — Acta math. 53 (1929), 1-76.
- [5] H. SEIFERT, W. THRELFALL. — *Lehrbuch der Topologie*. — Leipzig (1934), 279.
- [6] J. WEIER. — *Ueber eine Verschlingungsinvariante*. — Collectanea Math. Barcelona 10 — (1958), 45-58.
- [7] J. H. C. WHITEHEAD. — *An expression of Hopfs invariant as an integral*. — Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 33 (1947).