UEBER EINE VERSCHLINGUNGSINVARIANTE

JOSEPH WEIER

Es bezeichne P eine dreidimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, und es seien z, z' zueinander fremde in P gelegene endliche ganzzahlige eindimensionale Zyklen. Der Zyklus z berande inbezug auf P und die ganzen Zahlen. Bezeichnet dann y eine in P gelegene endliche ganzzahlige zweidimensionale Kette mit

$$\dot{y} = z,$$

so heisse die Schnittzahl von y und z' eine bezüglich P gebildete «*Verschlingungszahl*» von z und z'. Existiert bezüglich P eine von Null verschiedene Verschlingungszahl von z und z', so wollen wir sagen, z und z' seien miteinander « *verschlungen* ». Wenn P eine Sphäre, so haben z und z nur eine Verschlingungszahl.

Seien nunmehr P zusammenhängend und orientierbar, Q eine zweidimensionale zusammenhängende orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit, $a + b$ Punkte aus Q und $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ endlich viele paarweis zueinander fremde doppelpunktfreie geschlossene Streckenzüge aus P, ferner f eine stetige Abbildung von P in Q mit

$$f^{-1}(a) = \cup A_i \quad \text{und} \quad f^{-1}(b) = \cup B_i.$$

Weiter seien y_i eine Orientierung von B_i und β_i der unten definierte Grad von y_i bei f.

Die A_i mögen wie folgt zu Klassen zusammengefasst werden. Es seien A_j, A_k, zwei nicht notwendig verschiedene der A_i und $(c_\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine in P gelegene Kurve mit $c_0 \varepsilon A_j$ und $c_1 \varepsilon A_k$, ferner

$$(f(c_\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1)$$

innerhalb Q nullhomolog. Dann gehören A_j und A_k zur gleichen Klasse.

Sind $A_1', A_2', \ldots$ gewisse der A_i und bilden die A_i' eine Klasse, so seien x_i eine Orientierung von A_i', α_i der Grad von A_i' bei f, und es heisse $\Sigma\, \alpha_i x_i$ eine «*Lösungszyklus*» von (f, a).

Wenn kein Lösungszyklus von (f, a) existiert, der bezüglich P berandet, so heisse f eine «*unverschlungene*» Abbildung. Hierauf mögen

$$z_1, z_2, \dots$$

die bezüglich P berandenden Lösungszyklen von (f, a) bedeuten. Alsdann heisse f eine «unverschlungene» oder «*verschlungene*» Abbildung, je nachdem die beiden Zyklen

$$\Sigma z_i \quad \text{und} \quad \Sigma \beta_i y_i$$

miteinander verschlungen sind oder nicht.

Offenbar ist die Abbildung f, sind P und Q Sphären, dann und nur dann verschlungen, *wenn ihre Hopfsche Zahl von Null verschieden ist.*

Im folgenden wollen wir zeigen:

Alle Abbildungen aus der gleichen Homotopieklasse von P in Q sind verschlungen, oder es sind alle Abbildungen dieser Klasse unverschlungen.

Bekanntlich ist die Hopfsche Invariante ursprünglich (vergleiche [3] und [4]) für Abbildungen von $(2n - 1)$-Sphären in n-Sphären definiert. Es liegen somit zunächst zwei Probleme nahe: Verallgemeinerung dieser Invariante auf Abbildungen von m-Sphären in n-Sphären bei beliebigem m und n, Verallgemeinerung auf Abbildungen von $(2n - 1)$-Mannigfaltigkeiten in n-Mannigfaltigkeiten. Das zweite Problem wird in der vorliegenden Arbeit in Angriff genommen. Zum ersten Problem liegt bereits eine verzweigte Literatur vor, die hier zu ordnen nicht unsere Aufgabe sein kann. Hingewiesen sei lediglich auf einige ganz bekannte Arbeiten. In [5] hat G. W. Whitehead einen Homomorphismus

$$\alpha : \pi_r(S^n) \to \pi_r(S^{2n-1})$$

für alle r, n mit $r < 3n - 3$ definiert, der sich als Verallgemeinerung der Hopfschen Zahl erweist. Die Ungleichung $r < 3n - 3$ kann durch die schärfere $r \leq 3n - 3$ ersetzt werden, wie A. L. Blakers und W. S. Massey gezeigt haben. In [2] hat P. J. Hilton einen Homomorphismus $\beta : \pi_r(S^n) \to \pi_{r+1}(S^{2n})$ für alle r, n erklärt. Wenn F die Freudenthalsche Einhängung von $\pi_r(S^{2n-1})$ in $\pi_{r+1}(S^{2n})$ bedeutet, so gilt $\beta = F\alpha$ für alle (r, n), in denen α definiert. Die Abbildung F, die hier in die Theorie der Hopfschen Invariante eintritt, wird zum Beispiel in [1] ausführlich behandelt.

1. Vollständige Systeme von Lösungszyklen

Sind P, Q geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten mit $\dim P - \dim Q = 1$, weiter $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ und $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ Homotopien stetiger Abbildungen von P in Q, ferner für alle τ die Menge A^τ der Punkte $p \varepsilon P$ mit $f^\tau(p) = g^\tau(p)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1, schliesslich $(t^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie simplizialer Abbildungen von A^0 in P, t^0 die Identität, t^τ für $\tau < 1$ eine eineindeutige Abbildung von A^0 auf A^τ und $t^1(A^0) \subset A^1$, so heisse $H = ((f^\tau, g^\tau), 0 \leq \tau \leq 1)$ eine « *Zylinderhomotopie* » von P in Q.

Die Bedeutung von M, N und λ, die bis zum Schluss fest bleibe, ist folgende. Es sind M, N orientierbare zusammenhängende geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = (\dim N) + 1 > 1$. Für jedes Paar eindeutiger Abbildungen f, g einer Menge A in eine Menge B ist $\lambda(f, g)$ die Menge aller Punkte p aus A mit $f(p) = g(p)$. Weiterhin sind Simplexe offen und gradlinig. Wenn S ein solches Simplex und h eine eineindeutige simpliziale Abbildung von $\ddot{S}$ in einen Euklidischen Raum, so heisse $h(S)$ Zelle.

Seien nun f, g stetige Abbildungen von M in N und $\lambda(f, g)$ ein endliches Polyeder A einer Dimension ≤ 1, ferner a, a' Punkte aus A und $(b^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine in M gelegene Kurve mit $b^0 = a$ und $b^1 = a'$ derart, dass

$$(f(b^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\ ;\quad g(b^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0)$$

innerhalb N nullhomolog ist. Dann mögen a und a' zur gleichen « *geometrischen Lösungsklasse* » von (f, g) gehören. Da A nur endlich viele Komponenten hat und jede Komponente von A innerhalb einer einzigen geometrischen Lösungsklasse von (f, g) liegt, ist die Anzahl der vorgenannten Klassen endlich.

Die Bedeutung von f, g sei die gleiche wie im letzten Absatz. Weiter sei A eine geometrische Lösungsklasse von (f, g). Wenn A nulldimensional, so sei jede « zu A gehörige algebraische Lösungsklasse » von (f, g) gleich Null. Sonst seien K eine simpliziale Zerlegung von A, B_i die 1-Simplexe von K, b_i eine Orientierung von B_i und β_i der unten definierte Grad von b_i bezüglich (f, g). Dann heisse $\Sigma \beta_i b_i$ eine « *zu* (A, f, g) *gehörige algebraische Lösungsklasse* ». In meiner Arbeit : « Zur Topologie dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten », Monatshefte für Mathematik

62 (1958), 163-172, habe ich bewiesen, dass *jede algebraische Lösungsklasse ein ganzzahliger Zyklus* ist. Wir bezeichnen deshalb $\Sigma \beta_i b_i$ auch als einen « *zu* (A, f, g) *gehörigen Zyklus* » oder als einen « *Lösungszyklus* » von (f, g). Ein solcher Lösungszyklus heisse berandend, wenn er inbezug auf M berandet. Sind

$$A_1, A_2, \ldots$$

die geometrischen Lösungsklassen von (f, g) und z_i für alle i ein zu (A_i, f, g) gehörender Zyklus, so heisse das System

$$z_1, z_2, \ldots$$

ein « *vollständiges System von Lösungszyklen* » von (f, g). Dieses System ist also bis auf Unterteilungen eindeutig bestimmt. Sind z_i' die berandenden z_i, so mögen die

$$z_1', z_2', \ldots$$

ein « *vollständiges System berandender Lösungszyklen* » von (f, g) heissen. Lösungszyklen von (f, g), die zur gleichen geometrischen Lösungsklasse von (f, g) gehören, bezeichnen wir als « *äquivalent* ». Ist z ein Lösungszyklus von (f, g), so bedeutet im folgenden $E(z)$ *die Menge aller zu* z *äquivalenten Lösungszyklen von* (f, g). Man bestätigt leicht: sind z_1, z_2 äquivalente Lösungszyklen von (f, g), so gibt es einen Lösungszyklus z von (f, g), der gemeinsame Unterteilung von z_1 und z_2 ist.

Es erübrigt uns noch eine Erklärung des Grades, wie er oben benutzt wird. Hierzu seien n eine natürliche Zahl, S ein $(n+1)$-Simplex, T ein n-Simplex, S^* eine Orientierung von S, T^* eine Orientierung von T, A ein in S gelegenes 1-Simplex, q ein Punkt aus A, B ein n-Simplex mit $q \in B \subset S$ und $\bar{A} \cap \bar{B} = q$, ferner A^* eine Orientierung von A und B^* eine solche Orientierung von B, dass S^* durch (A^*, B^*) bestimmt wird. Ueberdies seien B' die von B^* in $\bar{B} - B$ und T' die von T^* in $\bar{T} - T$ induzierte Orientierung. Sind dann f, g stetige Abbildungen von $\bar{S}$ in $\bar{T}$ mit $\lambda(f, g) = \bar{A}$ und $h(p)$ für alle Punkte p aus $\bar{B} - B$ die Projektion von $f(p)$ auf $\bar{T} - T$ aus $g(p)$, so heisse der Grad der Abbildung $h: B' \to T'$ auch der « *Grad* » von A^* bezüglich (S^*, T^*, f, g).

Wenn hiernach f, g stetige Abbildungen von M in N, $\lambda(f, g)$ ein endliches Polyeder P einer Dimension ≤ 1, A ein in P gelegenes und dort offenes 1-Simplex, A^* eine Orientierung von A und der Grad von A^* bei (f, g) in Rede steht, so ist dies näherhin so gemeint: für alle Abschnitte dieser Arbeit liegen feste Orientierungen M^*, N^* von M, N zugrunde, und es ist der Grad bezüglich (f, g) genauer der Grad bezüglich $M^*, N^*, f, g)$.

Ist $H = ((f^\tau, g^\tau), 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Zylinderhomotopie von M in N und bezeichnet A^τ das Polyeder $\lambda(f^\tau, g^\tau)$, so existiert eine Homotopie $(t^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, simplizialer Abbildungen von A^0 in M derart, dass t^0 die Identität, t^τ für $\tau < 1$ eine eineindeutige Abbildung von A^0 auf A^τ und $t^1(A^0) \subset A^1$. Wir bezeichnen $(t^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ auch als eine «*zu H gehörige λ-Homotopie*».

Theorem 1. *Sind $H = \{(f^\tau, g^\tau)\}$ eine Zylinderhomotopie von M in N, $\{t^\tau\}$ eine zu H gehörende λ-Homotopie, A eine geometrische Lösungsklasse von (f^0, g^0) und A' das Polyeder $t^1(A)$, so gibt es eine A' enthaltende geometrische Lösungsklasse von (f^1, g^1).*

Beweis. Wenn $a' \neq b'$ Punkte aus A', so gibt es Punkte $a \neq b$ in A derart, dass $t^1(a) = a'$ und $t^1(b) = b'$. Für alle τ sei $a^\tau = t^\tau(a)$ und $b^\tau = t^\tau(b)$.

Da a und b zur gleichen geometrischen Lösungsklasse von (f^0, g^0) gehören, existiert eine in M gelegene Kurve $(c^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ mit $c^0 = a$ und $c^1 = b$ derart, dass die geschlossene Kurve $(f^0(c^\tau), 0 \leq \tau \leq 1$; $g^0(c^\tau), 1 \geq \tau \geq 0)$ innerhalb N nullhomolog ist.

Zum Nachweis, dass a' und b' zur gleichen geometrischen Lösungsklasse von (f^1, g^1) gehören und also A' in einer geometrischen Lösungsklasse von (f^1, g^1) liegt, genügt es zu zeigen, dass die geschlossene Kurve

$$(f^1(a^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;\ f^1(c^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ f^1(b^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;$$
$$g^1(b^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;\ g^1(c^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;\ g^1(a^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1)$$

innerhalb N nullhomolog ist.

Nun lässt sich offenbar die letztere Kurve innerhalb N in die geschlossene Kurve

$$(f^\tau(a^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;\ f^0(c^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ f^\tau(b^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;$$
$$g^\tau(b^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;\ g^0(c^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;\ g^\tau(a^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1)$$

deformieren. Die so gewonnene Kurve kann man in die Form

$$(f^0(c^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ f^\tau(b^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ g^\tau(b^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;$$
$$g^0(c^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0\,;\ g^\tau(a^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ f^\tau(a^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0)$$

umschreiben. Aus dieser Form fallen aber die beiden Teile

$$(f^\tau(b^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ \ g^\tau(b^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0)$$

und

$$(g^\tau(a^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ \ f^\tau(a^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0)$$

heraus, da $f^\tau(a^\tau) = g^\tau(a^\tau)$ und $f^\tau(b^\tau) = g^\tau(b^\tau)$ für alle τ. Man gelangt also wieder zu der geschlossenen Kurve $(f^0(c^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1\,;\ g^0(c^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0)$, die ja innerhalb N nullhomolog ist.

Theorem 2. *Sind $H = \{(f^\tau,\ g^\tau)\}$ eine Zylinderhomotopie von M in N, ferner $\{t_1^\tau\}$ und $\{t_2^\tau\}$ zu H gehörige λ-Homotopien, A eine geometrische Lösungsklasse von $(f^0,\ g^0)$ und B_i die das Polyeder $t_i^1(A)$ enthaltende geometrische Lösungsklasse von $(f^1,\ g^1)$, so gilt $B_1 = B_2$.*

Beweis. Es genügt nachzuweisen, dass $t_1^1(A) = t_2^1(A)$. Hierzu bezeichne α die obere Grenze aller Zahlen $\beta \geq 0$ mit der Eigenschaft: für $0 \leq \tau \leq \beta$ ist $t_1^\tau(A) = t_2^\tau(A)$. Aus Stetigkeitsgründen ist dann $t_1^\alpha(A) = t_2^\alpha(A)$. Die Annahme, es sei $\alpha < 1$, führt wie folgt auf einen Widerspruch. Zunächst zwei einfache Bemerkungen.

(1) Für alle $\tau < 1$ und $i = 0{,}1$ ist $t_i^\tau(A)$ eine geometrische Lösungsklasse von $(f^\tau,\ g^\tau)$.

(2) Es gibt eine positive Zahl ε, so dass für alle τ gilt: wenn A', A'' geometrische Lösungsklassen von (f^τ, g^τ) mit $d(A', A'') < \varepsilon$, so ist $A' = A''$.

Bedeutet hierauf β eine Zahl mit $\alpha < \beta < 1$ und hinreichend kleinem $\beta - \alpha$, so ist $d(t_1^\tau(A),\ t_2^\tau(A)) < \varepsilon$ für alle $\alpha \leq \tau \leq \beta$. Sei γ eine feste Zahl mit $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. Dann ist $t_1^\gamma(A)$ und ebenso $t_2^\gamma(A)$ nach (1) eine geometrische Lösungsklasse von $(f^\gamma,\ g^\gamma)$. Wegen (2) ist $t_1^\gamma(A) = t_2^\gamma(A)$. Somit gilt $t_1^\tau(A) = t_2^\tau(A)$ für $0 \leq \tau \leq \beta$ im Widerspruch zur Erklärung von α. Theorem 2 ist also richtig.

Seien $H = \{(f^\tau,\ g^\tau)\}$ eine Zylinderhomotopie von M in N, $\{t^\tau\}$ eine zu H gehörige λ-Homotopie, A eine Lösungsklasse von $(f^0,\ g^0)$, weiter A' das Polyeder $t^1(A)$ und A^1 die A' enthaltende Lösungsklasse von $(f^1,\ g^1)$. Dann bezeichnen wir A^1 als «*die A zugeordnete Lösungsklasse*» von $(f^1,\ g^1)$.

Nach Theorem 2 ist die Erklärung der zugeordneten geometrischen Lösungsklasse eindeutig.

Sind z ein Lösungszyklus von $(f^0,\ g^0)$, A die z entsprechende geometrische Lösungsklasse von $(f^0,\ g^0)$, weiter A' die A zugeordnete geometrische Lösungsklasse von $(f^1,\ g^1)$ und z' ein zu $(A',\ f^1,\ g^1)$ gehörender Lösungszyklus, so bezeichnen wir z' als «*einen z zugeordneten Lösungs-*

zyklus » von (f^1, g^1). Den vorstehenden Definitionen zufolge ist *die Menge aller* z *zugeordneten Lösungszyklen von* (f^1, g^1) *gleich der Menge aller mit* z' *äquivalenten Lösungszyklen von* (f^1, g^1).

2. Deformation der Lösungszyklen

Die Bedeutung von M, N, λ und E ist schon im ersten Abschnitt erklärt. Danach gilt unter anderem folgendes. Wenn f, g stetige Abbildungen von M in N, so bedeutet $\lambda(f, g)$ die Menge aller Punkte p aus M mit $f(p) = g(p)$. Seien $\lambda(f, g)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1 und A eine geometrische Lösungsklasse von (f, g). Wenn dann z ein zu (A, f, g) gehörender Lösungszykluss, so bezeichnet $E(z)$ die Menge aller zu (A, f, g) gehörigen Lösungszyklen.

Bis zum Ende dieses Abschnittes bedeute $H = ((f^\tau, g^\tau), 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Zylinderhomotopie von M in N.

Theorem 3. *Seien* $A^0 \neq B^0$ *geometrische Lösungsklassen von* (f^0, g^0), *ferner* A^1 *die* A^0 *sowie* B^1 *die* B^0 *zugeordnete geometrische Lösungsklasse von* (f^1, g^1). *Dann ist* $A^1 \neq B^1$.

Beweis. Bezeichnet $(t^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine zu H gehörige λ-Homotopie, so führt die Annahme, es existiere eine Lösungsklasse C von (f^1, g^1) mit $t^1(A^0) \cup t^1(B^0) \subset C$, wie folgt auf einen Widerspruch.

Wenn a ein Punkt aus A^0, b ein Punkt aus B^0 und $a^\tau = t^\tau(a)$ sowie $b^\tau = t^\tau(b)$, so ist $f^\tau(a^\tau) = g^\tau(a^\tau)$ und $f^\tau(b^\tau) = g^\tau(b^\tau)$ für alle τ, $a^1 \varepsilon C$ und $b^1 \varepsilon C$. Da a^1 und b^1 in der gleichen Lösungsklasse von (f^1, g^1) liegen, gibt es eine in M gelegene Kurve $(d^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ mit $d^0 = a^1$ und $d^1 = b^1$ derart, dass die geschlossene Kurve $(f^1(d^\tau), 0 \leq \tau \leq 1; g^1(d^\tau), 1 \geq \tau \geq 0)$ innerhalb N nullhomolog ist. Wir betrachten nun die a und b innerhalb M verbindende Kurve $(a^\tau, 0 \leq \tau \leq 1; d^\tau, 0 \leq \tau \leq 1; b^\tau, 1 \geq \tau \geq 0)$. Sei $e^\tau = a^\tau$ für $0 \leq \tau \leq 1$, $e^\tau = d^{\tau-1}$ für $1 \leq \tau \leq 2$ und $e^\tau = b^{3-\tau}$ für $2 \leq \tau \leq 3$.

Dann ist $(f^0(e^\tau), 0 \leq \tau \leq 3; g^0(e^\tau), 3 \geq \tau \geq 0)$ innerhalb N nullhomolog, wie wir zeigen wollen: Zunächst kann man $(f^0(a^\tau), 0 \leq \tau \leq 1; f^0(d^\tau), 0 \leq \tau \leq 1; f^0(b^\tau), 1 \geq \tau \geq 0; g^0(b^\tau), 0 \leq \tau \leq 1; g^0(d^\tau), 1 \geq \tau \geq 0; g^0(a^\tau), 1 \geq \tau \geq 0)$ innerhalb N in

$$(f^\tau(a^\tau), 0 \leq \tau \leq 1; \quad f^1(d^\tau), 0 \leq \tau \leq 1; \quad f^\tau(b^\tau), 1 \geq \tau \geq 0;$$
$$g^\tau(b^\tau), 0 \leq \tau \leq 1; \quad g^1(d^\tau), 1 \geq \tau \geq 0; \quad g^\tau(a^\tau), 1 \geq \tau \geq 0)$$

deformieren. Die letztere Kurve ist gleich $(f^1(d^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1;\ f^\tau(b^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0;\ g^\tau(b^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1;\ g^1(d^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0;\ g^\tau(a^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0;\ f^\tau(a^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1)$. Von hier gelangt man, da $f^\tau(a^\tau) = g^\tau(a^\tau)$ und $f^\tau(b^\tau) = g^\tau(b^\tau)$ für alle τ, wie im Beweis von Theorem 1 zu der nullhomologen Kurve $(f^1(d^\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1;\ g^1(d^\tau),\ 1 \geq \tau \geq 0)$. Es liegen mithin a und b in der gleichen geometrischen Lösungsklasse im Widerspruch zur Voraussetzung.

THEOREM 4. *Sind y^0, z^0 Lösungszyklen von (f^0, g^0) mit $E(y^0) \neq E(z^0)$, ferner y^1 ein y^0 und z^1 ein z^0 zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1), so ist $E(y^1) \neq E(z^1)$.*

Beweis. Bezeichnet A^i die zu y^i und B^i die zu z^i gehörige geometrische Lösungsklasse von (f^i, g^i), so ist $A^0 \neq B^0$ wegen $E(y^0) \neq E(z^0)$, nach Theorem 3 daher $A^1 \neq B^1$, folglich $E(y^1) \neq E(z^1)$, wie behauptet.

THEOREM 5. *Seien $\{t^\tau\}$ eine zu H gehörende λ-Homotopie, A^i für $i = 0{,}1$ das Polyeder $\lambda(f^i, g^i)$, ferner B ein in A^1 offenes 1-Simplex mit*

$$B \subset A^1 - t^1(A^0)$$

und b eine Orientierung von B. Dann ist der Grad von b bei (f^1, g^1) Null.

Beweis. Sind q ein Punkt aus B, weiter ζ eine Zahl mit $0 < \zeta < 1$ und hinreichend kleinem $1 - \zeta$, ferner S eine hinreichend kleine n-Zelle mit $q \in S \subset M$ und $\bar{S} \cap A^1 = q$, so gibt es eine in N gelegene n-Zelle T derart, dass

$$\bar{S} \cap \lambda(f^\tau, g^\tau) = 0 \quad \text{für } \zeta \leq \tau < 1, \quad f^\tau(S) \cup g^\tau(S) \subset T \quad \text{für } \zeta \leq \tau \leq 1.$$

Das folgt leicht daraus, dass $q \,\bar{\in}\, \lambda(f^\tau, g^\tau) = t^\tau(A^0)$ für $\zeta \leq \tau < 1$, $q \,\bar{\in}\, t^1(A^0)$ und $f^1(q) = g^1(q)$.

Man kann weiterhin annehmen, es seien S und T Simplexe. Für alle (p, τ) mit $p \in \bar{S} - S$ und $\zeta \leq \tau \leq 1$ sei $h^\tau(p)$ die Projektion von $f^\tau(p)$ auf $\bar{T} - T$ aus $g^\tau(p)$. Dann ist die Abbildung $h^\zeta\colon \bar{S} - S \to \bar{T} - T$ unwesentlich, da $f^\zeta(p) \neq g^\zeta(p)$ in allen Punkten p aus $\bar{S}$. Mithin ist auch h^1 unwesentlich.

THEOREM 6. *Seien $z_1, z_2, \ldots$ ein vollständiges System von Lösungszyklen von (f^0, g^0) und z ein Lösungszyklus von (f^1, g^1), ferner z_i' ein z_i zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1). Es sei*

$$E(z) \neq E(z_i') \text{ für alle } i.$$

Dann sind sämtliche Koeffizienten von z Null.

Beweis. Es bezeichne B die durch z bestimmte geometrische Lösungsklasse von (f^1, g^1). Sei $A^i = \lambda(f^i, g^i)$. Existierte ein Punkt a in A^0 mit $t^1(a) \varepsilon B$, so wäre, wenn C die a enthaltende geometrische Lösungsklasse von (f^0, g^0) bedeutet, B die C zugeordnete geometrische Lösungsklasse von (f^1, g^1). Also existierte ein z_i mit $E(z_i') = E(z)$. Das ist aber nicht der Fall. Mithin $B \subset A^1 - t^1(A^0)$. Alsdann folgt Theorem 6 aus Theorem 5.

Theorem 7. *Seien $\{t^\tau\}$ eine zu H gehörige λ-Homotopie, K eine simpliziale Zerlegung von $\lambda(f^0, g^0)$, L eine simpliziale Zerlegung von $\lambda(f^1, g^1)$ und t^1 eine simpliziale Abbildung von K in L. Weiter seien B ein 1-Simplex aus L, A_i die durch t^1 in B abgebildeten 1-Simplexe von K, x_i eine Orientierung von A_i, y eine Orientierung von B, ferner α_i der Grad von x_i bei (f^0, g^0) und β der Grad von y bei (f^1, g^1). Dann gilt $\Sigma \alpha_i \varepsilon_i = \beta$, wobei ε_i gleich 1 oder -1, je nachdem $t(x_i)$ und y gleich orientiert sind oder nicht.*

Beweis. Man kann annehmen, x_i sei jene Orientierung von A_i, die durch t^1 in y überführt wird. Bezeichnet nämlich x_i' die zu x_i entgegengesetzte Orientierung und α_i' den Grad von x_i' bezüglich (f^0, g^0), so ist $\alpha_i = -\alpha_i'$.

Sei q ein Punkt aus B. Dann kann man weiterhin voraussetzen, es existiere in M ein $(n+1)$-Simplex $\ni q$ und in N ein n-Simplex $\ni f^1(q) = g^1(q)$. Hierauf gibt es n-Simplexe S und T mit

$$q \varepsilon S \subset M, \quad \bar{S} \cap \lambda(f^1, g^1) = q, \quad f^1(\bar{S}) \cup g^1(\bar{S}) \subset T.$$

Bezeichnet nunmehr ζ eine Zahl mit $0 < \zeta < 1$ und hinreichend kleinem $1 - \zeta$, so besteht $S \cap t^\tau(A_i)$ für alle (i, τ) mit $\zeta \leq \tau < 1$ aus einem Punkte a_i^τ und die Menge $\bar{S} \cap \lambda(f^\tau, g^\tau)$ aus den paarweis verschiedenen Punkten $a_1^\tau, a_2^\tau, \ldots$.

Hierauf seien $S_1, S_2, \ldots$ paarweis zueinander fremde n-Simplexe mit $a_i^\zeta \varepsilon S_i \subset S$, weiter S^* eine Orientierung von S und T^* eine solche von T. Es mögen S' die von S^* in $\bar{S} - S$, T' die von T^* in $\bar{T} - T$ und S_i' die von S^* in $\bar{S}_i - S_i$ induzierte Orientierung bezeichnen. Ferner seien $h_i(p)$ für $p \varepsilon \bar{S}_i - S_i$ die Projektion von $f^\zeta(p)$ auf $\bar{T} - T$ aus $g^\zeta(p)$ und $h^\tau(p)$ für $p \varepsilon \bar{S} - S$ die Projektion von $f^\tau(p)$ auf $\bar{T} - T$ aus $g^\tau(p)$. Der Grad der Abbildung $h^\tau : S' \to T'$ heisse γ^τ, der Grad der Abbildung $h_i : S_i' \to T'$ heisse γ_i. Dann ist $\Sigma \gamma_i = \gamma^\zeta$ und $\gamma^\zeta = \gamma^1$, also $\Sigma \gamma_i = \gamma^1$. Aus der letzten Gleichung erhält man Theorem 7, indem man auf eine obige Erklärung des Grades zurückgeht.

Lemma. *Seien A^0, A^1 endliche eindimensionale Polyeder, K^i eine simpliziale Zerlegung von A^i und f eine stückweis affine Abbildung von A^0 in A^1. Dann existiert eine simpliziale Unterteilung L^i von K^i, so dass f eine simpliziale Abbildung von L^0 in L^1 ist.*

Beweis. Zunächst gibt es eine simpliziale Unterteilung $K^{0\prime}$ von K^0, so dass f auf jedem Simplex von $K^{0\prime}$ affin ist. Diejenigen Eckpunkte von $K^{0\prime}$, deren Bild bei f nicht Eckpunkt von K^1 ist, mögen a_1, a_2, ... heissen. Dann entsteht L^1 aus K^1, indem man K^1 durch die Eckpunkte $f(a_i)$ ergänzt. Mit einem jeden 1-Simplex S aus $K^{0\prime}$ verfahren wir wie folgt: Wenn $f(S)$ ein Simplex aus L^1, so bleibe S unverändert. Sonst seien b_1, b_2, ... die in $f(S)$ gelegenen Eckpunkte von L^1. Dann fügen wir die Punkte $f^{-1}(b_i)$ den Eckpunkten von $K^{0\prime}$ hinzu und gelangen auf diese Weise zum Komplex L^0.

Theorem 8. *Sind z^0 ein Lösungszyklus von (f^0, g^0), z^1 ein z^0 zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1) und $\{t^\tau\}$ eine zu H gehörige λ-Homotopie, so existieren eine simpliziale Zerlegung y^0 von z^0 und eine simpliziale Zerlegung y^1 von z^1 mit $t^1(y^0) = y^1$.*

Beweis. Für $i = 0,1$ bezeichne A^i die zu z^i gehörige geometrische Lösungsklasse und K^i die durch z^i bestimmte simpliziale Zerlegung von A^i. Dann ist $t^1(A^0) \subset A^1$. Dem obigen Lemma zufolge gibt es eine simpliziale Unterteilung L^i von K^i derart, dass $t^1 | A^0$ eine simpliziale Abbildung von L^0 in L^1 darstellt. Hierauf sei y^i eine zu L^i gehörender Lösungszyklus von (f^i, g^i).

Es bezeichne B die Menge aller Punkte p aus $\lambda(f^0, g^0)$, die durch t^1 in A^1 abgebildet werden. Aus $t^1(A^0) \subset A^1$ und Theorem 3 folgt, dass $A^0 = B$. Seien hierauf C_i die in $t^1(A^0)$ gelegenen 1-Simplexe aus L^1, c_i eine Orientierung von C_i und γ_i der Grad von c_i bezüglich (f^1, g^1). Nach Theorem 7 ist dann $t^1(y^0) = \Sigma \gamma_i c_i$.

Sind D_i die in $A^1 - t^1(A^0)$ gelegenen 1-Simplexe von L^1, d_i eine Orientierung von D_i und δ_i der Grad von d_i bezüglich (f^1, g^1), so ist Theorem 5 zufolge $\delta_i = 0$ für alle i. Andererseits ist $y^1 = \Sigma \gamma_i c_i + \Sigma \delta_i d_i$, mithin $y^1 = t^1(y^0)$, wie behauptet.

Theorem 9. *Seien z_1, z_2, ... ein vollständiges System berandender Lösungszyklen von (f^0, g^0) und z ein berandender Lösungszyklus von (f^1, g^1), ferner z_i' ein z_i zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1). Es sei*

$$E(z) \neq E(z_i') \text{ für alle } i.$$

Dann sind sämtliche Koeffizienten in z Null.

Beweis. Sind w ein Lösungszyklus von (f^0, g^0) und z ein w zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1), so berandet w : Denn nach Theorem 8 existieren eine zu H gehörige λ-Homotopie $\{t^\tau\}$, eine simpliziale Zerlegung w' von w und eine simpliziale Zerlegung z' von z derart, dass $t^1(w') = z'$. Homotope Zyklen sind erst recht homolog, also ist $w' \sim z'$. Andererseits sind w und w', ebenso z und z' homolog.

Nun gibt es nach Voraussetzung keinen berandenden Lösungszyklus x von (f^0, g^0) derart, dass z ein x zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1) wäre. Mithin : sind y ein Lösungszyklus von (f^0, g^0) und y' ein y zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1), so ist $E(z) \neq E(y')$. Alsdann folgt Theorem 9 aus Theorem 6.

3. Eine Verschlingungsinvariante bei Zylinderhomotopien

Für diesen Abschnitt sei M dreidimensional und also N zweidimensional.

Sind z, z' zueinander fremde endliche ganzzahlige eindimensionale Zyklen in M und $z \sim 0$ bezüglich M, so bezeichne A die Menge aller ganzen Zahlen α mit der Eigenschaft : es existiert eine in M gelegene endliche ganzzahlige zweidimensional Kette y derart, dass $\dot{y} = z$ und dass die Schnittzahl von (y, z') gleich α ist. Wir werden A weiterhin den « *Verschlingungstyp* » von (z, z') bezüglich M nennen. *Im allgemeinen ist A eine einzige Zahl.*

Wenn f, f' stetige Abbildungen von M in N und $f'(M)$ ein Punkt a aus N, so bezeichnen wir das Abbildungspaar (f, f') auch mit (f, a). Sei $f^{-1}(a)$ ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1. Nach den Definitionen des ersten Abschnittes ist alsdann auch erklärt, was unter einem « *vollständigen Systeme (berandender) Lösungszyklen* » von (f, a) zu verstehen ist.

Seien a ein Punkt aus N und $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie stetiger Abbildungen von M in N, ferner $(f^\tau)^{-1}(a)$ für alle Zahlen τ ein endliches Polyeder A^τ einer Dimension ≤ 1, weiter $(t^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Homotopie simplizialer Abbildungen von A^0 in M, t^0 die Identität, t^τ für $\tau < 1$ eine eineindeutige Abbildung von A^0 auf A^τ und $t^1(A^0) \subset A^1$. Dann heisse $((f^\tau, a), 0 \leq \tau \leq 1)$ eine « *einfache Zylinderhomotopie* ».

Bezeichnet man $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ auch als eine Zylinderhomotopie bezüglich a, so ist offenbar der Fall denkbar, dass $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ auch Zylinderhomotopie bezüglich eines Punktes aus $N - a$.

Theorem 10. *Seien $a \neq b$ Punkte aus N, ferner $((f^\tau, a),\ 0 \leq \tau \leq 1)$ und $((f^\tau, b),\ 0 \leq \tau \leq 1)$ einfache Zylinderhomotopien von M in N. Für $k = 0{,}1$ mögen die Zyklen*

$$z_1^k(a),\ z_2^k(a),\ \ldots$$

ein vollständiges System berandender Lösungszyklen von (f^k, a) und die Zyklen

$$z_1^k(b),\ z_2^k(b),\ \ldots$$

ein vollständiges System von Lösungszyklen von (f^k, b) bedeuten. Ist dann T^k der Verschlingungstyp von $(\Sigma_i z_i^k(a),\ \Sigma_i z_i^k(b))$, so gilt $T^0 = T^1$.

Beweis. Sind z, z' zueinander fremde endliche ganzzahlige 1-Zyklen in M und $z \sim 0$ bezüglich M, so bezeichne $T(z, z')$ den Verschlingungstyp von z und z'. Seien $\{s^\tau\}$ eine zu $\{(f^\tau, a)\}$ und $\{t^\tau\}$ eine zu $\{(f^\tau, b)\}$ gehörige λ-Homotopie. Ferner bezeichne $u_i(a)$ einen $z_i^0(a)$ zugeordneten Lösungszyklus von (f^1, a) und $u_i(b)$ einen $z_i^0(b)$ zugeordneten Lösungszyklus von (f^1, b).

Die beiden Polyeder $\lambda(f^\tau, a)$ und $\lambda(f^\tau, b)$ sind für alle τ zueinander fremd. Der Verschlingungstyp zweier Zyklen ist gegenüber Deformationen, die jeden Zyklus im Komplementärraum des anderen Zyklus verschieben, invariant. Daher gilt

$$T(s^0 \Sigma_i z_i^0(a),\ t^0 \Sigma_i z_i^0(b)) = T(s^1 \Sigma_i z_i^0(a),\ t^1 \Sigma_i z_i^0(b)).$$

Nach Theorem 8 gibt es eine simpliziale Unterteilung v_i von $z_i^0(a)$ und eine simpliziale Unterteilung w_i von $u_i(a)$ derart, dass

$$s^1(v_i) = w_i \quad \text{für alle } i.$$

Nach dem gleichen Theoreme gibt es eine simpliziale Unterteilung x_i von $z_i^0(b)$ und eine simpliziale Unterteilung y_i von $u_i(b)$ mit

$$t^1(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i.$$

Hierauf ist

$$T(s^1 \Sigma_i z_i^0(a),\ t^1 \Sigma_i z_i^0(b)) = T(s^1 \Sigma v_i,\ t^1 \Sigma x_i) = T(\Sigma w_i,\ \Sigma y_i),$$

da sich eine Verschlingungszahl bei Unterteilung der Zyklen nicht ändert.

Offenbar ist w_i ein $z_i^0(a)$ zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, a).

Aus Theorem 4 folgt daher, dass die $E(w_1)$, $E(w_2)$, ... paarweis zueinander fremd sind. Bei einem Vergleiche der beiden Systeme

$$E(w_1),\ E(w_2), \dots \quad \text{und} \quad E(z_1^1(a)),\ E(z_2^1(a)), \dots$$

stellt sich heraus: Es kommt jedes $E(w_i)$ unter den $E(z_k^1(a))$ vor; und nach Theorem 9 gilt $z_i^1(a) = 0$ für jedes $E(z_i^1(a))$, das unter den $E(w_k)$ nicht vorkommt. Somit kann man in $T(\Sigma w_i, y_i)$ den Ausdruck Σw_i durch $\Sigma z_i^1(a)$ ersetzen.

Es ist y_i ein $z_i^0(b)$ zugeordneter Lösungszyklus von (f^1, g^1). Wegen Theorem 4 sind die $E(y_1)$, $E(y_2)$, ... paarweis zueinander fremd. Wir stellen nunmehr wieder die beiden Systeme

$$E(y_1),\ E(y_2), \dots \quad \text{und} \quad E(z_1^1(b)),\ E(z_2^1(b)), \dots$$

einander gegenüber: Jedes $E(y_i)$ kommt unter den $E(z_k^1(b))$ vor; nach Theorem 6 ist $z_i^1(b) = 0$, falls $E(z_i^1(b))$ unter den $E(y_k)$ nicht vorkommt. Man kann also Σy_i in $T(\Sigma w_i, \Sigma y_i)$ durch $\Sigma z_i^1(b)$ ersetzen.

Schliesslich ist $s^0 z_i^0(a) = z_i^0(a)$ und $t^0 z_i^0(b) = z_i^0(b)$, da s^0 und t^0 Identitäten sind. Es ergibt sich somit, dass

$$T(\Sigma_i z_i^0(a),\ \Sigma_i z_i^0(b)) = T(\Sigma_i z_i^1(a),\ \Sigma_i z_i^1(b)).$$

Die letzte Gleichung besagt aber gerade, dass $T^0 = T^1$, wie es oben behauptet wird.

Hätten wir oben ohne die Voraussetzung der Orientierbarkeit von M und N statt des ganzzahligen Grades einen Grad modulo 2 zugrundegelegt, so wären wir im vorliegenden Abschnitt zu einer Verschlingungszahl modulo 2 gelangt und hätten deren Invarianz gegenüber Zylinderhomotopien beweisen können. Der oben definierte Verschlingungstyp reduziert sich auf eine einzige Zahl, wenn M und N Sphären sind.

4. Rückführung der Invarianz

Wie im letzten Abschnitt sei auch hier M dreidimensional und daher N zweidimensional. Es mögen wieder $a \neq b$ Punkte aus N und f eine stetige Abbildung von M in N bedeuten. Die Menge $f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$ sei ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1. Wenn jeder Lösungszyklus von (f, a) nicht berandend, so bestehe der «Verschlingungstyp» der Abbildung f nur aus der Zahl Null. Sonst mögen die Zyklen

$$z_1^a,\ z_2^a, \dots$$

ein vollständiges System berandender Losungszyklen von (f, a) und die Zyklen

$$z_1^b, \; z_2^b, \; \ldots$$

ein vollständiges System von Lösungszyklen von (f, b) darstellen. Hier ist der « Verschlingungstyp » der Abbildung f der oben definierte Verschlingungstyp von $(\Sigma z_i^a, \; \Sigma z_i^b)$.

Offenbar folgt die Homotopieinvarianz des Verschlingungstyps einer stetigen Abbildung von M in N unmittelbar aus Theorem 10 und dem nachtehenden.

Reduktionstheorem. *Sind $a + b$ Punkte aus N und f, f' homotope Abbildungen von M in N, ferner*

$$f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b) \cup (f')^{-1}(a) \cup (f')^{-1}(b)$$

ein endliches Polyeder einer Dimension ≤ 1, so existieren eine f in f' überführende Homotopie $(f^\tau, \; 0 \leq \tau \leq 1)$ und Zahlen

$$0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_m = 1,$$

die die Eigenschaften haben: für $i = 0, \ldots, m-1$ ist $((f^\tau, a), \zeta_i \leq \tau \leq \zeta_{i+1})$ und ebenso $((f^\tau, b), \zeta_i \leq \tau \leq \zeta_{i+1})$ eine einfache Zylinderhomotopie.

Dieses letztere Theorem, das in die geometrische Struktur von Deformationen Einblick gewährt, wird in einer Fortsetzung zur vorliegenden Arbeit bewiesen.

Unberührt blieb bisher auch die Frage, ob der Verschlingungstyp von der besonderen Wahl der Punkte a und b unabhängig ist. Diese Frage ist zu bejahen, sofern M und ebenso N zusammenhängend ist, wie wir dies oben vorausgesetzt haben.

LITERATUR

[1] Blakers, A. L. and Massey, W. S. — *The homotopy groups of a triad.* — I and II. Ann. of Mathem. 53 (1951), 161-205, and 55 (1952), 192-201.

[2] Hilton, P. J. — *Suspension theorems and the generalized Hopf invariant.* — Proc. London Mathem. Soc. (3), 1 (1951), 462-493.

[3] Hopf, H. — *Ueber die Abbildungen der 3-Sphäre auf die Kugelfläche.* — Mathem. Ann. 102 (1930), 637-665.

[4] Hopf, H. — *Ueber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension.* — Fund. Mathem. 25 (1935), 427-440.

[5] Whitehead, G. W. — *A generalization of the Hopf invariant.* — Ann. of Mathem. 51 (1950), 192-238.

Memoria publicada en « Collectanea Mathematica » (Volumen X - Fasc. 1.° Año 1958 por el Seminario Matemático de Barcelona.