UNTERSUCHUNGEN ZUR GEOMETRIE DER PROJEKTIVEN FORMEN UND INVARIANTEN THEORIE 1

INVARIANTE BILDUNGEN EINER EINZELFORM

VON WERNER BURAU in Hamburg

Seit ihrer Begründung in der Mitte des 19. Jahrhunderts hat die projektive Invariantentheorie lange Zeit viele Mathematiker ausgiebig beschaftigt. Man vergleiche über die altere Geschichte dieser Disziplin, in der mannigfache Gesichtspunkte der damaligen Mathematik eine Rolle spielten, etwa den Bericht von W. F. MEYER aus dem Jahre 1892. (1) Seit dem Beweis der entscheidenden Endlichkeitssätze der Invariantentheorie durch Hilbert Ende des vorigen Jahrhunderts hat das Interesse dafür merklich nachgelassen, ohne jedoch auch in unserem Jahrhundert ganz zu verschwinden. In den 30-er Jahren brachte H. WEYL neuere Gesichtspunkte in das Gebiet hinein und knüpfte vor allem eine Verbindung zu der inzwischen stark ausgebauten Darstellungstheorie der klassischen Gruppen. (2)

Im folgenden soll zunächst vor allem ein grudlegenden Zusammenhang zwischen den fundamentalen Bildungen der projektiven Invariantentheorie und den sog. Grundmannigfaltigkeiten der allgemeinen projektiven Gruppe gebracht werden. Es wird sich dabei eine enge Beziehung zwischen den Komitanten der Invariantentheorie und der projektiv gedeuteten Darstellungstheorie der linearen Gruppen ergeben, wobei auch die Syzygien zwischen den Komitanten ihre sinngemässe geometrische Deutung erfahren. In der vorliegenden ersten Arbeit wollen wir uns auf diejenigen invarianten Bildungen beschränken, die zu einer einzelnen Grundform mit einer Sorte von Variabeln gehören. Hierbei sind entscheidend wichtig gewisse Systeme von Hyperflächen, die durch Nullsetzen einer Komitante erhalten werden und die wiederum geometrisch an einer Veroneseschen Mannigfaltigkeit V_n^k erklärt werden

---

(1) W. Fr. MEYER Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariante-n theorie, Jahresber. der D M V 1 (1892).

(2) H. WEYL, Elementary theory of invariants, mimeographed 1935-36, v. d. WAERDEN, Reihenentwicklungen und Ueberschiebungen in der Invariantentheorie, Math. Ann. 113 (1936), 14-35.

können und bei den Autokollineationen der V_n^k ineinander transformiert werden. In Kap. 4 werden die Syzygien geometrisch gedeutet werden. Die beiden Schlusskapitel 5 und 6 bringen dann einige ganz einfache Beispiele zu den vorher entwickelten Dingen aus dem binären und ternären Gebiet. Diese Beispiele dürften auf höhere Fälle weitgehend mithilfe noch aufzustellender allgemeiner Sätze zu verallgemeinern und auszubauen sein. In späteren Arbeiten wollen wir dann untersuchen, wie diese Überlegungen sich bei den Betrachtungen simultaner Invarianten mehrerer Grundformen gestalten und welches der geometrische Sinn anderer wichtiger Begriffsbildungen der Invariantentheorie ist.

Endlichkeitsfragen sollen zunächst nicht zur Sprache kommen; es wird gewiss aber auch lohnend sein, diese Dinge von hier aus neu zu durchdenken. Ferner werden die früher sehr beliebten symbolischen Methoden und Schreibweisen nicht benötigt. Gewiss merkt man naturgemäss auch von unserem Standpunkt, wo wir uns gerade für die Sonderfälle interessieren, wie stark der Reichtum an invarianten Bildungen mit dem Grad und der Variablenzahl der Grundform anwächst. Dennoch scheint es mir wertvoll zu sein, den vielen geometrischen Zusammenhängen über Veronesesche, Grassmannsche Mannigfaltigkeiten und ihren Verallgemeinerungen, auf die man dabei stösst, systematisch nachzugehen und auf diese Weise vielleicht manches in der älteren Literatur Verborgene in neuem Licht erscheinen zu lassen. (3)

Kap. 1. Einige Grundbegriffe aus der projektiven Geometrie und Invariantentheorie

Wir gehen von einer $n+1$ — ären Grundform in $n+1$ homogenen Variablen aus, die wir in der Gestalt

$$(1) \qquad f = \sum x_{i_0 i_1 \ldots i_n} \, x_0^{i_0} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \quad (i_0 + i_1 + \ldots + i_n = k)$$

schreiben. Durch Nullsetzen von (1) wird, wenn man für die $x_{i_0 \ldots i_n}$ gewisse, nicht durchweg verschwindende Zahlen des komplexen Zahlkörpers einsetzt, eine Hyperfläche k-ten Grades des komplexen projektiven Raumes X_n, des sog. Grundraumes, definiert. In der projekti-

(3) Von älteren Lehrbüchern über unser Gebiet, die z. T Berührungspunkte mit der hier vertretenen Auffassung haben, seien noch erwähnt: E. Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig, 1889, Grace and Young, The theory of algebraic invariants, Cambridge, 1903.

ven Invariantentheorie hat man nun die $\binom{n+k}{n}$ Koeffizienten, von denen f abhängt, auch als veränderlich aufzufassen; wir nennen sie zum Unterschied von den sog. Grundvariablen x_i die Koeffizientenvariabeln und deuten sie als homogene Koordinaten eines projektiven Raumes P_m, wobei

$$(2) \qquad m + 1 = \binom{n+k}{n}$$

gesetzt sei. Wichtig ist dann weiterhin die Tatsache, dass die Gruppe Γ_n aller Projektivitäten des X_n eine eineindeutig darauf bezogene Gruppe des P_m induziert. Neben den Punktkoordinaten (x_i) des X_n hat man jedoch noch die Grassmannkoordinaten $p_{i_0 \dots i_h}$ des Räume X_h des X_n $(h = 1, \dots, n-1)$ alle zu berücksichtigen. Bekanntlich induziert Γ_n auch im Bereich dieser Koordinaten je lineare Transformationen, die sich als Autokollineationen der entsprechenden Grassmannschen Mannigfaltigkeit $G_{n,h}$ auffassen lassen.

Wir erinnern jetzt an folgende bekannte Definition: Gegeben sei das Polynom:

$$(3) \qquad \mathrm{K}\,(x_{i_0 \dots i_n};\ x_i;\ p_{ij};\ \dots;\ p_{i_0 \dots i_h};\ \dots;\ p_{i_0 \dots i_{n-1}}),$$

das von den Koeffizientenvariabeln $x_{i_0 \dots i_n}$ homogen vom Grade $g \geq 1$ und von den Koordinaten der X_h des X_n $(h = 0, \dots, n-1)$ je homogen in bestimmten Graden ϱ_i abhängen möge, die aber auch Null sein können. Übt man dann auf die x_i eine projektive Transformation σ der Gruppe Γ_n, sowie auf die $x_{i_0 \dots i_n}$, p_{ij} usw, die entsprechenden induzierten Transformationen aus, und verändert sich (3) danach nur bis auf eine Potenz der Transformationsdeterminante von σ, so heisst K eine Komitante der $n+1$ — ären Form (1) im Sinne der klassischen Invariantentheorie. In dem Falle, wo in K nur die Koeffizientenvariablen auftreten, sprach man meist von einer Invariante. Treten ausserdem nur die Punkt- oder nur die X_{n-1}-Koordinaten auf, so waren auch die Bezeichnungen Kovariante und Kontravariante üblich. Die Bezeichnung Komitante findet sich bei Weitzenböck ([4]). Wir werden diesen allgemeinen Begriff der Komitante später noch etwas einengen, benötigen dazu vorher jedoch noch einige geometrische Begriffsbildungen, an die wir erinnern wollen.

Zunächst sei folgendes bemerkt: Die im Koeffizientenraum P_m durch die Gruppe Γ_n induzierten projektiven Transformationen lassen sich

([4]) Vgl. R. Weitzenböck, Invariantentheorie, Groningen, 1923 (anscheidas letzte Werk über dies Gebiet in deutscher Sprache).

leicht geometrisch kennzeichnen. Denn gewiss werden durch Γ_n diejenigen Hyperflächen k-ten Grades des X_n, die in speziellster Weise, d. h. in eine k-fach zählende Hyperebene X_{n-1}, entartet sind, wieder in solche übergeführt. Die Bildmenge dieser k-fach zählenden X_{n-1} ist bekanntlich, wie man sich auch sofort ausrechnet, die Veronesesche V_n^k mit der Parameterdarstellung

$$x_{i_0 \dots i_n} = u_0^{i_0} \, u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}. \tag{4}$$

Die durch Γ_n in P_m induzierten Projektivitäten lassen sich dann als Autokollineationen dieser V_n^k kennzeichnen; diese wirken ausnahmslos transitiv auf die Punkte von V_n^k, und es gibt auch keine echte Obermenge von V_n^k mit der gleichen Eigenschaft. Wir fassen stets Formen f und ϱf mit $\varrho \neq 0$ als nichtverschieden auf. Dann ist die Zuordnung zwischen den Punkten des durch die Mannigfaltigkeit V_n^k aufgespannten Raumes $< V_n^k >$ und den Nullgebilden der Formen (1), d. h. den Hyperflächen k-ter Ordnung des X_n, ausnahmslos eineindeutig. $K\ (x_{i_0 \dots i_n})$ sei jetzt eine Invariante zu (1), d. h. eine Komitante, in der nur die Koeffizientenvariabeln auftreten; dann stellt $K = 0$ eine gleichfalls durch die Autokollineationen der V_n^k in sich transformierte Hyperfläche dar. Darüber hinaus gilt aber der

Satz 1. Ist $K\,(x_{i_0 \dots i_n})$ eine Invariante der $n+1$ — ären Form k-ten Grades (1), so ist $K(x_{i_0 \dots i_n}) = 0$ eine Hyperfläche des P_m, die V_n^k enthält und durch die Autokollineationen von V_n^k in sich transformiert wird. Umgekehrt definiert jede Hyperfläche des P_m mit diesen Eigenschaften eine Invariante zur Form (1).

Beweis: Es ist lediglich der 2. Teil des Satzes zu beweisen. $K = 0$ sei die Gleichung einer Hyperfläche, die alle Autokollineationen von V_n^k in sich gestattet. Dann existieren im komplexen P_m, den wir ja voraussetzen, gewiss Schnittpunkte der Mannigfaltigkeiten $K = 0$ und V_n^k. P sei ein solcher Punkt. Zufolge der Autokollineationen der V_n^k, die ja auch $K = 0$ zulassen sollte, kann P aber in jeden anderen Punkt von V_n^k übergehen. Diese alle, d. h. aber ganz V_n^k muss demnach auf $K = 0$ liegen.

Um in analoger Weise auch die allgemeineren Komitanten, in denen ausser den Koeffizienten der Grundform auch Raumvariable des X_n auftreten, zu deuten, müssen wir an einen wichtigen Begriff der projektiven Geometrie des X_n erinnern. Eine Gesamtheit ineinanderliegender Räume $X_{n_1}, \dots, X_{n_s}$ des X_n, die also die Bedingung

$$X_{n_1} \supset \dots \supset X_{n_s} \quad \text{mit} \quad n > n_1 > \dots > n_s \geq 0$$

erfüllen, heisse ein $(n_1, ..., n_s)$-Element. Zu einem gegebenen festen $(n_1, ..., n_s)$-Element gibt es eine Untergruppe von Γ_n, die aus allen Projektivitäten besteht, welche alle Räume des Elements je als ganzes festhalten. Ersichtlich sind innerhalb der ganzen Gruppe Γ_n alle Elements ausnahmslos projektiv äquivalent zueinander, und man weiss auch, dass die Elemente der allgemeinste Typ von geometrischen Gebilden des X_n sind, die sich in Bezug auf die Gruppe Γ_n ausnahmslos transitiv verhalten. Den $(n_1, ..., n_s)$-Elementen sind Punkmodelle $J_{n, n_1 \dots n_s}^{h_1 \dots h_s}$, zugeordnet, wobei die h_i beliebige natürliche Zahlen sind. Diese Punktmodelle besitzen nun in offenbarer Zuordnung zu den Projektivitäten der Gruppe Γ_n Transformationen in sich; diese Transformationen lassen sich wie im Spezialfall der $G_{n,k}$ und V_n^k zu Projektivitäten des ganzen umgebenden Raumes der $J_{n, n_1 \dots n_s}^{h_1 \dots h_s}$ fortsetzen, und es ergibt sich auf diese Weise die allgemeinste irreduzible Darstellung der Gruppe Γ_n. An 2 Stellen habe ich mich bereits ausführlicher mit der Theorie der J-Mannigfaltigkeiten befasst (5); ich werde jedoch hiervon im folgenden nicht viel benutzen.

Gegeben sei jetzt eine Komitante K der Grundform (1), die keine reine Invariante mehr ist, d. h. in K mögen die Koordinaten der Räume X_{n_1}, ..., X_{n_s} auftreten, und zwar in gewissen Graden $h_i \neq 0$ $(i = 1, ..., s)$ Für die geometrische Deutung von K im Koeffizientenraum P_m ist es jetzt zweckmässig, folgende Einschränkungen vorzunehmen: (1) K soll nicht in ein Produkt $K_1 \cdot K_2$ zweier Polynome zerfallen, wovon K_2 nicht von den Koeffizientenvariabeln, sondern nur noch von gewissen Raumkoordinaten abhängt; das bedeutet, K darf keinen Faktor abspalten, der in der Bezeichnung von Weitzenböck (s. [4]), S. 149) eine identische Komitante ist. 2) Es darf K nach Einsatz zusammengehöriger Koordinaten eines $(n_1, ..., n_s)$-Elementes als Polynom in den Koeffizientenvariabeln niemals identisch verschwinden.

Nunmehr können wir dem obigen Satz 1 den folgenden Satz 2 an die Seite stellen:

Satz 2. Gegeben sei eine Komitante K der Grundform (1), und K erfülle die Bedingungen 1) und 2). In K setzen wir dann die zusammengehörigen Koordinaten eines $(n_1, ..., n_s)$-Elementes E ein. Als Nullstellengebilde von K im Räume P_m möge dadurch die Hyperfläche K^E entstehen. Dann sind alle so entstehenden Hyperflächen K^E ausnahmslos

(5) S. W. Burau, Eine gemeinsame Verallgemeinerung aller Veroneseschen und Grassmannschen Mannigfaltigkeiten, Rend. Pal. II, 3 (1954), 299-326 und W. Burau, Zur Geometrie der verallgemeinerten Raumelemente des P_n, Hambg. Abhandl. (im Druck).

eineindeutig den $(n_1, \ldots, n_s)$-Elementen des Grundraumes X_n zugeordnet und alle untereinander projektiv äquivalent.

Beweis: Wir schreiben für die Koeffizintenvariabeln $x_{i_0 \ldots i_n}$ vorübergehend $y_0, y_1, \ldots, y_m$. K ist dann eine Form

$$K = \Sigma A_{j_0 \ldots j_m} \, y_0^{j_0} \, y_1^{j_1} \ldots y_m^{j_m} \quad (j_0 + j_1 + \ldots + j_m = g), \tag{5}$$

worin die $A_{j_0 \ldots j_m}$ je homogene Formen vom Grade h_i in den Grassmannkoordinaten $p_{i_0 \ldots i_\nu}$ $(\nu = n_1, \ldots, n_s)$ sind; wir deuten dies so an:

$$A_{j_0 \ldots j_m} = A_{j_0 \ldots j_m} \, (p_{i_0 \ldots i_\nu}) \; (\nu = n_1, \ldots, n_s). \tag{6}$$

Weil K die obigen Bedingungen 1) und 2) erfüllen sollte, verschwinden die A nicht alle gleichzeitig bei Einsatz zusammengehöriger Koordinaten eines $(n_1, \ldots, n_s)$-Elementes, und die rechten Seiten von (6) sind auch frei von einem gemeinsamen, nicht konstanten Faktor. Durch (6) wird also eine Mannigfaltigkeit M definiert, die eine $J_{n, n_0 \ldots n_s}^{h_0 \ldots h_s}$ ist oder eine echte Projektion davon in einen niederen Raum. Nach Ausübung einer projektiven Transformation ϱ des Grundraumes X_n in ihrer Wirkung auf die Produkte der in (6) rechts stehenden Koordinaten mögen die $A_{j_0 \ldots j_m}$ in gewisse Ausdrücke $A^{\delta}_{j_0 \ldots j_n}$ übergehen, die wieder im Grade h_i von den jeweiligen p abhängen. Übt man nun die durch σ im Bereich der Koeffizientenvariabeln $y_0, \ldots, y_m$ induzierte projektive Transformation $\tilde{\sigma}$ aus, so muss wegen der Komitanten-eigenschaft von K ganz K bis auf einen Faktor (Potenz der Transformationsdeterminante) unverändert bleiben. Das ist aber dasselbe wie folgende Aussage: Die $A^{\sigma}_{j_0 \ldots j_m}$ gehen aus den $A_{j_0 \ldots j_m}$ vermöge der zu $\tilde{\sigma}$ kontragredienten Transformation hervor. Hieraus schliessen wir folgendes: 1) Die oben mit M bezeichnete Mannigfaltigkeit ist eine $J_{n, n_0 \ldots n_s}^{h_0 \ldots h_s}$ selber und keine echte Projektion davon. Denn andernfalls würde man durch Nullsetzen der rechten Seiten von (6) einen bei Γ_n in sich transformierten Teilraum der durch die Monomenprodukte der Grade h_i der X_{n_i}-Koordinaten aufgespannten Raumes $\langle J_{n, n_1 \ldots n_s}^{h_1 \ldots h_s} \rangle$ definieren entgegen der Irreduzibilität der Darstellung von Γ_n in diesem Raume. 2) Es hätte genügt, oben als Bedingung 1) zu verlangen, dass K bei Einsetzen zusammengehöriger Koordinaten eines einzigen Elementes nicht verschwindet. Denn sind alle $A_{j_0 \ldots j_m} = 0$ nach Einsatz der Koordinaten des Elementes E, so gilt dies auch für jedes andere Element, da alle Elemente innerhalb der Gruppe Γ_n zueinander äquivalent sind.

KAP. 2. DIE VERONESESCHE V_n^k UND DIE MIT ZUSAMMENHÄNGENDEN HYPERFLÄCHEN G-TEN GRADES

Wir hatten die V_n^k mit der Parameterdarstellung (4) durch Beziehung ihrer Punkte auf diejenigen Hyperflächen k-ter Ordnung des X_n definiert, die in eine k-fach zählende X_{n-1} entartet sind. Nun ist bekanntlich zugleich mit der Korrespondenz zwischen den Punkten des P_m und den Hyperflächen k-ter Ordnung des X_n eine solche zwischen den P_{m-1} des P_m und den Hyperflächen k-ter Klasse des X_n definiert. Den in k-fach zählende Punkte entarteten Hyperflächen k-ter Klasse des X_n entsprechen dabei solche P_{m-1}, die mit der V_n^k nur die Punkte einer V_{n-1}^k gemein haben (6). Im vorigen Kapitel war von dieser Tatsache schon Gebrauch gemacht worden. Die Gesamtheit der so spezialisierten P_{m-1}, die ein zur Gesamtheit der Punkte von V_n^k duales Gebilde definieren, wollen wir wie bei früheren Gelegenheiten mit $\widehat{V}_n^k$ bezeichnen. In einer nächsten Stufe bilden wir jetzt auf dieselbe Weise die Gesamtheit der $\infty^{\binom{m+g}{g}-1}$ Hyperflächen g-ten Grades des P_m auf die Punkte eines weiteren Raumes S_r von

$$r = \binom{m+g}{g} - 1 \qquad (g \geq 2)$$

Dimensionen ab. Die Autokollineationen der V_n^k in sich, die ihrerseits eine treue, irreduzible Darstellung der Gruppe Γ_n sind, transformieren offenbar auch alle Hyperflächen g-ten Grades des P_m derart aufeinander, dass Linearscharen wieder in solche übergehen, d. h. Γ_n wird auch im Raum S_r dargestellt. Jedoch ist bei $g \geq 2$ diese Darstellung nicht mehr irreduzibel, und es ist die Aufgabe, sie auszureduzieren. Die einzelnen, irreduzibel in sich transformierten Teilräume werden im nächsten Kap. gerade den Komitanten zugeordnet werden. Aufgrund des folgenden Satzes spannen wir den S_r aber zweckmässigerweise in 2 zueinander fremde Räume auf deren Bedeutung sofort ersichtlich ist.

SATZ 3. Bezüglich der Gruppe Γ_n spaltet sich der Koeffizientenraum S_r, dessen Punkte den Hyperflächen g-ten Grades des P_m zu geordnet sind, in folgende, zueinander punktfremden, je in sich transformierten Bestandteile auf:

---

(6) Vgl. W. Burau, Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie, Coll. math. Barcelona, vol. III (1950), kap. I, 2.

a) Einen durch eine Veronesesche V_n^{kg} aufgespannten Raum von $\binom{kg+n}{n}-1$ Dimensionen $\langle V_n^{kg}\rangle$.

b) Einen Raum $R^{(g)}(V_n^k)$ von $\binom{m+g}{g}-\binom{kg+n}{n}-1$ Dimensionen.

Die Punkte der in *a)* genannten V_n^{kg} sind den g-fach gezählten S_{m-1} des zur V_n^k dualen Gebildes $\widehat{V}_n^k$ zugeordnet, die Punkte des Raumes *b)* sind denjenigen Hyperflächen g-ten Grades eineindeutig zugeordnet, die V_n^k enthalten.

Beweis: Dass die die V_n^k enthaltenden Hyperflächen g-ten Grades, ein Linearsystem von $\binom{m+g}{g}-\binom{kg+m}{m}-1$ Dimensionen bilden, habe ich bereits an früherer Stelle ausgerechnet (s. [5]), Abschn. 25, p. 270). Dual zu (4) lassen sich nun die Hyperebenenkoordinaten $u_{i_0\dots i_n}$ der S_{m-1} von V_n^k in der Parametergestalt

$$u_{i_0\dots i_n}=x_0^{i_0}\dots x_n^{i_n}\quad(i_0+\dots+i_n=k) \tag{7}$$

schreiben. Hieraus folgt aber sofort, dass unter den Koeffizienten einer Form

$$(\Sigma\, u_{i_0\dots i_n}\, x_{i_0\dots i_n})^g, \tag{8}$$

worin die $u_{i_0\dots i_n}$ vermöge (7) durch die x_i auszudrücken sind, gewiss alle Monome k. g-ten Grades in den x_i vorkommen, d. h. diejenige Punktmenge, von der unter *a)* im Satz die Rede war, ist eine V_n^{kg}. In dem von dieser V_n^{kg} aufgespannten Raum haben wir einen ersten, gewiss irreduzibel durch Γ_n in sich transformierten Teilraum von S_r. Ein weiterer auch als ganzes in sich transformierten Teilraum von S_r ist der oben mit $R^g(V_n^k)$ bezeichnete sog. g-te Relationenraum der V_n^k, dessen Punkte in Korrespondenz zu den V_n^k enthaltenden Hyperflächen g-ten Grades stehen. Hätte $R^g(V_n^k)$ mit $\langle V_n^{kg}\rangle$ einen nichtleeren Durchschnitt, so müsste dieser bei Γ_n in sich transformiert werden, wegen der Irreduzibilität von $\langle V_n^{kg}\rangle$ bezüglich Γ_n würde daraus aber folgen: $V_n^{kg}\subset R^g(V_n^k)$. Dies geht aber wiederum nicht, denn die den Punkten von V_n^{kg} selber zugeordneten entarteten Hyperflächen g-ten Grades sind g-fach zählende Hyperebenen, enthalten also gewiss die V_n^k nicht vollständig.

Die V_n^k lassen sich bereits als vollständiger Schnitt von Quadriken ihres Raumes definieren, d. h. mit anderen Worten: Das Ideal aller die V_n^k enthaltenden Hyperflächen hat eine rein quadratiache Basis. Die hiernach zunächst vorliegende Aufgabe der Ausreduzierung des Relationenraumes $R^2\left(V_n^k\right)$ habe ich bereits bei früherer Gelegenheit behandelt [7]). Dabei ergab sich auch sehr einfach die geometrische Bedeutung der auftretenden irreduziblen Bestandteile. Wir wiederholen das Ergebnis in folgendem Satz:

Satz 4. Der Raum $R^2\left(V_n^k\right)$ $(k \geq 2,\ n \geq 1)$ der quadratischen Relationen einer V_n^k wird in folgender Weise bezüglich der Gruppe Γ_n ausreduziert:

$$(9)\quad R^2\left(V_1^k\right) = \langle V_1^{2k-4} \rangle \cup \langle V_1^{2k-8} \rangle \cup \ldots \cup \langle V_1^{4} \rangle \cup V_1^{0} \ (k \text{ gerade})$$

$$(10)\quad R^2\left(V_1^k\right) = \langle V_1^{2k-4} \rangle \cup \langle V_1^{2k-8} \rangle \cup \ldots \cup \langle V_1^{6} \rangle \cup \langle V_1^{2} \rangle \ (k \text{ ungerade})$$

$$(11)\quad R^2\left(V_n^k\right) = \langle J_{n,\,1\;\,0}^{\;\;\,2\;\,2k-4} \rangle \cup \langle J_{n,\,1\;\,0}^{\;\;\,4\;\,2k-8} \rangle \cup \ldots \cup \langle J_{n,\,1\;\;\;\;\;0}^{\;\;\,k-3\;\,6} \rangle \cup \langle J_{n,\,1}^{\;\;\,k} \rangle$$
$$\text{(bei } n > 1 \text{ und } k \text{ gerade)}$$

$$(12)\quad R^2\left(V_n^k\right) = \langle J_{n,\,1\;\,0}^{\;\;\,2\;\,2k-4} \rangle \cup \langle J_{n,\,1\;\,0}^{\;\;\,4\;\,2k-8} \rangle \cup \ldots \cup \langle J_{n,\,1\;\;\;\;\;0}^{\;\;\,k-3\;\,6} \rangle \cup \langle J_{n,\,1\;\;\;\;\;0}^{\;\;\,k-1\;\,2} \rangle$$
$$\text{(bei } n > 1 \text{ und } k \text{ ungerade).}$$

Die Relationenräume werden hierbei durch gewisse J-Mannigfaltigkeiten aufgespannt, deren Punkte wiederum ausgezeichneten Quadriken durch die V_n^k zuzuordnen sind. Diese findet man auf folgende Weise: Zunächst sei $n = 1$. Dann besitzen nur die V_1^k mit geradem k als einzige unter allen V_n^k eine nicht entartete sog. Fundamentalquadrik; ihr ist in (9) der Punkt V_1^0 zugeordnet. Bei $k = 2$ besteht $R^2\left(V_1^2\right)$ nur aus diesem Punkt. Bei $k > 2$ projiziere man die Kurve V_1^k aus dem $k-2s-1$ — — dimensionalem Schmiegraum T_{k-2s-1} eines ihrer Punkte in eine V_1^{2s} und verbinde dann T_{k-2s-1} mit den Punkten der zu V_1^{2s} gehörigen Fundamentalquadrik. Dies ergibt in Abhängigkeit von T_{k-2s-1} und damit von den Punkten der V_1^k eine Menge quadratischen Kegel, die auf die Punkte der in (9) und (10) auftretenden Kurven V_1^{2k-4s} abzubilden sind. Bei $n > 1$ projiziere man die V_n^k aus dem längs einer V_{n-2}^k berührenden Schmiegraum $k-1$ — ter Stufe $T^{k-1}\left(V_{n-2}^k\right)$ auf eine V_1^k. Ist k gerade, so kann man die zu dieser V_1^k gehörige Fundamentalquadrik mit dem Projektionszentrum $T^{k-1}\left(V_{n-2}^k\right)$ verbinden und erhält dadurch einen von den V_{n-2}^k der V_n^k, d. h. den Geraden des Grundraumes X_n abhängigen Typ von Kegeln, die auf die Punkte von $J_{n,\,1}^{\;\;\,k}$ in (11) abzubilden sind. Ist $k > 2$, so kann man die durch Projektion erhaltene V_1^k ihrerseits aus dem Schmie-

(7) W. Burau, Projektive Klassifikation der Veronese-Relationen, Annali di Matem. IV, 35 (1953), S. 299-326.

graum T_{k-2s-1} eines ihrer Punkte auf eine V_1^{2s} weiter projizieren. Dies ergibt insgesamt eine Projektion der V_n^k auf die V_1^{2s} und definiert mit Hilfe der Fundamentalquadrik dieser V_1^{2s} eine Klasse von Kegeln, die den (1,0)-Elementen des Grundraumes zuzuordnen sind und auf die Punkte der Mannigfaltigkeiten $J_{n,1\,0}^{2s\,2k-4s}$ in (11) und (12) abgebildet werden.

Weil die V_n^k somit bereits als Schnitt von Quadriken vollständig beschrieben ist, weiss man folgendes: Jede durch V_n^k gehende Hyperfläche g-ten Grades ($g > 2$) lässt sich in der Gestalt einer Linearkombination aus den soeben behandelten Quadriken schreiben mit Koeffizienten, die Formen vom Grade g-2 in den äusseren Koordinaten der V_n^k sind. Trotz dieser Tatsache ist die Ausreduktion der höheren Relationenräume $R^g(V_n^k)$ im einzelnen durchaus schwieriger als die in Satz 4 enthaltene Ausreduktion von $R^2(V_n^k)$. Es sind dabei die mit den Indizes n und k rasch wachsenden Besonderheiten der V_n^k und ihrer ausgezeichneten Obermengen zu beachten, wie wir in den nächsten Kapiteln, insbesondere bei den Beispielen von Kap. 5 und 6 sehen werden.

Kap. 3. Geometrie der Komitanten einer $n+1$-ären Form k-ten Grades

Wir bringen nunmehr in folgendem Satz die für uns wichtige Beziehung zwischen den in Kap. 1 erklärten Komitanten einer Grundform und den im vorigen Kap. eingeführten Relationenräumen $R^g(V_n^k)$.

Satz 5. Die Komitante K der $n+1$-ären Form f sei in den Koeffizientenvariabeln vom Grade g und enthalte ausserdem die Koordinaten der Räume X_{n_i} und nur diese je in den Graden $h_i > 0$. Ferner erfülle K die Bedingungen 1) und 2) des Kap. 1. Dann ist K ein bei Γ_n irreduzibel in sich transformierter Teilraum S des Koeffizientenraumes S_r zugeordnet. Dieser Raum S wird durch eine Mannigfaltigkeit $J_{n,n_1\ldots n_s}^{h_1\ldots h_s}$ aufgespannt, und den Punkten von $J_{n,n_1\ldots n_s}^{h_1\ldots h_s}$ sind diejenigen Hyperflächen g-ten Grades des P_m zugeordnet, die entstehen, wenn man $K=0$ setzt, nachdem man links die Koordinaten der Räume eines beliebigen $(n_1, \ldots n_s)$-Elementes eingesetzt hat. Umgekehrt ist jedem bei Γ_n irreduzibel in sich transformierten Teilraum von S_r, wenn es ein Punkt ist, eine Invariante, wenn es ein Raum von grösserer Dimension als 0 ist, eine die Bedingungen 1) und 2) erfüllende Komitante der Grundform 1) zugeordnet.

Beweis: Ist K eine reine Invariante, so ergibt sich bereits unmittelbar aus Satz 1, dass ihr ein bei der Gruppe Γ_n festbleibender Punkt des Relationenraumes $R^g\,(V_n^k)$ zugeordnet ist und umgekehrt. K sei eine Kovariante, die unter Erfüllung der Bedingungen 1) und 2) des Kap. 1 von den X_{n_i}-Koordinaten des X_n je vom Grade h_i und von den Koeffizientenvariablen vom Grade g abhängen möge. In Satz 2 haben wir nun gesehen, dass $K=0$ nach Einsatz zusammengehöriger Koordinaten aller $(n_1 \ldots n_s)$-Elemente des X_n eine Schar von Hyperflächen definiert, die auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit $J_{n,\,n_1 \ldots n_s}^{h_1 \ldots h_s}$ abzubilden sind. Der von diesser $J_{n,\,n_1 \ldots n_s}^{h_1 \ldots h_s}$ aufgespannte Raum wird dann durch Γ_n in sich transformiert und kann demnach nichts anderes als einer der irreduziblen Bestandteile des Raumes S_r bei der Ausreduktion sein. Hat man umgekehrt einen solchen Bestandteil, so muss dieser durch eine eindeutig bestimmte Mannigfaltigkeit $J_{n,\,n_1 \ldots n_s}^{h_1 \ldots h_s}$ aufgespannt werden. Die Punkte dieser J-Mannigfaltigkeit sind Hyperflächen g-ten Grades des P_m zugeordnet, deren Gleichungskoeffizienten je vom Grade h_i von den X_{n_i}-Koordinaten des X_n abhängen. Alle diese speziellen Hyperflächen gehen ferner bei Γ_n transitiv ineinander über; ihre Schar lässt sich mithin durch ein Polynom in den $x_{i_1 \ldots i_n}$ und $p_{j_0 \ldots j_r}$ beschreiben, das die kennzeichnenden Eigenschaften einer Komitante besitzt.

Zufolge Satz 3 lässt sich der Raum S_r durch 2 Bestandteile $\langle V_n^{kg} \rangle$ und $R^g\,(V_n^k)$ aufspannen. wovon $\langle V_n^{kg} \rangle$ nicht weiter zerlegbar ist. Zusammen mit dem, was wir jetzt wissen, müssen demnach alle den Komitanten von f zugeordneten Teilräume von S_r gewiss in $R^g\,(V_n^k)$ liegen mit Ausnahme der trivialen Kovariante f^g, der der Raum $\langle V_n^{kg} \rangle$ entspricht. Liegt also nicht f^g vor, so enthalten die in unserem Sinne der Komitante zugeordneten Hyperflächen alle die Mannigfaltigkeit V_n^k.

Es erhebt sich jetzt die Frage, welche Bedeutung unsere Einschränkungen 1) und 2) in Kap. 1 für die jetzt vorliegende Deutung der Komitanten durch Teilräume des S_r besitzen. Besitzt K einen nur von den Raumkoordinaten abhängigen Faktor, so kann dieser gewiss auf die zu K gehörigen Nullgebilde im P_m keinen Einfluss haben, sodass es sinnvoll ist, solche Faktoren stets vor unserer Deutung abzuspalten. Aber auch dann könnte immer noch die Bedingung 2) verletzt sein. Z. B. sei K von den Ebenenkoordinaten $p_{j_0 j_1 j_2}$ abhängig. Bekanntlich lassen sich die $p_{j_0 j_1 j_2}$ in der Gestalt

$$p_{j_0 j_1 j_2} = x_{j_0}\, p_{j_1 j_2} - x_{j_1}\, p_{j_0 j_2} + x_{j_2}\, p_{j_0 j_1} \tag{13}$$

schreiben, worin die x_i und die p_{ij} je die Koordinaten eines Punktes und einer Geraden sind, die die Ebene $(p_{j_0 j_1 j_2})$ aufspannen. Nach der

Substitution (13) wird unsere Komitante K zu einer solchen, die von den x_i und p_{ij} abhängt, aber die Bedingung 2) verletzt, da sie offenbar identisch verschwindet, wenn man für die x_i und die p_{ij} die Koordinaten von Punk-Gerade in vereinigter Lage einsetzt, da dann ja in (13) rechts alles verschwindet. Es wäre aber unzweckmässig, jetzt K in Abhängigkeit von den x_i und p_{ij} zu betrachten, da diese in Wirklichkeit vermittels (13) nur eine solche von den $p_{j_0 j_1 j_2}$ ist.

Nach dem Muster dieses Beispiels müsste man jetzt allgemein bei Komitanten, die die Bedingung 2) nicht erfüllen, ein Verfahren angeben, die «echten» Raumkoordinaten zu finden, von denen sie abhängen. Dies ist noch mit einigen kombinatorischen Schwierigkeiten verbunden, und daher wollen wir weiter die Erfülltheit der Bedingungen 1) und 2) voraussetzen. Aber auch dann entsteht noch folgende weitere Frage: Worauf werden diejenigen Hyperflächen des P_m abgebildet, die entstehen, wenn man in eine Komitante, die von mehr als einer Sorte von Raumkoordinaten abhängt, solche Koordinaten einsetzt, die nicht mehr zu einem Element gehören. Die Vermutung, dass man hierbei in dem von der zugehörigen Elementbildmenge $J_{n,\,n_1 \dots n_s}^{\;h_1 \dots h_s}$ aufgespannten Raum verbleiben muss, ist falsch, wie man bereits an einfachen Beispielen sehen kann. Doch wir lassen auch diese Frage hier unberührt.

Alle Komitanten, die in den Koeffizientenvariabeln quadratisch sind, haben wir gemäss Satz 4 bereits gefunden. Weiterhin ist folgender Satz, von dem wir in den Beispielen der Kap. 5 und 6 ständig Gebrauch machen werden, unmittelbar einsichtig:

Satz 7. Gegeben seien 2 Komitanten K und K' der Grundform (1), je von den Graden g und g' in den Koeffizientenvariabeln; für beide seien ausserdem die Bedingungen 1) und 2) erfüllt. Die zugeordneten J-Mannigfaltigkeiten aufgrund von Satz 5 seien. $J_{n,\,n-1 \dots 0}^{\;p_{n-1} \dots p_0}$ und $J_{n,\,n-1 \dots 0}^{\;q_{n-1} \dots q_0}$, wobei vorübergehend eine Schreibweise gewählt wird, wo auch die Werte 0 für die p_i und q_j zugelassen sind. Dann ist $K.K'$ eine Komitante, die gleichfalls die Bedingungen 1) und 2) erfüllt und der die Mannigfaltigkeit

$$J_{n,\,n-1 \dots 0}^{\;p_{n-1}+q_{n-1} \dots p_0+q_0} \quad \text{zugeordnet ist.}$$

Kap. 4. Geometrische Deutung der Syzygien zwischen den Komitanten

Die Darstellung der Gruppe Γ_n im Relationenraum $R^g\,(V_n^k)$ ist irreduzibel, d. h. geometrisch gesprochen, es gibt mindestens eine Zerlegung des Raumes $R^g\,(V_n^k)$ als Verbindung zueinander fremd liegender Räume, die durch Γ_n je in sich, aber irreduzibel, transformiert werden, d. h. so dass sie ihrerseits keinen linearen Teilraum von sich besitzen, der als Ganzes bei Γ_n festbleibt. Doch ist es im allgemeinen nicht zu erwarten, dass diese Zerlegung nur auf eine Weise möglich ist. Aber auch die geometrische Bedeutung der verschiedenen Aufspaltungsmöglichkeiten ist sehr durchsichtig und hängt eng mmt der in der klassischen Invariantentheorie unter dem Namen «Syzygie» bekannten Erscheinung zusammen. Wir erinnern daher zunächst an die Definition der Syzygie: Wenn endlich viele Komitanten von denselben Graden in den Koeffizientenvariabeln und Raumkoordinaten die Eigenschaft haben, dass jede Linearkombination zwischen ihnen wieder eine Komitante ist, so sagt man, zwischen diesen Komitanten bestehe eine Syzygie. Dies bedeutet offenbar, dass eine lineare Relation zwischen den betreffenden Komitanten identisch erfüllt ist, wenn man ihre linearen Ausdrücke darin einsetzt. Meist fasst man die Definition der Syzygie insofern etwas allgemeiner, dass man statt linearer Relation eine beliebige Polynomrelation zwischen den Komitanten als identisch erfüllt annimmt. Da aber jedes homogene Polynom eine Linearform in den Monomen seiner Variabeln ist, kann man auch sagen, dass die Polynomrelation auf eine lineare Relation zwischen gewissen höheren, durch Produktbildung entstandenen Komitanten bedeutet. Jetzt beweisen wir folgendens.

Satz 7. Wenn die Aufspaltung des Relationenraumes $R^g\,(V_n^k)$ in irreduzibel bei Γ_n in sich transformierte Teilräume nicht eindeutig ist so liegt mindestens eine Syzygie zwischen gewissen Komitanten g-ten Grades in den Koeffizientenvariabeln vor. Diese Syzygie äussert sich darin, dass eine ganze ∞^t-Schar von Teilräumen S_p des $R^g\,(V_n^k)$ alle in kogredienter Weise durch Γ_n in sich transformiert werden. Diese ∞^t Räume S_p bilden die erzeugenden Räume S_p^I einer Segreschen Mannigfaltigkeit $S_{p,t}$ (Produkt eines S_p und eines S_t). Umgekehrt ist auch jede Syzygie auf die beschriebene Weise geometrisch zu erklären.

Beweis: Nehmen wir an, der Teilraum R' von $R^g\,(V_n^k)$ sei Kompositum von nur 2 irreduzibel durch Γ_n in sich transformierten Teilräumen $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$, d. h. es gelte

$$R = R^{(1)} \cup R^{(2)}.$$

Ist $R^{(3)}$ ein weiterer, gleichfalls irreduzibel in sich transformierter Teilraum von R', aber verschieden von $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$, so folgt zunächst, dass $R^{(3)}$ auch punktfremd zu $R^{(1)}$ und $R(^2)$ sein muss; denn ein nicht leerer Durchschnitt würde auch bei Γ_n in sich transformiert werden und damit sofort zu einem Widerspruch zur Irreduzibilität von $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ oder $R^{(3)}$ in Bezug auf Γ_n führen. Dann schliessen wir weiter, dass alle 3 Räume gleiche Dimension haben müssen. Angenommen dies wäre nicht der Fall; dann möge die Nummerierung so gewählt sein, dass die Dimensionsbeziehung.

$$\dim R^{(3)} \gtreqless \dim R^{(2)} \geq \dim R^{(1)} \tag{14}$$

gilt, wobei mindestens an einer Stelle in (14) das Zeichen $>$ steht. Je nachdem, wo dies der Fall ist, sind entweder die Räume

$$(R^{(3)} \cup R^{(2)}) \cap R^{(1)} \quad \text{oer} \quad R^{(3)} \cap (R^{(2)} \cup R^{(1)})$$

echte in sich transformierte Teilräume von $R^{(1)}$ oder $R^{(3)}$, die nach Voraussetzung nicht existieren sollten. Die gleiche Dimension aller 3 Räume sei p; da 2 von ihnen bereits R' aufspannen, hat R' dann die Dimension $2p+1$. Jetzt bestimmen aber $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ und $R^{(3)}$ eine Schar von ∞^p gemeinsamen Treffgeraden, die eine Segresche Mannigfaltigkeit $S_{p,1}$ erzeugen, der die 3 Räume $R^{(i)}$ auch angehören. Wegen des Hauptsatzes der projektiven Geometrie folgt dann, dass auch alle weiteren ∞^1 erzeugenden Räume der Schar, zu der $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ und $R^{(3}$ gehören, auch bei Γ_n in sich transformiert und die ∞^p erzeugenden Geraden der $S_{p,1}$, die eine projektive Beziehung zwischen ihnen vermitteln, als ganze bei Γ_n nur ineinander transformiert werden können. Jetzt möge der Teilraum $R' \subset R^g\,(V_n^k)$ gegeben sein mit

$$R' = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(t+1)}, \tag{15}$$

wobei die $R^{(i)}$ je unabhängig voneinander liegen mögen und Γ_n in jedem dieser Räume irreduzibel wirke. Weiterhin existiere der Teilraum $R^{(t+2)} \subset R'$, verschieden von allen übrigen $R^{(i)}$, worin Γ_n auch irreduzel wirke. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dann annehmen, dass $R^{(t+2)}$ auch nicht der Verbindung von irgendwelchen t der $t+1$ Räume (15) angehört. Wie vorher bei $t=1$ schliessen wir, dass $R^{(t+2)}$ punktfremd zu jedem der $t+1$ Räume (15) ist. Wir behaupten jetzt, dass alle $t+2$ Räume $R^{(1)}, \ldots, R^{(t+2)}$ gleiche Dimension haben und erzeugende Räume einer Segreschen $S_{p,t}$ sind. Für $t=1$ haben wir dies bereits eingesehen, sodass wir Induktion nach t ansetzen können. Wir projizieren jetzt $R^{(t+2)}$ etwa aus $R^{(t+1)}$ auf den durch $R^{(1)}, \ldots, R^{(t)}$ aufgespannten Raum, wodurch $\widetilde{R}^{(t+1)}$ entstehen möge. Nach zweimaliger

Anwendung der Induktionsannahme ergibt sich dann für alle $t+2$ Räume $R^{(1)}, \ldots, R^{(t+2)}$ die gleiche Dimension p. Wegen ihrer allgemeinen Lage zueinander bestimmen sie in der Gesamtheit ihrer t-dimensionalen Treffräume eine $S_{i,p}$, innerhalb derer sie der einen Schar von ∞^t Räumen der Dimension p angehören, die dann wegen des Hauptsatzes der projektiven Geometrie alle bei Γ_n festbleiben. Sei umgekehrt eine Syzygie zwischen den Komitanten g-ten Grades $K^{(1)}, \ldots, K^{(t+1)}$ gegeben, so ist nach der Definition der Syzygie auch jede Linearkombination der $K^{(i)}$ eine Komitante; dies bedeutet jedoch geometrisch unmittelbar, dass die den $K^{(i)}$ zugeordneten Räume der Dimension p aus R^g (V_n^k) die erzeugenden Räume einer Segreschen $S_{t,p}$ sind.

Wir werden in den nächsten Kapiteln hierzu Beispiele bringen. Zwischen Komitanten, die quadratisch in den Koeffizientenvariabeln sind, kann es noch keine Syzygie geben. Denn aus den Formeln (9) bis (12) sieht man leicht, dass die dort angegebenen Teilräume alle jeweils projektiv inäquivalent zueinander sind.

Kap. 5. Beispiele zur Geometrie der Komitanten einer binären Form

Das einfachste, aber auch bereits umfangreiche Kapitel der klassischen Invariantentheorie betrifft die invarianten Bildungen einer einzelnen binären Form. Da es nur Punktvariablen auf der Grundgeraden X_1 gibt, hat man hier auch nur zwischen reinen Invarianten und Kovarianten zu unterscheiden. Die gemäss der Formeln (9) und (10) bei den binären Formen k-ten Grades vorhandenen Komitanten, die in den Koeffizienten quadratisch sind, hat schon Salmon gefunden [8]). Ausser der einzigen quadratischen Invariante, die nur bei geradem k existiert, erwähnen wir noch die bekannteste Kovariante, die Hessesche, die Determinante der zweiten Ableitungen der Grundform. Im binären Fall ist sie in den Koeffizienten quadratisch und in den Punktkoordinaten vom Grade $2(k\text{-}2)$. Ihr ist gemäss Satz 4 demnach eine Kurve $V_1^{2(k-2)}$ zugeordnet, die in (9) und (10) unschwer wiederzufinden ist. Wir wenden uns nunmehr einigen Sonderfällen von k und g zu.

a) Quadratische Grundform.

Der Fall $k=2$, d. h. der einer binären quadratischen Grundform ist recht trivial. Als einzige Komitanten vom Grade g in den Koeffizienten findet man sofort folgende Bildungen :

(8) Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen, 2. A., Leipzig, 1877.

Grundform hoch b mal Diskriminante hoch a, wobei $g = 2a + b$. Bei $a \neq 0$ entspricht dem die Kurve V_1^b (bzw. der Punkt V_1^0 bei $b = 0$) im Relationenraum $R^g(V_1^2)$ von $\frac{1}{2}\, g\,(g-1) - 1$. Dimensionen. Lässt man dabei a und b alle ganzen Zahlen ≥ 0 mit $g = 2a + b$ durchlaufen, so ergibt sich eine Zerlegung des Relationenraumes $R^g(V_1^2)$, die genau durch die Formeln (9) und (10) beschrieben wird, wenn man dort k durch g ersetzt. Diese Übereinstimmung ist ein Sonderfall des Hermiteschen Reziprozitätssatzes (s. [4]) p. 166).

b) Kubische Grundform.

1) Komitanten vom Grade 3 in den Koeffizienten.

Der Relationenraum $R^3(V_1^3)$ hat die Dimension 9. Durch Multiplikation der Hesseschen Kovariante vom Grade 2 in den Koeffizienten und Punktkoordinaten mit der Grundform selber erhält man sofort eine Kovariante, die vom Grade 3 in den Koeffizienten und vom Grade 5 in den Koordinaten ist. Durch die ihr zugeordnete Kurve V_1^5 ist aber der Raum $R_9^3(V_1^3)$ noch nicht ausgeschöpft. Nach Salmon (s. [8]), p. 238) existiert nun noch eine Kovariante, die in beiden Sorten von Veränderlichen kubisch ist, also einer Kurve V_1^3 des R_9 zuzuordnen ist. Weitere kubische Komitanten kann es nicht geben, da ein Raum von 9 Dimensionen gerade durch je einen von 5 und 3 Dimensionen aufgespannt wird und

$$R_9^3(V_1^3) = \langle V_1^5 \rangle \cup \langle V_1^3 \rangle \tag{16}$$

gilt. Es fragt sich noch, welche Bedeutung die zweite Kovariante in unserem Sinne besitzt. Bei der Suche nach kubischen Flächen, die eine gegebene V_1^3 enthalten und ausserdem noch die zweiparametrige Untergruppe aller Autokollineationen der V_1^3, die einen gegebenen Punkt P $P \subset V_1^3$ festhalten, zulässt, kommt man von selber auf die folgendermassen erzeugte Regelfläche: Man verbinde einen beliebigen Punkt $X \subset V_1^3$ mit dem Punkt $T_2(X) \cap T_1(P)$, wobei $T_2(X)$ und $T_1(P)$ je die Schmiegebene und Tangente in den Punkten X und P bedeuten sollen. Hierdurch wird eine Regelfläche vom Cayleyschen Typ mit nur einer Leitgeraden erzeugt. Man rechnet von ihr aus, dass sie in drittem Grade von den Parametern des Punktes P abhängt. Es ist von ihr ferner bekannt, dass sie ∞^3 Projektivitäten in sich gestattet, die sich aber auf ∞^2 reduzieren, wenn man, wie in unserem Falle verlangt, dass sie auch noch die V_1^3 unverändert lassen [9]). Das System dieser so defi-

(9) S. Pascal, Repert. d. höh. Wath. II. Bd., 2, Kap. 24, § 16 (1922), p. 837.

nierten ∞^1 Cayleyschen Regelflächen muss somit der gesuchten zweiten kubischen Kovariante zugeordnet sein.

2) Komitanten vom Grade 4 in den Koeffizienten.

Der Raum R^4 (V_1^3) hat 21 Dimensionen. Erstmalig tritt hier eine Invariante auf, die Diskriminante der Grundform, der geometrisch die Tangentenfläche der V_1^3 zugeordnet ist. Die Kovarianten 4. Grades ergeben sich leicht durch Multiplikation aus den bekannten. Wir schreiben sie der Einfachheit halber in Tabellenform auf, wobei links die zugehörige Fläche beschrieben ist, die man sich stets in Abhängigkeit vom gleichen Punkt P der Grundkurve zu denken hat, während rechts die Ordnung ihrer Abhängigkeit von P, d. h. den Punktkoordinaten der Grundgeraden steht. Diese Ordnung ergibt sich stets durch Anwendung des Satzes 6.

Quadratischer Kegel und doppelt zählende Schmiegebene	8
Cayleysche Regelfläche und Schmiegebene	6
Doppelt zählender quadratischer Kegel	4
Tangentenfläche	0

Die zugehörigen Räume von den rechts angegebenen Dimensionenzahlen spannen gerade einen R_{21} auf, sodass dieser Raum ausreduziert ist.

3) Komitanten vom Grade 5 in den Koeffizienten.

Der Raum $R^5(V_1^3)$ hat 39 Dimensionen. Seine Ausreduktion ergibt sich sofort, wenn man die bekannten ko- und invarianten Flächen durch Multiplikation auf den Grad 5 kombiniert, so oft das möglich ist. Wir schreiben das Ergebnis gleich in Tabellenform auf, benutzen dabei aber, wie auch beim nächsten Fall die Abkürzungen: Qu, Sm und Cay für «quadratischer Kegel, Schmiegebene und Cayleysche Regelfläche»; die Zahl davor soll ihre jeweilige Vielfachheit andeuten:

Qu und 3.Sm	11
Cay und 2.Sm	9
2.Qu und Sm	7
Qu und Cay	5
Tangentenfläche und Sm	3

Die Dimensionen der zugehörigen Räume sind alle verschieden. Eine Syzygie kann es nach Satz 6 dazwischen also noch nicht geben. Insgesamt ergibt eine Zählung, dass der R_{39} davon genau aufgespannt wird.

4) Komitanten vom Grade 6 in den Koeffizienten.

Es handelt sich jetzt darum, den Relationenraum R_{64} (V_1^3) auszureduzieren. Unter Benutzung der soeben eingeführten Abkürzungen finden wir folgende Tabelle der sich durch Kombination ergebenden kovarianten Flächen 6. Grades nebst ihrem Abhängigkeitsgrad vom Punkt der Grundgeraden:

Qu und 4. Sm	14
Cay und 3. Sm	12
2. Qu und 2. Sm	10
Cay und Qu und Sm	8
3. Qu	6
2. Cay	6
Tangentenfläche und 2. Sm	6
Tangentenfläche und Qu	2

Würden nun die hierzu gehörigen Räume rechts alle unabhängig zueinander liegen, so ergebe die Dimensionszählung, dass sie einen Raum von 71, statt 64. Dimensionen aufspannen. Man kommt somit ganz von selbst dazu, eine Syzygienabhängigkeit festzustellen, und diese kann nach Satz 6 nur zwischen Räumen gleicher Dimensionen stattfinden. Aufgrund der Tabelle können dies nur 3 Räume von 6 Dimensionen sein. Die zugehörige Syzygie ist die erste in der Literatur auftretende. Sie ist von Cayley entdeckt worden (s. Salmon [8]) p. 240).

c) Biquadratische Grundform.

Über die Invariantentheorie der Normkurve V_1^4 in unserer geometrischen Sicht unterrichtet in vieler Hinsicht bereits das Büchlein von Telling [10]). Die zur quadratischen Invariante der $V_1{}^4$ gehörige Fundamentalquadrik werde in späteren Tabellen mit *F Qu* bezeichnet. Ausser ihr ist die einzige, in den Koeffizienten quadratische Kovariante die Hesse-Form vom 4. Grade in den Punktkoordinaten. Ihr entspricht, wie wir bereits wissen, folgendes System von quadratischen Kegeln: Man projiziere die V_1^4 aus der Tangente T_1 eines ihrer Punkte auf einen Kegelschnitt V_1^2 und nehme alle projizierenden Ebenen. Wir nennen diese Hyperflächen quadratische T_1-Kegel. Von den Komitanten höherer Grade der biquadratischen Grundform begnügen wir uns mit der Untersuchung der Gebilde 3. und 4. Grades.

(10) Telling, The rational quartic curven in space of 3 and 4 dimensions, Cambridge, 1936.

1) Komitanten vom Grade 3 in den Koeffizienten.

Die binäre biquadratische Grundform besitzt bekanntlich eine Invariante vom Grade 3, die bei Salmon mit T bezeichnet ist (s. [8]), s. 257). Wir finden die zugehörige Hyperfläche sofort in der von den Sehnen der V_1^4 erzeugten sog. Sehnenhyperfläche. Dass diese die Ordnung 3 besitzt, sieht man ohne Rechnung am besten dadurch ein. dass man die V_1^4 als allgemeinen S^4-Schnitt der Veroneseschen Fläche V_2^2 des S_5 auffasst; die Sehnenhyperfläche entsteht dann als Schnitt mit der zur V_2^2 gehörigen Determinantenhyperfläche 3. Grades. Zu jedem Punkt P der V_1^4 kann man ferner auf folgende Weise einen irreduziblen Hyperkegel 3. Grades mit der Spitze in P definieren: Man projiziere die V_1^4 aus P auf eine V_1^3, wodurch eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten von V_1^4 und V_1^3 von selber definiert ist, also auch P ein Punkt P' auf V_1^3 zugeordnet ist. Dann nehme man die P' zugehörige Cayleysche Regelfläche der V_1^3 und verbinde sie mit P. Durch leichte Rechnung, die wir hier übergehen, ergibt sich, dass das hieraus bei Veränderung von P entstehende System von kubischen Hyperkegeln vom Grade 6 in den Koordinaten der Grundgeraden X_1 abhängt. Bei Salmon (s. [8]), S. 258) ist sie mit J bezeichnet. In der folgenden Tabelle nennen wir die soeben beschriebenen kubischen Hyperkegel kurz Cayleykegel, *Sm* bedeutet jetzt Schmieghyperebene der V_1^4, die rechts hingeschriebenen Abhängigkeitsgrade ergeben sich unmittelbar:

Quadr. T_1-Kegel und *Sm*	8
Cayleykegel	6
Fundamentalquadrik und *Sm*	4
Sehnenhyperfläche	0

Der Raum R^3 (V_1^4) von 21 Dimensionen wird ersichtlich durch die Teilräume von den rechts stehenden Dimensionenzahlen genau aufgespannt. Da die Dimensionen alle verschieden sind, können noch keine Syzygien auftreten.

2) Komitanten vom Grade 4 in den Koeffizienten.

Wir finden durch Kombination aus den bekannten Bildungen eine Reihe von Komitanten von 4. Grade in den Koeffizienten, deren Grad in den Punktkoordinaten sich sofort aus Satz 6 ergibt. Ferner ergibt sich durch Projektion der V_1^4 aus einem Punkt P auf eine V_1^3 und Verbindung von P mit den Punkten der Tangentenfläche von V_1^3 eine durch Ebenen erzeugte Hyperfläche 4. Grades, die V_1^4 enthält. Sie ist ein Hyperkegel mit P als Spitze und werde Tangentenflächenkegel genannt. Die Rechnung, dass 4 ihr Abhängigkeitsgrad von den Parametern des Punktes P ist, werde hier übergangen. Unsere Tabelle lautet nunmehr:

Quadr. T_1-Kegel und 2. Sm	12
Cayleykegel und Sm	10
2. Quadr. T_1-Kegel	8
Fundamentalquadrik und 2. Sm	8
Fundamentalkegel und quadr. T_1-Kegel	4
Sehnenhyperfläche und Sm	4
Tangentenflächenkegel	4
2. Fundamentalkegel	0

Da nun 52 die Dimensionenzahl des Raumes R^4 (V_1^4) ist, anderseits die in der Tabelle angedeuteten Räume bei unabhängiger Lage einen Raum von 57 Dimensionen aufspannen würden, folgt mit Notwendigkeit, dass zwischen den 4 Kovarianten vom 4. Grade in den Koordinaten eine Syzygie bestehen muss.

Kap. 6. Beispiele zur Geometrie der Komitanten einer ternären Form

a) Quadratische Grundform.

Die zu einer ternären quadratischen Grundform gehörigen invarianten Bildungen vom Grade 2 und 3 in den Koeffizienten habe ich bereits bei früherer Gelegenheit, insbesondere in ihrer Beziehung zur höheren Kegelschnittgeometrie der Ebene nach Study, untersucht (s. die in [5]) zitierte grössere Arbeit s. 270-280). Invariantentheoretisch liegen die Dinge hier noch sehr einfach. Wir wiederholen kurz: Die V_2^2 wird durch die Tangentialebene $T_2(P)$ eines ihrer Punkte P auf einen Kegelschnitt projiziert, d. h. es gibt quadratische Kegel mit der Spitze T_2 (P), wobei P ein beliebiger Punkt der V_2^2 ist, die V_2^2 ganz enthalten. Diesen Kegeln entsprechen die Punkte einer den Raum R_5^2 (V_2^2) aufspannenden Fläche V_2^2, die hier besser mit $J_{2,1}^{2}$, zu bezeichnen ist. Die Ebenen der auf der V_2^2 liegenden Kegelschnitte V_1^2 oder auch die Tangentialebenen der V_2^2 erzeugen die Diskriminantenhyperfläche 3. Grades, der einzigen Grundinvariante einer ternären quadratischen Form. Nimmt man noch das System der den $V_1^2 \subset V_2^2$, d. h. den Punkten der Grundebene X_2 zugeordneten Hyperebenen des zu V_2^2 dualen Gebildes $\widehat{V}_2^2$, denen die Grundform als ihre eigene Kovariante entspricht, hinzu, so hat man alle Bausteine in der Hand, aus denen man nach Belieben durch Multiplikation alle Komitanten von beliebigem Koeffizientengrade erhält. Wir schreiben das Ergebnis nur für die Koeffizientengrade 3 und 4 hin, wobei rechts die Bildmengen im $R_{27}^3\,(V_2^2)$, bzw, im $R_{80}^4\,(V_2^2)$ mit den Dimensionen der von ihnen aufgespannten irreduziblen Darstellungsräume angegeben sind:

1) Komitanten vom Grade 3 in den Koeffizienten.

Quadr. $T_2(P)$-Kegel und Hyperebene von $\widehat{V}_2^2$, die P enthält	$J_2, {}^{2\,2}_{1\,0} \subset S_{26}$
Diskriminantenhyperfläche	Punkt S_0

2) Komitanten vom Grade 4 in den Koeffizienten

Quadr. $T_2\,(P)$-Kegel und 2. Hyperebene von $\widehat{V}_2^2$	$J_2, {}^{4\,2}_{1\,0} \subset S_{59}$
2. Quadr. $T_2\,(P)$-Kegel	$J_2, {}^{4}_{1} \subset S_{14}$
Diskriminantenhyperfläche und Hyperebene von $\widehat{V}_2^2$	$J_2, {}^{2}_{0} \subset S_5$

b) Kubische Grundform.

Gegeben sei jetzt eine V_2^3 des S_9. Die höchst spezialisierten quadratischen V_2^3 enthaltenden Kegel haben als Spitzenraum einen S_6, der durch den Schmiegraum $T_6\,(P)$ eines Punktes P der V_2^3 und eine P enthaltende $V_1^3 \subset V_2^3$ aufgespannt wird. Diese Kegel sind also den Punkt-Geraden-Elementen der Grundebene X_2 eineindeutig zugeordnet, und der Gesamtheit dieser Kegel entspricht eine den Raum $R_{26}^2\,(V_2^3)$ aufspannende $J_2, {}^2\,{}^2_1$ (s. [5]), Teil VI, S. 277).

Wir gehen jetzt gleich zum Studium der in den Koeffizienten kubischen Komitanten über. Hierzu muss man vor allem folgende Tatsachen berücksichtigen: *a)* Die V_2^3 wird aus dem Schmiegraum $T_5\,(P)$ eines ihrer Punkte in eine V_1^3 projiziert. *b)* Die V_2^3 wird aus einer V_1^3 in eine V^2 projiziert. Hiermit ergeben sich sofort kubische Hyperflächen, die mit der V_2^3 verbunden sind, wenn man eines der soeben festgestellten Projektionszentren mit einer kovarianten Hyperfläche von V^3 und V_2^3 verbindet. Nimmt man hierzu z. B. eine Cayleysche Regelfläche der V_1^3, so erhält man ein System sog. Cayleykegel mit T_5-Spitze, kurz T_5-Cayleykegel. Diese Kegel hängen, wie man sich ausrechnen kann, je vom Grade 3 in den Punkt- und Geradenkoordinaten der Grundebene X_2 ab. Eine weitere Komitante, die vom Grade 3 in den Punktkoordinaten von X_2 erhält man dadurch, dass den Raum einer V_1^3 der V_2^3 mit der Determinantenhyperfläche der durch Projektion erhaltenen V_2^2 verbindet. Die V_2^3 sei in der Parameterdarstellung (7) für $n = 2$, $k = 3$ definiert, und durch $u_0 = 0$ sei die V_1^3 festgelegt, dann hat die durch Projektion entstandene V_2^2 die Darstellung :

$$(17) \quad x_{300} = u_0^2,\ x_{210} = u_0 u_1,\ x_{201} = u_0 u_2,\ x_{111} = u_1 u_2,\ x_{120} = u_1^2,\ x_{102} = u_2^2.$$

Die zugehörige Determinantenhyperfläche ist aber, wie eine Ausrechnung sofort ergibt, der Faktor x_0^3 der Hesseschen Kovariante unserer kubischen Grundform.

Durch Multiplikation der erst erwähnten quadratischen Kegel zu V_2^3 mit den Hyperebenen von $\widehat{V_2^3}$ ergibt sich eine weitere Komitante, die nach Satz 6 je den Grad 5 und 2 in den Punkt- und Geradenkoordinaten von X_2 hat. Wie sich aber aus der Dimensionszählung ergibt (s. die spätere Tabelle), ist der Raum $R_{164}^{(3)}$ (V_2^3) durch die den bisherigen Komitanten zugeordneten Räume noch nicht ganz aufgespannt. Es existiert aber noch eine sog. Kontravariante zur ternären kubischen Grundform, die den Grad 3 in den Geradenkoordinaten von X_2 besitzt. Es ist diejenige Kontravariante, die, gleich 0 gesetzt, die sog. Cayleysche Kurve der durch Nullsetzen der Grundform gegebenen Kubik definiert. ([11]) Ihre geometrische Bedeutung in unserer Auffassungsweise erhält man auf folgende Weise: Wir projizieren die V_2^3 aus der Tangentialebene T_2 eines Punktes P, etwa des Punktes mit den Parametern $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$, auf eine Fläche $F_2^{2,3}$ des S_6. Bei unsere Parameterannahme hat diese Fläche dann die Parameterdarstellung.

$$(18) \quad \begin{aligned} &x_{120} = u_0\, u_1^2,\ x_{111} = u_0\, u_1\, u_2,\ x_{102} = u_0 u_2^2, \\ &\qquad x_{030} = u_1^3,\ x_{021} = u_1^2\, u_2,\ x_{012} = u_1\, u_2^2,\ x_{003} = u_2^3. \end{aligned}$$

Diese Fläche $F_2^{2,3}$ ist eine rationale Normregelfläche 5. Grades des S_6 und wird durch Beziehung der Punkte eines Kegelschnittes auf die Punkte einer Normkurve V_1^3, wie aus (18) hervorgeht und auch durch unsere Benennung angedeutet werden soll, erzeugt. Die $F_2^{2,3}$

([11]) S. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, Leipzig 1873, S. 183.

besitzt ∞^2 Leitkurven V_1^3, und die von allen diesen V_1^3 aufgespannten Räume erzeugen eine Hyperfläche D_5^3 3. Grades, die in den äusseren Koordinaten von (18) die Gleichung

$$
(19) \qquad x_{030}\,x_{003}\,x_{111} - x_{030}\,x_{102}\,x_{012} - x_{003}\,x_{120}\,x_{021} - \\
- x_{021}\,x_{012}\,x_{111} + x_{120}\,x_{012}^2 + x_{102}\,x_{021}^2 = 0
$$

besitzt. Durch Vergleich mit der Cayleyschen Kontravariante (vgl. [11]), p. 230) ergibt sich, dass (19) mit dem Leitglied derselben übereinstimmt. Bei der V_2^3 treten nun kubische Kegel auf mit einer beliebigen Tangentialebene T_2 als Spitze über der Hyperfläche (19). Wir wollen sie T_2-Kegel über der zu $F_2^{2,3}$ gehörigen D_5 nennen. Diese Gebilde sind also das gesuchte geometrische Äquivalent in unserer Betrachtungswieise zur Cayleyschen Kontravariante. Wir schreiben zum Schluss in der üblichen Form eine Tabelle der nunmehr vollständigen Komitanten zur ternären kubischen Grundform vom Koeffizientengrade 3 auf.

Quadr. Kegel der V_2^3 und Hyperebene von $\widehat{V_2^2}$	$J_2,\ \substack{2\\1}\ \substack{5\\0}$ des S_{80}
T^5-Cayleykegel	$J_2,\ \substack{3\\1}\ \substack{3\\0}$ des S_{63}
$< V_1^3 >$-Kegel über der Determinantenhyperfläche	$J_2,\ \substack{3\\0}$ des S_9
T_2-Kegel über der zu $F_2^{2,3}$ gehörigen D_5	$J_2,\ \substack{3\\1}$ des S_9