REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS POR SERIES DE POLINOMIOS

POR

J. M.ª ORTS

1. El hecho de que la ecuación diferencial de los polinomios $P_n(x)$ de LEGENDRE :

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n+1) P_n = 0 \qquad [1]$$

quede incluída, como caso particular, en la de tipo más general de RIEMANN con tres singularidades :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)\, y = 0 \\ &p(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}, \\ &q(x) = \left(\frac{A'}{x-a} + \frac{B'}{x-b} + \frac{C'}{x-c}\right) \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

de la cual se pasa, mediante un simple cambio de variables, a la

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha \beta y = 0 \qquad [3]$$

correspondiente a la función hipergeométrica :

$$F(\alpha, \beta, \gamma ; x) = 1 + \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\, \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n \cdot \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n \qquad [4]$$

ha conducido a una fórmula, actualmente ya clásica y bien conocida, que permite expresar los polinomios de LEGENDRE, mediante funciones del mencionado tipo. [a]

(a) WHITTAKER and WATSON : *A cours of Modern Analysis*, págs. 283-304-311.

La propiedad recíproca, es decir, la representación analítica de las funciones hipergeométricas mediante series de polinomios de LEGENDRE, se reduce al cálculo de los coeficientes (a_n) dados por :

$$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}(2n+1)\int_{-1}^{+1} F(\alpha, \beta, \gamma; x)\, P_n(x)\, dx \\ \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \end{array} \right\} \quad [5]$$

y al ulterior examen de la convergencia del desarrollo.

En el caso concreto en que los parámetros β y γ son iguales, es decir, cuando se trata de la función $(1-x)^{-\alpha}$, la aplicación de la fórmula [2] conduce, como ya es sabido, a la serie de STIELTJES-NEUMANN :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{(1-x)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \\ a_0 = \frac{1}{1-\alpha},\ a_1 = \frac{3}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, \ldots a_n = (2n+1)\frac{\alpha(\alpha+1), \ldots (\alpha+n-1)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n+1-\alpha)} \end{array} \right\} [6]$$

la cual, para $0 < \alpha < \frac{3}{4}$, converge uniformemente en todo intervalo $(-1+\partial, 1-\partial)$ interior al $(-1, +1)$, según se prueba apoyándose en el teorema de HOBSON acerca de la convergencia del desarrollo en serie de polinomios de LEGENDRE correspondiente a una función $f(x)$ tal que $f(x)(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$ es sumable en el intervalo $(-1, +1)$. [(b)]

Partiendo de la fórmula [6] de STIELTJES-NEUMANN, puede obtenerse el desarrollo en serie de polinomios de toda función hipergeométrica en la que uno de los dos parámetros α o β, por ejemplo el primero, esté comprendido entre 0 y $\frac{3}{4}$; [(c)] basta para ello utilizar la representación de la función hipergeométrica mediante la integral definida :

$$\left. \begin{array}{l} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 (1-tx)^{-\alpha} t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\, dx \\ \qquad R(\beta) > 0,, \qquad R(\gamma-\beta) > 0 \end{array} \right\} [7]$$

(b) VITALI-SANSONE : *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* Parte 2.ª, págs. 213 y 218.

(c) La condición de estar comprendida en el intervalo $\left(0, \frac{3}{4}\right)$, puede imponerse indistintamente a uno cualquiera de los dos parámetros α o β a causa de la simetría respecto a ambos de la función hipergeométrica.

a través de la cual, como asimismo se sabe, puede efectuarse la prolongación analítica de la serie de potencias [4], más allá de su círculo de convergencia. [(d)]

Al cambiar x en tx en el desarrollo de STIELTJES-NEUMANN, resulta:

$$(1 - tx)^{-\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, P_n(tx) \qquad [8]$$

serie que para $0 < t < 1$, y $-1 + \delta < x < 1 - \delta$ es uniformemente convergente; por tanto, al substituir en [7] podrá efectuarse la integración término a término, después de lo cual resultará un desarrollo, asimismo convergente, de la forma:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{2^\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, Q_n^{(\beta,\gamma)}(x) \qquad [9]$$

en el cual $Q_n^{(\beta,\gamma)}(x)$, son polinomios de grado n en x:

$$Q_n^{(\beta,\gamma)}(x) = \mu_n^{(0)} x^n + \mu_n^{(2)} x^{n-2} + \ldots \qquad [10]$$

cuyos coeficientes $\mu_n^{(k)}$ se expresan en función de los $\lambda_n^{(k)}$ de los $P_n(x)$ de LEGENDRE:

$$P_n(x) = \lambda_n^{(0)} x^n + \lambda_n^{(2)} x^{n-2} + \ldots \qquad [11]$$

mediante las fórmulas:

$$\mu_n^{(k)} = \lambda_n^{(k)} \int_0^1 t^{\beta+n-k-1} (1 - t)^{\gamma-\beta-1} \, dt = \frac{\Gamma(\beta+n-k)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n-k)} \lambda_n^{(k)} \qquad [12]$$

Con ello se logra una representación analítica de la función hipergeométrica intermedia, por decir así, entre la serie de potencias [1] y la fórmula integral [7]; representación que constituye una generalización de la serie de STIELTJES-NEUMANN, a la cual se reduce en el caso límite en que es $\beta = \gamma$.

La convergencia uniforme de la serie de polinomios (9), resulta como inmediata consecuencia de esa misma propiedad de la serie de STIELTJES-NEUMANN.

(*d*) Véase, par ejemplo, GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*. T. 2.°, pág. 260.

Pues si designamos por M el máximo de la función $t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}$ en el intervalo $(0, 1)$ [e], se tiene, para todo $0 < t < 1$, y $-1+\partial < x < 1-\partial$, desde un cierto valor de n en adelante:

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_n\, P_n\,(tx)\right| < \frac{\varepsilon}{M} \tag{13}$$

siendo ε un número positivo fijado arbitrariamente; y si multiplicamos ambos miembros de esta desigualdad por el número positivo $t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}$ se tendrá también:

$$\left|\sum_{k+1}^{\infty} a_n\, P_n\,(tx)\; t^{\beta-1}\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right| < \varepsilon \tag{14}$$

lo cual hace patente la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{k+1}^{\infty} a_n\, P_n\,(tx)\; t^{\beta-1}\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}$$

y por tanto su integrabilidad término a término, es decir:

$$\int_0^1 \left[\sum_0^{\infty} a_n\, P_n\,(tx)\; t^{\beta-1}\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right] dt =$$

$$= \sum_0^{\infty} a_n \int_0^1 P_n\,(tx)\; t^{\beta-1}\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\, dt = \sum_0^{\infty} a_n\, Q_n^{(\beta,\gamma)}\,(x) \tag{15}$$

verificándose que:

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_n\, Q_n^{(\beta,\gamma)}\,(x)\right| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} a_n \int_0^1 P_n\,(tx)\; t^{\beta-1}\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\, dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \left[\sum_{n+1}^{\infty} a_n P_n\,(tx)\; t^{\beta-1}\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\right] dt\right| < \varepsilon \tag{16}$$

lo que prueba la convergencia uniforme de la serie de polinomios [9].

Los polinomios $Q_n^{(\beta,\gamma)}$ que intervienen en el desarrollo [9], pueden expresarse como funciones lineales de los $P_n\,(x)$, $P_{n-2}\,(x)$, ... de Legendre; basta para ello substituir en el segundo miembro de [10] cada una

(e) El máximo en cuestión corresponde al valor $t = \dfrac{\beta-1}{\gamma-2}$.

de las potencias x^n, x^{n-2}, ... por sus respectivas expresiones en función de estos últimos:

$$\left.\begin{array}{l} x^n = c_n{}^{(0)}\, P_n(x) + c_n{}^{(2)}\, P_{n-2}(x) + \dots \\ x^{2-2} = \qquad\qquad\quad c_{n-2}{}^{(0)}\, P_{n-2}(x) + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad [17]$$

fórmulas que definen una substitución lineal de coeficientes: [f]

$$c_r{}^{(s)} = \frac{2s+1}{2} \int_{-1}^{+1} x^r\, P_s(x)\, dx = \frac{\gamma\,!}{(\gamma - s)!!\ (\gamma + s + 1)!!} \qquad [18]$$

De este modo se obtiene:

$$Q_n{}^{(\beta,\gamma)}(x) = A_n{}^{(0)}\, P_n(x) + A_n{}^{(2)}\, P_{n-2}(x) + \dots \qquad [19]$$

y con ello quedará representada la función hipergeométrica $F(a, \beta, \gamma; x)$, por un desarrollo en serie, cuyos sucesivos términos son combinaciones lineales de los polinomios de LEGENDRE; lo cual constituye, en cierto modo, la inversión de la fórmula que da dichos polinomios por medio de la función hipergeométrica.

* * *

2. La restricción impuesta a uno de los parámetros α o β de quedar entre los límites 0 y $\frac{3}{4}$, no excluye que puedan obtenerse los desarrollos en serie de polinomios de funciones hipergeométricas $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ para otros valores de aquellos parámetros, con tal que estén incluídos en intervalos de la forma $\left(-m, -m + \frac{3}{4}\right)$, siendo m un número entero y positivo.

Pues se tiene:

$$\int_0^1 (1 - tx)^{-\alpha}\, t^{\beta}\, (1 - t)^{\gamma-\beta-1}\, dt =$$

$$= \int_0^1 (1 - tx)^m\, (1 - tx)^{-(\alpha+m)}\, t^{\beta-1}\, (1 - t)^{\gamma-\beta-1}\, dt \qquad [20]$$

(f) VITALI-SANSONE (loc. cit., pág. 174).

con lo que al desarrollar la potencia $(1 - tx)^m$ se obtendrá una suma de términos de la forma:

$$c_q\, x^q \int_0^1 (1 - tx)^{-(\alpha+m)}\, t^{\beta+q-1}\, (1 - t)^{\gamma-\beta-1}\, dt =$$

$$= c_q\, x^q \int_0^1 (1 - tx)^{-(\alpha+m)}\, t^{(\beta+q)-1}\, (1 - t)^{(\gamma+q)-(\beta+q)-1}\, dt \qquad [21]$$

Aplicando a la última integral — en la que $0<\alpha+m<\frac{3}{4}$ — el método anterior, resultará el desarrollo de la función $F(\alpha + m, \beta + q, \gamma + q; x)$, en serie de polinomios. Basta entonces sumar los desarrollos correspondientes a las funciones que se obtienen dando a q los valores $0, 1, 2, 3, \ldots m$, para hallar el de $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$.

* * *

3. *Aplicación a un caso concreto*

Tomando $\gamma = 1$ la serie hipergeométrica es:

$$F(\alpha, \beta, 1; x) = 1 + \frac{\alpha\,\beta}{1}\, x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{(1\cdot 2)^2}\, x^2 + \ldots \qquad [22]$$

la cual puede considerarse como resultado de la composición «a lo HADAMARD» de estas dos

$$\left.\begin{aligned} 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots &= (1 - x)^{-\alpha} \\ 1 + \frac{\beta}{1} x + \frac{\beta(\beta+1)}{1\cdot 2} x^2 + \ldots &= (1 - x)^{-\beta} \end{aligned}\right\} \qquad [23]$$

En este caso, la fórmula [12] da:

$$\mu_n^{(k)} = \frac{\Gamma(\beta+n-k)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1 + n - k)} \quad \lambda_n^{(k)} = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n - k)}\, \Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\beta) \qquad [24]$$

pero se sabe que:

$$\Gamma(\beta)\, \Gamma(1 - \beta) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\beta} \qquad [25]$$

con lo cual se puede calcular los coeficientes de los polinomios $Q_n^{(\beta,1)}(x)$ que intervienen en el desarrollo [9].

En particular para $\alpha = \frac{1}{2}$, la serie de STIELTJES-NEUMANN es: [g]

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sum_{0}^{\infty}{}' P_n(x) \qquad [26]$$

y si suponemos que es también $\beta = \frac{1}{2}$, se obtiene el desarrollo de la función hipergeométrica:

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 ; x\right) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty}{}' Q_n^{\left(\frac{1}{2}, 1\right)}(x) \qquad [27]$$

en el cual los coeficientes $\mu_n^{(k)}$ del polinomio $Q_n^{\left(\frac{1}{2}, 1\right)}(x)$, están dados en función de los $\lambda_n^{(k)}$ del $P_n(x)$ de LEGENDRE por las fórmulas:

$$\mu_n^{(k)} = (-1)^{n-k} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} \lambda_n^{(k)} \qquad [28]$$

(g) La fórmula [11] puede deducirse directamente a partir de la función generatriz de los polinomios $P_n(x)$: $(1 - 2xy + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma P_n(x) y^n$ haciendo $y = 1$.