

CEROS DE LAS FUNCIONES DE UNA CLASE NO CUASI-ANALÍTICA EN R^n PROLONGACIÓN NO CUASI-ANALÍTICA

POR

BALTASAR R. SALINAS

Sea $\mathfrak{D}^n(G)$ la familia de todas las funciones indefinidamente diferenciables en un conjunto abierto G de R^n . Designamos por $\mathfrak{E}^n\{m_v; G\}$, $m_v > 0$, la clase de todas las funciones f de $\mathfrak{D}^n(G)$ tales que

$$\left| \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} f(x) \right| \leq m_p \quad (p = p_1 + \dots + p_n; \quad p_v = 0, 1, 2, \dots)$$

para todo x de G , y por $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v; G\}$ la reunión de todas las clases $\mathfrak{E}^n\{m_v'; G\}$ con $m_v' = ck^v m_v$, $c > 0$ y $k > 0$. Si $G = R^n$, con objeto de abreviar, escribiremos $\mathfrak{D}^n$, $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ y $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$.

DEFINICIÓN 1. Se dice que una clase $\mathfrak{E}^n$ es *cuasi-analítica*, en abreviatura *c.a.*, cuando toda función f de $\mathfrak{E}^n$ queda unívocamente determinada por los valores de todas sus derivadas parciales en un punto x_0 . En caso contrario, se dirá que $\mathfrak{E}^n$ es *no cuasi-analítica*, en abreviatura *n. c. a.*

En este trabajo, vamos a contestar a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente que debe cumplir la sucesión $\{m_v\}$, para que la clase $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ o $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ sea cuasi-analítica?
- b) Si $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ es una clase no cuasi-analítica, ¿existe una función f de $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ que toma, exactamente, el valor 0 en un conjunto cerrado F_0 , prefijado?
- c) Si $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ es una clase no cuasi-analítica, ¿existe una función f de $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ que toma, justamente, los valores 0 y 1 en dos conjuntos cerrados y disjuntos F_0 y F_1 de R^n ?
- d) Si $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ es una clase no cuasi-analítica y si f_0 es una función, definida en un conjunto compacto F de R^n , que admite una prolongación f_1 en un conjunto abierto $G \supset F$, contenida en la clase $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v; G\}$, ¿existe una prolongación f de f_0 , que pertenece a $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$?

La prolongación de una función diferenciable, de clase r , en un conjunto cerrado a todo el espacio R^n , ha sido estudiada por WHITNEY [7] [8] y [9].

§ 1. CONSIDERACIONES GENERALES

Sea E un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ un espacio lineal de funciones reales y continuas en E ⁽¹⁾. Dada una sucesión $\{L_\mu\}$ de transformaciones lineales de $\mathfrak{F}$ en sí, con $L_0 f = cf$ para una cierta constante $c > 0$, dotamos a $\mathfrak{F}$ de una topología mediante el sistema fundamental $\mathfrak{B}$ de entornos, definido por los conjuntos $V(f; \varepsilon; m)$. $V(f; \varepsilon; m)$ es el conjunto de todas las funciones g de $\mathfrak{F}$, tales que

$$(1.1) \quad \|g - f\|_\mu = \sup_{x \in E} |L_\mu g(x) - L_\mu f(x)| < \varepsilon$$

para $\mu = 0, 1, \dots, m$. Por consiguiente, $\{f_n\}$ converge hacia f , si y sólo si $\{L_\mu f_n(x)\}$ converge uniformemente en E hacia $L_\mu f(x)$ para cada μ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$).

HIPÓTESIS 1. $\mathfrak{F}$ es un espacio completo, es decir, la condición $\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ q \rightarrow \infty}} \|f_p - f_q\|_\mu = 0$ para cada μ ($f_n \in \mathfrak{F}$), implica la convergencia de $\{f_n\}$ hacia una función f de $\mathfrak{F}$.

Designamos por $\mathfrak{F}_{0,1}$ el conjunto de todas las funciones $f \geq \theta$ de $\mathfrak{F}$, tales que $\|L_\mu f(x)\| \leq 1$ para cada x de E y todo μ . Evidentemente, $\mathfrak{F}_{0,1}$ es un conjunto convexo, cerrado y no vacío, pues $\theta \in \mathfrak{F}_{0,1}$.

LEMA 1. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de $\mathfrak{F}_{0,1}$ y si F_n es el conjunto (cerrado) de ceros de f_n , existe una función f de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que se anula, exactamente, en $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Demostración. Como $|L_\mu f_n(x)| \leq 1$ en E , la sucesión

$$(1.2) \quad g_n = \sum_{v=1}^n 2^{-v} f_v \quad (n = 1, 2, \dots)$$

converge hacia una función f de $\mathfrak{F}$ que pertenece a $\mathfrak{F}_{0,1}$, por ser $\mathfrak{F}_{0,1}$ un conjunto cerrado, y se anula, exactamente, en F .

HIPÓTESIS 2. En E vale el segundo axioma de numerabilidad, es decir E posee una base numerable U de entornos.

(1) Designaremos siempre por θ la función cero de $\mathfrak{F}$.

TEOREMA 1. A cada conjunto A de E , se le puede asociar un conjunto cerrado $F = \varphi(A)$ de E , tal que existe una función f de $\mathfrak{F}_{0,1}$ cuya totalidad de ceros es F y cada f de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que se anula en A , se anula también en F .

Demostración. Sea $\{f_\lambda; \lambda \in A\}$ la familia de todas las funciones f_λ de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que se anulan en A , y F_λ el conjunto de ceros de f_λ . Evidentemente, $\{f_\lambda; \lambda \in A\}$ no es vacía y cada f_λ se anula en $F = \bigcap F_\lambda$. Por otra parte, por la hipótesis 2, se puede extraer de $\{f_\lambda; \lambda \in A\}$ una sucesión $\{f_v\}$ con intersección $\bigcap_{v=1}^{\infty} F_v = F$. La función $f = \sum_{v=1}^{\infty} 2^{-v} f_v$, construida en el lema 1, tiene precisamente F por conjunto de ceros y pertenece a $\mathfrak{F}_{0,1}$.

DEFINICIÓN 2. Diremos que $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$ es una clase libre (*), si para cada punto x de E y todo entorno U_x de x , existe una función f de $\mathfrak{F}^*$ que toma el valor 0 en el complementario de U_x , sin anularse en x .

TEOREMA 2. Si $\mathfrak{F}_{0,1}$ es una clase libre, para cada conjunto cerrado F_0 de E existe una función $f(x) = f(x; F_0)$ de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que se anula, justamente, en F_0 .

Demostración. Por el teorema 1, es suficiente demostrar que $\varphi(F_0) = F_0$. Si fuese $F = \varphi(F_0) \neq F_0$, existiría un $x \in F - F_0$ y un entorno U_x de x tal que $U_x \cap F_0 = \emptyset$. Ahora bien, como $\mathfrak{F}_{0,1}$ es una clase libre, existe una función g de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que toma el valor 0 en $E - U_x$ con $g(x) \neq 0$. Por consiguiente, $\psi = (f + g)/2$ es una función de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que se anula en F_0 pero no en F , pues $\psi(x) = g(x)/2$. Esto es contradictorio con $F = \varphi(F_0)$, luego $\varphi(F_0) = F_0$.

TEOREMA 3. Si $\mathfrak{F}_{0,1}$ es una clase libre y para cada par de funciones f_1 y f_2 de F se tiene $f_2/f_1 \in F$ cuando f_1 carece de ceros. Dado un par de conjuntos cerrados y disjuntos F_0 y F_1 de E , existe una función f de $\mathfrak{F}$ que toma el valor 0 en F_0 y el valor 1 en F_1 , con $0 < f(x) < 1$ en el complementario de $F_0 \cup F_1$.

Demostración. Si $f(x; F_k)$ es la función obtenida en el teorema 2 para F_k ($k = 0, 1$), la función

$$(1.3) \quad f(x) = \frac{f(x; F_0)}{f(x; F_0) + f(x; F_1)}$$

satisface las condiciones requeridas.

TEOREMA 4. Si $\mathfrak{F}_{0,1}$ es una clase libre y existe una función $g \leq 1$ de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que toma los valores 0 y 1 en los conjuntos cerrados F_0 y F_1 , respectivamente, se puede determinar una constante $a = a(F_0, F_1)$, $0 < a \leq 1$, y una función $f \leq a$ de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que toma exactamente los valores 0 y a en F_0 y F_1 .

(*) Este concepto es análogo al de clase no cuasi-analítica.

Demostración. Sea $\{f_\lambda; \lambda \in A\}$ la familia de todas las funciones $f_\lambda \leq \alpha_\lambda$ ($0 < \alpha_\lambda \leq 1$) de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que toman los valores 0 y α_λ en F_0 y F_1 . Esta familia no es vacía, puesto que g pertenece a ella. Procediendo ahora de igual forma que en el teorema 1 se construyen dos conjuntos cerrados $F_0^* \supset F_0$ y $F_1^* \supset F_1$ con las siguientes propiedades: 1.^a Cada función f_λ toma los valores 0 y α_λ en F_0^* y F_1^* . 2.^a Existe una función $f = f_{\lambda_0}$ que toma justamente los valores 0 y $a = \alpha_{\lambda_0}$ en F_0^* y F_1^* .

Vamos a ver que $F_0^* = F_0$ y $F_1^* = F_1$. En efecto, si fuese $F_0^* \neq F_0$, se podría determinar un punto x de $F_0^* - F_0$ y un entorno U_x de x , disjunto con F_0 y tal que $f(x') < a/2$ para cada x' de U_x . Por otra parte, como $\mathfrak{F}_{0,1}$ es libre, existe una función φ de $\mathfrak{F}_{0,1}$ que se anula en el complementario de U_x pero no en x . Elijamos el número positivo $\varepsilon \leq 1$ de manera que sea $\varepsilon \varphi(x') < a/2$ para todo x' de E , cosa posible por ser $|L_0 \varphi(x')| \leq 1$. Entonces, la función

$$\psi = \frac{f + \varepsilon \varphi}{2}$$

pertenece a la familia $\{f_\lambda; \lambda \in A\}$, puesto que es una función de $\mathfrak{F}_{0,1}$, con $\theta \leq \psi \leq a/2$ que toma los valores 0 y $\frac{a}{2}$ en F_0 y F_1 , pero no se anula en $x \in F_0^*$. Esto es contradictorio con la propiedad 1.^a de F_0^* , luego $F_0^* = F_0$. De forma análoga resulta $F_1^* = F_1$, con lo cual queda demostrado el teorema.

§ 2. CLASES NO CUASI-ANALÍTICAS EN R^n

En esta parte tomamos $E = R^n$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{D}^n$ y

$$(2.1) \quad L_\mu = L_{p_1, \dots, p_n} = \frac{1}{m_p} \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \quad (p = p_1 + \dots + p_n)$$

$$\left(\begin{array}{l} \mu = \mu(p_1, \dots, p_n) \text{ y } p_v = p_v(\mu) \\ \mu \text{ y } p_v = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

para una sucesión positiva prefijada $\{m_v\}$. Desde luego, en este caso se cumplen las hipótesis 1 y 2. Para que $\mathfrak{F}_{0,1}$ sea libre, es preciso que $\{m_v\}$ verifique alguna condición. En efecto, si $m_v = v!$ ($v = 0, 1, 2, \dots$), $\mathfrak{F}_{0,1}$ es una clase analítica en R^n , y, por consiguiente, no libre.

TEOREMA 5. *Para que la clase $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ o $\tilde{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ sea cuasi-analítica, es condición necesaria y suficiente que $\{m_v\}$ cumpla la condición de DENJOY-CARLEMAN.*

Demostración. La afirmación es, desde luego, cierta, como se sabe, para $n = 1$.

Es condición necesaria. En efecto, si $\{m_v\}$ no verifica la condición de DENJOY-CARLEMAN, se puede construir una función $\psi \neq \theta$ de $\mathfrak{E}^1\{m_v\}$ con todas sus derivadas nulas en $t = 0$. Por tanto, $f(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1 + \dots + x_n)$ es una función $f \neq \theta$ de $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ con todas sus derivadas parciales nulas en $x = 0$.

Es condición suficiente. Si f_1 y f_2 es un par de funciones de $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ con las mismas derivadas parciales en $x = 0$, la función $\psi(t) = f_2(tx) - f_1(tx)$ pertenece a $\mathfrak{E}^1\{m_v\}$ y tiene todas sus derivadas nulas en $t = 0$. Por consiguiente, si $\{m_v\}$ satisface la condición de DENJOY-CARLEMAN, resulta $\psi(t) \equiv 0$ y en particular $f(x) = 0$, luego $f = \theta$.

OBSERVACIÓN 1. El teorema 5 es cierto para las clases $\mathfrak{E}^n\{m_v; G\}$ y $\mathfrak{E}^n\{m_v; G\}$, si G es un conjunto abierto y conexo, esto es, un recinto.

LEMA 2. Si $\mathfrak{E}\{m_v\}$ es una clase n. c. a. en la recta, existe una función f de $\mathfrak{E}\{m_v\}$, $f \neq \theta$ y $f \geq \theta$, que toma el valor 0 en el complementario del intervalo $(0,1)$.

Demostración. Véase MANDELBROJT [5], pág. 65 ⁽³⁾.

LEMA 3. Si $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ es una clase n. c. a., existe una función g de $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$, $g \neq \theta$ y $g \geq \theta$, que toma el valor 0 en $\|x\| = \sqrt{\sum_1^n x_k^2} \geq 1$.

Demostración. Sea $f(t)$ la función construida en el lema 2 para $\mathfrak{E}\{8^{-v} m_v\}$, entonces $g(x) = f(r^2)$, $r = \|x\|$, satisface las condiciones exigidas. En efecto, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) &= f'(r^2) 2x_i \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(x) &= f''(r^2) 2x_i 2x_j + f'(r^2) 2\delta_{ij} \quad (\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

para obtener una cota de

$$\frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} g(x), \quad (p = p_1 + \dots + p_n)$$

es suficiente calcular el coeficiente c_p de $a^p/p!$ en el desarrollo

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{M_{\mu}}{\mu!} (2+h)^{\mu} h^{\mu}, \quad M_{\mu} = \text{Sup } |f^{(\mu)}(t)| \leq 8^{-\mu} m_{\mu}.$$

⁽³⁾ Para las clases $\mathfrak{E}\{m_v\}$ se puede aplicar otro teorema, MANDELBROJT [6], pág. 102.

Ahora bien, $M_\mu = M_p/(p - \mu)!$ para $p \geq \mu$, luego

$$c_p \leq M_p \sum_{p/2 \leq \mu \leq p} 2^{2\mu-p} \binom{p}{\mu} \binom{\mu}{p-\mu} \leq 4^p M_p \sum_{\mu=0}^p \binom{p}{\mu} \leq m_p.$$

Las demás condiciones son obvias.

LEMA 4. Si $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ es una clase n. a. c., para cada $r > 0$ se puede determinar un punto $a_r = (a_1, \dots, a_n)$ de $\|a\| < r$, tal que para toda esfera $\|x - x_0 - a_r\| < r$ de R^n , existe una función $f \geq \theta$ de $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ que toma el valor 0 en $\|x - x_0 - a_r\| \geq r$, pero no en x_0 .

Demostración. Si $g(x)$ es la función construida en el lema 3 para la clase no cuasi-analítica $\mathfrak{E}^n\{r^v m_v\}$, existe un punto $b_r = -r^{-1} a_r$ de $\|b\| < 1$ que no es un cero de g , pues $g \neq \theta$ en $\|x\| < 1$. Por tanto,

$$f(x) = g(r^{-1}(x - x_0 - a_r))$$

cumple las condiciones exigidas.

Como consecuencia del teorema 5 y del lema 4, se obtiene:

TEOREMA 6. Para que $\mathfrak{F}_{0,1}$ sea libre, es condición necesaria y suficiente que $\{m_v\}$ no cumpla la condición de cuasi-analiticidad de DENJOY-CARLEMAN.

Igualmente de los teoremas 2 y 6, resulta:

TEOREMA 7. Si $\mathfrak{E}^n\{m_x\}$ es una clase n. c. a. y F_0 es un conjunto cerrado de R^n , existe una función de $f \geq \theta$ de $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ que se anula, exactamente, en F_0 .

§ 3. PROLONGACIÓN DE LAS FUNCIONES DE UNA CLASE NO CUASI-ANALÍTICA

LEMA 5. Dada una clase n. c. a. $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ y dos esferas S_{r_0} y S_{r_1} con centro en el origen y de radios $r_0 < r_1$, existe una función $f(x) = f_n(x; r_0, r_1)$ ($\theta \leq f \leq 1$) perteneciente a $\mathfrak{E}^n\{\alpha m_v\}$, para una cierta constante $\alpha > 0$, que toma el valor 0 en $\bar{S}_{r_0}$ ⁽⁴⁾ y el valor 1 en el complementario de S_{r_1} ⁽⁵⁾.

Demostración. Sea f la función construida en el lema 2 para la clase n. c. a. $\mathfrak{E}^n\{m'_v\}$, $m'_v = \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{8r_1^2}\right)^{v+1} m_{v+1}$ entonces la función ψ , definida mediante

$$\psi(r_0^2 + (r_1^2 - r_0^2)t) = \int_0^t f(t) dt \bigg/ \int_0^1 f(t) dt,$$

⁽⁴⁾ Designamos por $\bar{A}$ la clausura de un conjunto A de R^n .

⁽⁵⁾ Aplicando un teorema de BANG [1], § 9, se deduce:

Sea $\{\bar{m}_v\}$ la regularizada logarítmica convexa de $\{m_v\}$, $\sigma = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\bar{m}_v - 1}{\bar{m}_v}$ y $r_1^2 - r_0^2 \geq 16\sigma$.

Si $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ es una clase n. c. a. ($\sigma < +\infty$), existe una función $f \geq \theta$ de $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ que toma exactamente los valores 0 y m_0 en S_{r_0} y en el complementario de S_{r_1} .

es no negativa, nula para $t \leq 0$ e igual a 1 para $t \geq 1$ y pertenece a $\mathcal{E}^n \{ \alpha (8r_1^2)^{-v} m_v \}$ si se elige α de modo que

$$\alpha \int_0^1 f(t) dt \geq \text{Máx.} \left(1, \frac{r_1^2 - r_0^2}{8r_1^2} \frac{m_1}{m_0} \right).$$

Basta proceder ahora de igual forma que en el lema 3, para ver que la función

$$f(x) = \psi(r^2)$$

pertenece a $\mathcal{E}^n \{ \alpha m_v \}$ y satisface las demás condiciones pedidas.

LEMA 6. Si $P_n(t)$ es un polinomio de grado n , tal que $|P_n(t)| \leq 1$ para $|t| \leq 1$, se tiene

$$|P_n^{(k)}(t)| \leq T_n^{(k)}(1), \quad (|t| \leq 1, \quad 0 \leq k \leq n)$$

con

$$\frac{1}{k!} T_n^{(k)}(1) = 2^k \frac{n^2 [n^2 - 1] \dots [n^2 - (2k - 1)^2]}{(2k)!} < 2^k \frac{n^{2k}}{(2k)!} < (2e)^n,$$

donde $T_n(x)$ es el polinomio de Tchebycheff de grado n .

Demostración. Véase MANDELBROJT [6], págs. 217 y 206.

TEOREMA 8. Si f es una función de $\mathcal{D}^n$, y

$$(3.1) \quad M_p = \text{Sup.} \left| \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} f(x) \right|, \quad (x \in R^n, p_1 + \dots + p_n = p)$$

se tiene

$$(3.2) \quad M_p \leq k_n^p M_0^{1 - \frac{p}{q}} M_q^{\frac{p}{q}}$$

para $p \leq q$ con $k_n \leq 8ek_{n-1} \leq 2(4e)^{n-1}$.

Demostración. Procederemos por inducción. Para $n = 1$ la desigualdad es cierta según los trabajos de GORNY y de KOLMOGOROFF^(*). Suponiendo que sea válida para $n - 1$, pondremos

$$g(x') = g(x_1', x_2, \dots, x_{n-1}) = f(x_1 + x_1', x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + tx_1')$$

entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}}}{\partial x_1'^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_{n-1}^{p_{n-1}}} g(x') \right|_{x_1'=0} \leq \\ & \leq k_{n-1}^p M_0^{1 - \frac{p}{q}} \text{Sup} \left| \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_{n-1}}}{\partial x_1'^{q_1} \dots \partial x_{n-1}^{q_{n-1}}} g(x') \right|^{\frac{n}{q}}_{x_1'=0} \quad (x \in R^n, \sum_{i=1}^{n-1} q_i = q) \end{aligned}$$

(*) MANDELBROJT [6], págs. 210-222.

para $r + p_2 + \dots + p_n = p \leq q$, luego

$$\left| \sum_{r=0}^s \binom{r}{s} \frac{\partial^p f(x)}{\partial x_1^{r-s} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} t^s \right| \leq k_{n-1}^p (1 + |t|)^p M_0^{1-\frac{p}{q}} M_q^{\frac{p}{q}} \leq (2k_{n-1})^p M_0^{1-\frac{p}{q}} M_q^{\frac{p}{q}}$$

para $|t| \leq 1$. Por consiguiente, según el lema 6, tendremos

$$\left| \frac{\partial^p f(x)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \right| \leq \frac{T_{p_1+p, (1)}^{(p_n)}}{p_n!} (2k_{n-1})^p M_0^{1-\frac{p}{q}} M_q^{\frac{p}{q}}, \quad (p = p_1 + \dots + p_n)$$

y
$$M_p \leq k_n^p M_0^{1-\frac{p}{q}} M_q^{\frac{p}{q}} \text{ con } k_n \leq 4 \text{ e } k_{n-1}.$$

LEMA 7. Si f_1 y f_2 pertenecen a la clase $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$, entonces $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ es también una función de la clase $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$.

Demostración. Para obtener una cota de

$$\frac{\partial^{p_1+\dots+p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} f(x), \quad (p = p_1 + \dots + p_n)$$

calcularemos el coeficiente $C_{p_1 p_2 \dots p_n}$ de $\frac{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}}{p_1! p_2! \dots p_n!}$ en el polinomio

$$\sum_{v=0}^p \frac{M_v^{(1)}}{v!} (x_1 + \dots + x_n)^v \cdot \sum_{v=0}^p \frac{M_v^{(2)}}{v!} (x_1 + \dots + x_n)^v,$$

donde $M_v^{(k)}$ es la cota M_v de f_k .

Así resulta, según el teorema 8, que

$$\begin{aligned} C_{p_1, p_2, \dots, p_n} \frac{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}}{p_1! p_2! \dots p_n!} &< < \\ &< < \left[\sum_{v=0}^p \frac{k_n^v m_0^{1-\frac{v}{p}} m_p^{\frac{v}{p}}}{v!} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^v \right]^2 < < \\ &< < m_0^2 \exp \left\{ 2k_n \left(\frac{m_p}{m_0} \right)^{\frac{1}{p}} (x_1 + \dots + x_n) \right\}, \end{aligned}$$

luego $C_{p_1 p_2 \dots p_n} \leq m_0 (2k_n)^p m_p$.

COROLARIO 1. La clase $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_n\}$ es un anillo.

TEOREMA 9. Sean F_0 y F_1 dos conjuntos cerrados y disjuntos de R^n , uno de ellos además compacto. Si $\bar{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ es una clase n. c. a., existe una

función f de $\overline{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$, con $\theta \leq f \leq 1$, que toma justamente los valores 0 y 1 en F_0 y F_1 , respectivamente.

Demostración. Por el teorema 4, es suficiente construir una función g de $\overline{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$, con $\theta \leq g \leq 1$, que tome el valor 0 en F_0 y el valor 1 en F_1 .

Supongamos, por ejemplo, que F_0 es compacto, entonces se puede cubrir F_0 por un número finito de esferas $\|x - x_1\| < r_1, \dots, \|x - x_p\| < r_p$, de manera que cada esfera $\|x - x_v\| < 2r_v$ no tenga ningún punto común con F_1 . Sea $f_1(x; r', r'')$ la función considerada en el lema 5, si ponemos $g_v(x) = f_n(x - x_v; r_v, 2r_v)$, la función

$$g(x) = g_1(x) g_2(x) \dots g_p(x), \quad (0 \leq g \leq 1)$$

satisface las condiciones requeridas en virtud del lema 7.

Hacemos notar que $1 - g$, $\theta \leq 1 - g \leq 1$, pertenece a $\overline{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ y toma los valores 0 y 1 en F_1 y F_0 .

TEOREMA 10. Sea f_0 una función definida en un conjunto compacto F de R^n , que admita una prolongación indefinidamente diferenciable f_1 en un conjunto abierto G ($G \supset F$) de R^n , y

$$(3.3) \quad M_p^{(1)} = \sup \left| \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} f_1(x) \right|, \quad (x \in G, p_1 + \dots + p_n = p)$$

Si la sucesión positiva $\{m_v\}$ verifica la desigualdad

$$(3.4) \quad M_p^{(1)} \leq k^{p+1} m_0^{1-\frac{p}{q}} m_q^{\frac{p}{q}} \quad (f_1 \in \overline{\mathfrak{E}}^n\{m_v; G\})$$

para $p \leq q$, con $k > 0$ independiente de p y q , y si $\overline{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ es una clase n. c. a., existe una función f de $\overline{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ que es prolongación de f_0 en R^n y que toma el valor 0 en el complementario de G y en los puntos en que se anula f_1 .

Demostración. Si φ es la función construida en el teorema 9 para los conjuntos cerrados F y $R^n - G$, la función f , definida mediante

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) \varphi(x) & \text{para } x \in G \\ \text{y} \quad f(x) &= 0 & \text{para } x \notin G, \end{aligned}$$

cumple las condiciones pedidas, puesto que es aplicable la demostración del lema 7, por verificarse (3.4) para $p \leq q$.

OBSERVACIÓN 2. Evidentemente, si existe tal prolongación f de f_0 se puede tomar $f_1 = f$. Además si $f \neq 0$ y $\overline{G} \neq R^n$ la clase $\overline{\mathfrak{E}}^n\{m_v\}$ es necesariamente n. c. a.

TEOREMA 11. Si $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ es una clase n. c. a. y si f_0 es una función analítica en un conjunto compacto F de R^n , existe una prolongación f de f_0 perteneciente a $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ que se anula en $\|x\| \geq r$ para r suficientemente grande.

Demostración. Siendo f_0 analítica en F , admite una prolongación analítica f_1 en la clausura $\bar{G}$ de un cierto conjunto abierto $G \supset F$, que se puede suponer acotado por ser F compacto. Por tanto, es posible determinar una constante $k > 0$ de manera que

$$\left| \frac{\partial^{p_1} + \dots + \partial^{p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} f_1(x) \right| \leq M_p^{(1)} \leq k^{p+1} p!, \quad (p_1 + \dots + p_n = p, p = 0, 1, 2, \dots).$$

Por otra parte, como $\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\frac{m_v}{v!}} > 0$, existe una constante $h < 0$ tal que

$$q! \leq h^{q+1} m_q, \quad (q = 0, 1, 2, \dots)$$

De todo esto resulta

$$\begin{aligned} M_p^{(1)} &\leq k^{p+1} p! \leq k^{p+1} (q!)^{\frac{p}{q}} \leq \\ &\leq (hk)^{p+1} m_0^{1-\frac{p}{q}} m_q^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

para $p \leq q$. Por consiguiente, basta aplicar el teorema 9 para llegar a la conclusión enunciada arriba.

DEFINICIÓN 3. La sucesión $\{a_{p_1, \dots, p_n}\}$ de los valores de las derivadas

$$\frac{\partial^{p_1} + \dots + \partial^{p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} f(x)$$

de una función f de $\mathfrak{D}^n$, en un punto x_0 , se llama elemento de f en x_0 .

LEMA 8. Si $\mathfrak{E}^n\{m_v\}$ es una clase n. c. a., y si

$$r = \sum_p \frac{\bar{m}_{v-1}}{\bar{m}_v} \quad \text{y} \quad \alpha_p = \frac{1}{r_1 r_2 \dots r_p},$$

donde $\{\bar{m}_v\}$ es la regularizada logarítmica convexa de $\{m_v\}$, se puede construir una función $\psi_{p_1, \dots, p_n}(x)$ de $\mathfrak{E}^n\{\bar{m}_v^{n-2} \bar{m}_v\} \subset \mathfrak{E}^n\{m_0^{n-1} m_v\}$ para $n > 1$ con el elemento

$$\{\alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \dots \alpha_{q_n} \delta_{q_1 p_1} \dots \delta_{q_n p_n}\} \quad (\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j) \text{ en } x_0.$$

Demostración. El lema es cierto para $n = 1$ (⁷). Si $\{\psi_p\}$ es una sucesión construida para este caso, la función

$$\psi_{p_1, \dots, p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_{p_1}(x_1) \psi_{p_2}(x_2) \dots \psi_{p_n}(x_n)$$

nos permite comprobar la afirmación hecha. En efecto, todas sus derivadas en x_0 son nulas, salvo la del orden $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ que es igual a $\alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \dots \alpha_{p_n}$ y además pertenece, por la convexidad logarítmica de $\{\bar{m}_q\}$, a la clase $\mathfrak{E}^n \{\bar{m}_0^{n-1} \bar{m}_v\}$.

Esto nos sirve para generalizar un teorema de BANG, así:

TEOREMA 12. Si $\mathfrak{E}^n \{m_v\}$ es una clase n.c.a., y si

$$(3.5) \quad r_p = \sum_p \frac{\bar{m}_{v-1}}{\bar{m}_v} \quad \text{y} \quad \alpha_p = \frac{1}{r_1 r_2 \dots r_p},$$

donde $\{\bar{m}_v\}$ es la regularizada logarítmica convexa de $\{m_v\}$, cada sucesión $\{a_{p_1 p_2 \dots p_n}\}$ que satisface

$$(3.6) \quad |a_{p_1 p_2 \dots p_n}| \leq C k^p \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \dots \alpha_{p_n} \quad (p = p_1 + \dots + p_n)$$

es un elemento de una función f de $\mathfrak{E}^n \{m_v\}$.

Demostración. Sea

$$f(x) = \sum_{p_1, \dots, p_n} \frac{a_{p_1 p_2 \dots p_n}}{\alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \dots \alpha_{p_n}} A^{-p} \psi_{p_1, p_2, \dots, p_n}(Ax), \quad (A = 2kn, \quad p = \sum_1^n p_v)$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n}}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}} f(x) \right| &\leq C m_0^{n-1} A^q m_q \sum_{p=0}^{\infty} (kn/A)^p = \\ &= 2 C m_0^{n-1} A^q m_q, \quad (q = q_1 + \dots + q_n) \end{aligned}$$

por consiguiente, $f \in \mathfrak{E}^n \{m_v\}$. Las demás condiciones son inmediatas.

COROLARIO 2. Cada sucesión $\{a_{p_1 p_2 \dots p_n}\}$ perteneciente a la clase $\mathfrak{E}^n \{\mu_p\}$, o sea $|a_{p_1 p_2 \dots p_n}| \leq C k^p \mu_p$ ($p = p_1 + \dots + p_n$), es elemento de una función de la clase n.c.a. $\mathfrak{E}^n \{m_v\}$, en uno cualquiera de los siguientes casos:

- 1.º $\mu_p = p!^{\alpha-1}$ y $m_p = p!^{\alpha}$
- 2.º $\mu_p = e^{ap^2/n}$ y $m_p = e^{ap^2}$, $a > 0$
- 3.º $\mu_p = p!$ y m_p cualquiera.

(⁷) Véase BANG [1], § 14.

Demostración. Los dos primeros casos se obtienen fácilmente del teorema 12, teniendo presente que

$$p! \leq n^p p_1! p_2! \dots p_n! \quad \text{y} \quad p^2/n \leq p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2.$$

El tercero resulta del teorema 11. Debemos señalar que este notable resultado también es nuevo para $n = 1$, antes solamente se sabía que toda sucesión $\{a_p\}$ de $\mathcal{C}\{1\}$ es elemento de una función de cualquier clase n. c. a., $\mathcal{C}\{m_v\}$.

Más todavía, como la intersección de todas las clases no cuasi-analíticas, $\mathcal{C}\{m_v\}$ es precisamente la clase analítica $\mathcal{C}\{v!\}$, se sigue que esta conclusión no se puede mejorar.

Combinando los teoremas 11 y 12, resulta

TEOREMA 13. *Toda función f_0 , analítica en un conjunto compacto F de R^n , admite una prolongación f perteneciente a una clase n. c. a. prefijada $\mathcal{C}\{m_v\}$ con los elementos $\{a_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(\varrho)}\}$ en N puntos $x_1, \dots, x_N$ distintos y no pertenecientes a F , si*

$$|a_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(\varrho)}| < C k^p \alpha_{p_1} \alpha_{p_2} \dots \alpha_{p_n} \quad (p = p_1 + p_2 + \dots + p_n)$$

para $\varrho = 1, 2, \dots, N$ y $p = 0, 1, 2, \dots$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BANG, T. — *On quasi analytiske Funktioner*. — Tesis, Copenhagen, 1946.
- [2] CARTAN, H. — *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives*. *Actualités scientifiques et industrielles*, n.º 867, 1940.
- [3] GORNY, A. — *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle*. — *Acta Math.* t. 71, 1939, pág. 317.
- [4] KOŁMOGOROFF, A. — *Une généralisation de l'inégalité de J. HADAMARD entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction*. — *C. R. Acad., Sc.*, 207, 1938, pág. 764.
- [5] MANDELBROJT, S. — *Séries de FOURIER et classes quasi analytiques de fonctions*. — Gauthier-Villars. París, 1935.
- [6] MANDELBROJT, S. — *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications*. — Gauthiers-Villars. París, 1952.
- [7] WHITNEY, H. — *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. — *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 1934, págs. 63-89.
- [8] WHITNEY, H. — *Differentiable functions defined in closed sets*. — *Trans. Amer. Math. Soc.* I, 36, 1934, págs. 369-387. *Ann. of Math.* II, 35, 1934 págs. 482-485.
- [9] WHITNEY, H. — *Differentiable functions defined in arbitrary subsets of Euclidean space*. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40, 1936, págs. 309-317.

Universidad de Zaragoza