SOBRE EL MOVIMIENTO ESTACIONARIO DE UN HILO RESPECTO A UN SISTEMA DE EJES QUE GIRA ALREDEDOR DEL EJE *OZ* CON ROTACION UNIFORMEMENTE ACELERADA (*)

POR

LORENZO FERRER FIGUERAS

INDICE

(*) Premio « Leonardo Torres Quevedo » del *Consejo Superior de Investigaciones Científicas* correspondiente al año 1955.

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

INTRODUCCION

En el decurso del presente trabajo, intentamos, a la par que estudiar el movimiento estacionario de los hilos flexibles e inextensibles, respecto a un sistema de ejes que gira con movimiento uniformemente acelerado, alrededor de un sistema fijo, establecer un paralelo entre el procedimiento general de resolución debido a APPELL (1) y el empleado otrora por TERRADAS. La aplicación de cada uno de dichos métodos a nuestro caso concreto, ha permitido la escisión del problema general en una serie de problemas más sencillos, resueltos a lo largo del presente estudio.

En el primer capítulo, nos hemos limitado a transcribir algunos resultados clásicos, en su mayor parte procedentes de una monografía debida a SANVISENS (2), con vistas a la consecución de una mejor estructuración de nuestro trabajo.

En el segundo capítulo, hemos obtenido, previa imposición de condiciones restrictivas, cuales son que la trayectoria sea plana, y que la proyección de la resultante de las fuerzas exteriores sobre la binormal sea nula, de acuerdo con procedimientos clásicos, diversos sistemas (equivalentes entre sí), de ecuaciones en derivadas parciales de carácter intrínseco, cuya posterior integración resuelve el problema. Consideramos de interés, la aportación que implica la introducción de la función de apoyo en el sistema mencionado, desde el punto de vista de la resolución efectiva, puesto que a dicha función se debe que los cálculos realizados en los capítulos tercero y cuarto no hayan sido por lo general lo prolijos que cabía esperar, dada la índole del sistema inicial.

En el tercer capítulo, tras breve exposición del método de APPELL, hemos conseguido obtener diversas soluciones que se corresponden con las diferentes hipótesis iniciales impuestas por la aplicación efectiva del mencionado proceso.

Y, finalmente, en el cuarto y último capítulo, hemos llegado a la consecución de soluciones del problema por vía distinta a la de APPELL, puesto que en esta ocasión, se ha utilizado un procedimiento ya usado por TERRADAS (3). Algunas de dichas soluciones habían ya sido halladas en el capítulo anterior; pero, por contra, hemos obtenido otras nuevas, que el método de APPELL no podía proporcionar, ya que la puesta en

(1) Ver Bibliografía, *a)*.
(2) Id., *e)*.
(3) Bibliografía *b)*, *d)*.

práctica de este último, implica indirectamente una hipótesis restrictiva: la constancia en la densidad de la masa del hilo por unidad de longitud.

CAPÍTULO I

1. Ecuaciones del movimiento de un hilo, respecto a un sistema de ejes fijos.

Consideraremos en lo sucesivo, un hilo AB, es decir, un sistema continuo, de longitud finita, perfectamente flexible e inextensible [1]. Llamaremos ϱ a la densidad del hilo, σ a la sección del mismo, y s a la abscisa curvilínea que define la posición de un punto P de aquél, a partir de un origen arbitrariamente elegido; por lo tanto, la masa de un elemento de hilo de longitud unidad será $\varrho\sigma$, y dependerá, en general, de s. Asimismo denominaremos $\vec{F}$, a la resultante de las fuerzas exteriores agentes sobre la unidad de masa, que dependerá de $\vec{P}$, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, t. Finalmente, la tensión en un punto genérico del hilo, será $\vec{T}$, y será función de s y de t.

De acuerdo con el principio de D'Alembert, pasamos de las ecuaciones de equilibrio del hilo, a las del movimiento, introduciendo la fuerza de inercia $\varrho\sigma\vec{a}$, que actúa sobre un elemento de longitud unidad:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sigma\vec{F} - \varrho\sigma\vec{a} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} &= 0 \\ d\vec{P} \wedge \vec{T} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1,1)$$

Al anterior sistema (1,1) se pueden añadir las condiciones de contorno

$$\left.\begin{aligned} \vec{f}_A + \vec{T}_{s=0} &= 0 \\ \vec{f}_B - \vec{T}_{s=l} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1,2)$$

Tratemos de determinar la configuración del hilo y el valor de la tensión $\vec{T}$, en cada punto P, y en cada instante t.

La configuración del hilo quedará definida intrínsecamente por el conocimiento de la relación vectorial:

$$P = P(s, t)$$

[1] O cuando menos (como concesión a lo intuitivo), de alargamiento despreciable.

o bien, del sistema de las tres funciones:

$$x = x(s, t)$$
$$y = y(s, t)$$
$$z = z(s, t)$$

previa elección de ejes cartesianos fijos.

Si consideramos el triedro intrínseco de FRÉNET y el radio de curvatura $\bar{\varrho}$, en el instante t y en el punto P, de acuerdo con la notación habitual, $\dfrac{\partial \vec{T}}{\partial s}$ se convertirá en:

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(T \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}(T \cdot \vec{t}) = \frac{\partial T}{\partial s}\vec{t} + \frac{T}{\bar{\varrho}}\vec{n} \qquad (1,3)$$

Si proyectamos, ahora, la primera de las (1,1) sobre el triedro obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales intrínsecas:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sigma F_t - \varrho\sigma a_t + \frac{\partial T}{\partial s} &= 0 \\ \varrho\sigma F_n - \varrho\sigma a_n + \frac{T}{\bar{\varrho}} &= 0 \\ \varrho\sigma F_b - \varrho\sigma a_b &= 0 \\ \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial s}\right)^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1,4)$$

que por integración define a las funciones $\vec{P}(s, t)$ y $\vec{T}(s, t)$.

Asimismo, y por proyección de la primera (1,1) sobre una terna cartesiana rectangular fija, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales,

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sigma F_x - \varrho\sigma \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right) &= 0 \\ \varrho\sigma F_y - \varrho\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial y}{\partial s}\right) &= 0 \\ \varrho\sigma F_z - \varrho\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial s}\right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1,5)$$

que, con el concurso de las condiciones de contorno, e iniciales, y mediante oportuna integración, define el movimiento de un punto del hilo, y la tensión del mismo a través de las:

$$x\,(t\;s,)\qquad y\,(t,\,s)\qquad z\,(t,\,s)\qquad T\,(t,\,s)$$

Si considero como origen de arcos, a la posición P_0 de P en $t = 0$, podemos establecer una correspondencia biunívoca y continua entre los puntos P y la abscisa curvilínea $\bar{\sigma}$. Por tanto, y para cada s, existirá una relación $\Omega\,(\bar{\sigma},\,t) = 0$.

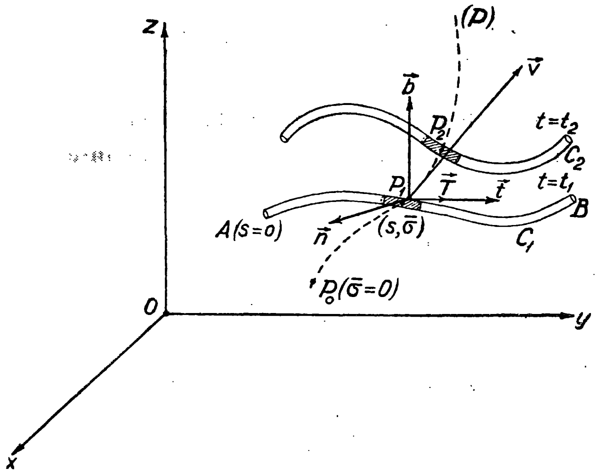

Fig. 1

La trayectoria de un punto P, de abscisa P, se singularizará de acuerdo con:

$$\left.\begin{aligned} x &= x\,(\bar{s},\,t)\\ y &= y\,(\bar{s},\,t)\\ z &= z\,(\bar{s},\,t)\end{aligned}\right\}$$

y la configuración C del hilo, en el instante $\bar{t} = t$, a partir de las:

$$x = x\,(s,\,\bar{t})$$
$$y = y\,(s,\,\bar{t})$$
$$z = z\,(s,\,\bar{t})$$

2. Ecuaciones del movimiento del hilo respecto a un sistema de ejes cartesianos ortogonales móvil.

Si llamamos ahora X, Y, Z, a las coordenadas cartesianas de P, respecto al sistema fijo, y x, y, z, a las correspondientes al móvil, y

$$\vec{a}_{ab}\,;\quad \vec{a}_r\,;\quad \vec{a}_s = \vec{e}\,;\quad \vec{a}_c = \vec{c}$$

a las aceleraciones absoluta, relativa, de arrastre y de Coriolis, que actúan sobre la unidad de masa de hilo, de acuerdo con la relación fundamental.

$$\vec{a}_{ab} = \vec{a}_r + \vec{e} + \vec{c}$$

se convertirá el sistema (1,1), en el :

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sigma\vec{F} + \frac{\partial\vec{T}}{\partial s} - \varrho\sigma\vec{e} - \varrho\sigma\vec{c} = \varrho\sigma\vec{a}_r \\ d\vec{P}\wedge\vec{T} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2,1)$$

Proyectando la primera (2,1) sobre el sistema cartesiano móvil obtengo el sistema de ecuaciones en derivadas parciales [homólogo del (1,5)]

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sigma\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \varrho\sigma F_x + \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial x}{\partial s}\right) - \varrho\sigma e_x - \varrho\sigma c_x \\ \varrho\sigma\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \varrho\sigma F_y + \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial y}{\partial s}\right) - \varrho\sigma e_y - \varrho\sigma c_y \\ \varrho\sigma\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \varrho\sigma F_z + \frac{\partial}{\partial s}\left(T\frac{\partial z}{\partial s}\right) - \varrho\sigma e_z - \varrho\sigma c_z \\ \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 &+ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2,2)$$

Por otra parte, recordando que las proyecciones cartesianas de $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ son, respectivamente :

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \bar{\varrho}\,\dfrac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \bar{\varrho}\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2} & \bar{\varrho}\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2} \\ \cos\mu & \cos\lambda & \cos\nu \end{matrix}\right\} \qquad (2,3)$$

obtendremos, a partir de la primera (2,1), el sistema de ecuaciones en derivadas parciales, de carácter intrínseco :

$$\left.\begin{aligned}
\varrho\sigma a_t &= \varrho\sigma F_t + \frac{\partial T}{\partial s} - \varrho\sigma\left[(e_x + c_x)\frac{\partial x}{\partial s} + (e_y + c_y)\frac{\partial y}{\partial s} + (e_z + c_z)\frac{\partial z}{\partial s}\right] \\
\varrho\sigma a_n &= \varrho\sigma F_n + \frac{T}{\varrho} - \varrho\sigma\left[(e_x + c_x)\,\varrho\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + (e_y + c_y)\,\varrho\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + (e_z + c_z)\,\varrho\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right] \\
\varrho\sigma a_b &= \varrho\sigma F_b - \varrho\sigma\left[e_x + c_x) \cos\lambda + (e_y + c_y) \cos\mu + (e_z + c_z) \cos\nu\right] \\
&\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial s}\right)^2 = 1
\end{aligned}\right\} \quad (2,4)$$

3. Movimiento estacionario de un hilo.

Se dice que un hilo tiene movimiento estacionario, cuando desliza a lo largo de una trayectoria rígida en cualquier instante, la cual, a su vez, es móvil en el espacio respecto a la terna fija $OXYZ$ (1.ª definición).

Cabe utilizar también la siguiente definición (equivalente a la anterior) : el movimiento del hilo es estacionario cuando desliza a lo largo de una trayectoria rígida fija respecto a la terna $oxyz$, móvil.

De acuerdo con el concepto establecido, podemos llegar a las siguientes conclusiones :

a) En el movimiento de carácter general, varía en cada instante $\bar{t}$, la configuración del hilo, la cual está definida por las ecuaciones :

$$x = x\,[s(\bar{t}), \bar{t}]$$
$$y = y\,[s(\bar{t}), \bar{t}]$$
$$z = z\,[s(\bar{t}), \bar{t}]$$

Asimismo, a cada punto $P_{s=\bar{s}}$ del hilo, corresponde una trayectoria individualizada por :

$$x = x(\bar{s}, t)$$
$$y = y(\bar{s}, t)$$
$$z = z(\bar{s}, t)$$

Es decir, la velocidad relativa de un punto del hilo, viene dada por:

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

es decir, por:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\end{aligned}\right.$$

y $\vec{V}_P$, $\vec{t}$, no satisfacen a la relación

$$\vec{V}_P \wedge \vec{t} = 0$$

b) Si el movimiento es estacionario, coinciden en cualquier instante t, en una misma curva, aquellas configuraciones y trayectorias; y debido a la inextensibilidad antecitada, tienen módulo común las velocidades de los diferentes puntos del hilo.

Se verificará, pues:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{v}=\frac{\partial \vec{P}}{\partial s}\cdot\frac{ds}{dt}=\vec{t}\,\frac{ds}{dt}=\vec{t}\cdot v$$

es decir:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\end{aligned}\right.$$

Si suponemos ahora, que para $t=0$, el extremo $A_{s=0}$ del hilo, coincide con el punto $A'_{\bar{\sigma}=0}$ de la trayectoria, se cumplirá:

$$\bar{\sigma}=s+\int_0^t v\,dt$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds}=1$$

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dt}=v$$

Por otra parte, las coordenadas x, y, z, de un punto $Q(\bar{\sigma})$ de la trayectoria, no dependerán explícitamente de t, sino a través de σ; es decir, serán de la forma:

$$\begin{cases} x = x(\bar{\sigma}) \\ y = y(\bar{\sigma}) \\ z = z(\bar{\sigma}) \end{cases}$$

y las componentes de $\vec{v}$:

$$v_x = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{d\bar{\sigma}}\,\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{d\bar{\sigma}}\,\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{dx}{d\bar{\sigma}}\cdot v$$

$$v_y = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{d\bar{\sigma}}\,\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{d\bar{\sigma}}\,\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{dy}{d\bar{\sigma}}\cdot v$$

$$v_z = \frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dz}{d\bar{\sigma}}\,\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dz}{d\bar{\sigma}}\cdot\frac{d\bar{\sigma}}{dt} = \frac{dz}{d\bar{\sigma}}\cdot v$$

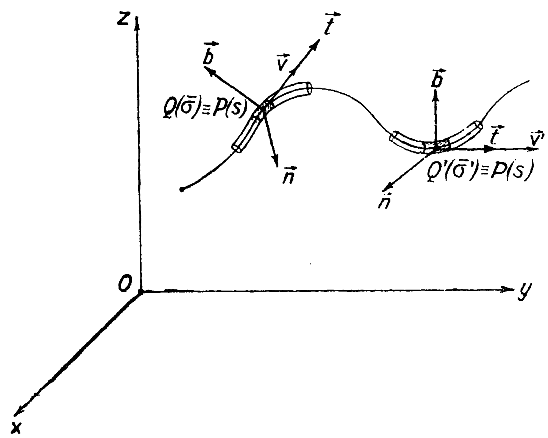

FIG. 2

4. Ecuaciones del movimiento estacionario de un hilo.

Las ecuaciones del movimiento estacionario, en su forma intrínseca, se hallarán a partir del sistema (2,4), teniendo presente que x, y, z, depende explícitamente de $\bar{\sigma}$, y $|\vec{v}|$, a su vez, de t; así como, que actualmente $\vec{a}_r$ se halla en el plano osculador $(\vec{t}, \vec{n})$.

De esta forma, obtenemos el sistema : [1]

$$\left.\begin{aligned} \varrho\sigma\frac{dv}{dt} &= \varrho\sigma F_t + \frac{\partial T}{\partial s} - \varrho\sigma\left[e_x\frac{dx}{d\bar{\sigma}} + e_y\frac{dy}{d\bar{\sigma}} + e_z\frac{dz}{d\bar{\sigma}}\right] \\ \varrho\sigma\frac{v^2}{\bar{\varrho}} &= \varrho\sigma F_n + \frac{T}{\bar{\varrho}} - \varrho\sigma\left[(e_x + c_x)\bar{\varrho}\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2} + (e_y + c_y)\bar{\varrho}\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2} + (e_z + c_z)\bar{\varrho}\frac{d^2z}{d\bar{\sigma}^2}\right] \\ 0 &= \varrho\sigma F_b - \varrho\sigma\left[(e_x + c_x)\cos\lambda + (e_y + c_y)\cos\mu + (e_z + c_z)\cos\nu\right] \end{aligned}\right\} \quad [4,1]$$

CAPÍTULO II

1. Movimiento estacionario de un hilo respecto a un sistema de ejes que gira con movimiento uniformemente acelerado alrededor de un sistema fijo.

En el número 4 del capítulo anterior, hemos establecido el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (4,1), que define el movimiento estacionario de un hilo, respecto a un sistema móvil dotado, a su vez de un movimiento de arrastre genérico. Supongamos ahora, que concretamente este último, se reduce a una rotación uniformemente acelerada alrededor del eje $oz \equiv OZ$, caracterizada por su aceleración angular:

$$\vec{\varkappa} = \varkappa\,\vec{k} \qquad (\varkappa > 0)$$

con lo cual, la velocidad angular vendrá dada por:

$$\vec{\omega} = (w_0 + \varkappa\,t)\,\vec{k}$$

y el ángulo de rotación por:

$$\vec{\psi} = \left(\psi_0 + \omega_0 t + \frac{\varkappa\,t^2}{2}\right) k$$

La posición del punto P, situado en un elemento de hilo, queda definida respecto al sistema móvil, mediante el vector de posición:

$$P - O = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

y su velocidad (relativa), por:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{v}_r = \frac{dx}{d\sigma}v\cdot\vec{i} + \frac{dy}{d\sigma}v\cdot\vec{j} + \frac{dz}{d\sigma}\cdot v\cdot\vec{k}$$

(1) Téngase presente que:

$$c_x\frac{dx}{d\sigma} + c_y\frac{dy}{d\sigma} + c_z\frac{dz}{d\sigma} = \vec{c}\,\vec{t} = 2\,(\vec{w}\wedge\vec{v}_r)\,\vec{t} = 0$$

Si escribimos la ecuación vectorial del movimiento (2,1) en la forma:

$$\varrho\sigma\vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_s + \frac{\partial\vec{T}}{\partial s} = \varrho\sigma\vec{a}_r \tag{1,1}$$

y, de acuerdo con clásicas expresiones, deducimos las componentes carsianas de $\vec{F}_c$ (fuerza de Coriolis) y de $\vec{F}_s$ (fuerza de arrastre):

$$\begin{aligned}\vec{F}_s &= -\varrho\sigma\vec{e} = -\varrho\sigma\left[-\omega^2(P-0) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge(P-0)\right] = \\ &= -\varrho\sigma[(-\omega^2 x - \varkappa y)\vec{i} + (\varkappa x - \omega^2 y)\vec{j}] \\ \vec{F}_c &= -\varrho\sigma\vec{c} = -\varrho\sigma\cdot 2\vec{w}\wedge\vec{v}_r = \\ &= -\varrho\sigma\left[\left(-2w\frac{dy}{d\sigma}v\right)\vec{i} + \left(2w\frac{dx}{d\sigma}v\right)\vec{j}\right]\end{aligned}$$

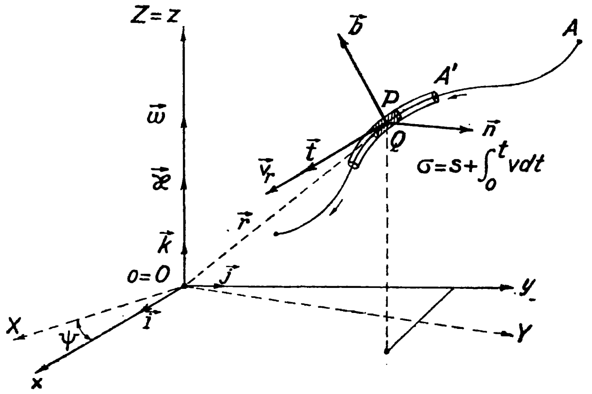

Fig. 3

el sistema (4,1) I, queda convertido en el:

$$(1,2)\quad\begin{cases}\varrho\sigma\dfrac{dv}{dt} = \varrho\sigma F_t + \dfrac{\partial T}{\partial s} - \varrho\sigma\left[(-\omega^2 x - \varkappa y)\dfrac{dx}{d\sigma} + (\varkappa x - \omega^2 y)\dfrac{dy}{d\sigma}\right] \\ \varrho\sigma\dfrac{v^2}{\varrho} = \varrho\sigma F_n + \dfrac{T}{\varrho} - \varrho\sigma\left[\left(-\omega^2 x - \varkappa y - 2wv\dfrac{dy}{d\sigma}\right)\varrho\dfrac{d^2x}{d\sigma^2} + \right. \\ \qquad\left. + \left(\varkappa x - \omega^2 y + 2wv\dfrac{dx}{d\sigma}\right)\varrho\dfrac{d^2y}{d\sigma^2}\right] \\ 0 = \varrho\sigma F_b - \varrho\sigma\left[\left(-\omega^2 x - \varkappa y - 2wv\dfrac{dy}{d\sigma}\right)\cos\lambda + \right. \\ \qquad\left. + \left(\varkappa x - \omega^2 y + 2wv\dfrac{dx}{d\sigma}\right)\cos\mu\right]\end{cases}$$

2. Estudio de las condiciones que se deducen en la hipótesis de que $F_b = 0$. [1]

Si en la tercera (1,2), imponemos $F_b = 0$, obtenemos

$$\left(- w^2 x - \varkappa y - 2 w v \frac{dy}{d\bar\sigma}\right) \cos \lambda + \left(\varkappa x - w^2 y + 2 w v \frac{dx}{d\bar\sigma}\right) \cos \mu = 0$$

o bien : [2]

$$\varkappa (y \lambda - x \mu) = 2 w v \left(\mu \frac{dx}{d\bar\sigma} - \lambda \frac{dy}{d\bar\sigma}\right) - \omega^2 (x \lambda + y \mu) \qquad (2,1)$$

relación que liga la trayectoria estacionaria con el régimen de velocidades, y que debe ser verificada, para cualquier par de valores $\bar\sigma$, t, con independencia de $\varrho \sigma$, $\vec{F}$, $\varkappa$.

Si derivamos la (2,1) (recordando que x, y, z dependen de $\bar\sigma$, y w, v de t) respecto a t, hallaremos :

$$\left[\omega \frac{dv}{dt} + \varkappa v\right]\left[\frac{dx}{d\bar\sigma} \mu - \frac{dy}{d\bar\sigma} \lambda\right] - \omega \varkappa [x \lambda + y \mu] = 0$$

que se puede escribir así :

$$x \lambda + y \mu = \frac{\varkappa v + \omega \dfrac{dv}{dt}}{\varkappa \omega} \left[\frac{dx}{d\bar\sigma} \mu - \frac{dy}{d\bar\sigma} \lambda\right] \qquad (2,2)$$

que a sn vez, es de la forma :

$$A (\bar\sigma) = k (t) \, B (\bar\sigma) \qquad (2,3)$$

relación que se verificará para toda t, y toda $\bar\sigma$, sólo si se cumple :

$$I \begin{cases} A (\bar\sigma) \equiv 0 \\ B (\bar\sigma) \equiv 0 \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad II \quad k (t) = k \qquad (2,3 \text{ bis})$$

Estudio del caso I

Para que se verifique el sistema I, independientemente de $\bar\sigma$, es preciso que :

$$\begin{cases} x \lambda + y \mu = 0 \\ - \dfrac{dy}{d\bar\sigma} \lambda + \dfrac{dx}{d\sigma} \mu = 0 \end{cases}$$

---

[1] El estudio al que se refiere este n.° 2 es original de Sanvisens, pero hemos juzgado conveniente su transcripción, previa síntesis o Vid. « Contribución al estudio del movimiento estacionario de hilos„ pág. 00.

[2] Escribimos λ, μ, ν, en lugar de cos λ, cos μ, cos ν.

Puede ocurrir que :

Ia) el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ -\dfrac{dy}{d\bar{\sigma}} & \dfrac{dx}{d\bar{\sigma}} \end{vmatrix}$$

no es nulo. En este caso, la única solución es

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1$$

y la trayectoria es plana, pues

$$\vec{b} \wedge \vec{k} = 0$$

Ib) El determinante es nulo. Existirán, entonces, soluciones $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, que corresponden a curvas no planas. Del desarrollo de Δ, se deduce por integración :

$$x^2 + y^2 = K^2 \tag{2,4}$$

y por ser :

$$\lambda = c\,x\,; \qquad \mu = c\,y$$

resulta :

$$\nu = 1 - c^2 (x^2 + y^2) = 1 - c^2 k^2 \tag{2,5}$$

constante para todo punto. De (24) y (2,5) se infiere que la curva es espiral cilíndrica.

Nótese que esta discusión no prejuzga condición alguna respecto a la velocidad del deslizamiento.

Estudio del caso II.

En este caso, la ecuación diferencial lineal :

$$\frac{\varkappa\, v + \omega \dfrac{dv}{dt}}{\varkappa\, \omega} = k\,(t) \tag{2,6}$$

debe reducirse a una constante k. Teniendo presente que $\omega = \omega_0 + \varkappa t$, por integración se obtienen los siguientes posibles regímenes de velocidades :

$$v = \frac{k}{2}\,(\varkappa\, t + \omega_0) + \frac{c}{\varkappa\, t + \omega_0} \tag{2,7}$$

en los que

$$c = \omega_0 \left(v_0 - \frac{K\,\omega_0}{2} \right)$$

A continuación, SANVISENS, elimina la expresión

$$\frac{dx}{d\bar{\sigma}}\mu - \frac{dy}{d\bar{\sigma}}\lambda$$

entre las ecuaciones (2,1), y la

$$x\lambda + y\mu = k\left(\frac{dx}{d\bar{\sigma}}\mu - \frac{dy}{d\bar{\sigma}}\lambda\right)$$

y obtiene la relación

$$y\lambda - x\mu = \left(\frac{2\,\omega\,v}{\varkappa\,k} - \frac{\omega^2}{\varkappa}\right)(x\lambda + \mu y)$$

de la forma

$$C(\bar{\sigma}) = k'(t)\cdot A(\bar{\sigma})$$

la cual a través de estudio análogo al realizado respecto a la (2,3), nos indica que las trayectorias estacionarias compatibles con el régimen de velocidades (2,7), son las siguientes:

a) Trayectorias alabeadas.

b) Trayectorias planas.

c) Trayectorias rectilíneas a lo largo del eje OZ de giro.

3. Estudio del caso particular, en el que la trayectoria es plana, y $F_b = 0$. — Paso de coordenadas cartesianas a polares.

De acuerdo con las relaciones:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\,\text{sen}\,\varphi$$

y con la nueva hipótesis (trayectoria estacionaria plana), transformemos los valores de las proyecciones F_{st}, F_{sn}, F_{ct}, F_{cn}, de coordenadas cartesianas a polares planas:

$$a)\quad F_{st} = \vec{F}_s \times \vec{t} = (-\varrho\sigma)(-\omega^2 x - \varkappa y)\frac{dx}{d\bar{\sigma}} + (-\varrho\sigma)(-\omega^2 y + \varkappa x)\frac{dy}{d\bar{\sigma}} =$$

$$= -\varrho\,\sigma\left[\omega^2\left(-x\frac{dx}{d\bar{\sigma}} - y\frac{dy}{d\bar{\sigma}}\right) + \varkappa\left(-y\frac{dx}{d\bar{\sigma}} + x\frac{dy}{d\bar{\sigma}}\right)\right] =$$

$$= \varrho\,\sigma\left[\omega^2 r\frac{dr}{d\bar{\sigma}} - \varkappa r^2\frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right] \qquad (3,1)$$

b)

$$F_{sn}=\vec{F}_s\times\vec{n}=-\varrho\sigma[-\omega^2x-\varkappa y]\bar{\varrho}\,\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2}+(-\varrho\sigma)[-\omega^2y+\varkappa x]\bar{\varrho}\,\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2}=$$

$$=-\varrho\sigma\bar{\varrho}\left[\omega^2\left(-x\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2}-y\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2}\right)+\varkappa\left(-y\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2}+x\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2}\right)\right]=$$

$$=-\varrho\sigma\bar{\varrho}\left[\omega^2\left(x\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2}+y\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2}\right)+\varkappa\left(y\frac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2}-x\frac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2}\right)\right]$$

Por otra parte, fácilmente hallamos, a partir de

$$xx''_{\bar{\sigma}}+yy''_{\bar{\sigma}}=\frac{\dfrac{d^2r^2}{d\bar{\sigma}^2}-2}{2} \tag{3,2}$$

$$xy''_{\bar{\sigma}}-yx''_{\bar{\sigma}}=\frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(r^2\frac{d\varphi}{d\sigma}\right) \tag{3,3}$$

Luego:

$$F_{sn}=\varrho\sigma\bar{\varrho}\left[\omega^2\frac{\dfrac{d^2r^2}{d\bar{\sigma}^2}-2}{2}-\varkappa\frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(r^2\frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right)\right] \tag{3,4}$$

c) $F_{ct}=\vec{F}_c\times\vec{t}=-2\varrho\sigma(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r)\,\vec{t}=0$

d)

$$F_{cn}=-2\varrho\sigma(\vec{\omega}\wedge\vec{v})\,\vec{n}=-2\varrho\sigma\begin{vmatrix}0 & 0 & \omega\\ \dfrac{dx}{d\bar{\sigma}}v & \dfrac{dy}{d\bar{\sigma}}v & 0\\ \bar{\varrho}x''_{\bar{\sigma}} & \bar{\sigma}y''_{\bar{\sigma}} & 0\end{vmatrix}=-2\varrho\sigma\omega v \tag{3,5}$$

Si ahora sustituímos los valores hallados para F_{st}, F_{sn}, F_{ct}, F_{cn}, en las ecuaciones (1,2), obtenemos el nuevo sistema (3,6), [1]

$$\begin{cases}(3,6,1) & \varrho\sigma\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\partial T}{\partial s}+\varrho\sigma F_t+\varrho\sigma\left[\omega^2r\dfrac{dr}{d\bar{\sigma}}-\varkappa r^2\dfrac{d\varphi}{d\sigma}\right]\\[2ex] (3,6,2) & \varrho\sigma\dfrac{v^2}{\bar{\varrho}}=\dfrac{T}{\bar{\varrho}}+\varrho\sigma F_n+(-2\omega v\varrho\sigma)+\varrho\sigma\bar{\varrho}\left[\omega^2\dfrac{(r^2)''_{\bar{\sigma}}-2}{2}-\varkappa\dfrac{d}{d\bar{\sigma}}\left(r^2\dfrac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right)\right]\end{cases}$$

[1] Se omite en (3,6) la ecuación correspondiente a la binormal; lo cual implica, para que el sistema (3,6) sea equivalente al (1, 2, 1), que aquélla se verifique idénticamente. O de otra manera: sólo podrán ser soluciones del problema (condición necesaria), aquellas trayectorias planas y regímenes de velocidad, compatibles con las condiciones halladas por SANVISENS, ya expresadas en el n.° 2 de este capítulo.

4. Ecuación eliminante de la tensión $\vec{T}$.

Dada la ecuación vectorial:

$$\varrho\,\sigma\,\vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_s + \frac{\partial \vec{T}}{\partial s} = \varrho\,\sigma\,\vec{a}_r$$

procederemos a proyectarla nuevamente, sobre los vectores $\vec{t}$, $\vec{n}$. Escribiremos en la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho\,\sigma\,\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial s} + \varrho\,\sigma\,F_t + F_{ct} + F_{st} & (4,\ 1,\ 1) \\[2ex] \varrho\,\sigma\,\dfrac{v^2}{\bar{\varrho}} = \dfrac{T}{\bar{\varrho}} + \varrho\,\sigma\,F_n + F_{cn} + F_{sn} & (4,\ 1,\ 2) \end{array}\right.$$

las ecuaciones obtenidas, para mayor generalidad.

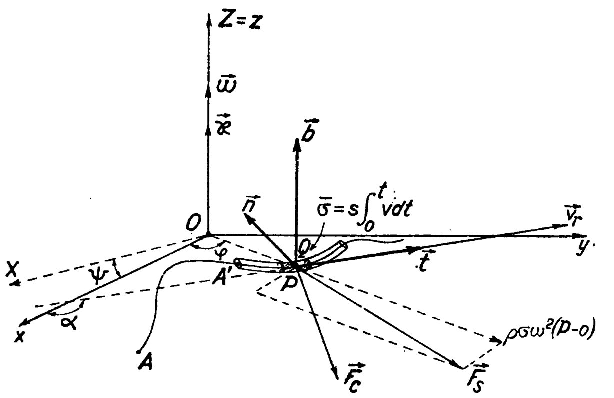

Fig. 4

Si, a continuación, multiplicamos (4, 1, 2) por $\bar{\varrho}$

$$\varrho\,\sigma\,v^2 = T + \varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}\,F_n + \bar{\varrho}\,F_{cn} + \bar{\varrho}\,F_{sn} \qquad (4,2)$$

y derivamos el resultado respecto a s, obtenemos:

$$v^2\frac{d(\varrho\sigma)}{ds} = \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}\,F_n) + \frac{d}{ds}(\bar{\varrho}\,F_{cn}) + \frac{d}{ds}(\varrho\,F_{sn}) \qquad (4,3)$$

expresión, que con el concurso de la (4, 1, 1) permite eliminar a $\frac{\partial T}{\partial s}$; la ecuación deducida, eliminante de la tensión, será:

$$0 = \varrho\,\sigma \frac{dv}{dt} - v^2 \frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma) + \frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}\,F_n) + \frac{d}{ds}(\bar{\varrho}\,F_{cn}) + \\ + \frac{d}{ds}(\bar{\varrho}\,F_{sn}) - \varrho\,\sigma\,F_t - F_{st} \qquad (4,4)$$

La eliminante (4,4), mediante los valores de F_{st}, F_{sn}, F_{cn}, determinados anteriormente [(3,1), (3,4), (3,5)], se convierte en:

$$0 = \varrho\,\sigma \frac{dv}{dt} - v^2 \frac{d(\varrho\sigma)}{ds} + \frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}\,F_n) + \frac{d}{ds}[\bar{\varrho}(-2\,\varrho\,\sigma\,\omega\,v)] + \\ + \frac{d}{ds}\left\{\bar{\varrho}\cdot\varrho\,\sigma\cdot\bar{\varrho}\left[\omega^2 \frac{\frac{d^2 r^2}{d\,\bar{\sigma}^2} - 2}{2} - \varkappa \frac{d}{d\,\bar{\sigma}}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\,\bar{\sigma}}\right)\right]\right\} - \\ - \varrho\,\sigma\,F_t - \varrho\,\sigma\left[\omega^2 r \frac{dr}{d\,\bar{\sigma}} - \varkappa\,r^2 \frac{d\varphi}{d\,\bar{\sigma}}\right]$$

relación que, teniendo presente la independencia de $\varkappa$, ω, v, respecto al tiempo, se reduce a la:

$$0 = \varrho\,\sigma\,\frac{dv}{dt} - v^2 \frac{d(\varrho\sigma)}{ds} + \frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\varrho\,F_n) - 2\,\omega\,v \frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}) + \\ + \omega^2 \frac{d}{ds}\left[\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}^2 \frac{\frac{d^2 r^2}{d\,\bar{\varrho}^2} - 2}{2}\right] - \varkappa \frac{d}{ds}\left[\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}^2 \frac{d}{d\,\bar{\varrho}}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\,\bar{\varrho}}\right)\right] - \\ - \varrho\,\sigma\,F_t - \omega^2\left[\varrho\,\sigma\,r\cdot \frac{dr}{d\,\bar{\varrho}}\right] + \varkappa\left[\varrho\,\sigma\,r^2 \frac{d\varphi}{d\,\bar{\sigma}}\right]$$

Dividamos por $\varrho\,\sigma$, y agrupemos respecto a ω^2 y $\varkappa$; hallaremos finalmente:

$$0 = \frac{dv}{dt} - F_t - v^2 \frac{1}{\varrho\,\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma) + \frac{1}{\varrho\,\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}\,F_n) + \\ + \omega^2\left[\frac{1}{\varrho\,\sigma}\frac{d}{ds}\left(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}^2 \frac{\frac{d^2 r^2}{d\bar{\varrho}^2} - 2}{2} - r \frac{dr}{d\,\bar{\sigma}}\right)\right] + \\ + \varkappa\left\{r^2 \frac{d\varphi}{d\,\bar{\sigma}} - \frac{1}{\varrho\,\sigma}\frac{d}{ds}\left[\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}^2 \frac{d}{d\,\bar{\sigma}}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\,\bar{\sigma}}\right)\right]\right\} - 2\,\omega\,v \frac{1}{\varrho\,\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}) \qquad (4,5)$$

5. Algunas relaciones de interés.

Con vistas a introducir modificaciones en el sistema (3,6) y en la eliminante (4,5), que simplifiquen futuros cálculos, se tendrán en cuenta las siguientes identidades (algunas clásicas) que ligan conocidos elementos geométricos.

a) La distancia del origen de coordenadas a la tangente a una curva plana situada en el plano x, y, viene dada por:

$$p = \frac{\dfrac{dy}{dx}\, x - y}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} = x \frac{dy}{d\bar{\sigma}} - y \frac{dx}{d\bar{\sigma}} = r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}} \tag{5,1}$$

b) Por otra parte, como:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{\dfrac{dr}{d\varphi}}$$

será:

$$p = r \cdot \operatorname{sen}\, \theta = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2}}$$

Si derivamos la igualdad anterior, respecto a $\bar{\sigma}$, y tenemos presente la clásica expresión del radio de curvatura:

$$\bar{\varrho} = \frac{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\, \dfrac{d^2 r}{d\varphi^2}}$$

obtendremos:

$$\frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \frac{r\, \dfrac{dr}{d\bar{\sigma}}}{\bar{\varrho}}$$

de la cual, finalmente deducimos:

$$\bar{\varrho}\, \frac{dp}{d\bar{\sigma}} = r\, \frac{dr}{d\bar{\sigma}} = \frac{1}{2}\, \frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} \tag{5,2}$$

c) A partir de la relación fundamental

$$(d\bar{\sigma})^2 = (dr)^2 + r^2 (d\varphi)^2$$

y del valor de p (función de apoyo), se establece fácilmente la identidad:

$$2p = \sqrt{4r^2 - \left(\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}\right)^2} \qquad (5,3)$$

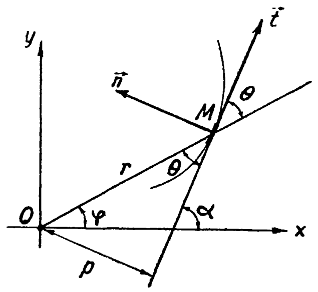

Fig. 5

d) También, mediante prolijo desarrollo, se comprueba la identidad

$$\bar{\varrho}\,\frac{2 - \dfrac{d^2 r^2}{d\bar{\varrho}^2}}{2} = p \qquad (5,4)$$

6. Introducción de la función de apoyo en el sistema resolvente y en la eliminante de la tensión.

Merced a las relaciones

$$p = r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}} \qquad (5,1)$$

$$p = \bar{\varrho}\,\frac{2 - \dfrac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}^2}}{2} \qquad (5,4)$$

$$\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \frac{rdr}{dp} \qquad (5,2)$$

establecidas en el epígrafe anterior, deducimos las siguientes expresiones :

$$\omega^2 r \frac{dr}{d\bar\sigma} - \varkappa r^2 \frac{d\varphi}{d\bar\sigma} = \omega^2 \bar\varrho \frac{dp}{d\bar\sigma} - \varkappa p \qquad (6,1)$$

$$\omega^2 \bar\varrho \frac{\dfrac{d^2 r^2}{d\bar\sigma^2} - 2}{2} - \varkappa \bar\varrho \frac{d}{d\bar\sigma}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\bar\sigma}\right) = -\omega^2 p - \varkappa \bar\varrho \frac{dp}{d\bar\sigma} \qquad (6,2)$$

$$H = \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}\left[\varrho\sigma\bar\varrho^2 \frac{\dfrac{d^2 r^2}{d\bar\sigma^2} - 2}{2}\right] - r\frac{dr}{d\bar\sigma} =$$

$$= -\frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}[\varrho\sigma\bar\varrho p] - \bar\varrho \frac{dp}{d\bar\sigma} \qquad (6,3)$$

$$\Phi = r^2 \frac{d\varphi}{d\bar\sigma} - \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}\left[\varrho\sigma\bar\varrho^2 \frac{d}{d\bar\sigma}\left(r^2\frac{d\varphi}{d\bar\sigma}\right)\right] =$$

$$= p - \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}\left[\varrho\sigma\bar\varrho^2 \frac{d\varrho}{d\bar\sigma}\right] \qquad (6,4)$$

Las ecuaciones (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), permiten transformar al sistema (3,6) y a la eliminante (4,5), que definen a partir de unos datos $\varkappa$, $\vec{F}$, y unas hipótesis iniciales (curva plana $F_b = 0$), a la velocidad de deslizamiento del hilo $v(t)$ y a la trayectoria estacionaria compatibles con aquéllos en los siguientes sistemas de ecuaciones (6,5) y eliminante (6, 6) en los que la trayectoria estacionaria se halla a partir de la función $p(\bar\sigma)$, en lugar de la $r = r(\bar\sigma)$.

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho\sigma \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial s} + \varrho\sigma F_t + \varrho\sigma\left[\omega^2\bar\varrho\dfrac{dp}{d\bar\sigma} - \varkappa p\right. & (6,5,1) \\[2ex] \varrho\sigma \dfrac{v^2}{\bar\varrho} = \dfrac{T}{\bar\varrho} + \varrho\sigma F_n - 2\varrho\sigma\omega v + \varrho\sigma\left[-\omega^2 p - \varkappa\bar\varrho\dfrac{dp}{d\bar\sigma}\right] & (6,5,2) \end{array}\right.$$

$$\frac{dv}{dt} - F_t - v^2 \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\sigma) + \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}[\varrho\sigma\bar\varrho F_n] + \omega^2\left[-\frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\sigma\bar\varrho p) - \bar\varrho\frac{dp}{d\bar\sigma}\right] +$$

$$+ \varkappa\left[p - \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}\left(\varrho\sigma\bar\varrho^2 \frac{dp}{d\bar\sigma}\right)\right] - 2\omega v \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\sigma\bar\varrho) = 0 \qquad (6,6)$$

En el supuesto de introducir como nueva hipótesis, la condición

$$\varrho\,\sigma = \varrho_0\,\sigma_0$$

equivalente a imponer la constancia de la densidad del hilo por unidad de longitud, los (6,5), (6,6) se convierten en :

$$\left\{\begin{aligned} &\varrho_0\sigma_0\,\frac{dv}{dt} = \frac{\partial T}{\partial s} + \varrho_0\,\sigma_0\,F_t + \varrho_0\,\sigma_0\left(\omega^2\,\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} - \varkappa\,p\right) && (6{,}7{,}1)\\ &\varrho_0\sigma_0\,\frac{v^2}{\bar{\varrho}} = \frac{T}{\bar{\varrho}} + \varrho_0\sigma_0 F_n - 2\,\varrho_0\sigma_0\omega v + \varrho_0\sigma_0\left[-\omega^2\,p - \varkappa\,\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right] && (6{,}7{,}2)\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} - F_t + \frac{d}{ds}\,(\bar{\varrho}\;F_n) + \omega^2\left[-\frac{d}{ds}\,(\bar{\varrho}\,p) - \bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right] + \\ &\qquad + \varkappa\left[p - \frac{d}{ds}\left(\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right)\right] - 2\,\omega\,v\,\frac{d\bar{\varrho}}{ds} = 0 \qquad (6{,}8)\end{aligned}$$

7. Ecuación de la energía cinética.

La ecuación de la energía cinética permite establecer una nueva relación.

Escribamos nuevamente la ecuación vectorial del movimiento, ahora en la forma siguiente :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial s}\vec{t} + \frac{T}{\bar{\varrho}}\,p\vec{n} + F_{st}\vec{t} + F_{sn}\vec{n} + F_{cn}\vec{n} + \varrho\,\sigma\,F_t\vec{t} + \varrho\,\sigma\,F_n\cdot\vec{n} - \\ &\qquad - \varrho\,\sigma\,\frac{dv}{dt}\,\vec{t} - \varrho\,\sigma\,\frac{v^2}{\bar{\varrho}}\,\vec{n} = 0\end{aligned}$$

Multipliquemos escalarmente por

$$d\vec{P} = \vec{v}\;dt = v\;\vec{t}\;dt = \vec{t}\;d\bar{\sigma}$$

y obtendremos

$$\frac{\partial T}{\partial s}\,d\bar{\sigma} + F_{st}\;d\bar{\sigma} + \varrho\sigma\;\;F_t\,d\bar{\sigma} - \varrho\sigma\,\frac{dv}{dt}\;d\bar{\sigma} = 0$$

es decir :

$$dT + \varrho\sigma\left[\omega^2\,r\,dr - \varkappa\,r^2\,d\,\varphi\right] + \varrho\sigma\;F_t\,d\bar{\sigma} - \varrho\sigma\;\;v\,dv = 0 \qquad (7{,}1)$$

que también se puede escribir así: (1)

$$dT + \varrho\sigma\,[\omega^2 \bar{\varrho}\, dp - \varkappa\, p\, d\bar{\sigma}] + \varrho\sigma\, F_t\, d\bar{\sigma} - \varrho\sigma \frac{dv^2}{2} = 0 \qquad (7,2)$$

8. Ecuación de los momentos.

Si tomamos momentos en la ecuación vectorial fundamental, escrita ahora en la forma:

$$\varrho\sigma\left[F_t - \frac{dv}{dt}\right]\vec{t} + \varrho\sigma\left[F_n - \frac{v^2}{\bar{\varrho}}\right]\vec{n} + \frac{dT}{ds}\vec{t} + \frac{T}{\bar{\varrho}}\vec{n} + \vec{F}_s + \vec{F}_c = 0 \qquad (8,1)$$

respecto del origen de coordenadas, hallaremos una nueva relación. En efecto, obtenemos:

$$\varrho\sigma\left(F_t - \frac{dv}{dt}\right)(P - O) \wedge \vec{t} + \varrho\sigma\left(F_n - \frac{v^2}{\bar{\varrho}}\right)(P - O) \wedge \vec{n} + \frac{dT}{ds}(P - O) \wedge \vec{t} +$$

$$+ \frac{T}{\bar{\varrho}}(P - O) \wedge \vec{n} + (P - O) \wedge \vec{F}_s + (P - O) \wedge \vec{F}_c = 0 \qquad (8,2)$$

Calculemos, separadamente los productos:

1) $(P - O) \wedge \vec{t} = \vec{k}\left(x \dfrac{dy}{d\bar{\sigma}} - y \dfrac{dx}{d\bar{\sigma}}\right) = \vec{k}\, r^2 \dfrac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}$

2) $(P - O) \wedge \vec{n} = \vec{k}\left(x \dfrac{d^2y}{d\bar{\sigma}^2} - y \dfrac{d^2x}{d\bar{\sigma}^2}\right) = \vec{k}\, \bar{\varrho}\, \dfrac{d}{d\bar{\sigma}}\left(r^2 \dfrac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right)$

3) $(P - O) \wedge \vec{F}_s = (P - O) \wedge \left[\varrho\sigma\,\omega^2(P - O) - \varrho\sigma \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (P - O)\right] =$

$$= -\,\varrho\,\sigma\,\varkappa\, r^2\, \vec{k}$$

4) $(P - O) \wedge \vec{F}_c = -\,2\,w\,v\,\varrho\,\sigma\, r \dfrac{dr}{d\bar{\sigma}}\, \vec{k}$

cuyos valores sustituídos en (8,2) originan la igualdad:

$$0 = \varrho\sigma\left(F_t - \frac{dv}{dt}\right) r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\, \vec{k} + \varrho\sigma\left(F_n - \frac{v^2}{\bar{\varrho}}\right)\bar{\varrho}\, \frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right)\vec{k} +$$

$$+ \frac{dT}{ds} r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\, \vec{k} + \frac{T}{\bar{\sigma}}\, \bar{\varrho}\, \frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right)\vec{k} - \varrho\sigma\varkappa\, r^2\, \vec{k} - 2\,\varrho\sigma\,\omega\, v\, r \frac{dr}{d\bar{\sigma}}\, \vec{k} \qquad (8,3)$$

---

(1) Si $F_t = 0$, $\varrho\sigma = \varrho_0\sigma_0$, $v = cte$, $\varkappa = 0$, obtengo la relación $dT + \varrho_0\sigma_0\omega^2 \dfrac{dr^2}{2} = 0$, que admite la integral primera: $T + \dfrac{\varrho_0\sigma_0}{2}\,\omega^2 v^2 = K_1$. Este caso ya fué estudiado por Terradas, en su «Estudio sobre los hilos». Memoria de la Real Academia de Ciencias y Artes, 1911, pág. 148.

que simplificada resulta ser: [1]

$$\left(F_t - \frac{dv}{dt}\right) r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}} + (\bar{\varrho} F_n - v^2) \frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right) + \frac{1}{\varrho\sigma} \frac{d}{d\bar{\sigma}}\left[T \cdot r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right] - \varkappa r^2 - 2\omega v r \cdot \frac{dr}{d\bar{\sigma}} = 0 \quad (8,4)$$

También esta última, se puede escribir:

$$0 = \left(F_t - \frac{dv}{dt}\right) p + (\bar{\varrho} F_n - v^2) \frac{dp}{d\bar{\sigma}} + \frac{1}{\varrho\sigma} \frac{d}{d\bar{\sigma}} (Tp) - \varkappa r^2 - 2\omega v \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \quad (8,5)$$

Las ecuaciones deducidas (3,6,1), (3,6,2), (4,5), (7,1), (8,4) son tales que, a partir del sistema formado por dos de ellas arbitrariamente elegidas, quedan definidas por integración de aquél, la trayectoria estacionaria, mediante las ecuaciones $r(\bar{\sigma})$; $\varphi(\bar{\sigma})$; la velocidad de deslizamiento del hilo v, la tensión T y la densidad por unidad de longitud $\varrho\sigma$.

Igual objetivo quedará conseguido, si partimos del sistema formado por dos cualesquiera de las ecuaciones (6,5,1), (6,5,2), (6,6), (7,2), (8,5). La diferencia entre ambos procedimientos, estriba en que en el segundo la trayectoria quedará definida mediante $p(\bar{\sigma})$, $\varphi(\bar{\sigma})$.

CAPÍTULO III

1. Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales, de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} T_i(t) \cdot S_i(\bar{\sigma}) = 0 \quad (1,1)$$

por un método debido a Appell.

Appell, en uno de sus trabajos [2], aplica en reiteradas ocasiones, diversos procedimientos de cálculo, que le permiten detener una cómoda resolución de ecuaciones del tipo (1,1).

---

(1) Si $F_t = F_n = 0$, $\omega = c^{te}$, $v = c^{te}$, $\varrho\sigma = 1$, obtengo la relación

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}}\left[(T - v^2)\, r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}}\right] - 2\,\omega\, v\, r \frac{dr}{d\bar{\sigma}} = 0$$

que integrada nos da:

$$(T - v^2)\, r^2 \frac{d\varphi}{d\bar{\sigma}} - \omega\, v\, r^2 = K_2.$$

También esta relación figura en «Estudio sobre los hilos», de Terrades. Memoria de la Real Academia de Ciencias y Artes, 1911, pág. 149.

(2) Acta Matemática, tomo XIII.

Exponemos a continuación, y con vistas a su ulterior utilización en el problema que nos ocupa, un proceso sistemático, que engloba como casos particulares a los procedimientos antes citados.

Empezaremos por suponer existentes entre las $T_i(t)$, $i\,(1,2,\ldots,n)$ las siguientes combinaciones lineales de coeficientes constantes:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^j\, T_i = 0 \qquad j\,(1 \ldots p) \tag{1,2}$$

A continuación, y de acuerdo con el valor $l \leq n$ de la característica de la matriz

$$\|K_i^j\| \qquad \begin{matrix} j\,(1 \ldots p) \\ i\,(1 \ldots n) \end{matrix}$$

expresaremos a las funciones T_h; $h\,(1 \ldots l)$, en función de las $n-l$ restantes [1], mediante las relaciones

$$T_h = \sum_{m=l+1}^{n} \lambda_{h,m}\, T_m \qquad h\,(1,2,\ldots,l) \tag{1,3}$$

Si ahora en el sistema de $l+1$ ecuaciones, formado por la (1,1) y las (1,3), eliminamos a las funciones T_i; $i\,(1,2,\ldots l)$, obtendremos:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} T_i\, S_i = \sum_{h=1}^{l} S_h \sum_{m=l+1}^{n} \lambda_{h,m}\, T_n + \sum_{r=l+1}^{n} S_r\, T_r =$$

$$= \sum_{m=l+1}^{n} T_m \sum_{h=1}^{l} S_h\, \lambda_{h,m} + \sum_{r=l+1}^{n} S_r\, T_r = \sum_{r=l+1}^{n} T_r \left[S_r + \sum_{h=1}^{l} \lambda_{h,r}\, S_h \right] \tag{1,4}$$

La independencia de las T_r; $r\,(l+1,\ldots,n)$ [no eliminadas] exige que la relación (1,4) se verifique cualquiera que sea el valor adoptado por la t; ello implica que sean nulos sus coeficientes, es decir:

$$S_r + \sum_{h=1}^{l} \lambda_{h,r}\, S_h = 0 \qquad r\,(l+1,\ l+2,\ldots,n)$$

En cada problema concreto, el conocimiento de los datos S_i, T_i, impondrá determinadas y características condiciones restrictivas a los sistemas de coeficientes $\{h_{h,r}\}$ y $\{K_i^j\}$.

---

[1] Ello implica la no anulación del $\Delta = \|K_i^j\| \quad \left\{ \begin{matrix} j\,(1 \ldots l) \\ i\,(1 \ldots l) \end{matrix} \right.$

Una discusión adecuada en la que sean tenidos en cuenta los diferentes valores que puedan tomar p y l, permitirá el desglose de la ecuación inicial (1,1), en el conjunto de los pares de sistemas (1,2) y (15); cada uno de ellos será equivalente (en lo que afecta a las soluciones) a la (1,1). Finalmente integraremos. [1]

2. Aplicación del método de Appell, al caso de un sistema de ejes que gira con movimiento uniforme ($x = 0$).

En este caso ($\varkappa = 0$), la ecuación eliminante de la tensión (4,5), se convierte en la

$$0 = \frac{dv}{dt} - F_t - v^2 \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\sigma) + \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\sigma\bar{\varrho} F_n) +$$

$$+ \omega^2 \left[\frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}\left(\varrho\sigma\bar{\varrho}^2 \frac{\dfrac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}^2} - 2}{2}\right) - r\frac{dr}{d\bar{\sigma}}\right] - 2\omega v \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\sigma\bar{\sigma}) \qquad (2,1)$$

cuyo estudio ha sido realizado a fondo por Terrades [2] en el caso $F_t = F_n = 0$.

Nosotros vamos a estudiar los dos casos siguientes:

1.º Aquel en el que F_t y F_n dependen exclusivamente del tiempo *(Problema A)*, y

2.º Idem., íd., de $\bar{\sigma}$ *(Problema B)* apoyándonos en el método de Appell. Pero como éste se aplica solamente a las ecuaciones del tipo (1,1), y en la (2,1) intervienen las variables s, t, $\bar{\sigma}$, ligadas por la relación:

$$\bar{\sigma} = s + \int_0^t v\,dt$$

nos limitaremos a resolver los problemas A y B, en la hipótesis de que

$$\varrho\sigma = \varrho_0\sigma_0 = 1$$

---

(1) Se comprende, por simetría, que pueden permutarse T_k y S_k en todas las fórmulas estalecidas.

(2) «Estudio sobre los hilos», Memoria R. Ac. de Ciencias y Artes, pág. 141, 1911.

con lo cual, la (2,1), se reduce a la:

$$\frac{dv}{dt} - F_t + \frac{d}{d\bar{\sigma}}(\bar{\varrho}\, F_n) + \omega^2 H(\bar{\sigma}) - 2\,\omega\, v\, \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = 0 \tag{2,3}$$

siendo:

$$H = -\frac{d}{d\bar{\sigma}}(\bar{\varrho}\, p) - \bar{\varrho}\,\frac{d\varrho}{d\sigma}$$

3. Problema A.

Teniendo presente que F_n, F_t dependen sólo de t podemos escribir la (2,3) en la forma de Appell (1,1):

$$\frac{dv}{dt} - F_t + (F_n - 2\,\omega\, v)\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + \omega^2 H(\bar{\sigma}) = 0 \tag{3,1}$$

de donde:

$$T_1 = \frac{dv}{dt} - F_t \qquad T_2 = F_n - 2\,\omega\, v \qquad T_3 = \omega^2$$

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} \qquad S_3 = H(\bar{\sigma})$$

Abordaremos los casos en que el número p de combinaciones lineales es cero, y uno (respecto de las T_k, así como también respecto a las S_k).

Aa. Suponemos que no existe combinación lineal $\{C\mathfrak{L}\}$ entre las T. La (3,1) debe verificarse para cualquier t; luego deben ser nulas las S; absurdo, pues $S_1 = 1$. No hay solución.

Ab. Igual suposición respecto de las S, conduce a un absurdo, pues $T_3 = \omega^2$ no puede anularse.

Ac. Si suponemos existe una $\{C\mathfrak{L}\}$ entre las T:

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 + k_3 T_3 = 0 \tag{3,2}$$

al eliminar T_1, obtenemos:

$$T_2\left(S_2 - \frac{k_2}{k_1} S_1\right) + T_3\left(S_3 - \frac{k_3}{k_1} S_1\right) = 0$$

y la independencia de T_2, T_3, exigirá:

$$\frac{S_1}{k_1} = \frac{S_2}{k_2} = \frac{S_3}{k_3} = K_0 \neq 0$$

de donde:

$$\begin{cases} S_1 = k_1 k_0 = \lambda_1 \\ S_2 = k_2 k_0 = \lambda_2 \\ S_3 = k_3 k_0 = \lambda_3 \end{cases}$$

que equivale al:

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 \\ \dfrac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = \lambda_2 \\ H = \lambda_3 \end{cases} \tag{3,3}$$

De la segunda (3,3), se obtiene:

$$\bar{\varrho} = \lambda_2 \bar{\sigma} + \lambda_2' \tag{3,4}$$

valor que llevado a

$$H = -2\bar{\varrho}\frac{dp}{d\bar{\sigma}} - p\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = \lambda_3$$

origina la ecuación lineal:

$$\frac{dp}{d\bar{\sigma}} + \frac{\lambda_2}{2(\lambda_2\bar{\sigma} + \lambda_2')}p + \frac{\lambda_3}{2(\lambda_2\bar{\sigma} + \lambda_2')} = 0$$

de cuya integración se deduce:

$$p = \frac{c}{\sqrt{\lambda_2\bar{\sigma} + \lambda_2'}} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{c}{\sqrt{\bar{\varrho}}} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \tag{3,5}$$

La identidad $\bar{\varrho}\dfrac{dp}{d\bar{\sigma}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dr^2}{d\bar{\sigma}}$ nos da, el valor de r^2:

$$r^2 = -2c\sqrt{\bar{\varrho}} + c' \tag{3,6}$$

a través de fácil integración.

Si ahora, previa derivación en (3,6) respecto a $\bar{\sigma}$, eliminamos a $\dfrac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}^2}$, $\bar{\varrho}$, p entre las ecuaciones (2,8), (3,4), (3,5), (3,6) y la identidad:

$$\bar{\varrho}\,\frac{\dfrac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}^2} - 2}{2} = -p$$

hallaremos la relación :

$$\lambda_2^5 \bar{\sigma}^3 + (3\,\lambda_4^2\,\lambda_2' + 2\,\lambda_3\,\lambda_2^2)\,\bar{\sigma}^2 + (\lambda_2\,\lambda_3^2 + 3\,\lambda_2\,\lambda'^2_2 + 4\,\lambda_2^2\,\lambda_2'\,\lambda_3)\,\bar{\sigma} +$$

$$+ \lambda_3^2\,\lambda_2' + 2\,\lambda_3\,\lambda_2\,\lambda'^2_2 + \lambda_2^2\,\lambda'^3_2 - \lambda_2^2\,c^2\left(1 + \frac{\lambda_2^2}{4}\right)^2 = 0 \qquad (3,7)$$

que debe verificarse para cualquier valor de $\bar{\sigma}$; ello implica que se verifiquen las condiciones :

$$\lambda_2 = 0; \qquad \lambda_3 = 0 \qquad (A\,c\,1) \qquad (3,8)$$

ó bien las :

$$\lambda_2 = 0; \qquad \lambda_2' = 0 \qquad (A\,c\,2) \qquad (3,9)$$

Estudio caso $A\,c\,1$.

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

En este caso, sencillos cálculos nos permite deducir de (3,3) los resultados :

$$\bar{\varrho} = \lambda_2' \qquad p = k$$

La (5, 2, II) da ahora :

$$r^2 = k'^2$$

y la

$$2\,p = \sqrt{4\,r^2 - (r^2)'^2_\sigma}$$

nos dice que :

$$p = r = k$$

así como la (5, 4, II), nos permite observar que:

$$\lambda_2' = k$$

En definitiva :

$$p = r = \bar{\varrho} = \lambda_2'$$

Por otra parte, la $\{C\mathfrak{L}\}$ (2,5), se reduce a :

$$k_1\;T_1 = 0$$

y como $\lambda_1 = k_0\,k_1 = 1$, será $k_1 \neq 0$, de donde :

$$\frac{dv}{dt} - F_t = 0 \qquad (3,10)$$

Podemos, pues, decir que si los ejes giran con $\omega = c^{te}$, el hilo tiene $\varrho\,\sigma = 1$, y el hilo se desliza con velocidad

$$v = \int F_t\,dt + C'' \tag{3,11}$$

sobre su trayectoria estacionaria, ésta será una circunferencia.

De la (6, 5, 2) del capítulo II deducimos que

$$T = (v + \omega\,R)^2 - R F_n$$

La ecuación (6, 5, 1, II) se reduce, en este caso, a la

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dT}{d\,\bar{\sigma}} + F_t$$

que se satisface, sin exigir ninguna restricción a F_t, y F_n salvo la hipótesis previa de que dependan sólo de t.

Estudio caso $A\ c\ 2$.

El valor de $\bar{\varrho}$, será nulo, el hilo se reduce a un punto.

Ad. Supuesto existente una $\{C\Omega\}$ entre las S:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i\ S_i = 0 \tag{3,12}$$

la eliminación de S_1, entre (3,12) y la

$$\sum_{i=1}^{3} S_i\ T_i = 0$$

y la independencia de S_2 respecto de S_3, exigen

$$\frac{T_1}{k_1} = \frac{T_2}{k_2} = \frac{T_3}{k_3} = k_0$$

de donde

$$(3,13)\ \begin{cases} T_1 = k_0\ k_1 = \lambda_1 = \dfrac{dv}{dt} - F_t & (3,\ 13\ 1) \\ T_2 = k_0\ k_2 = \lambda_2 = F_n - 2\,\omega\,v & (3,\ 13,\ 2) \\ T_3 = k_0\ k_3 = \lambda_3 = \omega^2 & (3,\ 13,\ 3) \end{cases}$$

La ley de movimiento, se obtiene a partir de cualquiera de las dos (3, 13, 1), (3, 13, 2), con tal de que las componentes F_t, F_n satisfagan a la condición de compatibilidad.

$$\frac{dF_n}{dt} = 2\omega(\lambda_1 + F_t) \qquad (3,14)$$

hallada por eliminación de v entre aquéllas.

La ecuación de la trayectoria, se hallará por integración de la ecuación diferencial ordinaria en $r^2(\bar{\sigma})$ que se obtendrá por eliminación de $\bar{\varrho}$, p, entre las:

$$\bar{\varrho}\frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} \qquad (5, 2, II)$$

$$2p = \sqrt{4r^2 - \left(\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}\right)^2} \qquad (5, 2, II)$$

del capítulo II, y la (3,12):

$$k_1 + k_2\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + k_3\left[-\frac{d}{d\bar{\sigma}}(\bar{\varrho}\,p) - \bar{\varrho}\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right] = 0 \qquad (3,15)$$

Prescindiendo de la resolución en la forma clásica de la antecitada ecuación diferencial, nótese que las (3,14) (5,2) (5,3) (5,4) del cap. II del capítulo anterior quedan satisfechas, para

$$p = \bar{\varrho} = r = R$$

$$k_1 = 0$$

La trayectoria sería nuevamente circular, y la ley de movimiento según (3, 13, 1)

$$\frac{dv}{dt} - F_t = 0$$

4. Problema B.

Si tenemos en cuenta que en este caso F_n y F_t dependen solamente de $\bar{\sigma}$, podremos escribir la (2,3) en la forma de Appell (1,1):

$$\frac{dv}{dt} + \left[\frac{d}{d\bar{\sigma}}(\bar{\varrho}\,F_n) - F_t\right] + \omega^2 H(\bar{\sigma}) + (-2\omega v)\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = 0 \qquad (4,1)$$

de donde

$$T_1 = \frac{dv}{dt} \qquad T_2 = 1 \qquad T_3 = \omega^2 \qquad T_4 = -2\omega v$$

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = \frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho} F_n) - F_t \qquad S_3 = H(\bar{\sigma}) \qquad S_4 = \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} \tag{4,2}$$

Al igual que en el problema A, consideremos los casos:

Ba. Suponemos no existe combinación lineal $\{C\mathfrak{L}\}$ entre las T. La (4,1) debe verificarse para cualquier t; luego deben ser nulos los coeficientes S; absurdo, pues $S_1 = 1$.

Bb. Igual suposición respecto de las S, conduce a un absurdo, pues:

$$T_3 = \omega^2 = 0$$

Bc. Supuesta existente una $\{C\mathfrak{L}\}$ entre las T, tal como la

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 + k_3 T_3 + k_4 T_4 = 0 \tag{4,3}$$

previa eliminación de T_1 entre (4,3) y (4,1), la verificación de la resultante para cualquier t, exige que:

$$\frac{S_1}{k_1} = \frac{S_2}{k_2} = \frac{S_3}{k_3} = \frac{S_4}{k_4} = k_0$$

de donde

$$S_1 = \lambda_1 = 1$$

$$S_2 = \lambda_2 = \frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho} F_n) - F_t$$

$$S_3 = \lambda_3 = H(\bar{\sigma}) = -\frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho} p) - \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}}$$

$$S_4 = \lambda_4 = \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} \tag{4,4}$$

Las dos últimas (4,4) coinciden con las dos últimas (3,3) por tanto, de acuerdo con los cálculos reseñados en el problema Ac, y previo cambio de nomenclatura, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varrho} &= \lambda_4 \bar{\sigma} + \lambda'_4 \\ p &= \frac{c}{\sqrt{\bar{\varrho}}} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \\ \tau^2 &= -2c\sqrt{\bar{\varrho}} + c' \end{aligned}\right\} \tag{4,5}$$

así como, posteriormente las condiciones:

$$\lambda_4 = \lambda_3 = 0 \qquad (B\,c\,1)$$

$$\lambda_4 = \lambda_4' = 0 \qquad (B\,c\,2)$$

Prescindiendo del caso trivial $B\,c\,2$, (en el que $\bar{\varrho} = 0$), en el $B\,c\,1$, deducimos:

$$p = r = \bar{\varrho} = \lambda'_4 \tag{4,6}$$

y la trayectoria debe ser circular.

En cuanto a la ley del movimiento, se deduce fácilmente de (4,3), teniendo presente que $\lambda_4 = \lambda_3 = 0$, implican que aquélla se convierta en:

$$k_1 \frac{dv}{dt} + k_2 = 0 \tag{4,7}$$

de donde

$$v = -\frac{k_2}{k_1}\, t + v_0$$

A todo lo anterior, hay que añadir la restricción impuesta por la segunda (4,4), es decir:

$$\bar{\varrho} \frac{dF_n}{d\bar{\sigma}} - F_t = \lambda_2 \tag{4,8}$$

El valor de la tensión se deduce a partir de la ecuación (6, 5, 2, II), que, en nuestro caso se transforma en

$$\frac{v^2}{\lambda_4'} = \frac{T}{\lambda_4'} + F_n - 2\,w\,v - \omega^2\,\lambda'_4$$

de donde

$$T = (v + w\,\lambda_4')^2 - F_n \cdot \lambda'_4 \tag{4,9}$$

Como comprobación, utilizamos la (6, 5, 1, II) que toma la forma:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dT}{d\bar{\sigma}} + F_t$$

y puesto que a partir de (4,6), (4,7), (4,8), (4,9), hallamos:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k_2}{k_1}$$

$$\frac{dT}{d\bar{\sigma}} = -\lambda_4' \frac{dF_n}{d\bar{\sigma}}$$

$$F_t = \lambda_4' \frac{dF_n}{d\bar{\sigma}} - \lambda_2 \tag{4,11}$$

la verificación de la (4,10), para cualquiera $\bar{\sigma}$ y t, exige que

$$\frac{k_2}{k_1} = \lambda_2 \tag{4,12}$$

Resumiendo : en el caso en que el movimiento de los ejes es de rotación uniforme, y el hilo uniforme ($\varrho\sigma = 1$), será compatible una trayectoria estacionaria circular de radio λ_4', con un movimiento del hilo de deslizamiento uniformemente variado, $v = - \lambda_2 t + v_0$, siempre que a su vez F_t y F_n dependen exclusivamente de $\bar{\sigma}$, y satisfagan a la relación

$$\lambda_4' \frac{dF_n}{d\bar{\sigma}} - F_t = \lambda_2$$

Nótese que λ_2 no está sujeto a ninguna restricción ; es decir, puede ser $\lambda_2 \gtreqless 0$, y el movimiento en consecuencia, es uniformemente acelerado, uniforme o uniformemente retardado.

Bd. Supondremos que existe una $\{C\mathfrak{L}\}$ entre las S, tal como :

$$k_1 S_1 + k_2 S_2 + k_3 S_3 + k_4 S_4 = 0 \tag{4,13}$$

Proceso análogo a los anteriores (caso Ad, por ejemplo), nos lleva a las relaciones :

$$\frac{T_1}{k_1} = \frac{T_2}{k_2} = \frac{T_3}{k_3} = \frac{T_4}{k_4} = k_0$$

de donde :

$$T_1 = k_1 k_0 = \lambda_1 = \frac{dv}{dt} \tag{4,14,1}$$

$$T_2 = k_2 k_0 = \lambda_2 = 1 \tag{4,14,2}$$

$$T_3 = k_3 k_0 = \lambda_3 = \omega^2 \tag{4,14,3}$$

$$T_4 = k_4 k_4 = \lambda_4 = - 2 w v \tag{4,14,4}$$

De la última (4,14) se deduce que v es constante, y que su valor es :

$$v = v_0 = - \frac{k_4 k_0}{2 w}$$

y por consiguiente:

$$T_1 = k_1 = \lambda_1 = 0$$

Luego la combinación lineal (4,13), se reducirá a:

$$k_2\left[\frac{dF_n}{d\bar{\sigma}}\,\bar{\varrho} + F_n\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} - F_t\right] + K_3\left[-2\,\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} - p\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}}\right] + k_4\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = 0 \qquad (4,15)$$

ecuación diferencial, que relaciona la fuerza (causa), y la trayectoria (efecto), y que permite, considerando como dato a la primera hallar la segunda (problema directo) o viceversa (problema inverso), con el concurso de las identidades tantas veces usadas.

Como aplicación, y en el supuesto de que el hilo se mueva, deslizándose a lo largo de una espiral logarítmica, deduzcamos a partir de (4,15) las componentes F_t y F_n de la fuerza agente, (caso *Bd* 1).

Bd 1. Es sabido que en este caso será:

$$r = \sqrt{\beta}\,\bar{\sigma} \qquad r^2 = \beta\bar{\sigma}^2 \qquad \frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} = 2\beta\bar{\sigma} \qquad \frac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}^2} = 2\beta$$

$$p = \sqrt{\beta - \beta^2}\,\sigma \qquad \frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \sqrt{\beta - \beta^2}$$

$$\bar{\varrho} = \frac{\sqrt{\beta - \beta^2}}{1 - \beta}\,\bar{\sigma} \qquad \frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \frac{\sqrt{\beta - \beta^2}}{1 - \beta}$$

$$\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \frac{1}{2}\,\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} = \beta\bar{\sigma} \qquad p\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = \beta\bar{\sigma}$$

$$p\,\bar{\varrho} = \beta\bar{\sigma}^2$$

expresiones que transforman a la (4,15), en la:

$$0 = \left[k_2\,\sqrt{\beta - \beta^2}\;\frac{dF_n}{d\bar{\sigma}} - 3\beta\,(1 - \beta)\,k_3\right]\bar{\sigma} +$$

$$+ \left[k_2\,\sqrt{\beta - \beta^2}\;F_n - k_2\,F_t\,(1 - \beta) + k_4\,\sqrt{\beta - \beta^2}\right] \qquad (4,16)$$

relación que debe verificarse cualquiera que sea $\bar{\sigma}$, y que por tanto exige la anulación de las dos expresiones contenidas en los paréntesis. Mediante sencillos cálculos, se obtienen las componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} F_n = \dfrac{3k_3}{k_2}\,\sqrt{\beta - \beta^2}\;\bar{\sigma} + \mathfrak{S} \\[2ex] F_t = \dfrac{3k_3}{k_2}\,\beta\bar{\sigma} + \dfrac{\sqrt{\beta - \beta^2}}{1 - \beta}\left[\mathfrak{S} + \dfrac{k_4}{k_2}\right] \end{array}\right. \qquad (4,17)$$

La tensión es deducida a partir de la ecuación (6, 5, 2, II) que, en este caso, se convierte en:

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{T}{\varrho} + F_n - 2\, w v_0 - \omega^2 p$$

Mediante sustituciones y reducciones, obtenemos:

$$T = v_0^2 + \frac{\sqrt{\beta - \beta^2}}{1 - \beta}\,[2\, w v_0 - \mathcal{G}]\,\bar{\sigma} + \left[\omega^2 - \frac{3\,k_3}{k_2}\right]\beta\,\bar{\sigma}^2 \qquad (4{,}18)$$

Finalmente, la ecuación (6, 5, 1, II), nos permite efectuar los cálculos referentes a las constantes k_i. Partiendo de su expresión:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dT}{d\bar{\sigma}} + F_t + \omega^2 \bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\sigma}$$

llegamos fácilmente a:

$$\left[2\,\beta^2\left(\omega^2 - \frac{3\,k_3}{k_2}\right) + \frac{3\,k_3}{k_2}\,\beta + \omega^2\,\beta\right]\bar{\sigma} + \frac{\sqrt{\beta - \beta^2}}{1 - \beta}\left[2w\,v_0 + \frac{k_4}{k_2}\right] = 0$$

relación que por tener que quedar satisfecha para cualquier $\bar{\sigma}$, exige se verifique:

$$\begin{cases} \omega^2 = \dfrac{k_3}{k_2} & (4{,}19{,}1) \\[2ex] 2\,w\,v_0 = -\dfrac{k_4}{k_2} & (4{,}19{,}2) \end{cases}$$

o bien:

$$\beta = 0 \qquad (4{,}20)$$

La condición $\beta = 0$, nos lleva a la solución trivial $r = 0$. Las condiciones (4,19) son compatibles con las (4,14), previa sencilla comparación; y las soluciones del problema vienen dadas en función de los parámetros independientes ω, β, λ_4, $\mathcal{G}$ $(0 < \beta < 1)$

$$v_0 = -\frac{k_4\,k_0}{2\,\omega} = -\frac{\lambda_4}{2\,\omega}$$

$$r = \sqrt{\beta}\cdot\bar{\sigma}$$

$$F_n = 3\,\omega^2\sqrt{\beta - \beta^2}\cdot\bar{\sigma} + \mathcal{G}$$

$$F_t = 3\,\omega^2\,\beta\,\bar{\sigma} + \frac{\sqrt{\beta - \beta^2}}{1-\beta}\,[\mathfrak{S} + \lambda_4]$$

$$T = \frac{\lambda_4^2}{4\,\omega^2} - \frac{\sqrt{\beta-\beta^2}}{1-\beta}\,[\lambda_4 + \mathfrak{S}]\,\bar{\sigma} - 2\,\omega^2\,\beta\,\bar{\sigma}^2$$

Be. Si suponemos que entre las T, existen las dos combinaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1\;T_1 + k_3\;T_3 = 0 & (4{,}21) \\ k_2\;T_2 + k_4\;T_4 = 0 & (4{,}21) \end{cases}$$

y eliminamos T_1 y T_2 entre las anteriores, y la (4,13), la independencia de T_3 y T_4, exige que se cumpla:

$$\begin{cases} S_3\;k_1 = S_1\;k_3 & (4{,}22) \\ S_4\;k_2 = S_2\;k_4 & (4{,}23) \end{cases}$$

El sistema (4,20) (4,21) es equivalente al:

$$\begin{cases} k_1\,\dfrac{dv}{dt} + k_3\;\omega^2 = 0 & (4{,}24) \\ k_2 - 2\,k_4\;\omega\;v = 0 & (4{,}25) \end{cases}$$

en el que la (4,24) nos dice que:

$$v = -\frac{k_3}{k_1}\;\omega^2\;t + v_0 \qquad (4{,}26)$$

Si llevamos (4,26) a (4,25), la verificación idéntica de la relación resultante exige que:

$$k_4 = k_2 = 0 \qquad (4{,}27)$$

o que:

(*Be* 1) $\qquad k_3 = 0,\; k_2 = 2\,k\,\omega\,v_0$

SUBCASO ***Be 1.***

La velocidad de deslizamiento es ahora constante $v = v_0$. El sistema (4,22), (4,23), se convierte en el:

$$-\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,(\bar{\varrho}\,p) + \bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} = 0 \qquad (4{,}29)$$

$$2\,k_4\,\omega\,v_0\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = k_4\left[\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,(\bar{\varrho}\;F_n) - F_t\right] \qquad (4{,}30)$$

y, si integramos la primera (4,29) obtenemos:

$$2\,\bar{\varrho}\,p + r^2 = a \tag{4,31}$$

la cual, haciendo:

$$\bar{\varrho} = \frac{rdr}{dp}$$

se transforma en la:

$$2\,\frac{rdr}{dp}\cdot p + r^2 = a \tag{4,32}$$

que integrada, nos permite conocer la función $p\ (r^2)$

$$p = \frac{b}{r^2 - a} \tag{4,33}$$

De la conocida identidad:

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dp}\right)^2}} \tag{4,34}$$

y de la (4,33), deducimos el vínculo existente, entre φ y r, que resulta ser:

$$\varphi = \pm \int \frac{b\cdot dr^2}{2\,r^2\sqrt{r^2\,(r^2 - a)^2 - b^2}} = \pm \int \frac{bdz}{2\,z\,z\sqrt{(z-a)^2 - b^2}} =$$

$$= \pm \int \frac{bdz}{2\,z\sqrt{R\,(z)}} \qquad (z = r^2) \tag{4,35}$$

Por otra parte, de la (4,31) despejamos $\bar{\varrho}$:

$$\bar{\varrho} = -\frac{(a - r^2)^2}{2\,b} \tag{4,36}$$

Si, en el supuesto de que $K_4 \neq 0$, llevamos el valor de $\bar{\varrho}$, a la (4,30) obtendremos la relación que deberá existir en este caso, entre las F_t y F_n:

$$(2\,wv_0 - F_n)\,\frac{a - r^2}{b}\cdot\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} + \frac{(a - r^2)^2}{2\,b}\,\frac{dF_n}{d\bar{\sigma}} + F_t = 0 \tag{4,37}$$

Son casos particulares de fuerzas $\vec{F}$, que satisfacen a la (4,37) aquellas en las que:

1) $F_n = 2\, w\, v_0 = \text{constante}, \quad F_t \equiv 0$ (4,38)

2) $2\, w\, v_0 - F_n = \Omega = \text{constante}$, que implica que:

$$\frac{\Omega}{b}\,(a - r^2)\,\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} + F_t = 0 \tag{4,39}$$

expresión que define a F_t en función de $\bar{\sigma}$, si se supone realizada previamente la integración de la ecuación diferencial:

$$\frac{2\,b}{r^2 - a} = \sqrt{4\,r^2 - \left(\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}\right)^2} \tag{4,40}$$

o que simplemente expresa a F_t en función de r^2, caso de que nos limitemos a eliminar $\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}$, entre (4,39) y (4,40):

$$\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} = \pm\,\frac{2\sqrt{r^2\,(r^2 - a)^2 - b^2}}{r^2 - a} \tag{4,41}$$

$$F_t = \pm\,\frac{2\,\Omega}{b}\,\sqrt{r^2\,(r - a)^2 - b^2} = \pm\,\frac{2\,\Omega}{b}\,\sqrt{R\,(r^2)} \tag{4,42}$$

Como es habitual, la T, será hallada a partir de la (6, 7, 2) de Capítulo II, que en el actual caso *Be*2., se reduce a:

$$T = v_0^2 + 2\,wv_0\,\bar{\varrho} + \omega^2\,p\,\bar{\varrho} - \bar{\varrho}\,F_n$$

o, si para facilitar los cálculos hacemos:

$$v_0 = \omega\,\mu \tag{4,43}$$

a la:

$$\frac{T}{\omega^2} = \mu^2 + p\,\bar{\varrho} + \bar{\varrho}\left(2\,\mu - \frac{F_n}{\omega^2}\right) \tag{4,44}$$

que teniendo en cuenta (4,36) y (4,31), se resumirá en la:

$$\frac{T}{\omega^2} = \mu^2 + \frac{a - r^2}{2} - \frac{(a - r^2)^2}{2\,b}\left(2\,\mu - \frac{F_n}{\omega^2}\right) \tag{4,45}$$

y el movimiento es sólo posible cuando

$$T > 0 \tag{2,46}$$

La condición anterior ($T > 0$), se reducirá en el caso particular 1), antecitado, a la verificación de la desigualdad.

$$\frac{2\,T}{\omega^2} = 2\,\mu^2 + a - r^2 > 0$$

que queda satisfecha, para

$$r^2 < 2\,\mu^2 + a = \frac{2\,v_0^2}{\omega^2} + a$$

que indica que la trayectoria estacionaria es interior al círculo de centro en el origen, y radio $\sqrt{2\,\mu^2 + a}$.

En resumen: 1) la velocidad de deslizamiento del hilo sobre su trayectoria, es constante.

2) La trayectoria queda definida mediante (4,35)

3) La tensión viene dada, a través de (4,45)

Bf. Si suponemos ahora que entre las T, existen las dos combinaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1\,T_1 + k_4\,T_4 = 0 \\ k_2\,T_2 + k_3\,T_3 = 0 \end{cases}$$

por vía análoga a la indicada en el caso *Be*, obtenemos las relaciones

$$\begin{cases} k_2\,S_3 = k_3\,S_2 \\ k_1\,S_1 = k_1\,S_4 \end{cases}$$

El primero de los dos anteriores sistemas exige que se verifique:

$$\begin{cases} k_1\,\dfrac{dv}{dt} - 2\,k_4\,\omega\,v = 0 & (4{,}47) \\ k_2 + k_3\,\omega^2 = 0 & (4{,}48) \end{cases}$$

De la (4,47) deducimos que:

$$v = v_0\,\frac{2\,k_4}{k_1}\,\omega\,t \qquad (4{,}49)$$

y de la (4,48), que será:

$$\omega^2 = -\frac{k_2}{k_3} \tag{4,50}$$

es decir, k_2 y k_3 deben tener signos opuestos.

El segundo sistema, toma la forma:

$$\left\{\begin{aligned} & k_2\left[-\frac{d}{d\bar{\sigma}}(\bar{\varrho}\, p) - \bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right] = k_3\left[\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,(\bar{\varrho}\ F_n) - F_t\right] && (4,51)\\ & \qquad\qquad k_1\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = k_4 && (4,52)\end{aligned}\right.$$

De la (4,52), obtenemos:

$$\varrho = \frac{k_4}{k_1}\,\bar{\sigma} + k_4' \tag{4,53}$$

de la cual pasamos a la:

$$d\,\alpha = \frac{d\bar{\sigma}}{\dfrac{k_4}{k_1}\,\bar{\sigma} + k_4'}$$

relación, que por integración, permite deducir que:

$$dx = \cos.\ \alpha \cdot d\bar{\sigma} = \cos\, l\, c\left(\frac{k_4}{k_1}\,\bar{\sigma} + k_4'\right)^{\frac{k_1}{k_4}} d\bar{\sigma} \tag{4,54}$$

$$dy = \operatorname{sen}\,\alpha \cdot d\bar{\sigma} = \operatorname{sen}\, l\, c\left(\frac{k_4}{k_1}\,\bar{\sigma} + k_4'\right)^{\frac{k_1}{k_4}} d\bar{\sigma} \tag{4,55}$$

Una nueva integración, nos lleva al conocimiento de las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x\ (\bar{\sigma})\\ y &= y\ (\bar{\sigma})\end{aligned} \tag{4,56}$$

de la trayectoria. Fácil sería ahora ya, pasar de las (4,56) a $r^2\ (\bar{\sigma})$, $p\ (\bar{\sigma})$, y con estos valores, ya conocidos, la (4,51) nos indicará la relación a que deben satisfacer las F_t, y F_n para que dicha trayectoria sea estacionaria [1].

Bg. Las hipótesis

$$\begin{cases} k_1 \; T_1 + k_2 \; T_2 = 0 & (4{,}57) \\ k_3 \; T_3 + k_4 \; T_4 = 0 & (4{,}58) \end{cases}$$

implicarán la resolución del sistema:

$$\begin{cases} k_1 \dfrac{dv}{dt} + k_2 = 0 \\ k_3 \, \omega^2 = 2 \, k_4 \, \omega \, v = 0 \end{cases}$$

del que deducimos (si suponemos $k_1 \neq 0$):

$$\begin{cases} v = v_0 \qquad k_2 = 0 \\ v_0 = \dfrac{k_3}{2 \, k_4} \, \omega \end{cases} \tag{4,59}$$

Por vía análoga a la indicada en *Be* y *Bf*, se llega partiendo de (4,57) y (4,58) al sistema:

$$\begin{cases} k_1 \; s_2 = k_2 \; s_1 \\ k_3 \; s_4 = k_4 \; s_3 \end{cases}$$

que tiene la forma, de acuerdo con (4,59)

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho} \; F_n) - F_t = 0 \tag{4,60}$$

$$\frac{2 \, v_0}{\omega} \left[- \frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho} \; p) - \bar{\varrho} \, \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right] = \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} \tag{4,61}$$

---

(1) Aparte de análisis más detallado, que puede ser objeto de otro trabajo, es elemental comprobar que si

$$\frac{d}{d\,\bar{\varrho}} (\varrho F_n) - F_t = \text{cte.}$$

el subcaso B_1, se convierte en el *Be*. Fácil es de ver que en este caso, la trayectoria será circular, $\bar{\varrho} = k'_4$; $\alpha = \dfrac{\bar{\sigma}}{k'_4} + \alpha_0$

$$\begin{cases} dx = \cos \left(\dfrac{\bar{\sigma}}{k'_4} + \alpha_0 \right) d\bar{\sigma} \\ dy = \operatorname{sen} \left(\dfrac{\bar{\sigma}}{k'_4} + \alpha_0 \right) d\bar{\sigma} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = k'_4 \; \operatorname{sen} \left(\dfrac{\bar{\sigma}}{k'_4} + \alpha_0 \right) \\ y = - k'_4 \cos \left(\dfrac{\bar{\sigma}}{k'_4} + \alpha_0 \right) \end{cases} \quad T^1 = k_4{}^2$$

y la ley (4,49), pasará a ser $v = v_0$.

La (4,61), escrita previamente de la forma:

$$\frac{2\,v_0}{\omega}\left[d\,(\bar{\varrho}\,p) + \frac{dr^2}{2}\right] + d\bar{\varrho} = 0$$

se integrará, obteniéndose la:

$$\frac{4\,v_0}{\omega}\left[\bar{\varrho}\,p + r^2\right] + \bar{\varrho} = l \tag{4,62}$$

Terradas, al resolver el problema de la determinación de la trayectoria y movimiento de una cadena sin fin que gira alrededor del antebrazo sin deslizar y partiendo de las hipótesis exigidas por el enunciado que son

$$\begin{cases} F_t = F_n = 0 \\ v = \omega\, r_1 \end{cases}$$

(más restrictivas que las que introduce el caso Bg) llega a la ecuación: [1]

$$r^2 + 2\,\bar{\varrho}\,p + 4\,r_1\,\bar{\varrho} = h_1 \tag{4,63}$$

del todo análogo a la nuestra (4,62), la resuelve y discute muy a fondo. Por ello, en nuestro Bg, enviamos al lector, a la mencionada en (1), Memoria del profesor Terradas.

5. Aplicación del método de Apell, al caso de un sistema de ejes que gira con movimiento uniformemente acelerado ($\varkappa > 0$).

La ecuación eliminante de la tensión, punto de partida en el estudio a realizar, es la (6,8) del Cap. II: [2].

$$\frac{dv}{dt} - F_t + \frac{d}{ds}\,(\bar{\varrho}\,F_n) + \omega^2\,H\,(\bar{\sigma}) - 2\,w\,v\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + \varkappa\,\Phi\,(\bar{\sigma}) = 0 \tag{5,1}$$

en la que:

$$H\,(\bar{\sigma}) = -\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,(\bar{\varrho}\,p) - \bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} \tag{5,2}$$

$$\Phi\,(\bar{\sigma}) = p - \frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(\bar{\varrho}^2\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right) \tag{5,3}$$

---

(1) Ver «Proceedings of the fifth international congress of mathematicians». Cambridge, 1913, pág. 251.

(2) Recuérdese que seguimos suponiendo, $\varrho\sigma = \varrho_0\sigma_0 = 1$ para que sea posible la aplicación del Método de Appell.

PROBLEMA C.

Si suponemos que F_n y F_t dependen exclusivamente del tiempo, la (5,1) se escribirá en la forma:

$$\frac{dv}{dt} - F_t + (F_n - 2\,w\,v)\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + \omega^2\,H + \varkappa\,\Phi = 0 \qquad (5,4)$$

y las funciones $T,S,$ serán en este caso:

$$T_1 = \frac{dv}{dt} - F_t \qquad T_2 = F_n - 2\,w\,v \qquad T_3 = w^2 \qquad T_4 = \varkappa$$

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} \qquad S_3 = H \qquad S_4 = \Phi$$

Ca. Suponemos que no existe $\{C\mathfrak{L}\}$ entre las T. La (5,4) debe verificarse para cualquier t; luego deben ser nulos los coeficientes S_k; (1, 2, 3, 4); absurdo, pues $S_1 = 1$.

Cb. Si suponemos existente una $\{C\mathfrak{L}\}$ entre las S_k ($K = 1, 2, 3, 4$) llegamos al absurdo $T_4 = \varkappa = 0$.

Si admitimos la existencia de la $\{C\mathfrak{L}\}$

$$k_1\,T_1 + k_2\,T_2 + k_3\,T_3 + k_4\,T_4 = 0 \qquad (5,6)$$

por proceso análogo al aplicado en problema Ac, se llega a:

$$\frac{S_1}{k_1} = \frac{S_2}{k_2} = \frac{S_3}{k_3} = \frac{S_4}{k_4} = k_0$$

que también se puede escribir así:

$$\begin{cases} S_1 = k_1\,k_0 = \lambda_1 = 1 & (5,7) \\ S_2 = k_2\,k_0 = \lambda_2 = \dfrac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} & (5,8) \\ S_3 = k_3\,k_0 = \lambda_3 = H & (5,9) \\ S_4 = k_4\,k_0 = \lambda_4 = \Phi & (5,10) \end{cases}$$

Si tenemos presente que las tres primeras condiciones, (5,7) (5,8) (5,9) coinciden con las (3,3) del problema Ac podemos transcribir los resultados hallados en el citado problema.

$$\bar{\varrho} = \lambda_2 \bar{\sigma} + \lambda_2'$$
$$p = \frac{c}{\sqrt{\bar{\varrho}}} - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$$
$$r^2 = -2c\sqrt{\bar{\varrho}} + c'$$

Subdividiendo la resolución del actual en la de los $Cc\,1$ y $Cc\,2$ puesto que las condiciones obtenidas por eliminación de $\bar{\varrho}$, p, r^2, en la identidad (5,4) del Capítulo I, son las

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0 \qquad \text{(Cc 1)}$$

ó las

$$\lambda_2 = \lambda_2' = 0 \qquad \text{(Cc 2)}$$

Posteriormente y en cada subcaso, tendremos que introducir la restante ecuación (5,10).

Cc 1. De acuerdo con $Ac\,1$, será:

$$p = r = \bar{\varrho} = R = \lambda_2'$$

resultados que satisfacen a la $\Phi = \lambda_4$, ecuación que a su vez nos dice que:

$$R = \lambda_2' = \lambda_4$$

La ecuación del movimiento se reduce a la:

$$k_1\, T_1 + k_4\, T_4 = 0$$

es decir, a la:

$$k_1 \left(\frac{dv}{dt} - F_t\right) + R\,\varkappa = 0 \qquad (5,11)$$

de la cual se obtiene:

$$v = -\frac{R}{k_1}\,\varkappa\, t + \int F_t\, dt + \Omega \qquad (5,12)$$

De la ecuación (6, 7, 2) del Capítulo I,

$$\varrho_0\,\sigma_0 \frac{v^2}{\bar{\varrho}} = \frac{T}{\bar{\varrho}} + \varrho_0\,\sigma_0\, F_n - 2\,\varrho_0\,\sigma_0\, wv + \varrho_0\,\sigma_0 \left[-\omega^2\, p - \varkappa\,\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right]$$

se obtendrá:

$$T = (v + \omega\, R)^2 - R\, F_n$$

La ecuación (6, 7, 1)

$$\varrho_0 \sigma_0 \frac{dv}{dt} = \frac{\partial T}{\partial s} + \varrho_0 \sigma_0 F_t + \varrho_0 \sigma_0 \left[\omega^2 \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} - \varkappa p\right]$$

se reducirá en este caso, a la :

$$\frac{dv}{dt} = F_t - \varkappa R$$

que se satisface para cualquier valor de t, en virtud del resultado anterior (5,12), con tal de que $K_1 = 1$.

En definitiva :

1) La trayectoria debe ser circular.

2) La velocidad relativa es :

$$v = -\varkappa R t + \int F_t \, dt + \Omega$$

3) La tensión, si introducimos la velocidad absoluta

$$V = v + \varkappa v R = v + \varkappa R t$$

debe ser :

$$T = \left(\int F_t \, dt + \Omega\right)^2 - R F_n$$

Las componentes F_t y F_n son independientes entre sí, con la única restricción, ya conocida, de que sólo dependen de t.

Cc 2. Se llega a la solución carente de sentido

$$\bar{\varrho} = 0 = p = r$$

Cd. Si establecemos la hipótesis :

$$\sum_{i=1}^{4} k_i \, S_i = 0 \tag{5,13}$$

y operamos en la forma acostumbrada, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} T_1 = \lambda_1 = \dfrac{dv}{dt} - F_t \\ T_2 = \lambda_2 = F_n - 2 w v \\ T_3 = \lambda_3 = \omega^2 \\ T_4 = \lambda_4 = \varkappa \end{cases} \tag{5,14}$$

cuyas dos últimas ecuaciones son incompatibles.

Ce. Si suponemos ahora, que las funciones S_k ($k = 1, 2, 3, 4$) están vinculadas por dos combinaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1\ S_1 + k_4\ S_4 = 0 \\ k_2\ S_2 + k_3\ S_3 = 0 \end{cases} \tag{5,15}$$

y eliminamos S_1 y S_2, entre las (5,15) y la

$$\sum_{i=1}^{4} S_i\ T_i = 0 \tag{5,16}$$

obtendremos la:

$$S_4\left(T_4 - \frac{k_4}{k_1}\ T_1\right) + S_3\left(T_3 - \frac{k_3}{k_2}\ T_2\right) = 0 \tag{5,17}$$

en la cual, la independencia de las S_4, S_3, exigirá la anulación de sus coeficientes; es decir que:

$$\begin{cases} k_1\ T_4 - k_4\ T_1 = 0 \\ k_2\ T_3 - k_3\ T_2 = 0 \end{cases} \tag{5,18}$$

o sea que

$$\begin{cases} k_1 \varkappa - k_4\left(\dfrac{dv}{dt} - F_t\right) = 0 & (5,19) \\ k_2\, \omega^2 - k_3\ (F_n - 2\ w\, v) = 0 & (5,20) \end{cases}$$

La (5,19) permite hallar por integración, a la función, v; a su vez la (5,20) relaciona las componentes F_t, F_n, previa eliminación de la v hallada.

El sistema de ecuaciones diferenciales (5,15), que se puede escribir en la forma:

$$\begin{cases} k_2\ \dfrac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + k_3\left[-\dfrac{d\,(\bar{\varrho}\, p)}{d\bar{\sigma}} - \bar{\varrho}\ \dfrac{dp}{d\bar{\sigma}}\right] = 0 & (5,21) \\ k_1 + k_4\left[p - \dfrac{d}{d\bar{\sigma}}\left(\bar{\varrho}^2\ \dfrac{dp}{d\bar{\sigma}}\right)\right] = 0 & (5,22) \end{cases}$$

define la trayectoria.

Cf. Las hipótesis

$$\begin{cases} k_1\ S_1 + k_3\ S_3 = 0 & (5,23) \\ k_2\ S_2 + k_4\ S_4 = 0 & (5,24) \end{cases}$$

conducen por eliminación de S_1, S_2 entre las anteriores (5,23), (5,24) y la $\sum_{i\,1}^{4} S_i\ T_i$, al sistema :

$$\begin{cases} k_1\ T_3 = k_3\ T_1 & (5{,}25) \\ k_2\ T_4 = k_4\ T_2 & (5{,}26) \end{cases}$$

Mediante la integración del sistema (5,23), (5,24), escrito ahora en en la forma :

$$\begin{cases} k_1 + k_3 \left[- \frac{d}{d\bar{\sigma}} (\varrho\, p) - \bar{\varrho}\ \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right] = 0 & (5{,}27) \\ k_2\ \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + k_4 \left[p - \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left(\bar{\varrho}^2\ \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right) \right] = 0 & (5{,}28) \end{cases}$$

queda definida la trayectoria estacionaria.

A su vez, la ley del movimiento, es hallada a partir del sistema (5,25), (5,26), que toma el aspecto siguiente :

$$\begin{cases} k_1\, \omega^2 = k_3 \left(\frac{dv}{dt} - F_t \right) \\ k_2\ \varkappa = k_4\ (F_n - 2\, wv) \end{cases} \qquad (5{,}29)$$

6. Problema D.

Suponemos ahora que F_t, F_n dependen exclusivamente de $\bar{\sigma}$. La ecuación eliminante de la tensión, (6,8) del capítulo II, se escribirá en la forma siguiente :

$$\frac{dv}{dt} + \left[\frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho}\ F_n) - F_t \right] + \omega^2\ H\ (\bar{\sigma}) + (-\ 2\, wv)\ \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + \varkappa\, \Phi = 0$$

$$\begin{cases} H = \ - \frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho}\, p) - \bar{\varrho}\ \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \\ \Phi = p - \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left(\bar{\varrho}^2\ \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right) \end{cases} \qquad (6{,}1)$$

Si llamamos ahora :

$$T_1 = \frac{dv}{dt} \qquad T_2 = 1 \qquad T_3 = \omega^2 \qquad T_4 = -\,2\, wv \qquad T_5 = \varkappa$$

$$S_1 = 1 \qquad S_2 = \frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho}\ F_n) - F_t\, ;\ S_3 = H \qquad S_4 = \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} \qquad S_5 = \Phi \qquad (6{,}2)$$

la (6,1) adopta la forma :

$$\sum_{i=1}^{5} S_i \, T_i = 0 \tag{6,2}$$

Como los problemas anteriores, pasemos a resolver los siguientes casos :

Da. No existe combinación lineal entre las T : por ello, deben ser nulos los coeficientes S : absurdo.

Db. Si se suponen independientes las funciones S, se llega también al absurdo $T_2 = 0$.

Dc. Supongamos ahora existente una combinación lineal de la forma :

$$\sum_{i=1}^{5} k_i \, T_i = 0 \tag{6,4}$$

Si eliminamos T_1, entre la (6,4) y la (6,3), la independencia de las restantes T, impone el siguiente sistema de ecuaciones entre las S :

$$\begin{cases} S_1 = k_1 \, k_0 = \lambda_1 = 1 \\ S_2 = k_2 \, k_0 = \lambda_2 = \dfrac{d}{d\bar{\sigma}} [\bar{\varrho} \, F_n] - F_t \\ S_3 = k_3 \, k_0 = \lambda_3 = H \\ S_4 = k_4 \, k_0 = \lambda_4 = \dfrac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} \\ S_5 = k_5 \, k_0 = \lambda_5 = \Phi \end{cases} \tag{6,5}$$

el cual coincide con el que resulta de agregar la condición $\Phi = \lambda_5$, al sistema obtenido en circunstancias análogas para el caso *Bc*.

En *Bc* 1 (pues *Bc* 2 no tenía solución), llegamos a las conclusiones $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, de las que se seguirá que la trayectoria era

$$p = r = \bar{\varrho} = R = \lambda_4' \tag{6,6}$$

circular.

La nueva ecuación

$$\Phi = p - \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left(\bar{\varrho}^2 \, \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right) = \lambda_5$$

queda satisfecha para (6,6), con tal que :

$$R = \lambda_4' = \lambda_5$$

De acuerdo con los resultados anteriores, la ecuación (6,4) se reduce a:

$$k_1 \frac{dv}{dt} + k_2 + k_5 \varkappa = 0$$

de la que se deduce la ley de deslizamiento:

$$v = -\left(\frac{k_2}{k_1} + \varkappa R\right) t + v_0 \qquad (6,7)$$

Respecto de F_t y F_n, la penúltima de las (6,5), nos indica la índole del vínculo existente entre aquéllas.

La tensión, es hallada a partir de la (6, 7, 2), capítulo II; resulta ser:

$$T = (v + \omega R)^2 - R F_n = \left(v_0 - \frac{k_2}{k_1} t\right)^2 - R F_n \qquad (6,8)$$

Los resultados anteriores verifican a la (6, 7, 1) capítulo II como ecuación de comprobación, si se cumple

$$k_2 = k_1 \lambda_2$$

que se reduce a la identidad $K_0 K_1 = 1$, según (6,5).

El movimiento relativo será uniformemente acelerado retardado o uniforme, según sea

$$\lambda_2 + \varkappa R \lesseqgtr 0$$

o lo que es igual:

$$R\left[\frac{dF_n}{d\bar{\sigma}} + \varkappa\right] \lesseqgtr F_t$$

cualquiera que sea $\bar{\sigma}$

Dd. La hipótesis

$$\sum_{i=1}^{5} k_i S_i = 0$$

introduciría el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{ T_i = k_i k_0 = \lambda_i \} \qquad (i = 1, 2, \dots 5)$$

incompatible, pues la tercera es:

$$\omega^2 = \lambda_3$$

De. Supongamos existentes, las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} k_1 T_1 + k_2 T_2 = 0 & (6,9) \\ k_3 T_3 + k_4 T_4 + 0 & (6,10) \end{cases}$$

de las que se deduce que:

$$\begin{cases} k_1 \dfrac{dv}{dt} + k_2 = 0 \\ k_3 \omega^2 - 2 k_4 \omega v = 0 \end{cases}$$

sistema que admite la solución

$$V = -\frac{k_2}{k_1} t + v_0 \qquad (6,11)$$

con tal de que, simultáneamente:

$$\begin{cases} \dfrac{k_3 \varkappa}{2 k_4} = -\dfrac{k_2}{k_1} & (6,12) \\ V_0 = \dfrac{k_3}{2 k_4} \omega_0 & (6,13) \end{cases}$$

mediante oportuna eliminación, de las (6,9), (6,10), se infiere que entre las S existen las relaciones

$$\begin{cases} k_1 S_2 = k_2 S_1 \\ k_3 S_4 = k_4 S_3 \\ S_5 = 0 \end{cases}$$

que determinan la trayectoria y la conexión que deberá ligar a F_t y F_n a partir del sistema:

$$k_1 \left[\frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho} F_n) - F_t\right] = k_2$$

$$k_3 \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = k_4 \left[-\frac{d}{d\bar{\sigma}} (\bar{\varrho} p) - \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right]$$

$$p = \frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(\bar{\varrho}^2 \frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right)$$

CAPÍTULO IV

1. Aplicación del método de Terradas al caso $\varkappa \neq 0$: Problema E.

En este capítulo nos proponemos estudiar el movimiento estacionario de un hilo respecto de un sistema de ejes que gira con aceleración constante $\varkappa > 0$, en el caso de trayectoria plana y $F_b = 0$, a partir de la ecuación (6,6) eliminante de la T, y de una cualquiera de las dos (6, 5, 1), (6, 5, 2) establecidas en el capítulo II, y mediante el procedimiento seguido por Terradas para la resolución de otro problema de hilos (1).

Problema E. Denominaremos así, al enunciado anteriormente, con la inclusión de la condición

$$F_t - \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}\;F_n) = 0 \tag{1,1}$$

En este supuesto, la mencionada (6, 6, II), se reduce a:

$$\frac{dv}{dt} - v^2\,k_0 - \omega^2\,k_2 + \varkappa\,k_3 - 2\,\omega\,v\,k_1 = 0 \tag{1,2}$$

siendo:

$$k_0 = \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}\,(\varrho\sigma) \tag{2,3}$$

$$k_1 = \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{ds}\,(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}) \tag{1,4}$$

$$k_2 = \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{d\bar{\sigma}}\,(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}\;p) + \bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} \tag{1,5}$$

$$k_3 = p - \frac{1}{\varrho\sigma}\frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(\varrho\,\sigma\,\bar{\varrho}^2\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right) \tag{1,6}$$

$$\bar{\sigma} = s + \int_0^t v\,dt \tag{1,3 bis}$$

Los coeficientes $\frac{dv}{dt}$, v^2, ω^2, $2\,w\,v$, dependen exclusivamente de t; las k_0, k_1, $k_2\,k_3$, dependen de s y $\bar{\sigma}$. Si suponemos $\frac{dv}{dt} \neq 0$ para que la

(1) Vid. «Estudios sobre hilos» (Mem. R. Ac. de C. y Artes, año 1911, página 144).

(1,2) se satisfaga para t y $\bar{\sigma}$ y cualesquiera, es necesario y suficiente que dichas k_0, k_1, k_2, k_3, se reduzcan a funciones de t ó a constantes.

Del análisis de (1,3), se deduce que k_0 no depende de $\bar{\sigma}$ y si solamente de s. Luego k_0 no puede ser función de t, y se reduce a una constante, k. Por consiguiente, integrando obtenemos

$$\varrho \sigma = \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} \tag{1,7}$$

y la ley de variación de la densidad de masa por unidad de longitud es de tipo exponencial.

Por otra parte, efectuando la derivación indicada en (1,4) y recordando (1,3) deducimos una ecuación diferencial que liga $\bar{\varrho}$, k_1, k_0:

$$k_1 = \frac{1}{\varrho\sigma} \frac{d}{ds} (\varrho \sigma \bar{\varrho}) = \frac{d\bar{\varrho}}{ds} + \frac{1}{\varrho\sigma} \bar{\varrho} \frac{d(\varrho\sigma)}{ds} = k_0 \bar{\varrho} + \frac{d\bar{\varrho}}{ds} \tag{1,8}$$

También, desarrollando en (1,5), e introduciendo en el resultado a la función k_1, obtenemos una relación entre las funciones k_1, k_2

$$k_2 = \frac{1}{\varrho\sigma} \frac{ds}{d} (\varrho \sigma \bar{\varrho} p) + \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} = p \cdot k_1 + 2 \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \tag{1,9}$$

expresión, que mediante derivación respecto a $\bar{\sigma}$ se convierte en la:

$$k_1 \frac{dp}{d\bar{\sigma}} + 2 \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \cdot \frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} + 2 \bar{\varrho} \frac{d^2 p}{d\bar{\sigma}^2} = 0 \tag{1,10}$$

De esta última, en la que sólo figuran, además de k_1, funciones de $\bar{\sigma}$, deducimos que k_1 debe reducirse a una constante.

Remontándonos a (1,9), observamos que análogamente k_2 es independiente de t, y por ende, constante.

Luego, dado que en (1,8) no figura otra variable que $\bar{\sigma}$, y mediante integración, obtenemos la expresión del radio de curvatura:

$$\bar{\varrho} = \frac{k_1}{k_0} + \frac{\varkappa}{\varrho_0 \sigma_0} e^{-k_0 \bar{\sigma}} \tag{1,11}$$

Asimismo, en (1,6) verificando la derivación indicada, e introduciendo en el resultado la constante k_1, hallamos:

$$\begin{aligned} k_3 = p - \frac{1}{\varrho\sigma} \frac{d}{ds} \left[\varrho \sigma \bar{\varrho}^2 \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right] &= p - \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \frac{1}{\varrho\sigma} \frac{d}{ds} (\varrho \sigma \bar{\varrho}) - \\ - \bar{\varrho} \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left(\bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right) &= p - k_1 \bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} - \bar{\varrho} \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left(\bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} \right) \end{aligned} \tag{1,12}$$

Si ahora, derivamos respecto a $\bar{\sigma}$ el valor de $\bar{\varrho}\,\dfrac{dp}{d\bar{\sigma}}$, obtenido a partir de (1,9):

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}}\right) = \frac{d}{d\bar{\sigma}}\left(\frac{k_2 - k_1 p}{2}\right) = -\frac{k_1}{2}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} \tag{1,13}$$

e introducimos el resultado (1,13) en la ecuación (1,12), se convertirá ésta en:

$$k_3 = p - \frac{k_1}{2}\,\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} \tag{1,14}$$

La (1,14), como en casos anteriores, afirma que k_3 se reduce a una constante. Una nueva relación se obtiene, derivando la mencionada (1,14):

$$0 = \frac{dp}{d\bar{\sigma}} - \frac{k_1}{2}\,\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}}\,\frac{dp}{d\bar{\varrho}} \tag{1,15}$$

Con el fin de hallar las condiciones a que deben satisfacer las constantes k_0, k_1, k_2, k_3, eliminemos a las funciones $\bar{\varrho}$, p y a sus derivadas $\dfrac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}}$; $\dfrac{dp}{d\bar{\sigma}}$; $\dfrac{d^2p}{d\bar{\sigma}^2}$, entre las cinco relaciones (1,9), (1,10), (1,14), (1,15), (1,11), (que han sido deducidas con este motivo), y una sexta relación

$$\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{\sigma}} = -\frac{k_0\,a}{\varrho_0\,\sigma_0}\,e^{-k_0\bar{\sigma}} \tag{1,16}$$

La eliminante obtenida, prescindiendo de sencillos, pero prolijos cálculos, que omitimos por razón de brevedad, es:

$$(4 + k_1^2)\,k_1^2\,(K_2 - k_1\,k_3) = -\frac{K_0\,a}{\varrho_0\,\sigma_0}\,e^{-k_0\bar{\sigma}}\,(4 + k_1^2)\,2\,k_1\,(k_2 - k_1 k_3) \tag{1,17}$$

y puesto que debe quedar satisfecha para todo valor de $\bar{\sigma}$, será preciso que las constantes verifiquen alguna de las siguientes ecuaciones:

$$a)\ k_1 = 0 \tag{1,18}$$

$$b)\ k_2 = k_3 = 0 \tag{1,19}$$

$$c)\ k_2 = k_1\,k_3\ (k_1 \neq 0) \tag{1,20}$$

que originan en la resolución del problema E, los casos particulares Ea, Eb, Ec.

El método de cálculo que seguiremos en cada uno de los citados Ea, Eb, Ec es:

1) En primer lugar hallaremos la acuación de la trayectoria y la densidad de masa con el concurso de las ecuaciones (1,7), (1,9), (1,11), (1,14) y de las identidades: (5,1) (5,2) (5,3) y (5,4) del capítulo II, amén de la condición particular *a)* o *b)* o *c)*.

2) La ecuación (1,2) permitirá calcular la ley del movimiento.

3) La tensión será obtenida mediante (6, 5, 2, II).

4) Como comprobación de los cálculos, utilizaremos la (6, 5, 1, II).

2. Resolución del caso Ea. $k_1 = 0$.

De la ecuación (1,11) y de $k_1 = 0$, se deduce

$$\bar{\varrho} = \frac{a}{\varrho_0 \sigma_0} e^{k_0 \bar{\sigma}} \tag{2,1}$$

Las (1,9) y (5, 2, II), implican

$$k_2 = 2\,\bar{\varrho}\,\frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}\,;\; r^2 = k_2\,\bar{\sigma} + k'_2 \tag{2,2}$$

El valor de p es obtenido mediante la identidad (5, 3, II)

$$2\,p = \sqrt{4\,r^2 - \left(\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}\right)^2} = \sqrt{4\,k_2\,\bar{\sigma} + 4\,k_2' - k_2^2}$$

Si llevamos las p, $\bar{\varrho}$ y r halladas, a la identidad:

$$\bar{\varrho}\,\frac{2 - \dfrac{d^2 r^2}{d\bar{\sigma}^2}}{2} = p$$

ésta se convertirá en la igualdad

$$\frac{a^2}{\varrho_0^2\,\sigma_0^2}\,e^{-2 k_0 \bar{\sigma}} = k_2\,\bar{\sigma} + k_2' - \frac{k_2^2}{4}$$

que debe quedar satisfecha para toda $\bar{\sigma}$: y que por tanto exige que se verifique:

$$\text{ó} \quad k_0 = k_2 = 0\,;\; k_2' = \frac{a^2}{\varrho_0^2\,\sigma_0^2} \tag{2,3}$$

$$\text{ó} \quad a = k_2 = k_2' \tag{2,4}$$

En el subcaso *Ea 1,* y a partir de (2,3) se deduce que

$$p = r = \bar{\varrho} = \sqrt{k_2'} = \frac{a}{\varrho_0\,\sigma_0} = R \tag{2,5}$$

por consiguiente, el hilo es homogéneo, $\varrho\sigma = \varrho_0\sigma_0$ y la trayectoria una circunferencia de radio $R = \dfrac{a}{\varrho_0\,\sigma_0}$.

De (1,14) se deduce que $k_3 = p = R$. Si llevamos a (1,2) los valores obtenidos para los constantes, la ecuación del movimiento será :

$$\frac{dv}{dt} + \varkappa\, k_3 = \frac{dv}{dt} + \varkappa R = 0$$

por lo tanto :

$$v_r = -\varkappa R t + v_0 \tag{2,6}$$

Luego el movimiento relativo del hilo es uniformemente acelerado (por ser $\varkappa$ y R positivos) y tiene lugar en sentido contrario al del movimiento de los ejes. La velocidad de arrastre será $|\vec{V}_{arr}| = (\omega_0 + \varkappa t)\,R$ y la velocidad absoluta $|\vec{V}_{ab}| = v_0 + \omega_0 R =$ constante, que puede reducirse a cero, si $v_0 = -\omega_0 R$.

De la ecuación (6, 5, 2) del capítulo II deducimos el valor de la tensión :

$$T = \varrho_0\sigma_0\,[(v + \omega R)^2 - R F_n] = \varrho_0\sigma_0\,[(v_0 + \omega_0 R)^2 - R F_n]$$

La (6, 5, 1) del capítulo II, utilizada como comprobación

$$-\varkappa R\,\varrho_0\sigma_0 = -\varrho_0\sigma_0 R\,\frac{dF_n}{d\sigma} + \varrho_0\sigma_0 F_t - \varkappa R\,\varrho_0\sigma_0$$

se verifica idénticamente, en virtud de la hipótesis inicial (1,1)

En el subcaso *Ea 2,* las condiciones $k_2 = k_1 = k_2' = a = 0$ y las identidades habituales, exigen $\bar{\varrho} = r = p = 0$, solución trivial.

3. Resolución del caso *Eb*

$$k_2 = k_3 = 0$$

Si llevamos el valor de $\bar{\varrho}$, dado por (1,11) a la (1,9) obtenemos una ecuación diferencial en $p(\bar{\varrho})$, que resuelta nos dice que

$$p = \frac{c}{\sqrt{e^{K_0\bar{\sigma}}\,\bar{\varrho}}} \tag{3,1}$$

Si ahora, sustituímos en (1,14) los valores de k_3, p, $\frac{dp}{d\bar{\sigma}}$, $\bar{\varrho}$ hallados resulta la:

$$C\left[2 + \frac{k_1^2}{2}\right]\left[\frac{k_1}{k_0} e^{K_0\bar{\sigma}} + \frac{a}{\varrho_0 \sigma_0}\right]^{-\frac{1}{2}} = 0$$

que exige que se cumpla:

ó bien $$C = 0 \qquad (E\,b\,1)$$

ó $$k_0 = 0\,; \qquad k_1 \neq 0 \qquad (E\,b\,2)$$

En el subcaso ***Eb1***, $C = 0$, implica $p = 0$. La identidad (5, 2, II) nos dice que $r^2 = c'$, y la (5, 4, II) que $\bar{\varrho} = p$. Es decir

$$\bar{\varrho} = p = r = 0$$

solución trivial.

En el subcaso ***Eb 2***, al ser $k_0 = 0$, y de acuerdo con (3,1) y (1,11) es $\bar{\varrho} = \infty$, y $p = 0$. La identidad

$$2p = \sqrt{4r^2 - \left(\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}\right)^2}$$

previa integración, nos da el valor de r^2

$$r^2 = (r_0 + \bar{\sigma})^2$$

La trayectoria encontrada es una recta por el origen; pero debe ser desechada, pues de la (1,14) deducimos:

$$k_3 = p - \frac{k_1}{2}\bar{\varrho}\frac{dp}{d\bar{\sigma}} = -\frac{k_1}{4}\frac{dr^2}{d\bar{\sigma}} = -\frac{k_1}{2}(r_0 + \bar{\sigma})$$

que exigiría para su verificación idéntica, que $k_1 = k_3 = 0$, en contradicción con la hipótesis ***Eb 2***. Por tanto la hipótesis ***Eb***, no aporta ninguna solución al problema ***E***.

4. Resolución del caso ***Ec***:

$$k_2 = k_1 k_3 \qquad k_1 \neq 0 \qquad (4,1)$$

Si eliminamos las constantes k_2, k_3 entre (1,9), (1,14) y la relación $k_2 = k_1 k_3$ obtendremos la:

$$\left(2 + \frac{k_1^2}{2}\right)\bar{\varrho}\frac{d\bar{\sigma}}{dp} = 0$$

que implica ; o bien

Ec 1. $$p' = 0$$

o bien

Ec 2. $$\ddot{\varrho} = 0$$

SUBCASO *Ec 1.*

La (1,9) se convierte en la $k_1 p = k_2$ la cual, comparada con (4,1), nos dice que $p = k_3$. Este valor satisface a la (1,14).

De la identidad

$$\bar{\varrho} \frac{dp}{d\bar{\sigma}} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\bar{\sigma}}$$

deducimos

$$r^2 = R^2$$

Si ahora, sustituímos en la identidad (5, 4, II) los valores obtenidos para ϱ, p, r, obtenemos la igualdad :

$$\frac{k_1}{k_0} + \frac{a}{\varrho_0 \sigma_0} e^{-K_0 \bar{\sigma}} = k_3$$

que para quedar satisfecha para todo $\bar{\sigma}$, exige sean :

$$a = 0$$

$$k_1 = k_0 k_3$$

A su vez, de la identidad (5, 3, II), se deduce $\varrho = r$, y en definitiva, resulta que la trayectoria es una circunferencia, en la que

$$p = r = \bar{\varrho} = k_3 = R \qquad (4,2)$$

y el hilo está definido según la ley exponencial :

$$\varrho \sigma = \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} \qquad (4,3)$$

Estudiemos a continuación la ley del movimiento. Las condiciones $k_2 = k_1 K_3 = k_1 R$, y $k_1 = k_0 k_3 = K_0 R$ imponen que $k_2 = k_0 R^2$.

Si eliminamos k_1 y k_2 entre las anteriores relaciones y la ecuación del movimiento (1,2), obtendremos la ecuación diferencial :

$$\frac{dv}{dt} - v^2 k_0 - \omega^2 k_0 R^2 + \varkappa R - 2\, w v k_0 R = 0 \qquad (4,4)$$

que define la velocidad de deslizamiento (relativa). Puesto que la velocidad de arrastre es, (en módulo), ωR, la velocidad absoluta, será

$$V = v + \omega R = v + \varkappa R t \tag{4,5}$$

y por tanto

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dv}{dt} + \varkappa R \tag{4,6}$$

De acuerdo con (4,6), la (4,4) se puede escribir en la forma

$$\frac{dV}{dt} = k_0 (v + \omega R)^2 = k_0 V^2$$

ecuación que integrada, nos dice que:

$$V = -\frac{1}{k_0 t + k_0'} \tag{4,7}$$

y por lo tanto ([1])

$$v = -\varkappa R t - \frac{1}{k_0 t + k_0'} \tag{4,8}$$

Calculemos la tensión. La (6, 5, 2) del capítulo II se reduce, de acuerdo con los resultados obtenidos a:

$$\frac{\varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} v^2}{R} = \frac{T}{R} + \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} F_n - \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} \omega^2 R - 2 \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} \omega v$$

expresión, que simplificada se convierte en:

$$T = \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} [(v + \omega R)^2 - R F_n] = \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} [V^2 - R F_n]$$

es decir, en la:

$$T = \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} \left[\frac{1}{(k_0 t + k_0')^2} - R F_n \right] \tag{4,9}$$

([1]) Si $k_0 = 0$, este resultado $Ec\,1$ se reduce al de Ea. En efecto; sería $\varrho \sigma = \varrho_0 \sigma_0$ (uniforme), y $v = -\varkappa R t - \frac{1}{k_0'}$, [ver (2,6)].

Como comprobación de los resultados obtenidos en este caso *Ec 1*, llevaremos

$$\frac{dv}{dt} = -\varkappa R + \frac{k_0}{(k_0 t + k_0')^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \varrho_0 \sigma_0 e^{k_0 s} \left[\frac{k_0}{(k_0 t + k_0')^2} - k_0 R F_n - R \frac{d F_n}{d \bar{\sigma}} \right]$$

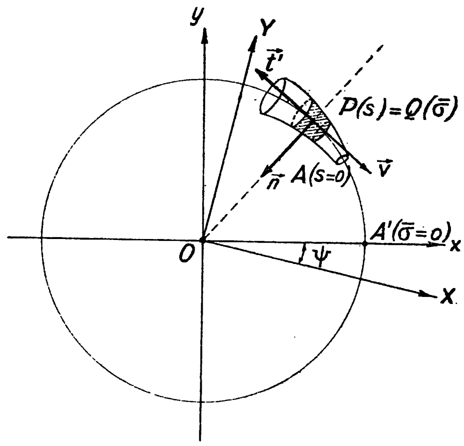

Fig. 6 — Solución al problema *Ec* 1, para $k_0 > 0$

a la ecuación (6, 5, 1) del capítulo I, que quedará reducida a la :

$$F_t - k_0 R F_n - R \frac{d F_n}{d \bar{\sigma}} = 0$$

igualdad que queda satisfecha para toda $\bar{\sigma}$, en virtud de la hipótesis inicial (1,1) y de los valores obtenidos en (4,2) y (4,3) para ϱ y $\varrho\sigma$.

Subcaso *Ec 2*.

Al igual que en *Ea 2*, y en *Eb 1* obtenemos la solución carente de sentido $\varrho = 0$.

BIBLIOGRAFIA

APPELL. *a)* Acta mathematica, tomo XIII.

TERRADAS. *b)* Estudios sobre los hilos (Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes), Tomo I, 1911.

c) Sur le mouvement d'un fil (Proceeding's of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 1913, pág. 250).

d) Del movimiento estacionario de un hilo cuando los ejes de referencia giran con velocidad angular constante. (Revista de la Sociedad Matemática Española, 1911).

SANVISENS. *e)* Contribución al estudio del movimiento estacionario de un hilo flexible e inextensible.