

CURVAS ALABEADAS DE ANCHURA AFIN CONSTANTE

POR

J. SANCHO DE SAN ROMÁN

RESUMEN

DEFINICIÓN 1. Dados dos arcos Γ y Γ_1 , regulares con torsión positiva en cada punto, llamaremos *distancia afin* de un punto P de Γ a un punto P_1 de Γ_1 , al volumen definido por los tres vectores siguientes: vector tangente afin de Γ en P , tangente afin de Γ_1 en P_1 y vector PP_1 .

DEFINICIÓN 2. Si la distancia afin de P a los puntos de Γ_1 pasa por un máximo, y éste es constante, cualquiera que sea P sobre Γ , diremos que Γ y Γ_1 constituyen una *pareja afin* de curvas.

En una pareja afin, se tiene:

CONCLUSIÓN 1. Si es P_1 el punto de Γ_1 que está a la máxima distancia afin de P , éste es el punto de Γ que tiene igual propiedad respecto de P_1 .

CONCLUSIÓN 2. La normal principal y la tangente afines de Γ en P , cortan, respectivamente, a la tangente y la normal afines de Γ_1 en P_1 .

CONCLUSIÓN 3. Es condición necesaria y suficiente, para que los arcos Γ y Γ_1 constituyan una pareja afin, que si es P_1 el punto de Γ_1 que está a la máxima distancia afin de P , su tangente afin corte a la normal principal afin de Γ en P .

CONCLUSIÓN 4. Siempre existen curvas que forman con una dada, una pareja afin.

Curvas alabeadas cerradas:

DEFINICIÓN 3. Dada una curva regular cerrada C , con torsión positiva en cada punto, llamamos *anchura afin* de la curva en un

punto P de ella, al máximo valor de la distancia afín de P a cada uno de los demás puntos de C .

DEFINICIÓN 4. Diremos *curva alabeada de anchura afín constante*, a una del tipo anterior, que cumpla además la condición de tener la anchura afín en cada punto, constante.

I

PRELIMINARES

1. En la bibliografía inserta al final, aparte de algunas obras de carácter general incluimos todos los artículos que hemos podido consultar, bien directamente o a través de resúmenes, sobre el tema: Geometría afín de curvas alabeadas o de pares de curvas.

Como Revistas orientadoras para la búsqueda de artículos, se han repasado: *Japanese Journal of Mathematics* (1924-1935), *Zentralblatt für Math.* (1931-1940), y *Mathematical Reviews* (1940-1955).

Aunque aparecen estudiados muy diversos tipos de pares de curvas desde el punto de vista afín, no se encuentra entre ellos el que es objeto del presente trabajo, el cual permite, cuando el par de curvas constituye una línea cerrada, definir «curvas alabeadas cerradas de anchura afín constante», que pueden estimarse como una generalización natural a la Geometría afín, de las curvas alabeadas cerradas de anchura constante (v. p. ejem. SANCHO DE SAN ROMÁN [15]).

En lo que sigue, designaremos con x el vector afijo de una curva, con s su arco afín, con k y t la curvatura y torsión afines (v. BLASCHKE [2]). El vector dx/ds se llama tangente afín, y el d^2x/ds^2 normal principal afín.

II

PAREJAS DE CURVAS EQUIDISTANTES AFINES

2. Entre dos puntos correspondientes de un par de curvas de BERTRAND afines (OGIWARA [12]), existe la siguiente relación:

«El volumen definido por las dos tangentes afines dx/ds dx_1/ds_1 y la cuerda $x_1 - x$, es constante».

Esta propiedad puede considerarse, en cierto sentido, como análoga a la que tienen los puntos homólogos PP_1 de dos curvas conjugadas de

BERTRAND-métricas, de formar sus tangentes un ángulo constante; en efecto, siendo el segmento PP_1 de longitud constante, y normal a ambas curvas, el volumen definido por los dos vectores unitarios tangentes homólogos y el segmento que une los puntos de contacto, es constante.

En nuestro trabajo [15], indicamos la existencia de curvas que no siendo de BERTRAND, poseen las propiedades antedichas, a saber: PP_1 constante y normal doble, y ángulo entre las tangentes en P y P_1 , constante.

Análogamente, en Geometría afín, vamos a estudiar ciertos pares de curvas, que son en cierto modo, generalización de las de BERTRAND-afines.

Partiremos para ello, de la siguiente definición:

DEFINICIÓN. Dados dos arcos Γ y Γ_1 , llamaremos *distancia afín* de un punto x de Γ , a un punto x_1 de Γ_1 , al volumen definido por los tres vectores siguientes: tangente afín de Γ en x , tangente afín de Γ_1 en x_1 y vector $x_1 - x$; esto es, al producto mixto $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx_1}{ds_1}, x_1 - x\right)$ ⁽¹⁾.

Supongamos ahora que el par de arcos Γ y Γ_1 cumplen las siguientes condiciones:

1.^a Considerando un punto fijo x de Γ , y uno x_1 móvil sobre Γ_1 , la distancia afín entre x y x_1 pasa por un valor máximo $V(x)$.

2.^a Cualquiera que sea x sobre Γ , V es constante.

Entonces diremos, que los dos arcos constituyen una pareja de curvas equidistantes afines, o simplificando, una *pareja afín* de curvas ⁽²⁾.

Designaremos con x_1 , ya que en lo sucesivo no habrá lugar a confusión, al punto de Γ_1 que está a la máxima distancia afín de x . Indicaremos con acentos las derivadas respecto del arco afín s de Γ , y con puntos las realizadas respecto del arco afín s_1 de Γ_1 .

3. La condición 1.^a citada más arriba, exige que sea:

$$\frac{dV}{ds_1} = (x', \ddot{x}_1, x_1 - x) + (x', \dot{x}_1, \dot{x}_1) = 0,$$

es decir:

$$(x', \ddot{x}_1, x_1 - x) = 0 \quad (1)$$

lo cual indica que la normal principal afín a Γ_1 en x_1 , corta a la tangente a Γ en x .

⁽¹⁾ Esta definición, constituye una generalización a las curvas del espacio, de la distancia afín definida por Süss [20] entre dos puntos de un óvalo.

⁽²⁾ Por analogía con las parejas de SCHELLE-SALKOWSKI ([18] cap. XV), que aparecen usando el concepto distancia métrica en lugar de distancia afín.

Al variar x , varía x_1 , pero en virtud de la condición 2.^a, es V constante y, por lo tanto,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial s_1} ds_1 = 0,$$

más siendo :

$$\frac{\partial V}{\partial s_1} = 0,$$

resulta :

$$\frac{\partial V}{\partial s} = (x'', \dot{x}_1, x_1 - x) + (x', \dot{x}_1, -x') = 0,$$

esto es :

$$(x'', \dot{x}_1, x_1 - x) = 0 \quad (2)$$

que comparada con (1), tiene la misma forma permutando x por x_1 .

* Es decir, en una *pareja afín* de curvas, cada punto de Γ (o Γ_1) es, de todos los de Γ (o Γ_1), el que está a mayor distancia afín de su correspondiente en la otra, y su normal principal afín corta a la tangente de su correspondiente.

Recíprocamente, obvio es señalar que si se cumplen (1) y (2) los arcos Γ y Γ_1 constituyen una *pareja afín* de curvas.

4. Dada una curva $x(s)$, veamos si existen siempre curvas x_1 , que formen con la dada una *pareja afín*.

Designando como siempre por x_1 , el punto correspondiente de x , podemos escribir :

$$x_1 = x + ax' + bx'' + cx''' \quad (3)$$

donde a , b y c son funciones de s .

Derivando (3) con respecto a s , y recordando que :

$$x^{IV} + kx'' + tx' = 0,$$

se tiene :

$$\dot{x}_1 \frac{ds_1}{ds} = x'(1 + a' - ct) + x''(a + b' - ck) + x'''(b + c') \quad (4)$$

pero sustituyendo :

$$x''' = \frac{1}{c}(x_1 - x - ax' - bx'')$$

queda,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \frac{ds_1}{ds} = & x' \left[1 + a' - ct - \frac{a}{c} (b + c') \right] + \\ & + x'' \left[a + b' - ck - \frac{b}{c} (b + c') \right] + (x_1 - x) \frac{b + c'}{c} \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para que x_1 sea correspondiente de x , en una *pareja afin*, es que se cumplan (1) y (2), o también, que se cumpla el sistema equivalente:

$$(x'', \dot{x}_1, x_1 - x) = 0 \quad (2) \quad \text{y} \quad (x', \dot{x}_1, x_1 - x) = \text{const} \quad (6)$$

como ya se vió en el párrafo anterior.

Multiplicando escalarmente (5) por $(x_1 - x) \wedge x''$, resulta:

$$(x_1 - x, x'', \dot{x}_1) \frac{ds_1}{ds} = (x_1 - x, x'', x') \left[1 + a' - ct - \frac{a}{c} (b + c') \right] = 0$$

en virtud de (2); es decir, o es nulo el volumen $(x_1 - x, x'', x')$, o lo es el coeficiente de x' en (5). Pero para que este volumen sea nulo, siendo siempre $x' \wedge x'' \neq 0$ y $(x_1 - x) \wedge x'' \neq 0$, salvo casos particulares, es preciso que x' fuese coplanario con x'' y $x_1 - x$, y, por tanto, en virtud de (2), cortaría a $\dot{x}_1$, lo cual es imposible, por suponer la constante de (6) distinta de cero.

Por tanto, si exceptuamos el caso trivial de ser la superficie de las rectas $x_1 - x$ desarrollable, o el caso de ser $x_1 - x$ la normal afin de x , la condición (2) se puede escribir:

$$1 + a' - ct - \frac{a}{c} (b + c') = 0 \quad (7)$$

Y la condición (6), se escribirá, por (3) y (4), así:

$$\begin{aligned} (x', \dot{x}_1, x_1 - x) = \frac{ds_1}{ds} \begin{vmatrix} 1 & 1 + a' - ct & a \\ 0 & a + b' - ck & b \\ 0 & b + c' & c \end{vmatrix} = V \text{ const} \\ \frac{ds}{ds_1} [(a + b' - ck)c - b(b + c')] = V \text{ const.} \end{aligned} \quad (8)$$

Pero:

$$\frac{ds}{ds_1} = (x'_1, x''_1, x'''_1)^{-\frac{1}{6}} = f(a, b, c, b', c', b'', c'', b''', c'''),$$

con lo cual resulta que las dos condiciones (7) y (8), constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de tercer orden, con tres funciones incógnitas a , b y c . Se puede añadir, por tanto, una relación arbitraria entre ellas, y aún existirá una solución con nueve constantes arbitrarias.

5. Existiendo las relaciones (1), (2) y (6), entre elementos invariantes afines de dos puntos correspondientes x y x_1 , y con el propósito de encontrar relaciones nuevas, escribamos las (1) y (2) así :

$$\begin{aligned} x' &= \lambda \ddot{x}_1 + \mu (x_1 - x) & \text{o} & & \dot{x}_1 &= \lambda_1 x'' + \mu_1 (x - x_1) \\ x'' &= l \dot{x}_1 + m (x_1 - x) & & & \ddot{x}_1 &= l_1 x' + m_1 (x - x_1) \end{aligned} \quad (9)$$

donde supondremos los coeficientes, funciones derivables de s ; naturalmente, se tiene :

$$\lambda_1 = \frac{1}{l}, \quad \mu_1 = \frac{m}{l}, \quad l_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad m_1 = \frac{\mu}{\lambda} \quad (10)$$

utilizando estos cuatro coeficientes sólo para facilitar el cálculo.

Derivando la segunda fórmula de (9), y teniendo en cuenta la primera, obtendremos :

$$x''' = \dot{x}_1 \left(l' + m \frac{ds_1}{ds} \right) + \ddot{x}_1 \left(l \frac{ds_1}{ds} - m\lambda \right) + (x_1 - x) (m' - m\mu) \quad (11)$$

luego :

$$(x', x'', x''') = (\dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1 - x) \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ l & 0 & m \\ l' + m \frac{ds_1}{ds} & l \frac{ds_1}{ds} - m\lambda & m' - m\mu \end{vmatrix}$$

pero :

$$(\dot{x}_1, \ddot{x}_1, x_1 - x) = \left(\dot{x}_1, \frac{1}{\lambda} x' + \frac{\mu}{\lambda} (x - x_1), x_1 - x \right) = -\frac{V}{\lambda},$$

y, por tanto, queda :

$$1 = -\frac{V}{\lambda} \left[\frac{ds_1}{ds} (l^2 \mu + m^2 \lambda) + \lambda (l'm - m'l) \right]$$

y, finalmente, teniendo en cuenta (10) :

$$-\frac{\lambda_1^2}{V} \frac{ds}{ds_1} = m_1 + \mu_1^2 - \frac{d\mu_1}{ds_1} \quad (12)$$

Si hubiésemos partido de las dos segundas fórmulas de (9) habríamos llegado a

$$-\frac{\lambda^2}{V} \frac{ds_1}{ds} = m + \mu^2 - \mu' \quad (13)$$

que combinada con la anterior, proporciona la siguiente relación entre λ , μ , l y m :

$$1 + V(l'm - m'l) = \frac{V^2}{\lambda^3} (m + \mu^2 - \mu') (l^2\mu + m^2\lambda) \quad (14)$$

De las (9) se deducen inmediatamente, las siguientes:

$$(x', x'', x_1 - x) = lV \quad (15)$$

$$(\dot{x}_1, \ddot{x}_1, x - x_1) = l_1 V = \frac{V}{\lambda} \quad (16)$$

$$(\ddot{x}_1, x'', x_1 - x) = ll_1 V = \frac{l}{\lambda} V \quad (17)$$

y de éstas se deduce:

$$\frac{(x', x'', x_1 - x) (\dot{x}_1, \ddot{x}_1, x - x_1)}{(\ddot{x}_1, x'', x_1 - x)} = \text{const.} \quad (18)$$

Queda planteado el siguiente problema: «Ya que de (1) y (2) se deduce (18), recíprocamente, ¿de (18) y (1) se deducirá (2)? Es decir, si en un par de curvas Γ y Γ_1 , es x_1 el punto de Γ_1 que está a la máxima distancia afin de un punto x de Γ , y además se cumple (18), ¿constituirán ambas curvas una *pareja afin*?

Con facilidad se deducen también, de (9) y (11), las siguientes igualdades:

$$(x', x'', x_1 - x) = \left(l' + m \frac{ds_1}{ds} \right) V \quad (19)$$

$$(x'', x''', x_1 - x) = \left(ml - \frac{l^2}{\lambda} \frac{ds_1}{ds} \right) V \quad (20)$$

y las dos que resultan de sustituir x por x_1 , y s por s_1 .

No podemos dejar tampoco de considerar, el volumen del «tetraedro osculador» de x y x_1 (v. BLASCHKE, [2], pág. 90), determinado por los cuatro puntos siguientes: x , x_1 , punto de intersección de la tangente en x con el plano osculador en x_1 , y punto de corte de la tangente en x_1 con el plano osculador en x .

En nuestro caso (véase figura), dos pares de aristas opuestas de tal tetraedro son: las dos tangentes, y las dos normales afines en x y x_1 . Su volumen es:

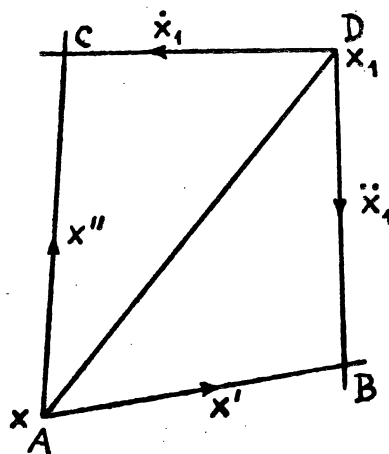
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, x_1 - x);$$

pero:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{\mu} x', \quad \overrightarrow{AC} = \frac{1}{m} x''$$

luego queda, en virtud de (15):

$$\text{Vol. } ABCD = \frac{l}{m\mu} V = \frac{1}{\mu\mu_1} V \quad (21)$$



Con las fórmulas anteriormente deducidas se pueden plantear con facilidad, las ecuaciones a que deberán satisfacer los coeficientes l , m λ y μ , para que se verifiquen relaciones geométricas sencillas, exigidas de antemano.

A modo de ejemplo, deduciremos la ecuación que deberán cumplir, para que la tangente x' sea paralela al plano determinado por $\dot{x}_1$ y $\ddot{x}_1$; se tendrá:

$$(x', \ddot{x}_1, \dot{x}_1) = 0,$$

pero,

$$(x', \ddot{x}_1, \dot{x}_1) = \lambda(\ddot{x}_1, \ddot{x}_1, \dot{x}_1) + \mu(x_1 - x, \ddot{x}_1, \dot{x}_1) = 0$$

y en virtud de (13) y (19), se obtiene la relación :

$$\lambda + \mu \left(i_1 + m_1 \frac{ds}{ds_1} \right) V = 0,$$

o sea

$$\lambda + \mu \left(-\frac{\lambda'}{\lambda^2} - \frac{\mu}{\lambda} \frac{V}{\lambda^2} \frac{1}{m + \mu^2 - \mu'} \right) = 0 \quad (22)$$

que es la buscada.

6. Para que el párrafo anterior tenga mayor utilidad práctica, vamos a establecer las relaciones que ligan los coeficientes l , m , λ y μ , con los a , b y c del § 4.

Recordando que :

$$x_1 - x = ax' + bx'' + cx''',$$

se tiene :

$$\text{por (20)} \quad a = (x'', x''', x_1 - x) = V \left(ml - \frac{l^2}{\lambda} \frac{ds_1}{ds} \right)$$

$$\text{por (19)} \quad b = (x''', x', x_1 - x) = V \left(-l' - m \frac{ds_1}{ds} \right) \quad (23)$$

$$\text{y por (15)} \quad c = (x', x'', x_1 - x) = Vl$$

fórmulas que junto con la :

$$-\frac{ds_1}{ds} = \frac{V}{\lambda^2} (m - \mu' + \mu^2),$$

dan a , b y c en función de dichos coeficientes.

Para despejar éstos en función de a , b y c , se deduce en primer lugar de (5),

$$a + b' - ck - \frac{b}{c} (b + c') = \frac{ds_1}{ds} \frac{1}{l}, \quad -\frac{1}{c} (b + c') = \frac{ds_1}{ds} \frac{m}{l},$$

luego,

$$m = -\frac{c(a + b' - ck)}{b + c'} + b \quad (24)$$

y tenemos, además, ya,

$$l = \frac{V}{c} \quad (25)$$

Para calcular λ y μ , derivemos con respecto a s_1 , la igualdad :

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x'' + \mu_1 (x - x_1),$$

y sustituyendo a continuación,

$$x'' = \frac{1}{c} (x_1 - x) - \frac{a}{c} x' - \frac{b}{c} x'',$$

queda :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & \left[\frac{1}{c} (x_1 - x) - \frac{a}{c} x' - \frac{b}{c} x'' \right] \lambda_1 \frac{ds}{ds_1} + x'' (\dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \mu_1) + \\ & + x' \frac{ds}{ds_1} \mu_1 + (\dot{\mu}_1 - \mu_1^2) (x - x_1), \end{aligned}$$

o sea :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 = & x'' \left(-\frac{b}{c} \lambda_1 \frac{ds}{ds_1} + \dot{\lambda}_1 - \mu_1 \lambda_1 \right) + x' \left(-\frac{a}{c} \lambda_1 + \mu_1 \right) \frac{ds}{ds_1} + \\ & + (x - x_1) \left(-\frac{1}{c} \lambda_1 \frac{ds}{ds_1} + \mu_1 - \mu_1^2 \right), \end{aligned}$$

y suponiendo (v. consideraciones de la pág. 5), que x'' , x' y $x_1 - x$ no son coplanarios, se obtiene, de comparar la última fórmula con la

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{\lambda} x' + \frac{\mu}{\lambda} (x - x_1),$$

a la que debe ser idéntica :

$$\begin{aligned} -\frac{b}{c} \lambda_1 \frac{ds}{ds_1} + \dot{\lambda}_1 - \mu_1 \lambda_1 &= 0 \\ \left(-\frac{a}{c} \lambda_1 + \mu_1 \right) \frac{ds}{ds_1} &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad (26)$$

y

$$\left(-\frac{1}{c} \lambda_1 \frac{ds}{ds_1} + \mu_1' \frac{ds}{ds_1} - \mu_1^2 \right) = \frac{\mu}{\lambda} \quad (27)$$

Substituyendo ahora :

$$\lambda_1 = \frac{1}{l} \quad \text{y} \quad \mu_1 = \frac{m}{l},$$

y haciendo uso de (8), (24) y (25), quedan despejadas λ y μ en función de a , b y c .

III

CURVAS ALABEADAS CERRADAS DE ANCHURA AFÍN
CONSTANTE

7. Si los dos arcos que constituyen una *pareja afín*, forman unidos una curva cerrada, tenemos una generalización a la Geometría afín, de las curvas alabeadas cerradas de anchura constante.

A las condiciones que se exigen para que una curva sea regular cerrada, tenemos ahora que añadir la siguiente: que tenga en cada punto torsión métrica positiva, para que el arco afín sea real.

Desde luego, existen curvas cerradas regulares, con torsión siempre positiva. Por ejemplo, BLASCHKE ([2] pág. 100), presenta como tema, el demostrar que la curva:

$$\begin{aligned}x &= b \cos t + a \cos t \cos nt \\y &= b \sin t + a \sin t \cos nt \quad (n \text{ entero y } a > 0) \\z &= -a \sin nt\end{aligned}$$

es una de ellas, para n suficientemente grande, y $b > 2a$. En efecto, calculado el determinante (x_i, x_{ii}, x_{iii}) , cuyo signo es el de la torsión (aceptando el convenio más usual), resulta ser igual a:

$$\begin{aligned}&an[n^4(ab - 2a^2 \cos nt) + \\&+ n^2(b^2 \cos nt - 2ab \cos 2nt - 4a^2 \cos nt + a^2 \cos^3 nt) - \\&- \cos nt(b + a \cos nt)^2] = an(An^4 + Bn^2 + C)\end{aligned}\quad (28)$$

Ahora bien, como es: $an > 0$, y los coeficientes de n^4 y n^2 son acotados, así como el término: $\cos nt(b + a \cos nt)^2$, se deduce que si es: $ab - 2a^2 \cos nt > 0$, o sea, $b > 2a$, el signo de (28) será positivo, en cuanto n sea suficientemente grande.

8. Para definir rigurosamente el concepto de curva de anchura afín constante, exponemos la siguiente previa:

DEFINICIÓN. Dada una curva regular cerrada con torsión positiva en cada punto, llamaremos *anchura afín* en un punto x de ella, al máximo valor de la *distancia afín* $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx_1}{ds_1}, x_1 - x\right)$ de dicho punto, a

cada uno de los de la curva. Y al punto x_1 que esté a la máxima distancia afin de x , llamaremos *opuesto afin* de x .

Sentado esto, diremos que la curva citada es de *anchura afin constante*, cuando lo sea la anchura afin en cada punto.

Entonces, como ya demostramos en el párrafo 3, si x_1 es « opuesto » de x , recíprocamente, x es *opuesto afin* de x_1 ; y a este par de puntos se le puede aplicar todas las fórmulas y consideraciones de los párrafos 4, 5 y 6.

9. Claro es, que se podía haber dado otro volumen, invariante afin con la curva, como anchura afin en un punto, pero la anteriormente definida es del menor orden posible, y además, su constancia obliga a la reciprocidad de puntos opuestos, cosa que no ocurre en los casos más sencillos estudiados por nosotros.

Como más interesante, expondremos el que define como anchura afin (A) en un punto x , al valor máximo del volumen

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{d^3x}{ds^3}, x_1 - x \right) = I,$$

cundo x es fijo y x_1 móvil sobre la curva.

Se tiene :

$$\frac{\partial I}{\partial s_1} = (x', x''', x_1) = 0 \quad (29)$$

como condición necesaria de máximo, la cual se deduce también intuitivamente.

Si dicho máximo es constante para cada x , se tiene :

$$\frac{\partial I}{\partial s} = (x'', x''', x_1 - x) + (x', x^{IV}, x_1 - x) = 0$$

o sea, recordando :

$$\begin{aligned} x^{IV} &= -kx'' - tx', \\ (x'', x''' + kx', x_1 - x) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Por tanto, « es condición necesaria y suficiente, para que la anchura afin (A) sea constante, que el vector de la indicatriz covariante de la curvatura : $z = x''' + kx'$, que corresponde a x , sea paralelo al plano determinado por la normal principal afin x'' y la cuerda $x_1 - x$ ».

Ahora, llamando «*opuesto*» de x , al punto x_1 cuya tangente satisface a (29), será :

$$x_1 - x = ax'' + b(x''' + kx') \quad (a \text{ y } b \text{ funciones de } s),$$

y, de la constancia del volumen $(x', x'', x_1 - x) = I$, deducimos :

$$(x', x'', ax'' + bx''' + bkx') = I \text{ const},$$

o sea :

$$a = -I \text{ const} \quad (31)$$

y queda como ecuación del arco «*opuesto*» a x :

$$x_1 = x - Ix'' + b(s)(x''' + kx') \quad (32)$$

donde I representa la anchura (A) constante, y b una función arbitraria de s .

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERWALD, L. — *Affingometrie in R_{n+1}* . — Monatshefte für Math. und Physic, t. 32, pág. 89-106, 1922.
- [2] BLASCHKE, W. — *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. — Band II, Springer, Berlin, 1923.
- [3] CHEREP, R. — *Affinvarianten gewissen Ternen von Raumkurven* — Gazeta Mat. Lisboa, 12, 35-38, 1951.
- [4] CHEREP, R. — *Invariantes afines de pares de curvas alabeadas*. — Math. Notae, t. 11, 110-123, 1951.
- [5] FON. T. CH. — *On the affine Mannheim curves*. — J. Chinese Math. Soc., 1 62-69, 1936.
- [6] HAACK, W. — *Eine geometrische deutung der Affin-Invarianten einer Raumkurve*. — Math. Z., 38, 155-162, 1934.
- [7] HIRAKAWA, J. — *The relative differentialgeometrie in affine space*. — Japanese J. of Math., XVII, 3, 347-400, 1941.
- [8] KOWALEWSKI, G. — *Über raumliche Affinzykloiden*, S.-B. — Heidelberg. Akad. Wiss., 1934, 18-26 (Abh. 10).
- [9] MAEDA, J. — *Einige Sätze in der Kurventheorie im n -dimensionalen affinen Raume*. — Tohoku Math. J., 45, 130-133, 1938.
- [10] MAEDA, J. — *On the theorie of curves in E_3 affine*. — Sc. Tohoku Imp. Univ., Ser. 1, 28, 350-369, 1940.
- [11] MAEDA, J. — *A characteristic property of space curves of constant affine first curvature*. — Tohoku Math. J., 48, 148-151, 1941.
- [12] OGIWARA, S. — *Über affine Bertrandsche Kurven*. — Jap. J. of Math., IV, 93-99, 1927.
- [13] OGIWARA, S. — *Über die Affinkurvenentfernungen*. — Tohoku Math. J., 38, 101-117, 1933.
- [14] SALKOWSKI, E. — *Affine Differentialgeometrie*. — (Sammlung Göschens, Gruppe 1, Bd. 22), 204 pág., Berlin, 1934.
- [15] SANCIO DE SAN ROMÁN, J. — *Sobre curvas alabeadas cerradas, en especial de anchura constante*. — Memorias de Mat. Ins. Jorge Juan, n.º 10, 1949.
- [16] SANTALÓ, L. A. — *Algunas propiedades de las curvas alabeadas en la geometría diferencial afin*. — Portugaliae Mat., 3, 63-68, 1942.
- [17] SAKASI, S. — *Contributions to the affine and projective differential-geometrie of space curves*. — Jap. J. Math., 13, 473-481, 1937.
- [18] SCHELLS-SALKOWSKI. — *Allgemeine Theorie der Kurven doppelte Krümmung*. — Leipzig, 1915.
- [19] SU, B. — *Note on the theorie of curves in the affine space*. — Jap. J. of Math., 7, 1-8, 1930.
- [20] SÜSS, W. — *Über affine Geometrie. XL; Eiflächen konstanter affinbreite*. — Math. Annalen, 96, 251-260, 1927.
- [21] SÜSS, W. — *Affine Differentialgeometrie von Kurvenpaaren im Raum*. — Arch. Math., 3, 137-141, 1952.