PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA RÉSIDUATION EN LIAISON AVEC LES CORRESPONDANCES DE GALOIS

PAR

P. DUBREIL ET R. CROISOT

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, nous dégageons les propriétés fondamentales de la résiduation que nous plaçons dans son cadre le plus général en considérant trois ensembles ordonnés E, F, G et une application doublement isotone de $E \times F$ dans G (voir la définition précise au § III).

Cette idée de considérer trois ensembles distincts s'est imposée à nous d'une manière naturelle à la suite d'une conférence de J. GUÉRINDON sur la théorie des A-modules développée par P. M. GRUNDY (1). Elle a été utilisée d'autre part dans l'étude abstraite des opérations algébriques binaires par I. FLEISCHER (2). Combinée avec l'inversion de la relation d'ordre dans l'ensemble G ce qui amène à envisager une application doublement anti-isotone de $E \times F$ dans G, elle conduit à des énoncés beaucoup plus commodes. De plus, elle n'est pas sans intérêt pour les applications puisqu'il existe un cas important, dont fait partie la théorie de P. M. GRUNDY, où les ensembles F et G seulement coïncident, l'ensemble E en étant distinct (voir la note (8) au § III).

Nous avons développé cette étude en mettant d'abord en évidence le lien étroit qui existe entre la notion de correspondance de Galois et celle de résiduation (voir § I). Ce rapprochement conduit d'une manière naturelle au principe de dualité (voir § II, théorème 4) qui, joint à l'évident principe de symétrie, permet de déduire de toute propriété de la

(1) J. GUÉRINDON, *Généralisation additive de la théorie des idéaux*, exposé n.° 14 du Séminaire d'Algèbre de P. DUBREIL, année 1954-1955, d'après un mémoire de P. M. GRUNDY, *A generalization of additive ideal theory*, Proc. of Cambridge Philo. Soc., 38, 1942, p. 241-279.

(2) I. FLEISCHER, *Les homomorphismes dans les algébres généralisées*, exposé n.° 19 du Séminaire d'Algèbre de P. DUBREIL, année 1954-1955.

résiduation cinq autres propriétés. Ce principe de dualité figure déjà implicitement sous une forme restreinte dans un mémoire de M. WARD et R. DILWORTH (3) qui ont remarqué que, pour un demi-groupe abélien réticulé entier, résidué, la multiplication peut être considérée comme la résiduation de la résiduation, à condition d'inverser la relation d'ordre.

I

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DES CORRESPONDACES DE GALOIS ET ÉTUDE D'UNE DÉFINITION ÉQUIVALENTE A CELLE DE CORRESPONDANCE DE GALOIS

Soient $X = \{x, x', ...\}$ et $Y = \{y, y', ...\}$ *deux ensembles ordonnés* (4) dont nous désignons les relations d'ordre par ξ et η respectivement et les relations d'ordre inverses par ξ^{-1} et η^{-1}; nous écrirons aussi $x \leqslant x'$, $y \leqslant y'$ pour $x \xi x'$, $y \eta y'$, et $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$ pour $x \xi^{-1} x'$, $y \eta^{-1} y'$.

Soient π une application de X dans Y et ϱ une application de Y dans X. On dit que π et ϱ définissent *une correspondance de Galois entre X et Y* par rapport aux relations d'ordre ξ et η si les quatre conditions suivantes sont vérifiées:

1. $x \leqslant x'$ entraîne $\pi x \geqslant \pi x'$;

1'. $y \leqslant y'$ entraîne $\varrho y \geqslant \varrho y'$;

2. on a $x \leqslant \varrho \pi x$;

2'. on a $y \leqslant \pi \varrho y$.

Rappelons les propriétés d'une telle correspondance (5).

PROPRIÉTÉ 1. *Si y est un élément quelconque de Y, ϱy est le plus gran des éléments x de X tels que l'on ait $\pi x \geqslant y$.*

PROPRIÉTÉ 2. *L'application $\pi \varrho$ de Y dans Y est une application de fermeture* (6).

---

(3) M. WARD et R. DILWORTH, *Residuated lattices*, Trans. Amer. Math. Soc., 45, 1939, pág. 335-354.

(4) La terminologie est celle de M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Gauthier-Villars, 1953. Il s'agit donc d'ensembles *partiellement* ordonnés au sens de P. DUBREIL, Algèbre, 2.ème édition, Gauthier-Villars, 1954.

(5) Cf. P. DUBREIL, *loc. cit.*, pág. 119.

(6) Cf. P. DUBREIL, *loc. cit.*, pág. 52.

Propriété 3. *Si y est un élément quelconque de Y, pour qu'il existe un élément $x \in X$ tel que l'on ait $\pi x = y$, il faut et il suffit que soit vérifiée la relation $y = \pi \varrho y$ ou la relation $y \geqslant \pi \varrho y$ qui lui est équivalente d'après 2'.*

Propriété 4. *Soit la relation d'équivalence $y \equiv y'$ $(\mathfrak{R})$ définie dans Y par $\varrho y = \varrho y'$. Les classes modulo $\mathfrak{R}$ sont convexes et possèdent un élément maximum, l'élément maximum de la classe contenant y étant $\pi \varrho y$.*

Remarque. Les applications ϱ et π définissant une correspondance de Galois entre Y et X, les propriétés 1, 2, 3, 4 sont valables si l'on y remplace partout X par Y, π par ϱ et réciproquement.

Propriété 5. *Les applications π et ϱ restreintes aux sous-ensembles des éléments de X et Y de la forme ϱy et πx sont des applications biunivoques inverses l'une de l'autre et ces sous-ensembles sont des ensembles ordonnés duaux relativement aux restrictions des relations d'ordre ξ et η.*

Définition. Soit π une application de X dans Y qui soit *anti-isotone par rapport aux relations d'ordre ξ et η*, c'est-à-dire telle que la condition 1 soit vérifiée. Nous dirons qu'elle est *résiduée par rapport aux relations d'ordre ξ et η* si, quel que soit $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que l'on ait $\pi x \geqslant y$ et si l'ensemble des éléments x possédant cette propriété admet un élément maximum que nous notons ϱy, définissant ainsi une application ϱ de Y dans X, appelée *application résiduelle de π par rapport aux relations d'ordre ξ et η.*

Propriété 6. *Dans l'hypothèse de la définition précédente, les applications π et ϱ définissent une correspondance de Galois entre X et Y.*

En effet, la condition 1 est vérifiée par hypothése et on voit immédiatement que les conditions 1', 2, 2' sont également vérifiées.

Les propriétés 1 et 6 montrent que les notions de correspondance de Galois et d'application anti-isotone résiduée sont équivalentes et permettent d'énoncer les résultats suivants.

Théorème 1. *Soient X et Y deux ensembles ordonnés par les relations ξ et η, π une application de X dans Y anti-isotone et résiduée par rapport à ces relations d'ordre, ϱ son application résiduelle. Alors, l'application ϱ de Y dans X est anti-isotone et résiduée par rapport aux relations, d'ordre η et ξ, son application résiduelle étant π.*

Théorème 2. (Principe général de dualité). *Soit une propriété valable pour tout couple d'ensembles X et Y ordonnés par les relations ξ et η et tels qu'il existe une application π de X dans Y anti-isotone* *résiduée par rapport à ces relations d'ordre et dont l'application résiduelle est ϱ. Alors, la propriété obtenue en remplaçant partout X par Y, ξ par η, π par ϱ et inversement, est également valable.*

Remarque. On pourrait de la même façon donner une définition équivalente à celle de correspondance de Galois *inversée* et en tirer des propriétés analogues. Nous n'énoncerons pas explicitement ces propriétés qu'on déduit des précédentes en remarquant qu'une correspondance de Galois inversée par rapport aux relations d'ordre ξ et η *n*'est autre qu'une correspondance de Galois par rapport aux relations d'ordre ξ et η^{-1}.

II

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA RÉSIDUATION

Nous considérons dans ce paragraphe *trois ensembles ordonnés* $E = \{e, e', ...\}$, $F = \{f, f', ...\}$, $G = \{g, g', ...\}$ dont nous désignons les relations d'ordre par ε, φ, ψ respectivement et les relations d'ordre inverses par ε^{-1}, φ^{-1}, ψ^{-1}; nous écrirons aussi $e \leqslant e'$, $f \leqslant f'$, $g \leqslant g'$ pour $e \varepsilon e'$, $f \varphi f'$, $g \psi g'$ et $e \geqslant e'$, $f \geqslant f'$, $g \geqslant g'$ pour $e \varepsilon^{-1} e'$, $f \varphi^{-1} f'$, $g \psi^{-1} g'$.

Nous envisageons *une application* α *de* $E \times F$ *dans* G faisant correspondre, à tout couple d'éléments $e \in E$, $f \in F$, un élément $\alpha(e, f) \in G$; nous noterons aussi l'élément $\alpha(e, f)$ simplement ef. L'application α est assujettie à la condition suivante :

$$e \leqslant e',\ f \leqslant f' \quad \text{entraînent} \quad ef \geqslant e'f',$$

ce qu'on exprime en disant qu'elle est *doublement anti-isotone par rapport aux relations d'ordre* ε, φ, ψ.

Définition. Nous disons que l'application α est *résiduée à gauche* relativement aux relations d'ordre ε, φ, ψ (7) si, quel que soit $f \in F$, l'application α_f de E sur G définie par $\alpha_f e = \alpha(e, f)$ est résiduée par rapport aux relations d'ordre ε et ψ. S'il en est ainsi, nous désignons par ${}_f\beta$ l'application résiduelle de α_f par rapport aux relations d'ordre ε et ψ et nous définissons une application β de $F \times G$ dans E par $\beta(f, g) = {}_f\beta g$; nous appelons cette application *l'application résiduelle à gauche de* α relativement aux relations d'ordre ε, φ, ψ (7), et nous notons

(7) Nous sous-entendrons la mention des relations d'ordre s'il s'agit effectivement des relations ε, φ, ψ.

l'élément $\beta(f, g)$ également $f \diagdown g$ ("f sous g"). De même, nous disons que l'application α est *résiduée à droite* relativement aux relations d'ordre ε, φ, ψ (7) si, quel que soit $e \in E$, l'application ${}_e\alpha$ de F sur G définie par ${}_e\alpha f = \alpha(e, f)$ est résiduée par rapport aux relations d'ordre φ et ψ. S'il en est ainsi, nous désignons par γ_e l'application résiduelle de ${}_e\alpha$ par rapport aux relations d'ordre φ et ψ et nous définissons une application γ de $G \times E$ dans F par $\gamma(g, e) = \gamma_e g$; nous appelons cette application *l'application résiduelle à droite de* α relativement aux relations d'ordre ε, φ, ψ (7), et nous notons l'élément $\gamma(g, e)$ également g / e ("g sur e").

Nous désignons par λ l'application biunivoque de $F \times E$ sur $E \times F$ définie par $\lambda(f, e) = (e, f)$ quels que soient $e \in E$ et $f \ni F$, par μ et ν respectivement, les applications biunivoques de $G \times F$ sur $F \times G$ et de $E \times G$ sur $G \times E$ définies de façon analogue.

Théorème 3. *Soient E, F, G trois ensembles ordonnés par les relations d'ordre ε, φ, ψ ; α une application de $E \times F$ dans G doublement anti-isotone par rapport à ces relations d'ordre et résiduée à gauche et à droite, β et γ ses applications résiduelles à gauche et à droite.*

a) *L'application $\alpha\lambda$ de $F \times E$ dans G doublement anti-isotone par rapport aux relations d'ordre φ, ε, ψ est résiduée à gauche et à droite par rapport à les relations d'ordre, ses applications résiduelles à gauche et à droite étant $\gamma\nu$ et $\beta\mu$.*

b) *L'application β est doublement anti-isotone par rapport aux relations d'ordre φ, ψ, ε ; elle est résiduée à gauche et à droite par rapport à ces relations d'ordre, ses applications résiduelles à gauche et à droite étant γ et α. De même, l'application γ est doublement anti-isotone par rapport aux relations d'ordre ψ, ε, φ ; elle est résiduée à gauche et à droite par rapport à ces relations d'ordre, ses applications résiduelles à gauche et à droite étant α et β.*

a) résulte immédiatement des définitions.

La seconde partie de b) résulte de la première ; il suffit donc d'établir les propriétés de β. Cette application est doublement anti-isotone par rapport aux relations d'ordre φ, ψ, ε : $f \leqslant f'$ implique ${}_f\beta g \geqslant {}_{f'}\beta g$, c'est-à-dire $\beta(f, g) \geqslant \beta(f', g)$; $g \leqslant g'$ implique ${}_f\beta g \geqslant {}_f\beta g'$, c' est-à-dire $\beta(f, g) \geqslant \beta(f, g')$. Quel que soit $f \in F$, l'application ${}_f\beta$ est résiduée d'après le théorème 1, son application résiduelle étant α_f ; par suite, l'application β est résiduée à droite relativement aux relations d'ordre φ, ψ, ε, son application résiduelle à droite étant α. Les relations $ef \geqslant g$ et $f \diagdown g \geqslant e$ sont équivalentes ; l'application α étant résiduée à droite, il existe, quels que soient e et g, au moins un élément f vérifiant ces relations et, parmi ces éléments, il en existe un qui est maximum, l'élément $\gamma(g, e) = g/e$; c'est dire que l'application β est résiduée à gauche par rapport aux relations d'ordre φ, ψ, ε, son application résiduelle étant γ.

THÉORÈME 4. *Soit une propriété valable pour tout système de trois ensembles E, F, G, ordonnés respectivement par les relations d'ordre ε, φ, ψ et tels qu'il existe une application α de $E \times F$ dans G doublement antiisotone par rapport à ces relations d'ordre et résiduée à gauche et à droite, ses applications résiduelles à gauche et à droite étant β et γ.*

a) PRINCIPE DE SYMÉTRIE. *La propriété obtenue en remplaçant partout E, F, G, ε, φ, ψ, α, β, γ par F, E, G, φ, ε, ψ, $\alpha\lambda$, $\gamma\nu$, $\beta\mu$ est vraie.*

b) PRINCIPE DE DUALITÉ. *Les propriétés obtenues en remplaçant partout E, F, G, ε, φ, ψ, α, β, γ par F, G, E, φ, ψ, ε, β, γ, α ou par G, E, F, ψ, ε, φ, γ, α, β sont vraies.*

Il suffit d'appliquer le théorème 3.

Dans tout ce qui suit, nous supposons vérifiées les hypothèses du théorème 3. Pour plus de commodité, nous utiliserons les quantificateurs $\forall$ (quelque soit) et $\exists$ (il existe).

PROPRIÉTÉ 7. *Les applications suivantes sont des applications de fermeture :*

$$\begin{array}{lll}
f \text{ étant fixé dans } F, & g \to (f\backslash g)f & (\text{de } G \text{ dans } G); \\
e \text{ étant fixé dans } E, & g \to e(g/e) & (\text{de } G \text{ dans } G); \\
g \text{ étant fixé dans } G, & e \to (g/e)\backslash g & (\text{de } E \text{ dans } E); \\
f \text{ étant fixé dans } F, & e \to f\backslash ef & (\text{de } E \text{ dans } E); \\
e \text{ étant fixé dans } E, & f \to ef/e & (\text{de } F \text{ dans } F); \\
g \text{ étant fixé dans } G, & f \to g/(f\backslash g) & (\text{de } F \text{ dans } F).
\end{array}$$

Pour la première, cela résulte de la proprieté 2 en prenant les applications α_f et ${}_f\beta$. Pour la seconde, il suffit d'appliquer le principe de symétrie, et pour les quatre autres le principe de dualité.

PROPRIÉTÉ 8. *On a les équivalences suivantes :*

$f \in F$ et $g \in E$

$$\exists\, e \text{ tel que } ef = g \iff g = (f\backslash g)f \iff g \geqslant (f\backslash)f\,;$$

$e \in E$ et $g \in E$ étant fixés,

$$\exists\, f \text{ tel que } ef = g \iff g = e(g/e) \iff g \geqslant e(g/e)\,;$$

$g \in G$ *et* $e \in G$ *étant fixés,*

$$\exists f \text{ tel que } f \diagdown g = e \iff e = (g / e) \diagdown g \iff e \geqslant (g / e) \diagdown g\,;$$

$f \in F$ *et* $e \in G$ *étant fixés,*

$$\exists g \text{ tel que } f \diagdown g = e \iff e = f \diagdown ef \iff e \geqslant f \diagdown ef\,;$$

$e \in E$ *et* $f \in F$ *étant fixés,*

$$\exists g \text{ tel que } g / e = f \iff f = ef / e \iff f \geqslant ef / e\,;$$

$g \in G$ *et* $f \in F$ *étant fixés,*

$$\exists e \text{ tel que } g / e = f \iff f = g / (f \diagdown g) \iff f \geqslant g / (f \diagdown g).$$

Il suffit d'appliquer la propriété 3 en prenant les applications α_f et ${}_f\beta$, puis le principe de symétrie et le principe de dualité.

Corollaire. *On a les égalités suivantes:*

$\forall e \in E$ et $\forall f \in F$, $\quad ef = (f \diagdown ef) f\,;\quad ef = e(ef / e)\,;$
$\forall f \in F$ et $\forall g \in G$, $\quad f \diagdown g = (g / [f \diagdown g]) \diagdown g\,;\quad f \diagdown g = f \diagdown (f \diagdown g) f\,;$
$\forall g \in G$ et $\forall e \in E$, $\quad g / e = e(g / e) / e\,;\quad g / e = g / ([g / e] \diagdown g).$

Cela résulte de la propriété 8 où l'on prend $g = ef$, $e = f \diagdown g$, $f = g / e$.

Propriété 9. *Soient les relations d'équivalence suivantes:*

f *étant fixé dans* F,

$$\mathcal{S}_f \text{ définie dans } G \text{ par } g \equiv g' (\mathcal{S}_f) \iff f \diagdown g = f \diagdown g'\,;$$

e *étant fixé dans* E,

$$_e\mathcal{S} \text{ définie dans } G \text{ par } g \equiv g' ({}_e\mathcal{S}) \iff g / e = g' / e\,;$$

g *étant fixé dans* G,

$$\mathfrak{M}_g \text{ définie dans } E \text{ par } e \equiv e' (\mathfrak{M}_g) \iff g / e = g / e'\,;$$

f *étant fixé dans* F,

$$_f\mathfrak{M} \text{ définie dans } E \text{ par } e \equiv e' ({}_f\mathfrak{M}) \iff ef = e'f\,;$$

e *étant fixé dans* E,

$$\mathfrak{M}_e \text{ définie dans } F \text{ par } f \equiv f' (\mathfrak{M}_e) \iff ef = ef'\,;$$

g *étant fixé dans* G,

$$_g\mathfrak{M} \text{ définie dans } F \text{ par } f \equiv f' ({}_g\mathfrak{M}) \iff f \diagdown g = f' \diagdown g.$$

Les classes modulo chacune de ces relations d'équivalence sont convexes et possèdent un élément maximum, l'élément maximum de la classe contenant respectivement g, g, e, e, f, f, *étant* $(f\diagdown g)f$, $e(g/e)$, $(g/e)\diagdown g$, $f\diagdown ef$, ef/e, $g/(f\diagdown g)$.

Il suffit d'appliquer la propriété 4 en prenant les applications α_f et ${}_f\beta$, puis le principe de symétrie et le principe de dualité.

PROPRIÉTÉ 10. *f étant un élément fixé de F, les applications $e \to ef$ de E dans G, $g \to f\diagdown g$* de G dans *E restreintes aux sous-ensembles des éléments de E et G de la forme $f\diagdown g$ et ef sont des applications biunivoques inverses l'une de l'autre et ces sous-ensembles sont des ensembles ordonnés duaux relativement aux restrictions des relations d'ordre ε et ψ. De même, g étant un élémént fixé de G, les applications $f \to f\diagdown g$ de F dans E, $e \to g/e$ de E dans F restreintes aux sous-ensembles des éléments de F et E de la forme g/e et $f\diagdown g$ sont des applications biunivoques inverses l'une de l'autre et ces sous-ensembles sont des ensembles ordonnés duaux relativament aux restrictions des relations d'ordre φ et ε. Enfin, e étant un élément fixé de E, les applications $g \to g/e$ de G dans F, $f \to ef$ de F dans G restreintes aux sous-ensembles des éléments de G et F de la forme ef et g/e sont des applications biunivoques inverses l'une de l'autre et ces sous-ensembles sont des ensembles ordonnés duaux relativement aux restrictions des relations d'ordre ψ et φ.*

Cette propriété est conséquence de la propriété 5 et du principe de dualité.

III

APPLICATION AUX CAS USUELS

Dans les cas usuels ([8]), on a affaire à trois ensembles E, F, G, pas nécessairement distincts, ordonnés par des relations, notées toutes les trois $\leqslant$, que nous désignons ici par ε, φ, ψ^{-1} respectivement, et à une application $(e, f) \to ef$ de $E \times F$ dans G qui est *doublement isotone* par rapport à ces relations. Il y a bien de bien remarquer que c'est ψ^{-1} qui est notée $\leqslant$ et que, par suite, l'application considérée est doublement anti-isotone par rapport à ε, φ, ψ.

([8]) La plupart du temps, les ensembles E, F, G, coïncident et constituent un groupoïde ordonné (Cf. par exemple M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *loc. cit.*, 2.*ème* partie, chapitre II). Dans un autre cas important, les ensembles F et G coïncident et constituent un ensemble dans lequel opèrent les éléments de E (Cf. R. CROISOT, *Sur une généralisation de la théorie des A-modules de Grundy*, exposé n.° 25 du Séminaire d'Algèbre de P. DUBREIL, année 1954-1955).

On dit alors que G *est résidué à gauche* si, quels que soient $f \in F$ et $g \in G$, n'est pas vide et possédé l'ensemble des éléments $e \in E$ tels que $ef \leqslant g$ est un élément maximum noté $g^{\bullet} . f$ et appellé *résiduel à gauche de g par f*. De même, on dit que G *est résidué à droite* si, quels que soient $e \in E$ et $g \in G$, l'ensemble des éléments $f \in F$ tels que $ef \leqslant g$ n'est pas vide et possédé un élément maximum noté $g_{\bullet} {}^{\bullet}e$ et appellé *résiduel à droite de g par e*.

Dire que G est résidué à gauche, c'est donc dire que l'application $(e, f) \to ef$ est résiduée à gauche au sens du § II relativement aux relations d'ordre ε, φ, ψ et qu'on a $g^{\bullet} . f = f \diagdown g$. De même, dire que G est résidué à droite, c'est dire que l'application $(e, f) \to ef$ est résidué à droite relativement aux mêmes relations d'ordre et qu'on a $g_{\bullet} . e = g / e$.

Nous traduisons maintenant les résultats du § II à l'aide des notations usuelles.

La définition des applications α, β, γ, donne d'abord les deux propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ 11. *Quels que soient $e, e' \in E$, $f, f' \in F$, $g, g' \in G$, les relations $e \leqslant e'$, $f \leqslant f'$, $g \leqslant g'$ entraînent:*

$$ef \leqslant ef', \quad ef \leqslant e'f\,;$$
$$g^{\bullet} . f \leqslant g'^{\bullet} . f, \quad g^{\bullet} . f \geqslant g^{\bullet} . f'\,;$$
$$g_{\bullet} {}^{\bullet}e \leqslant g'_{\bullet} {}^{\bullet}e, \quad g_{\bullet} {}^{\bullet}e \geqslant g_{\bullet} {}^{\bullet}e'.$$

PROPRIÉTÉ 12. *Quels que soient $e \in E$, $f \in F$, $g \in G$, les éléments $g^{\bullet} . f$, $g_{\bullet} {}^{\bullet}e$, ef sont ainsi caractérisés:*

$g^{\bullet} . f$ est le plus grand e tel que $ef \leqslant g$ ou $g_{\bullet} {}^{\bullet}e \geqslant f$;
$g_{\bullet} {}^{\bullet}e$ est le plus grand f tel que $ef \leqslant g$ ou $g^{\bullet} . f \geqslant e$;
ef est le plus petit g tel que $g^{\bullet} . f \geqslant e$ ou $g_{\bullet} {}^{\bullet}e \geqslant f$.

COROLLAIRE 1. *Quels que soient $e \in E$, $f \in F$, $g \in G$, on a:*

$$(g^{\bullet} . f) f \leqslant g \text{ et } g_{\bullet} {}^{\bullet}(g^{\bullet} . f) \geqslant f\,;$$
$$e (g_{\bullet} {}^{\bullet}e) \leqslant g \text{ et } g^{\bullet} . (g_{\bullet} {}^{\bullet}e) \geqslant e\,;$$
$$ef^{\bullet} . f \geqslant e \text{ et } ef_{\bullet} {}^{\bullet}e \geqslant f.$$

COROLLAIRE 2. *Les trois relations suivantes sont équivalentes:*

$$g^{\bullet} . f \geqslant e, \quad g_{\bullet} {}^{\bullet}e \geqslant f, \quad ef \leqslant g.$$

Las propriétés 7, 8, 9, 10 se traduisent immédiatement.

Propriété 13. *Les applications suivantes sont des applications de fermeture: inversée* (9) :

$$f \text{ étant fixé dans } F,\ g \rightarrow (g^{\bullet}.f)f \qquad (\text{de } G \text{ dans } G);$$
$$e \text{ étant fixé dans } E,\ g \rightarrow e(g.{}^{\bullet}e) \qquad (\text{de } G \text{ dans } G);$$

et les applications suivantes sont des applications de fermeture:

$$g \text{ étant fixé dans } G,\ e \rightarrow g^{\bullet}.(g.{}^{\bullet}e) \qquad (\text{de } E \text{ dans } E);$$
$$f \text{ étant fixé dans } F,\ e \rightarrow ef^{\bullet}.f \qquad (\text{de } E \text{ dans } E);$$
$$e \text{ étant fixé dans } E,\ f \rightarrow ef.{}^{\bullet}e \qquad (\text{de } F \text{ dans } F);$$
$$g \text{ étant fixé dans } G,\ f \rightarrow g.{}^{\bullet}(g^{\bullet}.f) \qquad (\text{de } F \text{ dans } F).$$

Propriété 14. *On a les équivalences suivantes:*

$f \in F$ *et* $g \in G$ *étant fixés,*
$$\exists\, e \text{ tel que } ef = g \iff g = (g^{\bullet}.f)f \iff g \leqslant (g^{\bullet}.f)f;$$
$e \in E$ *et* $g \in G$ *étant fixés,*
$$\exists\, f \text{ tel que } ef = g \iff g = e(g.{}^{\bullet}e) \iff g \leqslant e(g.{}^{\bullet}e);$$
$g \in G$ *et* $e \in E$ *étant fixés,*
$$\exists\, f \text{ tel que } g^{\bullet}.f = e \iff e = g^{\bullet}.(g.{}^{\bullet}e) \iff e \geqslant g^{\bullet}.(g.{}^{\bullet}e);$$
$f \in F$ *et* $e \in E$ *étant fixés,*
$$\exists\, g \text{ tel que } g^{\bullet}.f = e \iff e = ef^{\bullet}.f \iff e \geqslant ef^{\bullet}.f;$$
$e \in E$ *et* $f \in F$ *étant fixés,*
$$\exists\, g \text{ tel que } g.{}^{\bullet}e = f \iff f = ef.{}^{\bullet}e \iff f \geqslant ef.{}^{\bullet}e;$$
$g \in G$ *et* $f \in F$ *étant fixés,*
$$\exists\, e \text{ tel que } g.{}^{\bullet}e = f \iff f = g.{}^{\bullet}(g^{\bullet}.f) \iff f \geqslant g.{}^{\bullet}(g^{\bullet}.f).$$

Corollaire. *On a les égalités suivantes:*

$$\forall e \in E \text{ et } \forall f \in F, \qquad ef = (ef^{\bullet}.f)f;\ ef = e(ef.{}^{\bullet}e);$$
$$\forall f \in F \text{ et } \forall g \in G, \qquad g^{\bullet}.f = g^{\bullet}.(g.{}^{\bullet}[g^{\bullet}.f]);\ g^{\bullet}.f = (g^{\bullet}.f)f^{\bullet}.f;$$
$$\forall g \in G \text{ et } \forall e \in E, \qquad g.{}^{\bullet}e = e(g.{}^{\bullet}e).{}^{\bullet}e;\ g.{}^{\bullet}e = g.{}^{\bullet}(g^{\bullet}.[g.{}^{\bullet}e]).$$

(9) Cf. P. Dubreil, *loc. cit.*, pág. 121.

Propriété 15. *Soient les relations d'équivalence suivantes* (10) :

f étant fixé dans F,

$$\mathcal{S}_f \text{ définie dans } G \text{ par } g \equiv g' (\mathcal{S}_f) \iff g^{\bullet} . f = g'^{\bullet} . f;$$

e étant fixé dans E,

$$ {}_e\mathcal{S} \text{ définie dans } G \text{ par } g \equiv g' ({}_e\mathcal{S}) \iff g . {}^{\bullet}e = g' . {}^{\bullet}e;$$

g étant fixé dans G,

$$\mathcal{M}_g \text{ définie dans } E \text{ par } e \equiv e' (\mathcal{M}_g) \iff g . {}^{\bullet}e = g . {}^{\bullet}e';$$

f étant fixé dans F,

$$ {}_f\mathcal{M} \text{ définie dans } E \text{ par } e \equiv e' ({}_f\mathcal{M}) \iff ef = e'f;$$

e étant fixé dans E,

$$\mathcal{M}_e \text{ définie dans } F \text{ par } f \equiv f' (\mathcal{M}_e) \iff ef = ef';$$

g étant fixé dans G,

$$ {}_g\mathcal{M} \text{ définie dans } F \text{ par } f \equiv f' ({}_g\mathcal{M}) \iff g^{\bullet} . f = g^{\bullet} . f'.$$

Les classes modulo chacune de ces relations d'equivalence sont convexes et possèdent un élément minimum (cas des deux premières) ou un élément maximum (cas des quatre autres), l'élément minimum ou maximum de la classe contenant respectivement g, g, e, e, f, f, *étant* $(g^{\bullet} . f) f$, $e (g . {}^{\bullet}e)$, $g^{\bullet} . (g . {}^{\bullet}e)$ $ef^{\bullet} . f$, $ef . {}^{\bullet}e$, $g . {}^{\bullet}(g^{\bullet} . f)$.

Propriété 16. *f étant un élément fixé de F, les applications* $e \to ef$ *de E dans G,* $g \to g^{\bullet} . f$ *de G dans E restreintes aux sous-ensembles des éléments de E et G de la forme* $g^{\bullet} . f$ *et* ef *sont des applications biunivoques inverses l'une de l'autre et ces sous-ensembles sont des ensembles ordonnés isomorphes. De même, g étant un élément fixé de G, les applications* $f \to g^{\bullet} . f$ *de F dans E,* $e \to g . {}^{\bullet}e$ *de E dans F restreintes aux sous-ensembles des éléments de F et E de la forme* $g . {}^{\bullet}e$ *et* $g^{\bullet} . f$ *sont des applications biunivoques inverses l'une de l'autre et ces sous-ensembles sont des ensembles ordonnés duaux. Enfin, e étant un élément fixé de E, les applications* $g \to g . {}^{\bullet}e$ *de G dans F,* $f \to ef$ *de F dans G restreintes aux sous-ensembles des éléments de G et F de la forme* ef *et* $g . {}^{\bullet}e$ *sont des applications biunivoques inverses l'une de l'autre et ces sous-ensembles sont des ensembles ordonnés isomorphes.*

---

(10) Ces importantes relations d'équivalence ont été souvent considérées : voir M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *loc. cit.*, pág. 240 (équivalence d'Artin qui est une équivalence $\mathcal{M}_g$ ou ${}_g\mathcal{M}$) ; P. Dubreil, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (III), Bull. Soc. Math., pág. 293 (où l'on considère une équivalence $\mathcal{P}_f$ et une équivalence ${}_f\mathcal{M}$) ; I. Molinaro, Sur quelques propriétés des Gerbiers résidués, Thèse de Doctorat, Paris (*à paraître*).