DESARROLLOS ASINTOTICOS EN SERIES DE FACULTADES

POR

FRANCISCO VELEZ CANTARELL (*)

INTRODUCCION

En esta memoria estudiamos algunos aspectos de la convergencia, asintótica en las series de facultades; y podría considerarse ésta como el inicio de la extensión a las mismas, de la teoría de las series asintóticas potenciales.

Es interesante notar, que si la región en la que se considera un desarrollo asintótico en serie de facultades, está totalmente contenida en el semiplano real positivo, el comportamiento de tal desarrollo es análogo al de un desarrollo asintótico potencial $\Sigma \frac{a_n}{z^n}$. En cambio, si la región contiene puntos de parte real negativa no ocurre ya lo mismo. Ello es debido a la presencia de los polos $0, -1, -2, \ldots -n, \ldots$ en los términos de la serie de facultades. Esta cuestión está estudiada con detalle en el primer capítulo.

Otra diferencia esencial con respecto a las series potenciales, es la siguiente: en éstas, las series obtenidas por derivación o integración son asimismo series de potencias, en tanto que no ocurre así en las series de facultades, pues derivándolas o integrándolas, término a término, las series obtenidas son de distinta naturaleza. Este hecho nos ha conducido a estudiar en primer lugar los desarrollos asintóticos $F'(z)$ y de $\Phi(z) = -\int_z^\infty \left[F(z) - \frac{a_0}{z}\right] dz$ utilizando las series que resultan de derivar o integrar la serie de facultades que aproxima la función $F(z)$. Y luego hemos resuelto el mismo problema con las series de facultades que ha dado NÖRLUND ($V - b - 221$ y 223) en el caso de la convergencia ordinaria como desarrollo de la derivada o la integral de $F(z)$.

(*) La resolución de las cuestiones planteadas en esta Memoria, ha sido lograda gracias a las acertadas orientaciones del Profesor DON RICARDO SAN JUAN, que fué precisamente quien nos propuso el tema en junio de 1952, cuando invitado por el SEMINARIO MATEMÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE BARCELONA, dió en él unas conferencias sobre series asintóticas potenciales. Por este motivo, es nuestro deseo hacerle patente en estas líneas nuestra más sincera gratitud.

Consta esta memoria de cuatro partes. La primera está dedicada al estudio de la derivación e integración. La segunda, a establecer las condiciones necesarias y suficientes para asegurar la unicidad de los desarrollos obtenidos. En la tercera parte estudiamos las operaciones de cálculo con tales series. Y, finalmente, constituye el cuarto capítulo, un ejemplo obtenido mediante la integral de Laplace, al cual aplicamos los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

CAPÍTULO I

Definición

Diremos que la serie de facultades

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)} \tag{1}$$

aproxima asintóticamente una función $F(z)$, holomorfa en un dominio D, que tenga el punto del infinito como punto frontera, cuando los productos

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n)| \cdot \left| F(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)} \right|$$

se conservan acotados; es decir, se verifique:

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n)| \cdot |R_n(z)| < M_n$$

para cada n, en la intersección R, de D con un entorno de $z = \infty$.

* * *

Así como en las series asintóticas potenciales, se acotan los productos $|z|^{n+1}\,|R_n(z)|$, aquí acotaremos los productos

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n)| \cdot |R_n(z)|$$

lo que introducirá modificaciones en el cálculo de las cotas.

Podemos escribir:

$$z(z+1)(z+2)\dots(z+n) = z^{n+1}\left(1 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots + \frac{A_n}{z^n}\right) = z^{n+1} A_n(z)$$

o también:

$$A_n(z) = \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{z^{n+1}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{2}{z}\right)\left(1+\frac{3}{z}\right)\dots\left(1+\frac{n}{z}\right) = \prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{s}{z}\right)$$

Las regiones R en las que hacemos el estudio de los problemas que nos planteamos, excluyen el origen y los puntos $-1, -2, \dots, -n, \dots$ y supondremos, además, que las distancias de los citados puntos a las curvas que limitan las regiones R, estén acotadas inferiormente por un número $r > 0$.

De esta forma resulta:

$$|A_n(z)| \leqslant \frac{|z|(|z|+1)(|z|+2)\dots(|z|+n)}{|z|^{n+1}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{|z|}\right)\left(1+\frac{2}{|z|}\right)\dots\left(1+\frac{n}{|z|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{2}{r}\right)\dots\left(1+\frac{n}{r}\right) = A_n(r) = \prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{n}{r}\right)$$

Por otra parte:

$$|A_n(z)| = \frac{|z|\,|z+1|\,|z+2|\dots|z+k|\dots|z+n|}{|z|^{n+1}}$$

y la cota inferior de $|A_n(z)|$ será:

si $R[z] > 0$, $|z|$ es el mínimo factor en el numerador y por tanto:

$$|A_n(z)| > 1$$

si $-k-\frac{1}{2} < R[z] < -k+\frac{1}{2}$, $|z+k|$ será el mínimo factor; luego:

$$|A_n(z)| > \frac{|z+k|^{n+1}}{|z|^{n+1}}$$

que se conserva, efectivamente, acotado inferiormente.

Se pueden unir los dos resultados diciendo que:

$$|A_n(z)| > \frac{|z+\nu|^{n+1}}{|z|^{n+1}}$$

siendo $-\nu$ el punto de mínima distancia a z, entre los puntos 0, -1, -2, ..., $-n$, ... la cual es asimismo acotada inferiormente.

De todo lo cual resulta, que en las regiones R antes citadas, las funciones $A_n(z)$ están acotadas, para cada n, superior e inferiormente.

Cotas de órdenes sucesivos

Análogamente a como se hace en las series potenciales (VIII-*a*-*b*), definiremos las cotas de orden p.

Los cocientes

$$\frac{|z(z+1)(z+2)\dots(z+n)| \cdot \left| F(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right|}{|z(z+1)(z+2)\dots(z+p-1)|}$$

tienden a cero para $z \to \infty$, y poseerán unas cotas que llamaremos de orden p, $M_n^{(p)}$ (para $n = p,\ p+1, \dots$).

Su relación con las cotas de orden cero $M_n^{(0)} = M_n$ será:

$$\frac{|z(z+1)\dots(z+n)| \cdot \left| F(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right|}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|} <$$

$$< \frac{M_n}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|} = \frac{M_n}{|z|^p \cdot |A_{p-1}(z)|} <$$

$$< \frac{M_n}{|z|^p \dfrac{|z+\nu|^p}{|z|^p}} = \frac{M_n}{|z+\nu|^p}$$

y en las hipótesis fijadas antes, en relación con las regiones R, será:

$$\frac{1}{|z+\nu|^p} \leqslant h$$

de lo cual, resulta finalmente:

$$M_n^{(p)} \leq M_n\, h^p$$

TEOREMAS RELATIVOS A LA DERIVACIÓN

Demostramos en lo que sigue que la función derivada $F(z)$, puede aproximarse asintóticamente, mediante la serie obtenida derivando término a término la serie (1).

La serie así obtenida es la siguiente:

$$-\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\dots+\frac{1}{z+s}\right) \quad (2)$$

Calcularemos el valor de $F'(z)$ y de la suma parcial de orden n de la serie (2) en un punto z de R, mediante la integral de CAUCHY, tomada a lo largo de una circunferencia $C(z)$ de centro z y radio conveniente para que toda la circunferencia sea interior a R.

Calcularemos tal aproximación en diversas regiones R, y daremos las cotas correspondientes en cada caso.

Finalmente; como la aproximación asintótica de la $F'(z)$ mediante la serie (2), ofrece el inconveniente de que aquélla no es de facultades, y teniendo en cuenta que en el caso de la convergencia ordinaria, demuestra NÖRLUND ($V - b - 221$) que la $F'(z)$ tiene el desarrollo en serie de facultades

$$F'(z) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_{s-1}}{1}+\frac{a_{s-2}}{2}+\dots+\frac{a_0}{s}\right)s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \quad (3)$$

demostraremos que también esta serie (3) aproxima la $F'(z)$ en los mismos recintos en que lo hace la serie (2) determinando las cotas de tal aproximación.

TEOREMA I

« *Si una función $F(z)$ es holomorfa en la prolongación R de un sector circular, constituída por todos los puntos $z = \varrho_\varphi$, tales que* $r < \varrho < \infty$ *y* $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \varphi < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, *y en tal región admite un desarrollo asintótico mediante la serie* (1) *con las cotas M_n, la derivada $F'(z)$ se puede aproximar asintóticamente con la serie* (2) *en toda región R' cerrada interior a R* (fig. 1) *definida por* $r < r' \leq \varrho < \infty$ *y* $\alpha_1 < \alpha_1' \leqslant \varphi \leqslant \alpha_2' < \alpha_2$ *con las cotas*

$$M_n' = K M_n \prod_{s=1}^{n+1}\left(1+\frac{s}{r}\right) 2^{n+2}$$

donde la constante K es tal que $\frac{|z|}{d(z)} < K$ *siendo* $d(z)$ *la distancia de z al contorno que limita R.»*

En efecto:

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)|\left|F'(z)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{-a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\dots+\frac{1}{z+s}\right)\right|=$$

$$=|z(z+1)\dots(z+n-1)|\cdot\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z)}\frac{F(t)-\sum\limits_{s=0}^{n-1}\frac{a_s\, s!}{t(t+1)\dots(t+s)}}{(t-z)^2}\,dt\right|<$$

$$<|z(z+1)\dots(z+n+1)|\,\frac{1}{2\pi}\int_{C(z)}\frac{\frac{M_n}{|t(t+1)\dots(t+n)|}}{|t-z|^2}\,dt=$$

$$=|z|^{n+2}\cdot|A_{n+1}(z)|\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{[r(z)]^2}\,M_n\int_{C(z)}\frac{dt}{|t|^{n+1}\cdot|A_n(t)|}$$

y ya que toda la región está en el semiplano real positivo será: $|A_n(z)| < 1$ y por tanto, la última expresión será menor que

$$|z|^{n+2}\,|A_{n+1}(z)|\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{[r(z)]^2}\,M_n\int_{C(z)}\frac{dt}{|t|^{n+1}}<$$

$$<|z|^{n+2}\,|A_{n+1}(z)|\,\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{[r(z)]^2}\,M_n\,\frac{1}{[|z|-r(z)]^{n+1}}\cdot 2\pi\, r(z)=$$

$$=|z|^{n+2}\,|A_{n+1}(z)|\,M_n\,\frac{1}{r(z)}\,\frac{1}{[|z|-r(z)]^{n+1}}=$$

$$=M_n\,|A_{n+1}(z)|\,\frac{|z|^{n+1}}{[|z|-r(z)]^{n+1}}\,\frac{|z|}{r(z)}$$

Si tomamos ahora $r(z)=\frac{d(z)}{2}$, será $\frac{|z|}{|z|-r(z)}<2$ y la expresión última será menor que $M_n\cdot\prod\limits_{s=1}^{n+1}\left(1+\frac{s}{r}\right)2^{n+2}\,\frac{|z|}{d(z)}$; es decir, se obtiene como cota para $F'(z)$

$$M_n'=M_n\prod_{s=1}^{n+1}\left(1+\frac{s}{r}\right)2^{n+2}\cdot K$$

Si elegimos un punto $P'(z_1)$ equidistante de la semirrecta $P\,\infty$ y del arco PQ, la razón $\frac{|z_1|}{d(z_1)}$ toma un valor que es el mismo para todos los puntos de la semirrecta $P' \infty$ y de su simétrica $Q' \infty$ respecto a la bisectriz del ángulo $(\alpha_2 - \alpha_1)$, y también para los puntos del arco $P' Q'$.

Por tanto; dado un número $K > 0$ cualquiera, se podrá determinar un punto $P'(z_1)$ tal, que en él se verifique $\frac{|z_1|}{d(z_1)} < K$; y, por consiguiente, la razón $\frac{|z|}{d(z)}$ se mantendrá inferior a dicha cota K en todos los puntos del recinto R' limitado por las semirrectas $P' \infty$, $Q' \infty$ y el arco $P'Q'$ incluído el contorno.

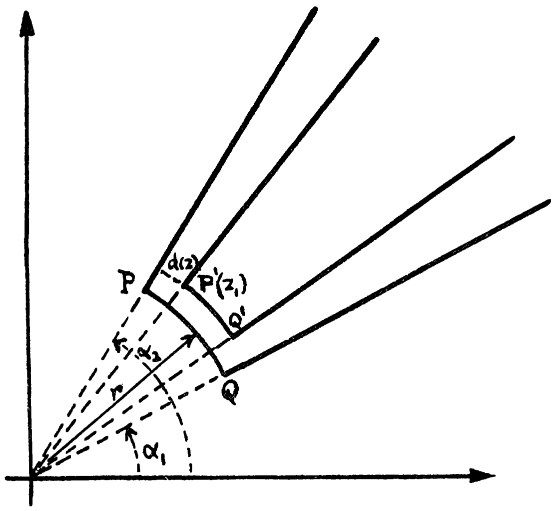

Fig. 1

La acotación del cociente $\frac{|z|}{d(z)}$ nos ha llevado a obtener como región R' en la que se puede aproximar la $F'(z)$, una región que es la prolongación de un sector circular *interior* a la región análoga R. La amplitud de R' es menor que la de R y esta reducción de la amplitud es un obstáculo para la conservación de las condiciones de unicidad de los desarrollos obtenidos. Precisamente, y para soslayar este inconveniente, utilizaremos las regiones estudiadas por San Juan (VIII — d — 271), por ser adecuadas a nuestro problema y mantenerse en ellas la amplitud.

Teorema II

« *Si la región en la que la función holomorfa $F(z)$ admite un desarrollo asintótico con cotas M_n mediante la serie* (1), *es la definida por*

$R[z^{\frac{1}{\alpha}}] > a > 0$ *limitada por la curva* $C(a) \equiv \varrho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) = a$ *en donde* $-\alpha\frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha\frac{\pi}{2}$ $(\alpha > 0)$, *la derivada* $F'(z)$ *se aproxima asintóticamente a la serie* (2) *en toda región cerrada interior, homotética con aquélla, es decir* $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] > a' > a$ *y con cotas de orden* $p = \left[1 + \frac{1}{\alpha}\right]$ *de la forma:*

$$M'^{(p)}_n = CM_n \mu^{n+1} \prod_{s=p}^{n+1}\left(1 + \frac{s}{k}\right) \qquad \text{para} \qquad n = p, \ p+1, \ p+2, \dots \text{»}$$

En efecto:

Siguiendo inicialmente el mismo cálculo que en el teorema I, se establece:

$$|R_n'(z)| = \left| F'(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{-a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s}\right)\right| <$$
$$< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{[r(z)]^2} \int_{C(z)} \frac{M_n\, dt}{|t|^{n+1}\,|A_n(t)|}$$

Distinguiremos ahora tres casos:

1.º $0 < \alpha < 1$. Entonces la región $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] > a > 0$ es una región simétrica respecto al eje real y situada íntegramente en el semiplano real positivo, ya que la curva $C(a) \equiv \varrho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi}{\alpha} = a$ es convexa respecto $x = -\infty$. Por consiguiente $|A_n(z)|$ admite como cota inferior 1.

Luego:

$$|R_n'(z)| < \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{[r(z)]^2}\, M_n \frac{1}{[|z| - r(z)]^{n+1}}\, 2\pi r(z) = \frac{M_n}{r(z)}\,\frac{1}{[|z| - r(z)]^{n+1}}$$

Si se acotan ahora las distancias de los puntos de la región $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] \geqslant a' > a$ a la curva $C(a)$, se pueden calcular los valores que deben darse a $r(z)$.

Recogiendo los resultados dados por San Juan al hacer el estudio geométrico de estas regiones, tomaremos como valor del radio $r(z) = K|z|^{1-\frac{1}{\alpha}}$ (K independiente de $|z|$) y resulta:

$$|R'_n(z)| < \frac{M_n}{K\,|z|^{1-\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{\left[|z| - K\,|z|^{1-\frac{1}{\alpha}}\right]^{n+1}} =$$

$$= \frac{M_n}{K\,|z|^{1-\frac{1}{\alpha}}} \left[\frac{|z|^{\frac{1}{\alpha}}}{|z|^{1+\frac{1}{\alpha}} - K\,|z|}\right]^{n+1} = \frac{M_n\,|z|^{\frac{1}{\alpha}}}{K\,|z|^{n+2}} \left[\frac{|z|^{\frac{1}{\alpha}}}{|z|^{\frac{1}{\alpha}} - K}\right]^{n+1}$$

y si elegimos $K < a'$ existirá en $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] \geqslant a'$, el máximo de $\dfrac{|z|^{\frac{1}{\alpha}}}{|z|^{\frac{1}{\alpha}} - K}$ que será $\mu_1 = \dfrac{a'}{a' - K}$ y que corresponderá a $\varphi = 0$, y si $|z| > 1$ resulta:

$$|R'_n(z)| < \frac{M_n}{K}\,\mu_1^{n+1}\,\frac{|z|^{\left[1+\frac{1}{\alpha}\right]}}{|z|^{n+2}}$$

de donde:

$$|z|^{n+2}\,|R'_n(z)| < \frac{M_n}{K}\,\mu_1^{n+1}\,|z|^{p} \qquad \left(p = \left[1 + \frac{1}{\alpha}\right]\right)$$

y, finalmente:

$$\frac{|z(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)|}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|}\,|R'_n(z)| < \frac{M_n}{K}\,\mu_1^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|} =$$

$$= \frac{M_n}{K}\,\mu_1^{n+1}\left|\prod_{s=p}^{n+1}\left(1 + \frac{s}{z}\right)\right| < \frac{M_n}{K}\,\mu_1^{n+1}\prod_{s=p}^{n+1}\left(1 + \frac{s}{a'^{\alpha}}\right)$$

se obtiene, pues, como cota n-ésima para $F'(z)$, de orden $p = \left[1 + \dfrac{1}{\alpha}\right]$

$$M'^{(p)}_n = C\,M_n\,\mu_1^{n+1}\prod_{s=p}^{n+1}\left(1 + \frac{s}{a'^{\alpha}}\right) \qquad \text{para} \quad n = p,\ p+1, \dots$$

2.º $\alpha = 1$. La región $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] > a > 0$ es un semiplano, lo mismo que la $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] \geqslant a' > a$ y se puede tomar como valor de $r(z)$ una constante r tal que $r(z) = r < a' - a$, resultando entonces:

$$|R'_n(z)| < \frac{M_n}{r}\,\frac{1}{[|z| - r]^{n+1}} = \frac{M_n}{r}\left[\frac{|z|}{|z| - r}\right]^{n+1}\frac{|z|}{|z|^{n+2}}$$

y como el cociente $\frac{|z|}{|z| - r}$ estará acotado por su máximo $\mu_1 = \frac{a'}{a' - r}$ en la región $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] \geqslant a' > a$, nos queda:

$$\frac{|z|}{|z|^{n+2}} \cdot |R'_n(z)| < \frac{M_n}{r} \mu_1^{n+1}$$

o también:

$$\frac{|z(z+1)\dots(z+n+1)|}{|z|} |R'_n(z)| < \frac{M_n}{r} |A_n(z)| \mu_1^{n+1} < \frac{M_n}{r} \mu_1^{n+1} \prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{s}{a'}\right)$$

la cota n-ésima de primer orden para $F'(z)$ en la región $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] \geqslant a' > a$ es, pues:

$$M'^{(1)}_n = C M_n \mu_1^{n+1} \prod_{s=1}^{n}\left(1 + \frac{s}{a'}\right) \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3.º $1 < \alpha < 2$. En este caso las regiones $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] > a > 0$ y $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] \geqslant a' > a$ están limitadas por las curvas $C(a)$ y $C(a')$ que son, desde luego, simétricas respecto al eje real y cóncavas respecto $x = -\infty$; y, por tanto, dichas regiones contienen puntos de parte real positiva y otros de parte real negativa. El hecho de no estar contenidas íntegramente en el semiplano real positivo, introduce modificaciones esenciales respecto al caso de las series potenciales estudiadas por San Juan en las mismas regiones.

Hemos visto en los casos anteriores y en el de la prolongación de un sector, tal como lo suponíamos situado, que $|A_n(z)|$ admitía como cota inferior la unidad.

Al existir ahora en la región puntos z de parte real negativa, vimos que la cota inferior de $|A_n(z)|$ es: $|A_n(z)| > \frac{|z+\nu|^{n+1}}{|z|^{n+1}}$ siendo $-\nu$ el punto de mínima distancia a z, entre los puntos $0, -1, -2, \dots, -n, \dots$

Será, pues, en este caso:

$$|R'_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[r(z)]^2} \int_{C(z)} \frac{M_n}{|t|^{n+1} \cdot |A_n(t)|} dt <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[r(z)]^2} \int_{C(z)} \frac{M_n}{|t|^{n+1} \frac{|t+\nu|^{n+1}}{|t|^{n+1}}} dt <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{[r(z)]^2} M_n \frac{1}{[|z+\nu| - r(z)]^{n+1}} \cdot 2\pi\, r(z) =$$

$$= \frac{M_n}{r(z)} \cdot \left[\frac{|z|}{|z+\nu| - r(z)}\right]^{n+1} \cdot \frac{|z|}{|z|^{n+2}}$$

En cuanto al valor del radio $r(z)$, podremos tomar un valor constante $r < a'^{\alpha} - a^{\alpha}$ ya que las distancias de los puntos de la curva $C(a') \equiv \equiv \varrho^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = a'$ a la $C(a) \equiv \varrho^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = a$ son mayores que $a'^{\alpha} - a^{\alpha}$.

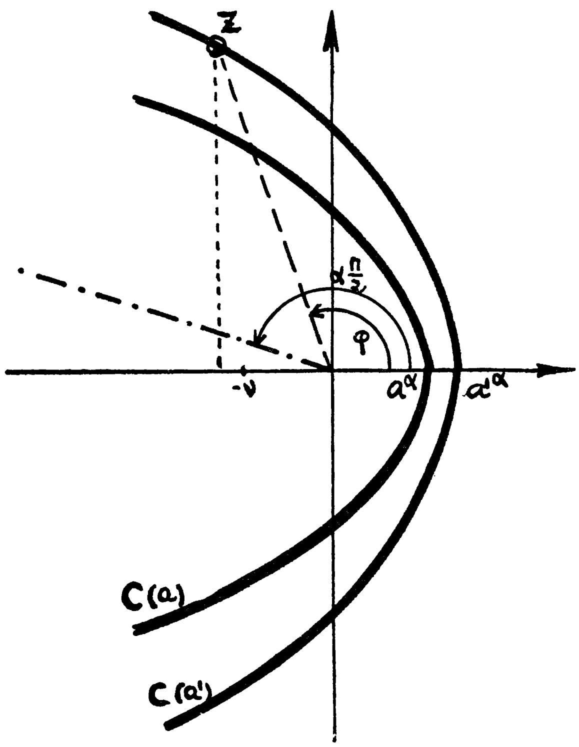

Fig. 2

Vamos a acotar ahora el cociente $\frac{|z|}{|z+\nu| - r}$ y en ello radica la diferencia fundamental respecto a las series potenciales (fig. 2).

$$\frac{|z|}{|z+\nu| - r} \leqslant \frac{|z|}{|z - R[z]| - r} = \frac{1}{|\operatorname{sen} \varphi| - \frac{r}{\varrho}} = \frac{1}{|\operatorname{sen} \varphi| - \frac{r \cos^{\alpha} \frac{\varphi}{\alpha}}{a'^{\alpha}}}$$

si suponemos z sobre $C(a')$, pero :

$$\frac{|\operatorname{sen}\varphi|}{|\cos\varphi|} = |\operatorname{tg}\varphi| > \left|\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\right|$$

de donde :

$$|\operatorname{sen}\varphi| > \left|\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\right|\cdot|\cos\varphi| = \operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\cos\varphi$$

si z está en el segundo cuadrante y resulta :

$$\frac{|z|}{|z+v|-r} < \frac{a'^{\alpha}}{a'^{\alpha}\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\cdot\cos\varphi - r\cos^{\alpha}\frac{\varphi}{\alpha}}.$$

Fácilmente se comprueba que el valor de φ que hace mínimo el denominador es $\varphi = 0$. Y para este valor será máximo el cociente. De modo que :

$$\frac{|z|}{|z+v|-r} < \frac{a'^{\alpha}}{a'^{\alpha}\left|\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\right| - r}$$

Ahora bien : Si $\alpha\frac{\pi}{2} \leq 3\frac{\pi}{4}$ es decir $\alpha \leq \frac{3}{2}$ será $\left|\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\right| \geqslant 1$ y tomaremos como cota de $\frac{|z|}{|z+v|-r}$ en la región, el número $\mu_2 = \frac{a'^{\alpha}}{a'^{\alpha}-r}$.

En cambio, si $\alpha > \frac{3}{2}$, $\alpha\frac{\pi}{2} > 3\frac{\pi}{4}$ y $\left|\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\right| < 1$; por consiguiente, utilizaremos como cota el número $\mu_3 = \frac{a'^{\alpha}}{a'^{\alpha}\left|\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\right| - r}$. El valor de r lo tomaremos $r < a'^{\alpha}\left|\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}\right|$.

Si z está en el tercer cuadrante, se obtienen los mismos resultados. Por tanto :

$$|R_n'(z)| < \frac{M_n}{r}\mu^{n+1}\frac{|z|}{|z|^{n+2}} \quad \text{o sea :} \quad \frac{|z|^{n+2}}{|z|}\cdot|R_n'(z)| < \frac{M_n}{r}\mu^{n+1}$$

o también :

$$\frac{|z(z+1)\dots(z+n+1)|}{|z|}|R_n(z)| < \frac{M_n}{r}|A_n(z)|\mu^{n+1} < \frac{M_n}{r}\mu^{n+1}\prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{s}{a'^{\alpha}}\right)$$

la cota de 1.$^{\text{er}}$ orden que obtenemos, pues, para $F'(z)$ en R' será:

$$M'^{(1)}_n = C M_n \mu^{n+1} \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{a'^{\alpha}}\right) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

teniendo en cuenta que μ tomará los valores μ_2 ó μ_3 antes calculados, según sea $1 < \alpha \leqslant \frac{3}{2}$ ó $\frac{3}{2} < \alpha < 2$, respectivamente.

Teorema III

« *Si la derivada $F'(z)$ admite en la región R', un desarrollo asintótico mediante la serie* (2) *con cotas $M'^{(p)}_n$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, también la serie de facultades* (3), *aproxima la derivada en la misma región con cotas*

$$N'^{(p)}_n = M'^{(p)}_n + h^p \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \ldots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n \right\} (p = 0, 1, 2 \ldots)$$

en donde $\varepsilon_n \to 0$, para cada n si $z \to \infty$; y h es la cota superior en R' de $\dfrac{1}{|z+\nu|}$ ».

Consideremos una suma parcial de (2), por ejemplo, los tres primeros términos, como una función de la que vamos a calcular su desarrollo asintótico en serie de facultades:

$$\frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1 1!}{z(z+1)}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}\right) + \frac{a_2 2!}{z(z+1)(z+2)}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}\right)$$

y calculemos los coeficientes de tal desarrollo por el método de los límites encadenados

$$\alpha_0 = \lim_{z \to \infty} z \left[\frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1 1!}{z(z+1)}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}\right) + \frac{a_2 2!}{z(z+1)(z+2)}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}\right)\right] = 0$$

$$\alpha_1 1! = \lim_{z \to \infty} (z+1) \left[\frac{a_0}{z} + \frac{a_1 1!}{(z+1)}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 2!}{(z+1)(z+2)}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}\right) - 0\right] = a_0 1!$$

$$\alpha_2 2! = \lim_{z \to \infty} (z+2) \Big[(z+1)[\ldots] - a_0\Big] = a_0 + 2a_1 = \left(\frac{a_1}{1} + \frac{a_0}{2}\right) 2!$$

$$\alpha_3 3! = \lim_{z \to \infty} (z+3) \left\{(z+2)\Big[(z+1)[\ldots] - a_0\Big] - (a_0 + 2a_1)\right\} =$$

$$= 2a_0 + 3a_1 + 6a_2 = \left(\frac{a_2}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_0}{3}\right) 3!$$

Hasta aquí aparecen los tres primeros coeficientes de la serie (3). Siguiendo el cálculo se obtienen como coeficientes siguientes:

$$\alpha_4 4! = \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{4}\right) 4!,$$

$$\alpha_5 5! = \left(\frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{5}\right) 5!, \dots \alpha_n n! = \left(\frac{a_2}{n-2} + \frac{a_1}{n-1} + \frac{a_0}{n}\right) n!$$

Tomando ahora como función inicial la suma

$$\sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s}\right)$$

de los n primeros términos de la serie (2), se obtiene, como es fácil comprobar, como serie asintótica una que tendrá los n primeros términos idénticos a los de (3), es decir:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\left(\frac{a_{s-1}}{1} + \frac{a_{s-2}}{2} + \dots + \frac{a_0}{s}\right) s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{k+1}\right)(k+1)!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+k+1)}$$

Así, pues:

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)| \left| \sum_{s=0}^{n-1} \frac{-a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^{n} \frac{-\left(\frac{a_{s-1}}{1} + \frac{a_{s-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{s}\right) s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| < \left| \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n$$

Este ε_n depende de n; pero para cada n tiende a cero cuando $z \to \infty$. De esto resulta:

$$\frac{|z(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)|}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|} \left| \sum_{s=0}^{n-1} \frac{-a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^{n} \frac{-\left(\frac{a_{s-1}}{1} + \frac{a_{s-2}}{2} + \dots + \frac{a_0}{s}\right) s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| < \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n}{|z|^p \, |A_{p-1}(z)|} <$$

$$< h^p \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n \right\}$$

ya que en las regiones que consideramos se verifica según antes se ha dicho

$$\frac{1}{|z+\nu|} \leqslant h \qquad \text{y} \qquad |A_n(z)| > \frac{|z+\nu|^{n+1}}{|z|^{n+1}}$$

Ahora bien; si como hemos supuesto en el enunciado del teorema:

$$\frac{|z(z+1)\dots(z+n+1)|}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|}\left|F'(z)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{-a_s\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\dots+\frac{1}{z+s}\right)\right| < M'^{(p)}_n$$

se obtiene sumando las dos desigualdades:

$$\frac{|z(z+1)\dots(z+n+1)|}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|}\cdot\left|F'(z)-\sum_{s=1}^{n}\frac{-\left(\dfrac{a_{s-1}}{1}+\dfrac{a_{s-2}}{2}+\dots+\dfrac{a_0}{s}\right)s!}{z(z+1)\dots(z+s)|}\right| <$$

$$< M'^{(p)}_n + h^p\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{3}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n\right\} \qquad \text{para} \quad p=0,1,2,\dots$$

como deseábamos demostrar.

Teoremas relativos a la integración

Consideremos la función

$$\Phi(z) = -\int_z^\infty\left[F(z)-\frac{a_0}{z}\right]dz$$

en la que $F(z)$ es la función aproximada asintóticamente por la serie (1) de la que hemos separado el primer término por tener integral infinita. Supongamos, además, que la integración se efectúa a lo largo de un camino contenido en R, región en la que se aproxima $F(z)$.

En lo que sigue demostramos que la función $\Phi(z)$, puede aproximarse asintóticamente en recintos convenientes, mediante la serie obtenida integrando término a término la serie (1). Y como quiera que la serie así obtenida, no es de facultades, demostramos luego que también puede resolverse el problema con una serie de facultades que da Nörlund para el caso de la convergencia ordinaria (V-b-223).

Como términos de la serie de primitivas de los términos de (1), obtenemos:

$$\int_z^\infty \frac{a_1 1!}{z(z+1)}\, dz = -\, a_1 \, l \, \frac{z}{z+1}$$

$$\int_z^\infty \frac{a_2 2!}{z(z+1)(z+2)}\, dz = -\, a_2 \, l \, \frac{z(z+2)}{(z+1)^2}$$

$$\int_z^\infty \frac{a_3 3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)}\, dz = -\, a_3 \, l \, \frac{z(z+2)^3}{(z+1)^3 (z+3)}$$

$$\int_z^\infty \frac{a_4 4!}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}\, dz = -\, a_4 \, l \, \frac{z(z+2)^6 (z+4)}{(z+1)^4 (z+3)^4}$$

....

en los que se aprecia la siguiente formación : los exponentes que afectan a los factores, son los números

$$\binom{n}{0}, \quad -\binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad -\binom{n}{3}, \ldots, \pm \binom{n}{n}$$

de la fila n-ésima del triángulo de TARTAGLIA con signos alternados.

Esta ley de formación es general; y aún cuando su demostración no es cuestión fundamental para el objeto de nuestro trabajo, la expondremos brevemente.

Fácilmente se comprueba que la descomposición

$$\frac{n!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{i} \frac{1}{z+i}$$

es cierta para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Supongámosla cierta para $n = s - 1$, y pondremos entonces :

$$\frac{s!}{z(z+1)\ldots(z+s)} = \left[\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{s-1}{i} \frac{1}{i+z}\right] \cdot \frac{s}{z+s} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i s \binom{s-1}{i} \frac{1}{(z+i)(z+s)}$$

Si consideramos el término general de este desarrollo, podremos poner

$$(-1)^k s \binom{s-1}{k} \frac{1}{(z+k)(z+s)} =$$

$$= (-1)^k s \binom{s-1}{k} \frac{1}{s-k} \left[\frac{1}{z+k} - \frac{1}{z+s}\right] = (-1)^k \binom{s}{k} \left[\frac{1}{z+k} - \frac{1}{z+s}\right]$$

será, pues:

$$\frac{s!}{z(z+1)\dots(z+s)} = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{s}{i} \left[\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z+s}\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{s}{i} \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z+s} \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{s}{i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \binom{s}{i} \frac{1}{z+i} - \frac{1}{z+s} (-1)^{s-1} \binom{s}{s} = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{s}{i} \frac{1}{z+i}$$

Por tanto, también es cierta para $n = s$.

Demostrada esta descomposición en fracciones simples, basta integrar y resultan los términos de la serie de primitivas con la ley de formación indicada.

La serie con la que vamos a aproximar la función $\Phi(z)$ es, pues:

$$a_1 l \frac{z}{z+1} + a_2 l \frac{z(z+2)}{(z+1)^2} + a_3 l \frac{z(z+2)^3}{(z+1)^3(z+3)} + \dots \tag{4}$$

En primer lugar observaremos que los términos de esta serie son para $z \to \infty$, infinitésimos de 1.º, 2.º, 3.º,... n.º... orden, respectivamente, como es fácil comprobar. Ello nos permite enunciar el siguiente

Teorema IV

« *Si la función $F(z)$ admite como serie de aproximación asintótica en R, la serie* (1) *con cotas M_n, la función $\Phi(z) = -\int_z^\infty \left[F(z) - \frac{a_0}{z}\right] dz$ se puede aproximar a la serie* (4) *obtenida integrando término a término la* (1), *en toda región R^* interior a R en la que se mantengan acotados los productos $|z|^{n+1} \int_z^\infty \frac{|dz|}{|z+\nu|^{n+2}}$, y con cotas*

$$M_n^* = M_{n+1} K \prod_{s=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{r}\right)$$

donde K es la cota de los productos citados».

En efecto:

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n)|\left|\Phi(z)-\sum_{s=1}^{n}\int_z^{\infty}\frac{-a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\,dz\right| =$$

$$=|z(z+1)\dots(z+n)|\cdot\left|-\int_z^{\infty}\left[F(z)-\frac{a_0}{z}\right]dz-\sum_{s=1}^{n}\int_z^{\infty}\frac{-a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\,dz\right|=$$

$$=|z(z+1)\dots(z+n)|\cdot\left|\int_z^{\infty}\left[F(z)-\sum_{s=0}^{n}\frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right]dz\right|<$$

$$<|z|^{n+1}\,|A_n(z)|\int_z^{\infty}\frac{M_{n+1}}{|z(z+1)\dots(z+n+1)|}\,|dz| =$$

$$=|z|^{n+1}\,|A_n(z)|\,M_{n+1}\int_z^{\infty}\frac{|dz|}{|z|^{n+2}\,|A_{n+1}(z)|}<$$

$$<M_{n+1}\prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{s}{r}\right)\cdot|z|^{n+1}\int_z^{\infty}\frac{|dz|}{|z+\nu|^{n+2}}$$

Y en toda región R^* interior a R en la que se verifique que $|z|^{n+1}\int_z^{\infty}\frac{|dz|}{|z+\nu|^{n+2}}<K$ se obtendrá la aproximación de la función $\Phi(z)$ con las cotas

$$M_n^* = M_{n+1}\prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{s}{r}\right)K$$

Advirtamos que $-\nu$ es el punto del semieje real negativo que en las páginas anteriores se ha precisado. Y también, que en los términos de la serie (4), se elegirán las ramas de los logaritmos que en $z=\infty$ se anulan.

Dada una curva $\varrho = f(\varphi)$, tal que las distancias del origen a los puntos de la misma admitan una cota inferior $r>0$; y además, que cualquier semirrecta trazada desde el origen de coordenadas la corte en un solo punto; y definida para $-\alpha\frac{\pi}{2}<\varphi<\alpha\frac{\pi}{2}$ $(0<\alpha<2)$. Llamaremos *región de estructura radial* R_r la constituída por todos los puntos del plano tales que $|z|\geqslant\varrho$. En estas condiciones, siendo z un punto de la curva, la semirrecta $z\,\infty$, prolongación del rayo que desde el origen proyecta z, está contenida íntegramente en la región R_r.

Teorema V

« *Si la función holomorfa $F(z)$ se aproxima asintóticamente a la serie* (1) *con cotas M_n en una región radial R_r, la función*

$$\Phi(z) = -\int_z^\infty \left[F(z) - \frac{a_0}{z}\right] dz$$

se puede aproximar en la misma región mediante la serie (4) *y con las cotas dadas por el teorema anterior* ».

La demostración de este teorema consiste tan sólo en probar que en tal región están acotados los productos $|z|^{n+1}\int_z^\infty \frac{|dz|}{|z+\nu|^{n+2}}$. Para ello efectuaremos la integración a lo largo de cualquier semirrecta $z\,\infty$, es decir, haciendo $\varphi =$ constante en $z = \varrho e^{i\varphi}$.

Distinguiremos dos casos:

1.º La región R_r está contenida totalmente en el semiplano $R[z] > 0$. Entonces ya que $-\nu = 0$ es:

$$|z|^{n+1}\int_z^\infty \frac{|dz|}{|z|^{n+2}} = \varrho^{n+1}\int_z^\infty \frac{|d\varrho\, e^{i\varphi}|}{\varrho^{n+2}} = \varrho^{n+1}\int_\varrho^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^{n+2}} =$$

$$= \varrho^{n+1}\left[-\frac{1}{(n+1)\,\varrho^{n+1}}\right]_\varrho^\infty = \frac{1}{n+1}$$

Pudiendo tomar como punto z de partida para estas integrales, cualquier punto interior a R_r, la región R^* en la que se aproxima $\Phi(z)$ será la misma R_r.

Las cotas en este caso serán, según el teorema anterior:

$$M_n^* = \frac{M_{n+1}}{n+1}\cdot\prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{s}{r}\right)$$

2.º La región R_r contiene puntos de parte real positiva y otros con parte real negativa.

Para los puntos de la región de parte real positiva o nula, vale la cota del caso 1.º; pero no para los de parte real negativa. Para éstos se tiene:

$$|z|^{n+1}\int_z^\infty \frac{|dz|}{|z+\nu|^{n+2}} < |z|^{n+1}\int_z^\infty \frac{|dz|}{|z-R[z]|^{n+2}} =$$

$$= \varrho^{n+1}\int_z^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^{n+2}|\mathrm{sen}\,\varphi|^{n+2}} = \frac{1}{|\mathrm{sen}\,\varphi|^{n+2}}\cdot\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\left|\mathrm{sen}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right|\,(n+1)}$$

Ya que $|\text{sen}\ \varphi| > \left|\text{sen}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right|$ porque φ puede tomar aquí cualquier valor comprendido en los intervalos $\left(-\alpha\,\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},\ \alpha\,\frac{\pi}{2}\right)$.

Obtenemos, pues, para *toda la región* R_r las cotas

$$M_n^* = \frac{M_{n+1}}{\left|\text{sen}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right|\ (n+1)} \prod_{s=1}^{n}\left(1+\frac{s}{r}\right)$$

Como ejemplos de regiones R_r incluídas en el primer caso, podríamos citar las ya consideradas al tratar de la derivación, o sea : la prolongación de un sector circular comprendida en el semiplano $R[z] > 0$ y las regiones $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] > a > 0$ para $(0 < \alpha \leqslant 1)$. Y como ejemplos del segundo caso, las regiones $R[z^{\frac{1}{\alpha}}] > a > 0$ para $(1 < \alpha < 2)$.

Ya hemos anunciado al plantear la cuestión de la integración, que se puede resolver el problema con la serie de facultades dada por NÖRLUND (V-b-223) en el caso de la convergencia ordinaria. Esta serie es la siguiente :

$$\int_{\alpha}^{z} F(z)\,dz = C + a_0\, lz + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s\, s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)} \tag{5}$$

en la que los coeficientes b_s se obtienen por el sistema de ecuaciones recurrentes :

$$\begin{array}{lll}
\frac{b_0}{1} = -a_1 & & b_0 = -a_1 \\
\frac{b_1}{1}+\frac{b_0}{2} = -a_2 & & b_1 = -a_2+\frac{1}{2}a_1 \\
 & \text{de donde:} & \\
\frac{b_2}{1}+\frac{b_1}{2}+\frac{b_0}{3} = -a_3 & & b_2 = -a_3+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{12}a_1 \\
\frac{b_3}{1}+\frac{b_2}{2}+\frac{b_1}{3}+\frac{b_0}{4} = -a_4 & & b_3 = -a_4+\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{12}a_2+\frac{1}{24}a_1 \\
\frac{b_4}{1}+\frac{b_3}{2}+\frac{b_2}{3}+\frac{b_1}{4}+\frac{b_0}{5} = -a_5 & & b_4 = -a_5+\frac{1}{2}a_4+\frac{1}{12}a_3+\frac{1}{24}a_2+\frac{19}{720}a_1 \\
\dots\dots\dots\dots & & b_5 = -a_6+\frac{1}{2}a_5+\frac{1}{12}a_4+\frac{1}{24}a_3+\frac{19}{720}a_2+\frac{3}{160}a_1 \\
\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array} \tag{6}$$

y, en general:

$$b_s = - a_{s+1} + \frac{1}{2} a_s + \sum_{\nu=2}^{\nu=s} (-1)^\nu \frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu!} \cdot \frac{a_{s-\nu+1}}{\nu - 1}$$

donde $B_\nu^{(\nu-1)}$ son los números de Bernoulli de orden superior (V-a-224) (V-b-129).

Teorema VI

« *Si en la región R^* la función $\Phi(z) = - \int \left[F(z) - \frac{a_0}{z}\right] dz$, se aproxima asintóticamente con la serie* (4) *con las cotas M_n^*, también la serie* (5) *aproxima $\Phi(z)$, en la misma región y con las cotas*

$$N_n^* = M_n^* + \left|\frac{1}{2} a_n + \sum_{\nu=2}^{n} (-1)^\nu \frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu!} \cdot \frac{a_{n-\nu+1}}{\nu - 1}\right| n! + \varepsilon_n$$

siendo ε_n infinitésimo para cada n, cuando $z \to \infty$ ».

El proceso demostrativo es análogo al empleado en el caso de la derivación.

Consideremos la función formada por los tres primeros términos de la serie (4)

$$a_1 l \frac{z}{z+1} + a_2 l \frac{z(z+2)}{(z+1)^2} + a_3 l \frac{z(z+2)^3}{(z+1)^3(z+3)}$$

y calculemos los coeficientes de su desarrollo asintótico en serie de facultades

$$\beta_0 = \lim_{z \to \infty} z \left[a_1 l \frac{z}{z+1} + a_2 l \frac{z(z+2)}{(z+1)^2} + a_3 l \frac{z(z+2)^3}{(z+1)^3(z+3)}\right] = - a_1$$

$$\beta_1 1! = \lim_{z \to \infty} (z+1) \left[a_1 l \left(\frac{z}{z+1}\right)^z + a_2 l \left(\frac{z(z+2)}{(z+1)^2}\right)^z + a_3 l \left(\frac{z(z+2)}{(z+1)^3(z+3)}\right)^z + a_1\right] =$$

$$= \left(- a_2 + \frac{1}{2} a_1\right) 1!$$

$$\beta_2 2! = \lim_{z \to \infty} (z+2) \left[a_1 l \left(\frac{z}{z+1}\right)^{z(z+1)} + a_2 l \left(\frac{z(z+2)}{(z+1)^2}\right)^{z(z+1)} + a_3 l \left(\frac{z(z+2)^3}{(z+1)^3(z+3)}\right)^{z(z+1)} + \right.$$

$$\left. + a_1 (z+1) + a_2 - \frac{1}{2} a_1\right] =$$

$$= - 2 a_3 + a_2 + \frac{1}{6} a_1 = \left(- a_3 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{12} a_1\right) 2!$$

$$\beta_3 3! = \lim_{z\to\infty}(z+3)\left[a_1\, l\left(\frac{z}{(z+1)}\right)^{z(z+1)(z+2)} + \dots + a_1(z+1)(z+2) + \right.$$
$$\left. + \left(a_2 - \frac{1}{2}a_1\right)(z+2) + 2a_3 - a_2 - \frac{1}{6}a_1\right] =$$
$$= 3a_3 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_1 = \left(\frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{12}a_2 + \frac{1}{24}a_1\right)3!$$

$$\beta_4 4! = \left(\frac{1}{12}a_3 + \frac{1}{24}a_2 + \frac{19}{720}a_1\right)4!$$

....

y se aprecia que los coeficientes logrados, coinciden con los del cuadro (6) cortado diagonalmente a partir de b_3.

Si consideramos ahora la función formada por los n primeros términos de la serie (4)

$$\sum_{s=1}^{n}\int_z^\infty \frac{-a_s\, s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)}\,dz$$

y la aproximamos con los n primeros términos de la serie (5) se verificará:

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n)|\left|\sum_{s=1}^{n}\int_z^\infty \frac{-a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\,dz - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{b_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| <$$
$$< \left|\frac{1}{2}a_n + \sum_{\nu=2}^{n}(-1)^\nu \frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu!}\cdot\frac{a_{n-\nu+1}}{\nu-1}\right| n! + \varepsilon_n$$

tendiendo ε_n a cero, para cada n y $z \to \infty$.

Ahora bien; si como en la hipótesis del teorema se afirma, se verifica

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|\Phi(z) - \sum_{s=1}^{n}\int_z^\infty \frac{-a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\,dz\right| < M_n^*$$

se obtendrá sumando estas dos desigualdades:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|\Phi(z) - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{b_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| <$$
$$< M_n^* + \left|\frac{1}{2}a_n + \sum_{\nu=2}^{n}(-1)^\nu \frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu!}\,\frac{a_{n-\nu+1}}{\nu-1}\right| n! + \varepsilon_n$$

como deseábamos demostrar.

CAPÍTULO II

CUESTION DE UNICIDAD

Es sabido que, para que la función $F(z)$ holomorfa en una región R, de ángulo conforme $\alpha\pi$ (VI-234), quede determinada unívocamente mediante una serie asintótica potencial $\sum \frac{a_\nu}{z_\nu}$, es condición necesaria y suficiente que la sucesión de las cotas m_n, satisfaga una cualquiera de las divergencias, entre sí equivalentes, que San Juan designa por la que llama *condición* C_α.

Estas divergencias son:

$$\int_1^\infty l \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{m_\nu^{\frac{2}{\alpha}}} \cdot \frac{dr}{r^2} = \infty \qquad \int_1^\infty l \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{2\nu}}{\overline{m}_\nu^{\frac{2}{\alpha}}} \cdot \frac{dr}{r^2} = \infty \qquad \text{(Carleman)}$$

$$\int_1^\infty l \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{p\nu}}{m_\nu^{\frac{p}{\alpha}}} \cdot \frac{dr}{r^2} = \infty \qquad \int_1^\infty l \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^{p\nu}}{\overline{m}_\nu^{\frac{p}{\alpha}}} \cdot \frac{dr}{r^2} = \infty \qquad \text{(Ostrowski)}$$

$$\int_1^\infty l\, m(r^\alpha) \frac{dr}{r^2} = \infty \qquad m(r) = \max_{n \geq 0} \frac{r^n}{m_n} = \max_{n \geq 0} \frac{r^n}{\overline{m}_n} \qquad \text{(Ostrowski)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\overline{m}_\nu^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty \qquad \{\overline{m}\} \text{ rectificada convexa de } \{m_n\} \qquad \text{(Valiron-Mandelbrojt)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m_n^*)^{\frac{1}{\alpha}}} = \infty \qquad m_n^* = \underset{h>0}{\text{extr. inf.}} \text{ de } \sqrt[n+h]{m_{n+h}} \qquad \text{(Faber)}$$

A ello se llega, suponiendo que si son dos las funciones aproximadas mediante una misma serie y con las mismas cotas, es decir, si:

$$|z|^{n+1} \left| F(z) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{z^\nu} \right| < m_n \quad \text{y} \quad |z|^{n+1} \left| F^*(z) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{z^\nu} \right| < m_n$$

restando las dos acotaciones se tiene:

$$|z|^{n+1} \, |F(z) - F^*(z)| < 2 m_n$$

o bien, poniendo

$$\Phi(z) = F(z) - F^*(z)$$

$$|z|^{n+1} \, |\Phi(z)| < 2 m_n \qquad (7)$$

Con lo cual el problema se transforma en el de determinar las condiciones necesarias y suficientes que deben imponerse a la sucesión de las cotas m_n, para que la función $\Phi(z)$ que satisface a las desigualdades (7) en R, sea idénticamente nula en toda la región R. Y tal condición es precisamente la condición C_α.

Análogamente se sabe que (VIII-*b*):

a) La condición C_α es invariante respecto a una traslación de índices, es decir, también da la unicidad para las cotas de orden p.

b) Dos sucesiones m_n y $K^n m_n$ que difieren en un factor exponencial, pueden reemplazarse en la condición C_α, sin que ésta se altere, lo que nos dice que, mientras *no se modifique la amplitud del dominio*, C_α es invariante respecto a la equivalencia salvo un factor exponencial.

Trataremos ahora de establecer condiciones que nos aseguren la unicidad para los desarrollos asintóticos de series de facultades.

1.º *Unicidad para la función* $F(z)$

Siguiendo la idea directriz antes apuntada de suponer que son dos las funciones aproximadas con la misma serie de facultades y las mismas cotas, llegaríamos a establecer las acotaciones

$$|z(z+1)(z+2)\dots(z+n)|\;|\Phi(z)| < 2M_n$$

de donde:

$$|\Phi(z)| < \frac{2M_n}{|z|^{n+1}\cdot|A_n(z)|}$$

y por lo dicho en el Cap. I, pág. 5, respecto a la cota inferior de $|A_n(z)|$, podremos escribir:

$$|\Phi(z)| < \frac{2M_n}{|z|^{n+1}\cdot\dfrac{|z+\nu|^{n+1}}{|z|^{n+1}}} = \frac{2M_n}{|z+\nu|^{n+1}} \leq$$

$$\leq \frac{2M_n}{|z|^{n+1}\,|\operatorname{sen}\varphi|^{n+1}} < \frac{2M_n}{|z|^{n+1}\left|\operatorname{sen}\alpha\,\dfrac{\pi}{2}\right|^{n+1}} \tag{8}$$

y para que la función $\Phi(z)$ que satisface en toda la región R, estas acotaciones (8), sea idénticamente nula, *será necesario y suficiente* que la sucesión $\left\{M_n\left[\dfrac{1}{\left|\operatorname{sen}\alpha\,\dfrac{n}{2}\right|}\right]^{n+1}\right\}$, satisfaga la condición C_α, o lo que es equivalente, que satisfaga tal condición la sucesión $\{M_n\}$.

Daremos, pues, nosotros, como condición *necesaria y suficiente* para asegurar la unicidad de la $F(z)$ en una región R de ángulo conforme $\alpha\pi$, que sea

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{M_n^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty$$

equivalente a cualquiera de las divergencias que constituyen C_α.

2.º *Unicidad para la derivada* $F'(z)$

Distinguiremos dos casos:

a) Que la $F'(z)$ se aproxime mediante la serie (2) obtenida derivando término a término la serie (1) que aproxima $F(z)$.

Supondremos que la serie de facultades (1) aproxima $F(z)$ unívocamente. En el capítulo I, pág. 148, Teorema II, se calcularon las cotas de la aproximación de la $F'(z)$; éstas, se demostró, eran de la forma

$$M_n'^{(p)} = C M_n \mu^{n+1} \prod_{s=p}^{n+1}\left(1 + \frac{s}{r}\right) \qquad \text{para} \quad n = p,\ p+1,\ p+2, \ldots$$

En el transcurso de esa demostración se establecían para el resto n.º de la $F'(z)$ las siguientes acotaciones:

$$\frac{|z(z+1)\ldots(z+n+1)|}{|z(z+1)\ldots(z+p-1)|}\,|R_n'(z)| < \frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|}$$

Si se supone ahora que existe otra $F'^*(z)$ aproximada por la misma serie y con idénticas cotas, pondríamos:

$$\frac{|z(z+1)\ldots(z+n+1)|}{|z(z+1)\ldots(z+p-1)|}\,|R_n'^*(z)| < \frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|}$$

Restando las dos acotaciones

$$\frac{|z(z+1)\ldots(z+n+1)|}{|z(z+1)\ldots(z+p-1)|}\,|\Phi'(z)| < 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|}$$

o bien:

$$\frac{|z|^{n+2}\,|A_{n+1}(z)|}{|z|^{p}\,|A_{p-1}(z)|}\,|\Phi'(z)| < 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|}$$

de la que finalmente resulta:

$$|\Phi'(z)| < 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{1}{|z|^{n-p+2}}$$

y para que $\Phi'(z)$ sea idénticamente nula, será *necesario* y *suficiente* que estas cotas verifiquen C_α, en particular que sea

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{[\overline{M}_n\,\mu^{n+1}]^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty \tag{9}$$

Esta divergencia se verificará simultáneamente a esta otra

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{\overline{M}_n^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty$$

pues las dos sucesiones de cotas difieren en un factor exponencial y la *amplitud* del dominio *no se altera* en las regiones que allí consideramos.

Ahora bien: esta última divergencia es cierta por la supuesta unicidad de la $F(z)$. Lo que nos dice, que: *si la $F(z)$ queda determinada unívocamente por medio de la serie de facultades* (1), *lo mismo ocurrirá a la $F'(z)$ respecto a la serie* (2) *obtenida derivando término a término la serie* (1) *y recíprocamente.*

La condición (9) puede ponerse en otra forma, haciendo intervenir en ella directamente las cotas $M_n'^{(p)}$.

Por la naturaleza del factor $\prod_{s=p}^{n+1}\left(1+\frac{s}{r}\right)$, podemos poner:

$$\overline{M}_n'^{(p)} = C\,\overline{M}_n\mu^{n+1}\prod_{s=p}^{n+1}\left(1+\frac{s}{r}\right) \qquad \text{(téngase en cuenta que } \mu > 1)$$

por consiguiente, la condición (9) se expresará así:

$$\sum \sqrt[n]{\frac{\left[\prod_{s=p}^{n+1}\left(1+\frac{s}{r}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}{[\overline{M}_n'^{(p)}]^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty$$

Con objeto de hacer más manejable esta condición, la sustituiremos por esta otra:

$$\sum \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt[n]{\left[M_n'^{(p)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty$$

a ella equivalente como fácilmente puede comprobarse, pues:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\left[\prod_{s=p}^{n+1}\left(1+\frac{s}{r}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}}{\left[M_n'^{(p)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}} : \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt[n]{\left[M_n'^{(p)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}}} = \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

lo que nos indica que las dos series tienen el mismo carácter.

b) Que la $F'(z)$ se aproxime mediante la serie de facultades (3) que da Nörlund en cuyo caso (Capítulo I, pág. 153, Teor. III), obteníamos las cotas

$$N_n'^{(p)} = M_n'^{(p)} + h^p \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n \right\}$$

Hasta aquí hemos visto que las condiciones de unicidad dependen de la *forma del recinto* y de la *sucesión de las cotas* de aproximación, y éstas no dependían de los coeficientes de la serie.

Las cotas que ahora se presentan, dependen de los coeficientes de la serie de facultades que se maneja. Es, por tanto, lógico que tengamos que imponer alguna condición a estos coeficientes, para poder asegurar la unicidad.

En la demostración que se dió del teorema antes citado, se establece la siguiente acotación, válida en toda la región, relativa al resto n.º de la serie (3):

$$\frac{|z(z+1)\dots(z+n+1)|}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|} |R_n'(z)| < \frac{M_n}{K} \mu^{n+1} \frac{|A_{n+1}|(z)}{|A_{p-1}|(z)} +$$

$$+ \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n}{|z|^p \, |A_{p-1}(z)|}$$

Si otra función $F'^{*}(z)$ también la satisface,

$$\frac{|z(z+1)\dots(z+n+1)|}{|z(z+1)\dots(z+p-1)|}\,|R_n'^{*}(z)| < \frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|} + $$

$$+\frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{3}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n}{|z|^p\,|A_{p-1}(z)|}$$

Se obtendrá por diferencia

$$\frac{|z(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)|}{|z(z+1)(z+2)\dots(z+p-1)|}\,|\Phi'(z)| < 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|} + $$

$$+\,2\,\frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{3}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n}{|z|^p\,|A_{p-1}(z)|}$$

de la que deducimos:

$$\frac{|z|^{n+2}\,|A_{n+1}(z)|}{|z|^p\,|A_{p-1}(z)|}\,|\Phi'(z)| < 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{|A_{n+1}(z)|}{|A_{p-1}(z)|} + $$

$$+\,2\,\frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{3}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n}{|z|^p\,|A_{p-1}(z)|}$$

o también:

$$\frac{|z|^{n+2}}{|z|^p}\,|\Phi'(z)| < 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1} + 2\,\frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{3}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n}{|z|^p\,|A_{n+1}(z)|}$$

de aquí:

$$|\Phi'(z)| < 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{1}{|z|^{n-p+2}} + 2\,\frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n}{|z+\nu|^{n+2}} \leq$$

$$\leq 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{1}{|z|^{n-p+2}} + 2\,\frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n}{|z|^{n+2}\,|\operatorname{sen}\varphi|^{n+2}} <$$

$$< 2\,\frac{M_n}{K}\,\mu^{n+1}\,\frac{1}{|z|^{n-p+2}} + 2\,\frac{\frac{1}{\left|\operatorname{sen}\alpha\frac{\pi}{2}\right|^{n+2}}\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{2}+\dots+\frac{a_0}{n+1}\right|(n+1)!+\varepsilon_n\right\}}{|z|^{n+2}}$$

si $|z| < 1$, multiplicaríamos por $|z|^p$ el denominador de la primera fracción, si $|z| > 1$ dividiríamos por $|z|^p$ el denominador de la segunda fracción. En ambos casos, mayoramos la cota y conseguimos igualar los exponentes de $|z|$.

De modo que podemos escribir, teniendo en cuenta, además, que $\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right| < 1$:

$$|\Phi'(z)| < 2 \frac{\frac{M_n}{K} \mu^{n+1} + \left|\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1)! + \varepsilon_n}{\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right|^{n+2} \cdot |z|^{n+q}}$$

si ponemos:

$$P_n = \frac{C M_n \mu^{n+1} + \left|\frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1)! + \varepsilon_n}{\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right|^{n+q}}$$

escribiremos brevemente

$$|\Phi'(z)| < \frac{2 P_n}{|z|^{n+q}}$$

De aquí se concluye, que para que la función $\Phi'(z)$ que satisface en la región R estas desigualdades, sea idénticamente nula, es decir, exista unicidad para $F'(z)$ será condición *necesaria* y *suficiente* que

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{P_n^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty$$

Vamos a dar ahora una condición auxiliar *suficiente* que impuesta a los coeficientes asegure esta divergencia.

$$P_n = \frac{C M^u \mu^{n+1} + \left|\frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1)! + \varepsilon_n}{\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right|^{n+2}} =$$

$$= \frac{C M_n \mu^{n+1}}{\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right|^{n+2}} \left(1 + \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1)! + \varepsilon_n}{C M_n \mu^{n+1}}\right)$$

Poniendo :

$$C M_n \mu^{n+1} = m_n \quad \text{y} \quad m_n^* = m_n \left(\frac{1}{\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right|} \right)^{n+2}$$

será :

$$\overline{m}_n = C \overline{M}_n \mu^{n+1} \quad \text{y} \quad \overline{m}_n^* = \overline{m}_n \left(\frac{1}{\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right|} \right)^{n+2}$$

ya que

$$\mu > 1 \quad \text{y} \quad \left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right| \leq 1$$

la sucesión $\{P_n\}$ se expresará, pues :

$$P_n = m_n^* \left(1 + \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n}{m_n} \right)$$

tomando logaritmos :

$$l P_n = l m_n^* + l \left(1 + \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n+1)! + \varepsilon_n}{m_n} \right)$$

Si consideramos ahora las rectificadas convexas $\{\overline{P}_n\}$, $\{\overline{m}_n\}$ y $\{\overline{m}_n^*\}$, los vértices de $\{\overline{m}_n\}$ y de $\{\overline{m}_n^*\}$ corresponderán a los mismos valores de n, y para cada uno de éstos se verificará :

$$l \overline{P}_n - l \overline{m}_n^* \leq l P_n - l \overline{m}_n^* = l \left(1 + \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1} \right| (n = 1)! + \varepsilon_n}{\overline{m}_n} \right)$$

Si para abreviar, designamos por $1 + x_n$ la expresión entre corchetes :

$$l \overline{P}_n - l \overline{m}_n^* \leq l (1 + x_n)$$

Y desarrollamos por la fórmula de Mac-Laurin este logaritmo, deteniéndonos en el término de 2.º grado que tomaremos como complementario, se obtiene :

$$l \overline{P}_n - l \overline{m}_n^* \leq x_n - \frac{x_n^2}{2!} \frac{1}{(1 + \theta x_n)^2} \tag{10}$$

Ahora bien:

$$\text{Si} \qquad \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1)!}{\overline{m}_n} < n\gamma \tag{11}$$

siendo γ independiente de n y finito, será también para un $\gamma_1 \geqslant \gamma$ ya que $\varepsilon_n \to 0$

$$x_n = \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1) + \varepsilon_n}{\overline{m}_n} < n\gamma_1$$

y de la acotación (10) resulta:

$$l\overline{P}_n - l\overline{m}_n^* < n\gamma_1 \tag{12}$$

de donde:

$$l\sqrt[n]{\frac{\overline{P}_n}{\overline{m}_n^*}} < \gamma_1$$

que se puede poner en la forma

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt[n]{[\overline{m}_n^*]^{\frac{1}{\alpha}}}}}{\dfrac{1}{\sqrt[n]{[\overline{P}_n]^{\frac{1}{\alpha}}}}} < e^{\gamma_1} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{[\overline{m}_n^*]^{\frac{1}{\alpha}}}} < e^{\gamma_1}\frac{1}{\sqrt[n]{[\overline{P}_n]^{\frac{1}{\alpha}}}} \tag{13}$$

Si no se trata de vértices de las $\{\overline{m}_n^*\}$ y $\{\overline{m}_n\}$, la diferencia

$$l\overline{P}_n - l\overline{m}_n^*$$

estará comprendida entre

$$l\overline{P}_{n'} - l\overline{m}_{n'}^* \qquad \text{y} \qquad l\overline{P}_{n''} - l\overline{m}_{n''}^*$$

siendo $\overline{m}_{n'}^*$ y $\overline{m}_{n''}^*$ los vértices más próximos entre los que está comprendido $\overline{m}_n^*$.

Por consiguiente: si a partir de un cierto $n = \nu$ se verifica para todos los vértices:

$$l\overline{P}_n - l\overline{m}_n^* < n\gamma$$

será para todo $n > \nu$, aunque no se trate de un vértice

$$l\overline{P}_n - l\overline{m}_n^* < n\gamma$$

que es la misma condición (12) de la que resulta la (13).

Ello nos dice que, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{\overline{P}_n^{\frac{1}{\alpha}}}}$ tendrá el mismo carácter que la $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{[\overline{m}_n^*]^{\frac{1}{\alpha}}}}$, la cual es divergente, por la supuesta unicidad de la $F(z)$, pues las sucesiones $\{M_n\}$, $\{m_n\}$ y $\{m_n^*\}$ difieren entre sí en factores exponenciales.

Para resumir, todo lo expuesto en este caso, diremos:

«Si la función $F(z)$ queda determinada unívocamente mediante la serie de facultades (1), para que la función derivada $F'(z)$ se aproxime asimismo unívocamente, será condición *necesaria* y *suficiente* que sea:

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{\overline{P}_n^{\frac{1}{\alpha}}}} = \infty \tag{14}$$

donde

$$P_n = \frac{C M \mu^{n+1} + \left|\frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1)! + \varepsilon_n}{\left|\operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2}\right|^{n+2}}$$

Como quiera que esta divergencia será difícil reconocerla, debido a la complejidad de la sucesión P_n, se podrá reemplazar en los casos prácticos, por una condición *suficiente* que asegura la divergencia (14). Esta se expresa con la desigualdad (11) que podremos poner en esta forma:

$$\frac{\left|\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_0}{n+1}\right| (n+1)!}{n C \overline{M} \mu^{n+1}} < \gamma \tag{15}$$

siendo γ finito e independiente de n».

3.º *Unicidad en la integración*

Se ha visto en el capítulo anterior que si la función $F(z)$ admite como serie de aproximación asintótica en R, la serie (1) con cotas M_n, la función $\Phi(z) = -\int_z^\infty \left[F(z) - \frac{a_0}{z}\right] dz$ se puede aproximar:

a) Mediante la serie (4) obtenida integrando término a término la serie (1) (Teorema IV).

b) Mediante la serie de facultades (5) dada por NÖRLUND (Teor. VI).

Las regiones en las que son válidas tales aproximaciones ya allí precisadas, son regiones R^*, interiores a la región R, en las que se verifica

$$|z|^{n+1} \int_z^{\infty} \frac{|dz|}{|z+\nu|^{n+2}} < K$$

Las cotas de aproximación vimos que eran:

en el caso *a)* $$M_n^* = M_{n+1} K \prod_{s=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{r}\right)$$

en el caso *b)*

$$N_n^* = M_n^* + \left| \frac{1}{2} a_n + \sum_{\nu=2}^{n} (-1)^{\nu} \frac{B_{\nu}^{(\nu-1)}}{\nu!} \cdot \frac{a_{n-\nu+1}}{\nu+1} \right| n! + \varepsilon_n$$

Con razonamiento análogo al utilizado en la derivación, se obtienen como condiciones de unicidad las siguientes:

en el caso *a)* Condición *necesaria* y *suficiente*:

$$\sum \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt[n]{M_n^{*\frac{1}{\alpha}}}} = \infty \tag{16}$$

en el caso *b)* Condición *necesaria* y *suficiente*:

$$\sum \frac{1}{\sqrt[\nu]{P_n^{*\frac{1}{\alpha}}}} = \infty \tag{17}$$

siendo $$P_n^* = \frac{M_{n+1} k + \left| \frac{1}{2} a_n + \sum_{\nu=2}^{n} (-1)^{\nu} \frac{B_{\nu}^{(\nu-1)}}{v!} \frac{a_{n-\nu+1}}{\nu-1} \right| n! + \varepsilon_n}{\left| \operatorname{sen} \alpha \frac{\pi}{2} \right|^{n+1}}$$

y como condición *suficiente* que asegura esta última divergencia, que sea

$$\frac{\left| \frac{1}{2} a_n + \sum_{\nu=2}^{n} (-1)^{\nu} \frac{B_{\nu}^{(\nu-1)}}{\nu!} \cdot \frac{a_{n-\nu+1}}{\nu-1} \right| n!}{n \overline{M}_{n+1} k} < \gamma \tag{18}$$

siendo γ finito e independiente de n.

CAPÍTULO III

EL CALCULO CON SERIES ASINTOTICAS DE FACULTADES

1. Linealidad

Si dos funciones $F(z)$ y $G(z)$ tienen unos desarrollos asintóticos dados por

$$\begin{aligned} |z(z+1)\dots(z+n)| \left| F(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| &< M_n \\ |z(z+1)\dots(z+n)| \left| G(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| &< N_n \end{aligned} \tag{19}$$

se obtiene sumando:

$$|z(z+1)\dots(z+n)| \left| [F(z)+G(z)] - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(a_s+b_s)\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| < M_n + N_n \tag{20}$$

luego:

Teorema VII

« *La serie de facultades obtenida sumando término a término las series que aproximan $F(z)$ y $G(z)$ en las regiones R_1 y R_2 respectivamente, es la aproximación asintótica de la suma de las funciones $F(z) + G(z)$ en la región R, intersección de las R_1 y R_2, y las cotas de aproximación son las sumas de las cotas respectivas* ».

Es también evidente, que si α es un factor cualquiera positivo se tiene:

$$|z(z+1)\dots(z+n)| \left| \alpha F(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\alpha\, a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| < \alpha M_n \tag{21}$$

por consiguiente:

Teorema VIII

« *Toda combinación lineal $\alpha F(z) + \beta G(z) + \dots$ de un número finito cualquiera de sumandos* (α, β,... números positivos), *podrá aproximarse asintóticamente en la parte común a las regiones en que se aproximan las funciones $F(z)$, $G(z)$, ..., a una serie de facultades así:*

$$|z(z+1)\dots(z+n)| \left| [\alpha F(z) + \beta G(z) + \dots] - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(\alpha a_s + \beta b_s + \dots)\, s!}{z(z+1)\dots(z+2)} \right| < \\ < \alpha M_n + \beta N_n + \dots \tag{22}$$

2. Producto

En el caso de la convergencia ordinaria, Nörlund en la monografía antes citada (*V-b*-218) demuestra, que el producto de dos funciones $F(z)$ y $G(z)$ desarrolladas en series de facultades convergentes, se puede desarrollar también en serie de facultades convergente, así:

$$F(z) \cdot G(z) = \frac{c_1 1!}{z(z+1)} + \frac{(c_2 - c_1) 2!}{z(z+1)(z+2)} + \frac{(c_3 - c_2) 3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \quad (23)$$

en donde :

$$c_s = \sum_{p=0}^{p=s-1} \frac{p!(s-1-p)!}{s!} S_p^{(s-p)}(a) \cdot S_{s-p-1}^{(0)}(b)$$

siendo

$$S_s^{(\varrho)}(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=s} \binom{\varrho+\nu}{\nu} a_{s-\nu}$$

Aquí nos ocuparemos del problema análogo, pero suponiendo la convergencia no ordinaria sino asintótica.

El procedimiento que seguiremos será el utilizado en el capítulo I al tratar de la derivación e integración.

Sabemos que

$$F(z) \sim \frac{a_0}{z} + \frac{a_1 1!}{z(z+1)} + \frac{a_2 2!}{z(z+1)(z+2)} + \frac{a_3 3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots$$

y (25)

$$G(z) \sim \frac{b_0}{z} + \frac{b_1 1!}{z(z+1)} + \frac{b_2 2!}{z(z+1)(z+2)} + \frac{b_3 3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots$$

Consideremos las dos sumas parciales de una y otra serie, hasta los terceros términos inclusive. Su producto término a término nos da :

$$\frac{a_0 b_0}{z^2} + \frac{(a_0 b_1 + a_1 b_0) 1!}{z^2 (z+1)} + \frac{a_1 b_1 1!}{z^2 (z+1)^2} + \frac{(a_0 b_2 + a_2 b_0) 2!}{z^2 (z+1)(z+2)} +$$
$$+ \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1) 2!}{z^2 (z+1)^2 (z+2)} + \frac{a_2 b_2 2! 2!}{z^2 (z+1)^2 (z+2)^2} \quad (26)$$

Considerando ahora esta expresión, como una función de z de la que deseamos calcular su desarrollo asintótico en serie de facultades, obtenemos como coeficientes por el procedimiento de los límites encadenados,

$$\alpha_0 = \lim_{z \to \infty} z \left[\frac{a_0\, b_0}{z^2} + \dots + \frac{a_2\, b_2\, 2!\, 2!}{z^2 (z+1)^2 (z+2)^2}\right] = 0$$

$$\alpha_1\, 1! = \lim_{z \to \infty} (z+1) \left[\frac{a_0\, b_0}{z} + \dots + \frac{a_2\, b_2\, 2!\, 2!}{z (z+1)^2 (z+2)^2} - 0\right] = a_0\, b_0$$

$$\alpha_2\, 2! = \lim_{z \to \infty} (z+2) \left[a_0\, b_0 \frac{z+1}{z} + \dots + \frac{a_2 b_2\, 2!\, 2!}{z (z+1)(z+2)^2} - a_0 b_0\right] = a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0$$

$$\alpha_3\, 3! = \lim_{z \to \infty} (z+3) \left[\dots - (a_0 b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0)\right] =$$
$$= 2\,(a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0) + a_1\, b_1\, 1! + (a_0\, b_2 + a_2\, b_0)\, 2!$$

$$\alpha_4\, 4! = \lim_{z \to \infty} (z+4) \left[\dots - 2\,(a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0) - a_1\, b_1\, 1! - (a_0\, b_2 + a_2\, b_0)\, 2!\right] =$$
$$= 6\,(a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0) + 4 a_1\, b_1 + 6\,(a_0\, b_2 + a_2\, b_0) + 2\,(a_1\, b_2 + a_2\, b_1)$$

y así sucesivamente.

De estos resultados deducimos como coeficientes del desarrollo, los siguientes :

$$\alpha_0 = 0$$
$$\alpha_1 = a_0\, b_0$$
$$\alpha_2 = \frac{a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0}{2}$$
$$\alpha_3 = \frac{a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0}{3} + \frac{a_1\, b_1}{6} + \frac{a_0\, b_2 + a_2\, b_0}{3}$$
$$\alpha_4 = \frac{a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + a_1\, b_0}{4} + \frac{a_1\, b_1}{6} + \frac{a_0\, b_2 + a_2\, b_0}{4} + \frac{a_1\, b_2 + a_2\, b_1}{12}$$

....

Ahora bien : si calculamos los coeficientes de la serie (23) dados por las fórmulas (24) obtenemos :

$$c_0 = 0$$
$$c_1 = a_0 b_0$$
$$c_2 - c_1 = \frac{a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0}{2}$$
$$c_3 - c_2 = \frac{a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0}{3} + \frac{a_1 b_1}{6} + \frac{a_0 b_2 + a_2 b_0}{3}$$
$$c_4 - c_3 = \frac{a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0}{4} + \frac{a_1 b_1}{6} + \frac{a_0 b_2 + a_2 b_0}{4} + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{12} + \frac{a_0 b_3 + a_3 b_0}{4}$$

....

....

con lo que se observa que el producto (26) de las sumas parciales de tercer orden de las series (25), tienen como desarrollo asintótico, una serie de facultades cuyos tres primeros términos coinciden con los tres primeros de la serie (23) dada por NÖRLUND en el caso de la convergencia ordinaria. El cuarto coeficiente difiere del correspondiente $c_4 - c_3$ en el último sumando $\frac{a_0 b_3 + a_3 b_0}{4}$.

Así, pues, tomando en las series (25), sumas parciales de orden n se obtiene la siguiente acotación:

$$|z(z+1)\dots(z+n)| \left| \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(c_s - c_{s-1}) s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| < |c_n - c_{n-1}|\, n! + \varepsilon_n \tag{27}$$

siendo ε_n, como se ha visto en casos anteriores, un infinitésimo para cada n cuando $z \to \infty$.

Por otra parte: de las acotaciones (19), se obtiene por multiplicación miembro a miembro:

$$\left| F(z) \cdot G(z) - F(z) \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} - G(z) \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| < \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2}$$

para abreviar pondremos:

$$\sum_a = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{a_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \qquad \sum_b = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{b_s s!}{z(z+1)\dots(z+s)}$$

con lo cual

$$|F(z) \cdot G(z) - F(z) \Sigma_b - G(z) \Sigma_a + \Sigma_a \cdot \Sigma_b| < \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2}$$

que podemos poner también en la forma:

$$|F(z) \cdot G(z) - \Sigma_a \cdot \Sigma_b + 2 \Sigma_a \Sigma_b - F(z) \Sigma_b - G(z) \Sigma_a| < \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2}$$

y con mayor razón :

$$|F(z)\cdot G(z) - \Sigma_a \Sigma_b| - |2\Sigma_a \Sigma_b - F(z)\Sigma_b - G(z)\Sigma_a| < \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2}$$

o sea :

$$|F(z)\cdot G(z) - \Sigma_a \Sigma_b| < \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2} + |2\Sigma_a \Sigma_b - F(z)\Sigma_b - G(z)\Sigma_a| =$$

$$= \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2} + |(\Sigma_a\cdot\Sigma_b - F(z)\Sigma_b) + (\Sigma_a\Sigma_b - G(z)\cdot\Sigma_a)| \leq$$

$$\leq \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2} + |\Sigma_b|\cdot|\Sigma_a - F(z)| + |\Sigma_a|\cdot|\Sigma_b - G(z)|$$

pero en virtud de las acotaciones (19),

$$|\Sigma_a - F(z)| < \frac{M_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|} \quad \text{y} \quad |\Sigma_b - G(z)| < \frac{N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|}$$

luego :

$$|F(z)\cdot G(z) - \Sigma_a\Sigma_b| <$$

$$< \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|^2} + |\Sigma_b| \frac{M_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|} + |\Sigma_a| \frac{N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|}$$

o también :

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\cdot\left|F(z)\cdot G(z) - \sum_{s=0}^{n-1}{}_a\cdot\sum_{s=0}^{n-1}{}_b\right| <$$

$$< \frac{M_n N_n}{|z(z+1)\dots(z+n)|} + \left|\sum_{s=0}^{n-1}\frac{b_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| M_n + \left|\sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| N_n$$

Si en el segundo miembro podemos $z = 1$, habremos mayorado la cota, puesto que trabajamos en entornos del infinito ; y queda :

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|F(z)\cdot G(z) - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}\frac{b_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| <$$

$$< \frac{M_n N_n}{(n+1)!} + \left|\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}\right| N_n + \left|\frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{2} + \dots + \frac{b_{n-1}}{n}\right| M_n \qquad (28)$$

sumando ahora las desigualdades (27) y (28) obtenemos, finalmente :

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|F(z)\cdot G(z)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(c_s-c_{s-1})\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right|<\frac{M_nN_n}{(n+1)!}+$$

$$+\left|\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_{n-1}}{n}\right|N_n+\left|\frac{b_0}{1}+\frac{b_1}{2}+\dots+\frac{b_{n-1}}{n}\right|M_n+|c_n-c_{n-1}|\,n!+\varepsilon_n \quad (29)$$

con lo cual se ha demostrado:

La serie de facultades que NÖRLUND *maneja en el caso de la convergencia ordinaria, para dar el desarrollo del producto de dos funciones, aproxima asintóticamente el producto cuando las dos funciones poseen desarrollos asintóticos dados por* (19) *y las cotas de aproximación son las que expresa la desigualdad* (29).

3. Potencias sucesivas de una función

En el caso particular en que $F(z)=G(z)$, designando por $a_s^{(2)}$ los coeficientes c_s-c_{s-1}, en cuya formación $a_i=b_i$, la acotación (29) se convierte en esta otra:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|[F(z)]^2-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s^{(2)}}{z(z+1)\dots(z+s)}\right|<$$

$$<\frac{M_n^2}{(n+1)!}+2\left|\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_{n-1}}{n}\right|M_n+|a_n^{(2)}|\,n!+\varepsilon_n^{(2)}=M_n^{(2)}$$

teniendo en cuenta que $a_0^{(2)}=0$.

Aplicando nuevamente la fórmula (29) para la función $[F(z)]^2$ y la $F(z)$ que sabemos verifica la acotación

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|F(z)-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right|<M_n \quad (30)$$

resulta:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|[F(z)]^3-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s^{(s)}\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right|<$$

$$<\frac{M_n^{(2)}M_n}{(n+1)!}+\left|\frac{a_0^{(2)}}{1}+\frac{a_1^{(2)}}{2}+\dots+\frac{a_{n-1}^{(2)}}{n}\right|M_n+$$

$$+\left|\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_{n-1}}{n}\right|M_n^{(2)}+|a_n^{(3)}|\,n!+\varepsilon_n^{(3)}=M_n^{(3)}$$

aquí ocurrirá $a_0^{(3)} = a_1^{(3)} = 0$ y los $a_s^{(3)}$ representan los coeficientes $c_s - c_{s-1}$ construídos con $a_s^{(2)}$ y a_s.

Multiplicando ahora esta última y (30) se obtiene análogamente:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|[F(z)]^4 - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s^{(4)}\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| <$$

$$< \frac{M_n^{(3)}M_n}{(n+1)!} + \left|\frac{a_0^{(3)}}{1} + \frac{a_1^{(3)}}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(3)}}{n}\right| M_n +$$

$$+ \left|\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}\right| M_n^{(3)} + |a_n^{(4)}|\,n! + \varepsilon_n^{(4)} = M_n^{(4)}$$

siendo $a_0^{(4)} = a_1^{(4)} = a_2^{(4)} = 0$.

Y, en general, para $K \leq n$:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|[F(z)]^k - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{a_s^{(k)}\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| <$$

$$< \frac{M_n^{(k-1)}M_n}{(n+1)!} + \left|\frac{a_0^{(k-1)}}{1} + \frac{a_1^{(k-1)}}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}^{(k-1)}}{n}\right| M_n +$$

$$+ \left|\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}\right| M_n^{(k-1)} + |a_n^{(k)}|\,n! + \varepsilon_n^{(k)} = M_n^{(k)}$$

donde $a_0^{(k)} = a_1^{(k)} = \dots = a_{k-2}^{(k)} = 0$.

Fórmula que nos ofrece la posibilidad de obtener la serie de facultades que nos aproxima asintóticamente una potencia cualquiera de la función $F(z)$.

4. Polinomios en $F(z)$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ son constantes cualesquiera, podremos escribir:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|\alpha_1\ F(z) - \sum_{s=0}^{n-1}\frac{\alpha_1 a_s\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| < |\alpha_1|\,M_n$$

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|\alpha_2[F(z)]^2 - \sum_{s=1}^{n-1}\frac{\alpha_2 a_s^{(2)}\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| < |\alpha_2|\,M_n^{(2)}$$

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|\alpha_3[F(z)]^3 - \sum_{s=2}^{n-1}\frac{\alpha_3 a_s^{(3)}\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| < |\alpha_3|\,M_n^{(3)}$$

....

....

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|\alpha_k[F(z)]^k - \sum_{s=k-1}^{n-1}\frac{\alpha_k a_s^{(k)}\,s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right| < |\alpha_k|\,M_n^{(k)} \qquad (k \leq n)$$

que sumadas dan:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|(\alpha_1 F(z)+\alpha_2[F(z)]^2+\dots+\alpha_k[F(z)]^k)-\right.$$

$$\left.-\left(\sum_0^{n-1}\frac{\alpha_1 a_s s!}{z\dots(z+s)}+\sum_1^{n-1}\frac{\alpha_2 a_s^{(2)} s!}{z\dots(z+s)}+\dots+\sum_{k-1}^{n-1}\frac{\alpha_k a_s^{(k)} s!}{z\dots(z+s)}\right)\right|<$$

$$<|\alpha_1| M_n+|\alpha_2| M_n^{(2)}+\dots+|\alpha_k| M_n^{(k)} \qquad (32)$$

con objeto de dar a esta fórmula una forma más simple, desarrollaremos los sumatorios así:

$$\alpha_1\frac{a_0}{z}+\alpha_1\frac{a_1 1!}{z(z+1)}+\alpha_1\frac{a_2 2!}{z(z+1)(z+2)}+\alpha_1\frac{a_3 3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\dots+\alpha_1\frac{a_{n-1}(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

$$\alpha_2\frac{a_1^{(2)} 1!}{z(z+1)}+\alpha_2\frac{a_2^{(2)} 2!}{z(z+1)(z+2)}+\alpha_2\frac{a_3^{(2)} 3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\dots+\alpha_2\frac{a_{n-1}^{(2)}(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

$$\alpha_3\frac{a_2^{(3)} 2!}{z(z+1)(z+2)}+\alpha_3\frac{a_3^{(3)} 3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\dots+\alpha_3\frac{a_{n-1}^{(3)}(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

....

....

$$\dots+\alpha_k\frac{a_{n-1}^{(k)}(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

sumando ahora por columnas, es decir, agrupando las fracciones de igual denominador, queda:

$$\alpha_1\frac{a_0}{z}+\frac{(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_1^{(2)})\,1!}{z(z+1)}+\frac{(\alpha_1 a_2+\alpha_2 a_2^{(2)}+\alpha_3 a_2^{(3)})\,2!}{z(z+1)(z+2)}+$$

$$+\frac{(\alpha_1 a_3+\alpha_2 a_3^{(2)}+\alpha_3 a_3^{(3)}+\alpha_4 a_3^{(4)})\,3!}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\dots+\frac{(\alpha_1 a_{n-1}+\alpha_2 a_{k-1}^{(2)}+\dots+\alpha_k a_{k-1}^{(k)})\,(k-1)!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+k-1)}+\dots$$

$$\dots+\frac{(\alpha_1 a_{n-1}+\alpha_2 a_{n-1}^{(2)}+\dots+\alpha_k a_{k-1}^{(k)})\,(n-1)!}{z(z+1)\dots(z+n-1)}$$

con lo cual la acotación (32) toma la forma:

$$|z(z+1)\dots(z+n)|\left|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i[F(z)]^i-\left(\sum_{s=0}^{k-1}\frac{\left(\sum_{i=1}^{s+1}\alpha_i a_s^{(i)}\right)s!}{z(z+1)\dots(z+s)}+\sum_{s=k}^{n-1}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i a_s^{(i)}\right)s!}{z(z+1)\dots(z+s)}\right)\right|<$$

$$<\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i| M_n^{(i)} \qquad (33)$$

con lo que se ha conseguido la serie de facultades que aproxima asintóticamente un polinomio en $F(z)$.

CAPÍTULO IV

EJEMPLO

Es sabido que la integral de LAPLACE

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1}\,\varphi(t)\,dt \tag{34}$$

en la que $\varphi(t)$ es una función holomorfa en el círculo $|t-1| < 1$, y de orden finito sobre el círculo, es representable por una serie de facultades convergente. Entre la abscisa de convergencia y el orden citado existe la relación: si λ es la abscisa de convergencia, el orden de $t^{-1}\varphi(t)$ sobre el círculo es $\lambda + 1$ si $\lambda \geqslant 0$, y $\geqslant \lambda + 1$ si $\lambda < 0$ (*V*-*b*-188).

Pues bien: si elegimos una función generatriz $\varphi(t)$, tal que, $t^{-1}\varphi(t)$ sea de orden infinito positivo sobre el círculo, la integral de LAPLACE (34) nos dará formalmente una serie de facultades, cuya abscisa de convergencia será $+\infty$, es decir, será divergente en todo el plano.

A tal fin, tomamos

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \sum_0^\infty e^{n^{\frac{1}{2}}}(1-t)^n$$

que es evidentemente convergente en el círculo $|t-1| < 1$ ya que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\sqrt{n}}\,|1-t|^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\sqrt{n}}{n}}\,|1-t| = |1-t|$$

Además, el orden de $t^{-1}\varphi(t)$ sobre el círculo es:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{le^{\sqrt{n}}}{ln} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\sqrt{n}}{ln} = \infty$$

La integral (34) tomará la forma:

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}}(1-t)^n\,t\,dt = \int_0^1 \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}}\,t^z(1-t)^n\,dt =$$

$$= \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} \int_0^1 t^z(1-t)^n\,dt$$

Efectuando la integración por partes:

$$\int_0^1 t^z (1-t)^n dt = \left[(1-t)^n \frac{t^{z+1}}{z+1}\right]_0^1 + \frac{n}{z+1}\int_0^1 t^{z+1}(1-t)^{n-1} dt =$$
$$= \frac{n}{z+1}\int_0^1 t^{z+1}(1-t)^{n-1} dt$$

Con cálculo análogo se obtiene:

$$\frac{n}{z+1}\int_0^1 t^{z+1}(1-t)^{n-1} dt = \frac{n(n-1)}{(z+1)(z+2)}\int_0^1 t^{z+2}(1-t)^{n-2} dt$$

y, por consiguiente, al cabo de n integraciones sucesivas se habrá obtenido:

$$\int_0^1 t^z (1-t)^{n-1} dt = \frac{n!}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)}\int_0^1 t^{z+n} dt =$$
$$= \frac{n!}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)}$$

De manera que:

$$\int_0^1 t^{z-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t\, dt = \sum_0^\infty \frac{e^{\sqrt{n}}\, n!}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)} \tag{35}$$

Aplicando ahora la transformación

$$\sum_0^\infty \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\dots(z+s)} = \sum_0^\infty \frac{(a_0+a_1+\dots+a_s)\, s!}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)} \qquad (V\text{-}b\text{-}193)$$

de la serie obtenida (35) resulta:

$$e^{\sqrt{s}} = a_0 + a_2 + a_3 + \dots + a_s$$

de donde:

$$\begin{aligned}
1 &= a^0 & \qquad\qquad a_1 &= 1 \\
e &= a_0 + a_1 & a_1 &= e - 1 \\
e^{\sqrt{2}} &= a_0 + a_1 + a_2 \qquad \text{o sea:} & a_2 &= e^{\sqrt{2}} - (e-1) - 1 = e^{\sqrt{2}} - e \\
e^{\sqrt{2}} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & a_3 &= e^{\sqrt{3}} - (e^{\sqrt{2}} - e) - (e-1) - 1 = e^{\sqrt{3}} - e^{\sqrt{2}} \\
&\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

y se obtiene finalmente:

$$\int_0^1 t^{z-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n \, t \, dt = \sum_{s=0}^\infty \frac{\left(e^{\sqrt{s}} - e^{\sqrt{s-1}}\right) s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \tag{36}$$

Se nos plantea ahora la cuestión siguiente:

Por una parte, existe una función holomorfa $F(z)$ (cuyo dominio de holomorfía precisaremos luego), definida por la integral (34). Y por otra, la misma integral nos ha proporcionado de una manera formal, la serie de facultades (36) divergente en todo el plano, debido a la elección hecha de la función generatriz $\varphi(t)$. Deseamos estudiar, si la serie (36) puede aproximar asintóticamente la función $F(z)$, con qué cotas y en qué región.

Para ello estudiaremos la acotación de los productos

$$|z(z+1)\dots(z+n)| \left| F(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\left(e^{\sqrt{s}} - e^{\sqrt{s-1}}\right) s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right|$$

o lo que es lo mismo:

$$|z(z+1)\dots(z+n)| \left| \int_0^1 t^{z-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t\,dt - \int_0^1 t^{z-1} \sum_0^{n-1} e^{\sqrt{s}} (1-t)^s t\,dt \right| =$$

$$= |z(z+1)\dots(z+n)| \left| \int_0^1 t^{z-1} \sum_n^\infty e^{\sqrt{s}} (1-t)^s \, t\,dt \right| \leq$$

$$\leq |z(z+1)\dots(z+n)| \left| \int_0^1 t^{z-1} e^{\sqrt{n}} (1-t)^n \, t\,dt \right| +$$

$$+ |z(z+1)\dots(z+n)| \left| \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n+1}^\infty e^{\sqrt{s}} (1-t)^s \, t\,dt \right| =$$

$$= |z(z+1)\dots(z+n)| \frac{e^{\sqrt{n}}\, n!}{|z+1|\,|z+2|\dots|z+n+1|} +$$

$$+ |z(z+1)\dots(z+n)| \left| \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n+1}^\infty e^{\sqrt{s}} (1-t)^s \, t\,dt \right| \tag{37}$$

Para $z \to \infty$, el primer sumando tiene límite igual a $e^{\sqrt{n}}\, n!$ manteniéndose inferior a él. En cuanto a la integral que aparece en el segundo sumando, fácilmente se ve, siguiendo el mismo método, que es un infinitésimo de orden $n+2$.

Por consiguiente, la cota superior de la suma (37) será, $K e^{\sqrt{n}} n! + \varepsilon_n$, siendo $0 < K < 1$ y ε_n infinitésimo para cada n, cuando $z \to \infty$.

Si ponemos: $K e^{\sqrt{n}} n! + \varepsilon_n = e^{\sqrt{n}} n! \left(K + \dfrac{\varepsilon_n}{e^{\sqrt{n}} n!} \right) = e^{\sqrt{n}} n! \, K'$

podemos conseguir que $K' = K + \dfrac{\varepsilon_n}{e^{\sqrt{n}} n!} < 1$ sin más que tomar n suficientemente elevado.

Se tendrá por tanto:

$$|z(z+1)\dots(z+n)| \left| F(z) - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\left(e^{\sqrt{s}} - e^{\sqrt{s-1}}\right) s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \right| < e^{\sqrt{n}} n! < e^n n! \quad (38)$$

Como cotas de aproximación tomaremos, pues: $M_n = e^n n!$.

Para ver ahora en qué recintos es posible esta aproximación asintótica, estudiaremos previamente el dominio de holoformía de la función $F(z)$ definida por la integral

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t \, dt \quad (39)$$

Utilizaremos para tal objeto, el Teorema de VITALI (VII-121) y (I-170).

Designemos por $f(z, t)$ la función bajo el signo integral (39)

$$f(z, t) = t^{z-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t$$

que será holomorfa en todo el plano finito.

Es, además, uniformemente acotada en el semiplano $R[z] \geqslant 1$, pues:

$$|f(z, t)| = t^{x-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t$$

y ya que $0 < t < 1$, si $x \geqslant 1$ también será:

$$|f(z, t)| < \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t$$

Ahora bien; la función $\varphi(t) = \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t$ es continua en (0,1) se anula en $t = 0$ y $t = 1$; por consiguiente, alcanzará un valor máximo para un cierto valor $t = \tau$ del intervalo (0,1).

La serie numérica $\sum_{0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} (1 - \tau)^n \tau$ será convergente y mayorante de la $\sum_{0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} (1 - t)^n t$. Designando por S su suma, podremos escribir:

$$|f(z, t)| \leq \sum_{0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} (1 - \tau)^n \tau = S$$

Luego $f(z, t)$ es uniformemente acotada en el semiplano $R[z] \geqslant 1$ como deseábamos probar.

Consideremos ahora la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$ construída así:

$$\Phi_n(z) = \frac{f(0, z) + f\left(\frac{1}{n}, z\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}, z\right)}{n}$$

obtenida fraccionando el intervalo (0,1) en n partes iguales. Como estas $\Phi_n(z)$ resultan ser valores medios de la $f(z, t)$ en (0,1), también serán uniformemente acotadas en el semiplano $R[z] \geqslant 1$, es decir

$$|\Phi_n(z)| < S$$

Por otra parte; por la definición de integral definida

$$\lim_{n \to \infty} \{\Phi_n(z)\} = \int_0^1 f(z, t)\, dt$$

Este límite es finito, pues:

$$\left|\int_0^1 f(z, t)\, dt\right| = \left|\int_0^1 t^{z-1} \sum_{0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} (1 - t)^n t\, dt\right| < \int_0^1 t^{x-1} \left|\sum_{0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} (1 - t)^n t\, dt\right| <$$

$$< \int_0^1 t^{x-1} S\, dt = \frac{S}{x} \leqslant S$$

Aplicando ahora el citado Teorema de Vitali, ya que estamos en las condiciones que estipula su enunciado, resulta, que el límite de la sucesión $\{\Phi_n(z)\}$, es decir, la integral

$$F(z) = \int_0^1 t^{z-1} \sum_{0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} (1 - t)^n t\, dt \tag{40}$$

es una función holomorfa en todo semiplano $R[z] \geqslant 1$.

Por consiguiente: *en cualquier semiplano* $R[z] = \lambda > 1$ *será posible la aproximación asintótica expresada por la acotación* (38).

Las cotas de aproximación hemos visto son: $M_n = e^n n!$

En esta sucesión de cotas ocurre que $\overline{M}_n = M_n$ por la naturaleza de los factores que la componen.

Además, con suma facilidad se obtiene que:

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{e^n n!}} = \infty \tag{41}$$

lo que nos dice, que la serie (36) *aproxima la función* $F(z)$ *definida por la integral de* Laplace (40) *con unicidad.*

Obsérvese que la región en la que es válida la aproximación asintótica que consideramos, es como ya se ha dicho, el semiplano $R[z] = \lambda > 1$ que es del tipo citado en el Cap. I, pág. 149, cuando $\alpha = 1$, lo que debe tenerse en cuenta al aplicar la condición C_α. Por esto, la divergencia (41) asegura la unicidad.

La función derivada

$$F'(z) = \int_0^1 t^{z-1} \cdot lt \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n \, t \, dt$$

la podremos aproximar, bien mediante la serie obtenida derivando término a término la serie (36), o bien mediante la serie de facultades de Nörlund para la derivada.

En el primer caso, la serie de aproximación será:

$$- \sum \frac{\left(e^{\sqrt{s}} - e^{\sqrt{s-1}}\right) s!}{z(z+1)\dots(z+s)} \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+s}\right] \tag{42}$$

Recordando el Teorema II (Cap. I, pág. 147), la región R' en que la serie (42) aproxima la $F'(z)$, será cualquier semiplano $R[z] \geqslant \lambda' > \lambda$ con las cotas de *orden uno* dadas por

$$M_n'^{(1)} = C e^n n! \, \mu_1^{n+1} \prod_{s=1}^{n+1} \left(1 + \frac{s}{\lambda'}\right) \qquad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Esta aproximación se *realiza con unicidad*, pues se cumple la condición (9) (Cap. II, pág. 166), ya que:

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{e^n n!\, \mu_1^{n+1}}} = \infty$$

si se tiene en cuenta la divergencia (41).

En el segundo caso, la serie de aproximación será:

$$-\sum \frac{\left(\dfrac{e^{\sqrt{s-1}} - e^{\sqrt{s-2}}}{1} + \dfrac{e^{\sqrt{s-2}} - e^{\sqrt{s-3}}}{2} + \dots + \dfrac{e-1}{s-1} + \dfrac{1}{s}\right) s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)}$$

con las cotas

$$N_n'^{(1)} = M_n'^{(1)} + \frac{1}{\lambda'}\left\{\left|\frac{e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-2}}}{2} + \frac{e^{\sqrt{n-2}} - e^{\sqrt{n-3}}}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right| (n+1)! + \varepsilon_n\right\}$$

siendo los recintos los mismos que en el caso anterior. (T. III, Cap. I).

En cuanto a la *unicidad, también existe en este caso*; pues se cumple la condición suficiente (15) (Cap. II, pág. 172) que es:

$$\frac{\left|\dfrac{a_{n-1}}{2} + \dfrac{a_{n-1}}{3} + \dots + \dfrac{a_0}{n+1}\right| (n+1)!}{n\,\overline{M}_n\, \mu^{n+1}} < \gamma \qquad \text{(siendo } \gamma \text{ finito e independiente de } n\text{)}$$

En efecto:

La condición anterior tomará la forma

$$\frac{\left|\dfrac{e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-2}}}{2} + \dfrac{e^{\sqrt{n-2}} - e^{\sqrt{n-3}}}{3} + \dots + \dfrac{e-1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right| (n+1)!}{n\, e^n\, n!\, \mu_1^{n+1}} = \tag{43}$$

$$= \frac{1}{\mu_1^{n+1}}\left|\frac{e^{\sqrt{n-1}}}{e^n}\cdot\frac{1}{2} + \frac{e^{\sqrt{n-2}}}{e^n}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\sqrt{n-3}}}{e^n}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{e}{e^n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{e^n}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\right| \frac{n+1}{n} <$$

$$< \left|\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\right| \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n}$$

y, por tanto, el cociente (43) siempre podrá ser menor que un número γ finito, positivo e independiente de n, lo que prueba que existe unicidad.

En cuanto a la función

$$\Phi(z) = -\int_z^\infty \left[F(z) - \frac{1}{z}\right] dz = -\int_z^\infty \left[\int_0^1 t^{z-1} \sum_0^\infty e^{\sqrt{n}} (1-t)^n t\, dt - \frac{1}{z}\right] dz \tag{44}$$

admitirá como series de aproximación, la que se obtiene integrando término a término la serie (36) que aproxima $F(z)$ que será:

$$(e-1)\, l \frac{z}{z+1} + \left(e^{\sqrt{2}} - e\right) l \frac{z(z+2)}{(z+1)^2} + \left(e^{\sqrt{3}} - e^{\sqrt{2}}\right) l \frac{z(z+2)^3}{(z+1)^3 (z+3)} + \dots \tag{45}$$

y también la correspondiente serie de facultades de Nörlund

$$\sum \frac{\left[-\left(e^{\sqrt{s+1}} - e^{\sqrt{s}}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{s}} - e^{\sqrt{s-1}}\right) + \sum\limits_{\nu=2}^{\nu=s} (-1)^\nu \frac{B_\nu^{(\nu-1)}}{\nu!} \cdot \frac{e^{\sqrt{s-\nu+1}} - e^{\sqrt{s-\nu}}}{\nu-1}\right] s!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+s)} \tag{46}$$

Si consideramos la serie (45), las cotas de aproximación serán:

$$M_n^* = e^{n+1}(n+1)! \cdot K \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)$$

(Teor. IV, Cap. I, pág. 157).

Y como la región en la que se aproxima $F(z)$, es decir, el semiplano $R[z] > \lambda < 1$, es un ejemplo de las que llamábamos de *estructura radial* (Teor. V., Cap. I, pág. 159), la región de validez de la aproximación que consideramos será el mismo semiplano.

En lo referente a la unicidad, fácilmente se demuestra que existe. Pues la condición (16) (Cap. II, pág. 173), equivale a la divergencia

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{e^{n+1}(n+1)!\,K}} = \infty$$

que, evidentemente, se verifica, teniendo en cuenta (41).

Si utilizamos la *serie de facultades* (46), según el Teorema VI (Cap. I, pág. 161), las cotas serán:

$$N_n^* = M_n^* + \left| \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{n}} - e^{\sqrt{n-1}}\right) + \sum_{\nu=2}^{n} (-1)^\nu \frac{B_1^{(\nu-1)}}{\nu!} \cdot \frac{e^{\sqrt{n-\nu+1}} - e^{\sqrt{n-\nu}}}{\nu-1} \right| n! + \varepsilon_n$$

y la región donde vale la aproximación, es la misma que la conseguida empleando la serie (45).

Existe también unicidad; pues aplicando la condición suficiente (18) (Cap. II, pág. 173), se obtiene:

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{n}}-e^{\sqrt{n-1}}\right)+\sum_{\nu=2}^{n}(-1)^{\nu}\frac{B_{\nu}^{(\nu-1)}}{\nu!}\cdot\frac{e^{\sqrt{n-\nu+1}}-e^{\sqrt{n-\nu}}}{\nu-1}\right| n!}{n\,e^{n+1}(n+1)!} \tag{47}$$

y como los coeficientes $\dfrac{B_{\nu}^{(\nu-1)}}{\nu!\,(\nu-1)}$ son todos menores que la unidad (como puede verse en las tablas de estos números (V-a-462)), la fracción anterior será menor que

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{n}}-e^{\sqrt{n-1}}\right)+\sum_{\nu=2}^{n}\left(e^{\sqrt{n-\nu+1}}-e^{\sqrt{n-\nu}}\right)\right| n!}{n\,e^{n+1}(n+1)!}<$$

$$<\frac{\left|\left(e^{\sqrt{n}}-e^{\sqrt{n-1}}\right)+\left(e^{\sqrt{n-1}}-e^{\sqrt{n-2}}\right)+\left(e^{\sqrt{n-2}}-e^{\sqrt{n-3}}\right)\right|+\ldots+(e-1)}{e^{n+1}}\cdot\frac{1}{n\,(n+1)}=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{n}}-1}{e^{n+1}}\cdot\frac{1}{n\,(n+1)}<\frac{1}{n\,(n+1)}$$

y, por tanto, la fracción (47) puede ser menor que un número γ finito e independiente de n. De lo que se deduce la unicidad.

Barcelona, abril, 1954.

BIBLIOGRAFIA

I. BIEBERBACH.
Lehrbuch der Funktionentheorie. — Tomo I. — 1930.

II. CARLEMAN (T.).
Les fonctions quasi-analityques. — Col. Borel. — 1926.

III. KNOPP (K.).
Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. — Col. Spinger. — 1931.

IV. MANDELBROJT (S.).
Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions. — Col. Borel. — 1935.

V. NÖRLUND (N. E.).
a) Differenzenrechnung. — Col. Springer. — 1924.
b) Leçons sur les séries d'interpolation. — Col. Borel. — 1926.

VI. OSTROWSKI (A.).
Uber quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen. — 1929. — Acta Mathematica. — T. 53.

VII. SANSONE (G.)
Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa. — Padova. — C.E.D.A.M. — 1947.

VIII. SAN JUAN (R.).
a) *Algunos desarrollos asintóticos notables.* — Rev. Mat. Hisp.-Amer. — T. XI. — Nos. 1 y 2. — 1951.
b) *Les fondements d'une théorie générale des series divergentes.* — Rev. da Faculdade de Ciencias. — Lisboa. — Vol. II. — Fasc. 1.° — 1951.
c) *Sumación de series divergentes y aproximación asintótica óptima.* — Memoria de la Real Acad. de Ciencias de Madrid. — 1942.
d) *Derivación e integración de series asintóticas.* — Rev. Universidad de Madrid. — T. II. — Fasc. II. — 1942.
e) *Sur le problème de Watson.* — Acta Mathematica. — T. 75. — 1942.
f) *Algunos teoremas sobre derivación de series asintóticas potenciales.* — Collectanea Mathemática. — Vol. V. — Fasc. 3.° — 1952.

IX. SCHMIDT (H.).
Allgemeine asymptotische Darstelungen. — Matematische Annalen. — T. 113. 1937.