APORTACION AL PROBLEMA DE LA PROLONGACION ANALITICA DE LAS SERIES DE LEGENDRE

POR

J. M.ª ORTS

1. En un trabajo publicado en esta misma Revista (COLLECTANEA MATHEMATICA, vol III, fasc. I, año 1950), indicamos un método de sumación de las series $\Sigma\, a_n P_n(x)$ de polinomios de Legendre, basado en el empleo de la fórmula integral

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n P_n(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{x-i\sqrt{1-x^2}}^{x+i\sqrt{1-x^2}} \frac{\Sigma\, a_n z^n}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\, dz \qquad (1)$$

que permite reducir el mencionado problema, al de la sumación de la serie de potencias $\Sigma\, a_n z^n$ qne tiene los mismos coeficientes que aquélla y al subsiguiente cálculo de una integral definida. [a]

Ahora bien ; si se exceptúan los casos particulares en que la determinación de la función definida por la serie $\Sigma\, a_n z^n$ puede lograrse fácilmente, — como ocurre, por ejemplo, en el caso estudiado en el citado trabajo, en que la sucesión (a_n) es de tipo recurrente — se comprende que el procedimiento indicado, bien que da una solución teórica del problema, sea de alcance un tanto restringido cuando se trata de obtener en forma *finita* la suma de la serie de polinomios $\Sigma\, a_n P_n(x)$.

De todos modos, la relación funcional entre $F(z) = \Sigma\, a_n P_n(z)$ y $f(z) = \Sigma\, a_n z^n$, que aquella fórmula integral (1) define, constituye, como vamos a ver, un eficaz instrumento para el estudio de algunas transformaciones de la serie de polinomios $\Sigma\, a_n P_n(z)$ más allá de su elipse

---

[a] Como ya se hizo observar en el citado trabajo, la elipse de convergencia de la serie $\Sigma\, a_n P_n(z)$ viene dada por

$$\text{máx}\ |z \pm i\sqrt{1-z^2}| < \frac{1}{\lambda} \quad \text{siendo} \quad \lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

supuesto existente. De esto se sigue que los límites de la integral (1) pertenecen al campo de convergencia de la serie de potencias $\Sigma\, a_a z^n$ o están situados sobre el contorno del mismo.

convergencia; tema que en el aspecto concreto al que aquí nos referimos, constituye una cuestión conexa, por una parte, con la transformación euleriana de las series de potencias, y por otra con el método de prolongación analítica de éstas últimas mediante su previa representación por integrales definidas, y cuyo ejemplo representativo es el caso de la serie hipergeométrica.

* * *

2. Dada una serie de polinomios de Legendre $\Sigma\, a_n P_n(z)$, cuya elipse de convergencia supondremos que no degenera en el eje focal $(-1, +1)$ [b], y si es $F(z)$ la función — holomorfa en el interior de aquella elipse — que dicha serie define, el cálculo de los coeficientes de la serie de potencias $\Sigma\, b_m z^m$ que representa la función $F(z)$ en el círculo menor de la elipse, es inmediato; pues se tiene:

$$b_m = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z^{m+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Sigma\, a_n P_n(z)}{z^{m+1}}\,dz$$

que, a causa de la convergencia uniforme de la serie $\Sigma'\, a_n P_n(z)$, puede escribirse:

$$b_m = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C \frac{P_n(z)}{z^{m+1}}\,dr = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n^{(m)}$$

siendo:

$$r_n^{(m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P_n(z)}{z^{m+1}}\,dz$$

con lo que la cuestión queda reducida al cálculo de las constantes $r_n^{(m)}$ es decir, al de los residuos de las fracciones racionales $\frac{P_n(z)}{z^{m+1}}$ para cada par de valores de m y n; cálculo que puede efectuarse por recurrencia mediante la fórmula:

$$(n+1)\, r_{n+1}^{(m)} - (2n+1)\, r_n^{(m-1)} + n\, r_{n-1}^{(m)} = 0$$

que se deduce de la que enlaza tres polinomios de Legendre de índices consecutivos:

$$(n+1)\, P_{n+1}(z) - (2n+1)\, z P_n(z) + n\, P_{n-1}(z) = 0$$

[b] Es decir, supondremos que es $\lambda \neq 1$.

dividiendo por z^{m+1} e integrando a lo largo de un contorno cerrado que contenga en su interior el punto $z = 0$. ([c])

Recíprocamente; si se sabe a priori que la serie de potencias $\Sigma\, b_m z^m$ admite como prolongación analítica la serie de polinomios de Legendre $\Sigma\, a_n P_n(z)$, se verificará en el círculo menor de la elipse de convergencia de esta última:

$$\Sigma\, a_n P_n(z) = \Sigma\, b_m z^m$$

y en particular, sobre el diámetro de ese círculo que coincide con el eje real:

$$\Sigma\, a_n P_n(x) = \Sigma\, b_m x^m \tag{2}$$

Por tanto, y suponiendo que los focos $(-1, +1)$ de la elipse de convergencia de $\Sigma\, a_n P_n(z)$ queden interiores al círculo menor de dicha elipse, ([d]) y que la variable z es real y toma los valores de aquel intervalo, al multiplicar los dos miembros de (2) por $P_n(x)$ e integrar entre -1 y $+1$ se tendrá:

$$a_n = \frac{2}{2n+1}\int_{-1}^{+1} (\Sigma\, b_m x^m)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{\infty} b_m\, \mu_m^{(n)} \tag{3}$$

habiendo puesto para abreviar:

$$\mu_m^{(n)} = \int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\, dx$$

quedando la cuestión reducida al cálculo de los «momentos» sucesivos de los polinomios $P_n(x)$ y cuyos valores vienen dadas por: ([e])

$$\mu_m^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{2\,m!}{(m-n)!!\,(m+n+1)!!}, & \text{si} \quad m-n \text{ es par y } m \geq n \\ 0 & \text{si} \quad m-n \text{ es impar.} \end{cases}$$

([c]) Obsérvese que para $n < m$ es $r_n^{(m)} = 0$.

([d]) Ello exige, como se ve inmediatamente, que la razón $\frac{a}{b}$ entre los semiejes de la elipse de convergencia sea inferior a $\sqrt{2}$. Y como es

$$a = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left|\lambda - \frac{1}{\lambda}\right|$$

tal condición implica que sea:

$$\lambda > \sqrt{2} + 1 \quad \text{si es} \quad \lambda > 1$$
$$\lambda < \sqrt{2} - 1 \quad \text{si es} \quad \lambda < 1.$$

([e]) Véase, por ejemplo, VITALI - SANSONE: Moderna teoria delle funzioni di variabile reale. Parte 2.ª, pág. 173 - 174.

3. Es sabido que el método euleriano de transformación de series de potencias se basa en el empleo de substitución lineal $x = \frac{y}{1-y}$ que aplicada a la serie $\Sigma\, a_n x^n$ la convierte en $\Sigma\, a_n \left(\frac{y}{1-y}\right)^n$, la que a su vez puede transformarse en otra en serie de potencias de $y : \Sigma\, a'_n\,(2\,y)^n$ cuyos coeficientes (a'_n) están ligados a los (a_n) de la primitiva, por las relaciones ([7])

$$a'_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \ldots + \binom{n}{n} a_n\right] \qquad (4)$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Al tratar de extender esta transformación a las series de polinomios de Legendre $\Sigma\, a_n P_n(x)$, parece lógico y natural proceder del modo siguiente: comenzar transformando la serie dada en otra de potencias $\Sigma'\, b_m x^m$ cuyos coeficientes pueden calcularse según el método indicado en el n.º 2; aplicar a esta serie la substitución $x = \frac{y}{1-y}$ $\Big($fase que constituye la prolongación analítica en el semiplano $|y| < \frac{1}{2}\Big)$; hallando luego su transformada en potencias de y: $\Sigma\, b'_m y^m$; de la cual, y siguiendo el proceso inverso, deducir la correspondiente serie de polinomios $\Sigma\, a'_n P_n(y)$ aplicando las relaciones (3); serie esta última que puede considerarse como la transformada de la primera $\Sigma'\, a_n P_n(x)$ por el método Euler, es decir, por la substitución lineal $x = \frac{y}{1-y}$.

Las diferentes etapas de este proceso pueden sintetizarse, como vamos a ver, mediante el empleo de la fórmula integral (1), siguiendo método similar al que se emplea para la prolongación analítica de la serie hipergeométrica ([8]); mas antes conviene una observación preliminar acerca de la función generatriz de los polinomios $P_n(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n \qquad (5)$$

en la cual supondremos que ambas variables x y z son, en general, complejas.

([7]) Knopp: Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen. Pág. 468.
([8]) Goursat: Cours d'Analyse Mathématique. Pág. 249.

Al desarrollar esa función en serie de potencias de x se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left[1-\frac{2z}{1+z^2}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{2z}{1+z^2}\right)^n x^n \tag{6}$$

y así como para cada valor de z el segundo miembro de (5) converge en el interior de la elipse de focos $(-1, +1)$ y semieje mayor $\frac{1}{2}\left(|z| + \frac{1}{|z|}\right)$, una vez fijado x, la serie (6) tendrá como recinto de convergencia el limitado por la curva definida por la ecuación

$$\left|\frac{1+z^2}{2z}\right| = r$$

siendo $r = |x|$ (h).

Si hacemos $z = \varrho e^{\theta i}$, de la ecuación anterior se deduce:

$$\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)^2 \cos^2\theta + \left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta = 4r^2$$

que resulta respecto a ϱ da

$$\varrho = \sqrt{r^2 + \operatorname{sen}^2\theta} \pm \sqrt{r^2 - \cos^2\theta} \tag{7}$$

ecuación polar de la curva que limita el campo de convergencia de la serie (6); curva de cuarto orden que pertenece a la familia de las espíricas de Perseo, constituída por dos curvas cerradas, una interior a otra, o exteriores entre sí, según sea $r > 1$ o $r < 1$, y que degenera en un sistema de dos circunferencias que se cortan en los puntos ± 1 cuando es $r = 1$ (i).

Ahora bien; al efectuar la substitución lineal

$$x = \frac{1-y}{1+y} \tag{8}$$

(h) La distinta estructura de los recintos de convergencia de los desarrollos (5) y (6) de la función generatriz de los polinomios de Legendre constituye un simple caso particular de las propiedades generales de las denominadas series *sintagmáticas*. (Véase Borel: Leçons sur les séries a termes positifs. Pág. 89.

(i) Gomes Teixeira: Tratado de las curvas especiales notables. Pág. 105.

— que ofrece sobre la $x = \frac{y}{1-y}$ la ventaja de ser simétrica respecto las variables (x, y) (¹) — , se obtiene:

$$1 - 2xz + z^2 = 1 - 2\frac{1-y}{1+y}z + z^2 = \frac{1}{1+y}\left[(1+y)(1+z^2) - 2(1-y)z\right] =$$
$$= \frac{1}{1+y}\left[(1-z)^2 + y(1+z)^2\right] = \frac{(1-z)^2}{1+y}\left[1 + y\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right]$$

expresión que mediante la transformación, (asimismo simétrica):

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -\frac{2u}{1+u^2} \tag{9}$$

da:

$$1 - 2xz + z^2 = \frac{(1-z)^2}{1+y}\left[1 - 2\frac{yu}{1+u^2}\right] = \frac{(1-z)^2}{(1+y)(1+u^2)}\left[1 - 2yu + u^2\right]$$

Con ello resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \frac{\sqrt{1+y}\,\sqrt{1+u^2}}{1-z}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2yu + u^2}}$$

es decir:

$$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,z^n = \sqrt{1+y}\,\sqrt{1+u^2}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(y)\,u^n \tag{10}$$

fórmula que enlaza la serie de polinomios de Legendre:

$$\sum_0^{\infty} P_n(x)\,z^n = \sum_0^{\infty} P_n\left(\frac{1-y}{1+y}\right) z^n$$

con la $\Sigma P_n(y)\,u^n$, y cuya validez tiene lugar en la región común al recinto limitado por la elipse de convergencia de la primera y a su transformado por la substitución lineal (8), con tal que los valores de z y u se correspondan por la relación (9).

Para obtener aquel recinto transformado, observemos que los valores complejos que corresponden a los puntos de la elipse, cuando se

(¹) Por lo demás, la nueva substitución $x = \frac{1-y}{1+y}$ se deduce de la $x = \frac{y}{1-y}$ cambiando simplemente en esta última y en $\frac{1}{2}(1-y)$.

toma el foco izquierdo como origen de coordenadas polares, vienen dados por:

$$x + 1 = \varrho\, e^{\theta i} = \frac{p}{1 - e \cos \theta}\, e^{\theta i}, \qquad \left(p = \frac{b^2}{a}\right)$$

de donde, y teniendo en cuenta $x + 1 = \dfrac{2}{y + 1}$ resulta:

$$|y + 1| = \frac{2}{p}(1 - e \cos \theta)$$

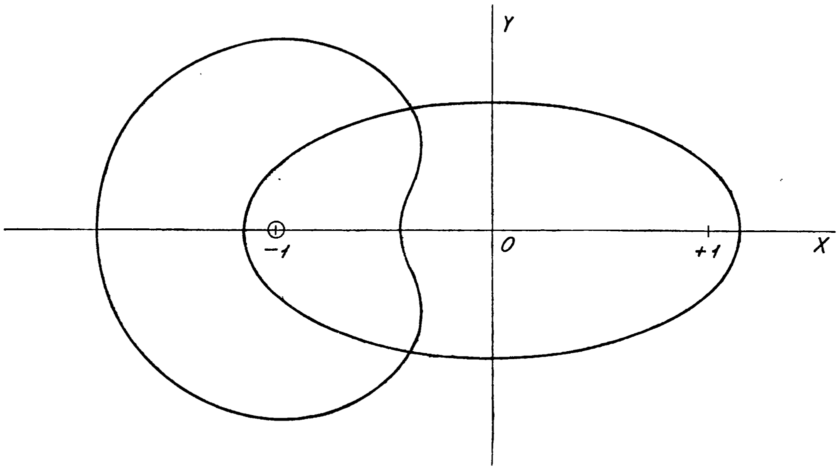

FIG. 1

que haciendo $|y + 1| = \varrho_1$, da como ecuación polar de la curva transformada:

$$\varrho_1 = \frac{2}{p}(1 - e \cos \theta)$$

la cual representa un caracol de Pascal con punto aislado, el $y = 1$ (⁴). Y como la transformación (8) hace corresponder al punto $x = -1$ el $y = \infty$, se deduce que la región interior a la elipse tiene como transformada la región del plano complejo exterior al caracol de Pascal, cuyos puntos de intersección con el eje real, que corresponden a los vertices $(-a, +a)$ de la elipse, son respectivamente $\dfrac{1 + a}{1 - a}$ y $\dfrac{1 - a}{1 + a}$, valores ambos ne-

(⁴) Véase el tratado de Gomes Teixera antes citado (pág. 145) o bien Loria: «Curve plane speciali algebriche e trascendenti». Vol. I. Pág. 175.

gativos (por ser $a > 1$). Por tanto; el superponer los dos planos (x) e (y), de modo que coincidan los ejes, el centro de la elipse de convergencia de $\Sigma\, P_n(y)\, z^n$ quedará situado en la región externa del caracol de Pascal, es decir, en el dominio de convergencia de la serie $\Sigma'\, P_n(y)\, u^n$, y como en un cierto entorno de dicho punto esos dos desarrollos $\Sigma\, P_n(x)\, z^n$ y $\Sigma\, P_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right) u^n$ coinciden, — salvo los factores finitos que aparecen en los dos miembros de la igualdad (10) —, la segunda de esas dos series, constituye la prolongación analítica de la primera en la región determinada por el caracol de Pascal que contiene el punto del infinito.

* * *

4. Consideremos ahora el caso general de una serie de polinomios de Legendre $\Sigma\, a_n P_n(z)$ de coeficientes cualesquiera (a_n), reales o complejos, y examinemos el efecto que sobre ella produce — a través de la fórmula integral (1) — la aplicación de la substitución (8).

Para ello y procediendo como antes, transformemos simultáneamente las variables (x, z) en las (y, u) mediante las fórmulas (8) y (9), con lo que la función generatriz $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ toma la forma (10). Y como por diferenciación en (9) resulta:

$$2\,\frac{1+z}{(1-z)^3}\, dz = -\,\frac{1-u^2}{(1+u^2)^3}\, du$$

al expresar z en función de u deducida de (9), se obtendrá: $dz = \varphi(u)\, du$ siendo $\varphi(u)$ una función *conocida*, y por tanto se tendrá:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sqrt{1+y}\,\frac{\varphi_1(u)\, du}{\sqrt{1-2yu+u^2}}$$

donde $\varphi_1(u)$ es otra función asimismo *conocida*.

Para hallar la transformada de la serie de potencias $\Sigma\, a_n z^n$ mediante el cambio de variable (9), observemos que éste puede escribirse así:

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2}{1+\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2} \tag{11}$$

igualdad que pone en evidencia el carácter simétrico de dicha transformación, la cual define una involución entre las variables

$$z_1 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad u_1 = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2$$

Conocida la función correspondiente a la serie de potencias $\Sigma\, a_n z^n$, al cambiar z en $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$, y aplicar la transformación (11), se obtendrá una nueva función $f_1(u)$; y como por otra parte, al substituir las variables (x, z) por (y, u), los primitivos límites de integración

$$\alpha = x - i\sqrt{1-x^2}, \qquad \beta = x + i\sqrt{1-x^2}$$

se transforman, (como puede comprobarse fácilmente), [1] en

$$\alpha_1 = y - i\sqrt{1-y^2}, \qquad \beta_1 = y + i\sqrt{1-y^2}$$

resulta en definitiva, que al efectuar las transformaciones indicadas, se obtendrá una igualdad de la forma

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(z)}{\sqrt{1-2xz+z^2}}\,dz = \sqrt{1+y}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{F(u)}{\sqrt{1-2yu+u^2}}\,du \qquad (12)$$

siendo $F(u)$ una función conocida, cuyo desarrollo en serie de potencias $\Sigma\, A_n u^n$ podrá calcularse a partir de los de $f_1(u)$ y $\varphi_1(u)$. Al substituir en (12) y efectuar la integración término a término el segundo miembro dará origen a una serie de polinomios de Legendre $\Sigma\, a'_n P_n(y)$ que, a menos del factor $\sqrt{1+y}$, constituye la transformada de la $\Sigma\, a_n P_n(x) = \Sigma\, a_n P_n\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$.

* * *

5. Independientemente del método sintético que acabamos de exponer, basado en el empleo de la fórmula integral de los polinomios $P_n(x)$, que conduce a la solución del problema planteado, la transformación de la serie $\Sigma\, a_n P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en otra $\Sigma\, a'_n P_n(x)$ a través de una serie de potencias $\Sigma\, b_m x^m$ como paso intermedio, puede también lograrse

[1] Ello es consecuencia de las transformaciones (8) y (9).

por otro camino que permite llegar a la expresión efectiva de los coeficientes (a'_n) en función de los (a_n).

Para ello partiremos de la fórmula :

$$P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 x^k \tag{13}$$

cuya justificación es inmediata apoyándose en la expresión diferencial de los polinomios $P_n(x)$. (^{m})

Pero como para $|x|<1$ es :

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{n-1}x^m$$

se tendrá :

$$P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{m=}^{\infty} b_m^{(n)} x^m$$

fórmula en la que los coeficientes $b_m^{(n)}$ vienen expresados por :

$$\left.\begin{aligned}
b_0^{(n)} &= \binom{n}{0}^2\binom{n-1}{n-1}\\
b_1^{(n)} &= \binom{n}{0}^2\binom{n}{n-1}+\binom{n}{1}^2\binom{n-1}{n-1}\\
b_2^{(n)} &= \binom{n}{0}^2\binom{n+1}{n-1}+\binom{n}{1}^2\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}^2\binom{n-1}{n-1}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
b_n^{(n)} &= \binom{n}{0}^2\binom{2n-1}{n-1}+\binom{n}{1}^2\binom{2n-2}{n-1}+\dots+\binom{n}{n}^2\binom{n-1}{n-1}\\
&\text{y, en general para } m>n:\\
b_m^{(n)} &= \binom{n}{0}^2\binom{n+m-1}{n-1}+\binom{n}{1}^2\binom{n+m-2}{n-1}+\dots+\binom{n}{n}^2\binom{m-1}{m-1}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(^{m}) Véase por ej. Pólya - Saegö « Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis ». Bd. II, pags. 92 y 288. Obsérvese que dicha fórmula (13) puede escribirse en la forma:

$$(1-x)^n P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 x^k \tag{α}$$

Por tanto ; dada la serie $\Sigma\, a_n P_n(x)$, al cambiar x en $\dfrac{1+x}{1-x}$ y reemplazar cada uno de los términos por su correspondiente desarrollo en serie de potencias, se obtendrá una serie de series, cada una de las cuales converge en el interior del círculo unidad. Y como la serie doble así obtenida es absolutamente convergente (^{n}), se podrá efectuar la suma por columnas, con lo cual resultará una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ cuyos coeficientes c_n, serán funciones lineales de los primitivos (a_n), a saber :

$$c_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_0^{(n)} a_n, \qquad c_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_1^{(n)} a_n, \qquad c_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_2^{(n)} a_n, \ldots$$

con coeficientes $b_k^{(n)}$ dados por las fórmulas (14)

Obtenida la serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$, el cálculo de los coeficientes a_n' de la serie de los polinomios $\Sigma\, a_n' P_n(x)$ que coincide con ella en el intervalo $(-1, +1)$ es inmediato, sin más que aplicar el procedimiento indicado en el n.º 2.

* * *

6. La substitución lineal $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ anteriormente considerada resulta como caso particular de la $y = \dfrac{\alpha - x}{\alpha + x}$, cuando es $\alpha = 1$.

Especial interés ofrece por lo que se refiere a la transformación de la serie $\Sigma\, a_n P_n(x)$ siguiendo el método indicado en el párrafo anterior, el caso en que $\alpha = a$, siendo a el semieje mayor de la elipse de con-

---

cuyo segundo miembro puede considerarse como el polinomio que resulta de la composición a lo Hadamard de:

$$(1+x)^n = \Sigma \binom{n}{k} x^k$$

por sí mismo. Y si dividimos los dos miembros de (α) por 2^n queda:

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^n P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\sum_0^n \binom{n}{k}^2 x^k}{\sum_0^n \binom{n}{k}}$$

con lo que se obtiene un promedio ponderado de los términos del desarrollo de $(1+x)^n$ a los que se aplican pesos iguales a sus coeficientes respectivos.

(^{n}) La convergencia absoluta de la serie doble puede considerarse como consecuencia de la de la serie $\Sigma\, a_n P_n(x)$ en todo punto interior a su correspondiente elipse de convergencia. (Véase Sansone : « Equazioni differenziali nel campo reale ». Pág. 151).

vergencia, la cual por la transformación $y = \dfrac{a - x}{a + x}$ se convierte en la cúbica circular definida por la ecuación :

$$V^2 = b^2 \frac{X(X+1)^2}{1 - b^2 X} \qquad (b^2 = 1 - a^2) \tag{15}$$

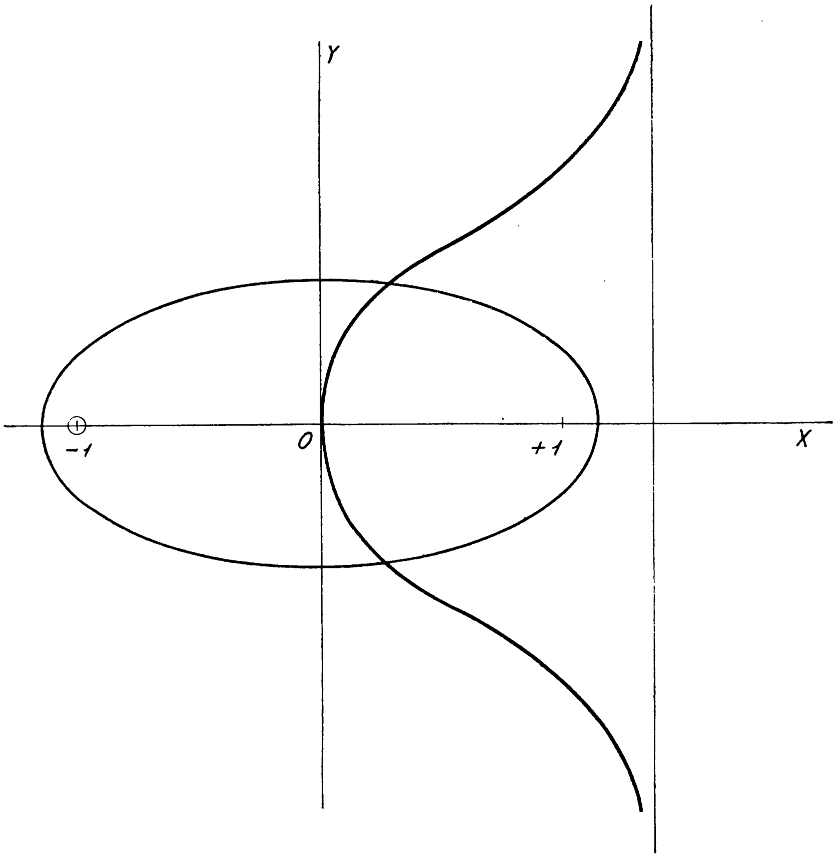

Fig. 2

que es una *conchoide de Sluse* con el punto doble (aislado) $X = -1$ y asintota paralela al eje $Y : X = \dfrac{1}{b^2}$ (°).

Como para valores reales de x en el intervalo $(+a, -a)$ la transformación $y = \dfrac{a - x}{a + x}$ da para y valores asimismo reales comprendidos

(°) Gomes Teixeira, loc. cit. pag. 16.

entre 0 e ∞, se infiere que la región interior de la elipse, se transforma en la parte infinita del plano complejo determinada por la cúbica que contiene el semieje real positivo. En particular, el círculo de curvatura de la elipse, correspondiente al vértice $-a$ se transforma en el semiplano situado a la derecha de la asintota.

La función definida por la serie de polinomios $\Sigma\, a_n P_n(x)$ admite en el mencionado círculo un desarrollo en series de potencias $\Sigma\, \lambda_m (x+\alpha)^m$ siendo $\alpha = \frac{1}{a}$, cuya prolongación analítica válida — a lo menos — en la elipse es precisamente la serie de polinomios primitiva.

Al aplicar la substitución lineal $y = \frac{a-x}{a+x}$, es decir, al cambiar x en $a\,\frac{1-y}{1+y}$ las respectivas series transformadas de aquellas

$$\Sigma\, a_n P_n\left(a\,\frac{1-y}{1+y}\right) \qquad \text{y} \qquad \Sigma\, \lambda_m \left[a\,\frac{1-y}{1+y} + \alpha\right]^m$$

son válidas en las regiones determinadas por la cúbica y el semiplano respectivamente, pudiendo considerarse la primera de ellas como prolongación analítica de la segunda en la región comprendida entre la curva y su asintota.

* * *

7. Las consideraciones precedentes son asimismo aplicables a las series de polinomios de Tchebycheff :

$$T_m(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^m + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^m\right] \tag{16}$$

para lo cual, bastaría, seguir un método análogo partiendo de la fórmula integral de dichos polinomios (^{p}). Mas la repetición del proceso puede

(^{p}) La expresión integral de los polinomios $T_n(x)$ de Tchebycheff, puede deducirse rápidamente aplicando de la conocida fórmula de la teoría de residuos :

$$\int_{C_1} \varphi(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\,\pi\, i\,[\Sigma\,\varphi(a) - \Sigma\,\varphi(b)]$$

al caso particular en que $\varphi(z) = z^n$ tomando como $f(z)$ la función generatriz de dichos polinomios ;

$$f(z) = \frac{1-2\,x z}{1-2\,x z + z^2}$$

evitarse mediante la previa transformación de la serie dada $\Sigma\, A_m\, T_m(x)$ en otra $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$, tal que en la elipse de convergencia común a ambas se verifique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, P_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m\, T_m(x) \tag{17}$$

quedando la cuestión reducida a determinación de los coeficientes a_n en función de los A_m y a la ulterior transformación euleriana de la serie $\Sigma\, a_n\, P_n(x)$, por el procedimiento indicado.

El cálculo de los coeficientes (a_n) puede efectuarse mediante las fórmulas :

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m\, T_m(x) \right\} P_n(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

que se deducen multiplicando los dos miembros de (17) por $P_n(x)$ e integrando entre los límites $(-1, +1)$, supuesta la variable x real y comprendida en dicho intervalo ; de este modo, y a causa de la convergencia uniforme de la serie $\Sigma\, A_m\, T_m(x)$, resulta :

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m\, I_{m,n} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, ...)$$

siendo

$$I_{m,n} = \int_{-1}^{+1} T_m(x)\, P_n(x)\, dx \qquad (m, n = 0, 1, 2, ...)$$

con lo que el problema puede considerarse resuelto.

También en el caso de los polinomios $T_m(x)$, la aplicación de la substitución lineal $y = \dfrac{1+x}{1-x}$ a la serie $\Sigma\, A_m\, T_m(x)$, puede estudiarse siguiendo camino análogo al indicado en el n.º 5 para los polinomios $P_n(x)$, partiendo de la fórmula.

$$T_m\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m}{2k} x^k$$

la cual resulta inmediatamente reemplazando x por $\dfrac{1+x}{1-x}$ en la expresión (16) de los polinomios $T_m(x)$.

NOTA ADICIONAL

Sobre la transformación de una serie de polinomios de Tchebychef $\Sigma A_n T_n(z)$ en otra de polinomios de Legendre $\Sigma a_n P_n(z)$.

Según se ha indicado en el párrafo n.º 7, dada una serie de polinomios de Tchebychef $\Sigma A_n T_n(z)$, los coeficientes (a_n) de la serie de polinomios de Legendre $\Sigma a_n P_n(z)$ que verifica la igualdad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m T_m(z)$$

vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} A_m I_{m,n}$$

siendo

$$I_{m,n} = \int_{-1}^{+1} T_m(x) P_n(x)\, dx. \tag{a}$$

Interesa observar que el cálculo efectivo de las integrales $I_{m,n}$, puede simplificarse, teniendo en cuenta que así como los polinomios $P_n(x)$ se expresan con funciones lineales y homogéneas de los $T_0(x)$, $T_1(x)$, ... $T_n(x)$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{k=\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_n^{(k)} T_{n-2k}(x), \qquad \text{siendo} \qquad \alpha_n^{(k)} = (-1)^n 2 \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{k-n}$$

también los $T_m(x)$ pueden expresarse como funciones lineales y homogéneas de los $P_0(x)$, $P_1(x)$, ... $P_m(x)$, a saber:

$$T_m(x) = \Sigma\, \beta_n^{(k)} P_n(x) \tag{b}$$

cuyos coeficientes $\beta_n^{(k)}$ se deducen inmediatamente de los (a_n) mediante un proceso de eliminaciones sucesivas.

Ahora bien; a los efectos del cálculo de los coeficientes (a_n) en función de los A_n, interesa únicamente hallar los $\beta_m^{(m)}$. Pues si se substituye en (a) el polinomio $T_m(x)$ por su expresión (b), y se tiene en cuenta que

$$\int_{-1}^{+1} P_r(x)\, P_s(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \neq s \\ \dfrac{2}{2r+1} & \text{si} \quad r = s \end{cases}$$

resulta :

$$I_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m < n \\ \dfrac{2}{2m+1}\, \beta_m^{(m)} & \text{si} \quad m \geqslant n \end{cases}$$

y, por tanto :

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1}\, \beta_m^{(m)}\, A_m \tag{c}$$

en cuyo segundo miembro no aparecen más que los coeficientes $\beta_m^{(m)}$.

El cálculo de dichos coeficientes es inmediato ; basta substituir en el segundo miembro de (*b*), cada uno de los polinomios $P_n(x)$ por su expresión respectiva en función de los $T_k(x)$, con lo que al identificar los coeficientes de los polinomios de mayor grado, es decir, de los $T_m(x)$, en ambos miembros, se obtiene :

$$1 = \alpha_m^{(0)}\, \beta_m^{(m)} \qquad \text{de donde :} \qquad \beta_m^{(m)} = \frac{1}{\alpha_m^{(0)}}$$

y como

$$\alpha_m^{(0)} = (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m},$$

se tendrá :

$$\beta_m^{(m)} = (-1)^m \frac{1}{\dbinom{-\frac{1}{2}}{m}} = \frac{1}{2}\, \frac{2.\ 4.\ 6 \ldots (2m-2)}{1.\ 3.\ 5 \ldots (2m-1)}$$

con lo cual resulta en definitiva :

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2.\ 4.\ 6 \ldots (2m)}{1.\ 3.\ 5 \ldots (2m+1)}\, A_m$$

fórmula que da los coeficientes (a_n) en función de los A_m que se suponen conocidos.