CONSERVACION DE MASA MATERIAL EN EL PROCESO DE EXPANSION DEL UNIVERSO

por

JOAQUIN OLIVERT PELLICER

1. — INTRODUCCION

En el estado actual de la Cosmología, se admite, como más probable, el modelo de Friedmann, el cual describe un universo cerrado, finito y en expansión hasta alcanzar un cierto radio máximo y, luego de haberlo conseguido, predice el proceso inverso, es decir una contracción del mismo, que debe de conducirlo a colapsar. En este modelo, se supone la constante cosmológica nula.

Uno de los mayores enigmas, que sigue planteado en la ciencia cosmológica actual, es la descripción del universo en los momentos iniciales de su formación; pues sabido es que las ecuaciones de campo, con que se rige la evolución cósmica, presentan singularidades cuando su radio tiende a cero, LANDAU y LIFSHITZ (1). Pese a ello, ha sido desarrollado un modelo adicional para poder explicar los instantes iniciales de su evolución: teoría de la Gran Explosión (standard hot big-bang model), ZEL'DOVICH y NOVIKOV (4).

Veamos brevemente en que consiste el modelo de Friedmann:

Se fundamenta en el principio cosmológico perfecto, lo que admite homogeneidad e isotropía en el espacio. El esquema material que constituye el espacio-tiempo es el de «fluidos perfectos», por lo que el tensor impulso-energía toma la expresión

$$T = \left(\varrho + \frac{p}{c^2}\right) U \otimes U + pg,$$

siendo ϱ la densidad de masa-energía, U el campo cuadrivector velocidad del fluido perfecto asociado al universo, p su presión, g el campo tensorial métrico, Además, la densidad de masa-energía (propia) se toma como suma de la densidad debida a la materia ϱ_m, y la densidad debida a la radiación ϱ_r. La evolución de ambas densidades obedecen a

$$\varrho_m = \varrho_{m_0} \frac{a_0^3}{a^3(t)}$$

$$\varrho_r = \varrho_{r_0} \frac{a_0^4}{a^4(t)}$$

siendo ϱ_{m_0}, ϱ_{r_0}, a_0 la densidad de materia, de radiación y el factor de expansión en el momento actual respectivamente; $a(t)$ expresa el factor de expansión en función del tiempo cósmico t (3), pág. 727.

De la simple inspección de estas expresiones, observamos que para t próximo a cero

$$\varrho_r > \varrho_m$$

y a medida que aumenta t aumenta llega invertirse la desigualdad.

En el primer caso diremos que el universo estará dominado por radiación; y en el segundo, se dice que está dominado por materia: universo de radiación y universo de materia respectivamente.

Es, por consiguiente, el universo de Friedmann un universo de materia en que se ha despreciado la presión y la densidad de radiación; y el modelo de la gran explosión se fundamenta en un universo de radiación, en él se admite como presión la producida por la radiación.

Como hipótesis adicional, se admite la conversación de la materia (3).

Nuestro objetivo en el presente artículo es demostrar, por consideraciones termodinámicas aplicadas a las ecuaciones de Einstein, la consevación de materia en el proceso de expansión (o en el supuesto de contracción) de universos de curvatura positiva, como es el caso del universo de Friedmann.

2. — EL UNIVERSO COMO SISTEMA TERMODINAMICO

Las ecuaciones relativistas que rigen la evolución del universo son (3):

$$-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2} = Xp \qquad (2.1)$$

y

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{1}{a^2} = Xc^2\varrho \qquad (2.2)$$

donde X es la constante cosmológica. Observemos que hemos tomado para la curvatura seccional $k = 1$, en virtud de que el espacio es considerado de curvatura positiva.

Derivemos la (2.2) y sumemos a la (2.1), con lo que resulta

$$X(c^2 \varrho + p) = -\frac{X c^2 \dot{\varrho} a}{3 \dot{a}}$$

y a partir de la misma

$$3 \varrho a^2 \dot{a} + \dot{\varrho} a^3 = -\frac{p}{c^2} \dot{a}^3$$

es decir

$$\frac{d}{dt}(c^2 \varrho a^3) + p \frac{da^3}{dt} = 0 \tag{2.3}$$

Por otra parte, la métrica de Robertson-Walker para universos cerrados ($k = 1$) es (2)

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + sen^2 \chi (d\theta^2 + sen^2 \theta \, d\psi^2)] - c^2 dt^2$$

y de la misma obtenemos la métrica espacial

$$d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + sen^2 \chi (d\theta^2 + sen^2 \theta \, d\psi^2)]$$

de donde el determinante de la métrica citada es

$$\gamma = a^6 \, sen^4 \chi \, sen^2 \theta$$

Sabido esto, el volumen (propio) del universo se deduce fácilmente

$$V^0 = \int_V \sqrt{\gamma} \, d\chi \, d\theta \, d\psi = 2 \pi^2 a^3$$

Multiplicando la (2.3) por $2\pi^2$, y en virtud de este último resultado,

$$\frac{d}{dt}(c^2 \varrho V^0) + p \frac{d}{dt} V^0 = 0 \tag{2.4}$$

Ahora bien, al descomponerse ϱ en dos sumandos

$$\varrho = \varrho_m + \varrho_r$$

tenemos que

$$\varrho_m V^0 = m^0$$

y

$$c^2 \varrho_r V^0 = E^0$$

es decir

$$c^2 \varrho V^0 = c^2 m^0 + E^0$$

Esta última expresión nos sugiere que el universo puede ser considerado como un fluido termodinámico, si interpretamos m^0 como la masa material del mismo, y E^0 su energía interna (5). La (2.4) toma la expresión

$$d\,(c^2\,m^0 + E^0) + p\,dV^0 = 0 \tag{2.5}$$

con tal de considerar que las variaciones se verifiquen en el tiempo cósmico t.

Tengamos presente la difinición de entalpia (5)

$$I = E^0 + pV^0$$

por lo que la (2.3) toma la forma

$$d\,(c^2\,m^0 + I) - V^0\,dp = 0 \tag{2.6}$$

En el citado artículo (5), se establece la ecuación de los procesos termodinámicos reversibles

$$T^0\,ds = d\,(m^0\,c^2 + I) - V^0\,dp \tag{2.7}$$

donde T^0, S son la temperatura global y la entropía respectivamente.

Comparando la (2.6) con la (2,7), hemos de concluir que

$$d\,S = 0$$

es decir

«El proceso de expansión es reversible y se realiza a entropía constante»

Para demostrar que la masa material se conserva en la expansión, basta tener presente el teorema demostrado en (5), el cual nos afirma que dicha masa se conserva en los procesos iscentrópicos.

REFERENCIAS

(1) Landau y Lifshitz: «*Teoría clásica de campos*» Reverté S. A. Barcelona (1966).

(2) Mavridès: «*L'Univers Relativiste*» Masson et Cie. Paris (1973).

(3) Misner, Thorne, Wheeler: «*Gravitation*» Freemam and Company. San Francisco (1973).

(4) Zel'dovich y Novikov: «*Relativistic Astrophisic, Vol. II: The Universe and Relativity*» Univ.of Chicago Press. Chicago (1974).

(5) Olivert: *Estudio relativista de un fluido perfecto termodinámico de masa material variable en procesos reversibles*» Coll. Math. 27, 167 (1976).