

GRUNDMANNIGFALTIGKEITEN DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE (*)

VON WERNER BURAU IN HAMBURG

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Páginas</u>
V. <i>N</i> - Mannigfaltigkeiten.	
21. Grundeigenschaften der Nullkorrelationen	127
22. Aufbau der <i>N</i> - Mannigfaltigkeiten	135
23. Weiteres über die <i>N</i> - Mannigfaltigkeiten, speziell ihre Dualitätseigenschaften	149
VI. <i>Relationensysteme und stereographische Projektion der Grund- mannigfaltigkeiten.</i>	
24. Allgemeine Bemerkungen über die Relationensysteme der Mannigfaltigkeiten	160
25. Relationen der <i>V</i> - Mannigfaltigkeiten	168
a. Quadratische Relationen der C^3	168
b. » » der V_2^2	169
c. » » der V_3^2 und allgemeiner der V_n^2	172
d. Quadratische Relationen der V_2^3	175
e. Kubische Relationen der V_2^2 und Studysche C^2 - Mannigfaltigkeit	177

(*) Vgl. dazu *Collectanea Mathematica* Vol. III, Fasc. 2 (1950) pág. 53 - 163,
und Vol. V (1952) 3 - 118.

	<u>Páginas</u>
26. Quadratische Relationen der S - Mannigfaltigkeiten ...	181
a. Quadratische Relationen der $S_{m;1}$	181
b. » » der rationalen Normkurven	183
c. » » der $S_{m;n}$	187
27. Quadratische Relationen der Grassmann - Mannigfaltigkeiten	191
a. Quadratische Relationen der $G_{n;1}$	196
b. » » der allgemeineren $G_{n;k}$..	198
28. Quadratische Relationen der M_q - Mannigfaltigkeiten.	202
29. Gesamtschau aller Grundmannigfaltigkeiten, besonders hinsichtlich ihrer stereographischen Projektion	210
a. Stereographische Projektion der V_n^k	213
b. » » der $S_{m;n}$	214
c. » » der $G_{n;k}$	215
d. » » der M_q	215
e. » » der N - Mannigfaltigkeiten	219

TEIL V

NULLSYSTEMSMANNIGFALTIGKEITEN
(oder N -MANNIGFALTIGKEITEN)

21. GRUNDEIGENSCHAFTEN DER NULLKORRELATIONEN

Die 3 grossen Typen einfacher Gruppen sind bekanntlich, wenn man von den Ausnahmefällen absieht, die allgemeine projektive, die Dreh- und die Komplexgruppe, neuerdings auch symplektische Gruppe genannt. Mit den allgemeinen projektiven Gruppen waren bei uns die Veroneseschen und Grassmannschen Mannigfaltigkeiten, mit den Drehgruppen die M_0 -Mannigfaltigkeiten eng verknüpft; denn wie wir in den vorherigen Teilen sahen, gestatteten diese Gebilde jeweils Transformationen in sich, die Darstellungen obiger Gruppentypen lieferten. Die Transformationen der Segremannigfaltigkeiten waren als direkte Produkte keine einfachen Gruppen mehr. Nun fehlt uns noch eine zu den symplektischen Gruppen gehörige Mannigfaltigkeitsklasse. Wir werden sie in den sog. N -Mannigfaltigkeiten finden, deren Punkte die autopolaren Räume eines Nullsystems abbilden. Bevor wir uns ihnen jedoch zuwenden, sei in diesem einleitenden Kapitel einiges Bekannte aus der Theorie der Nullsysteme zusammengestellt, was wir im folgenden brauchen werden.

Wir erinnern an die leicht einsichtige Tatsache, dass die durch Nullsetzen einer Bilinearform :

$$(1) \quad \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_i x_j' = 0$$

definierte Projektivität des S_n auf sich dann und nur dann involutorisch ist, wenn die Matrix (a_{ij}) symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist. Im symmetrischen Fall ist (1) die Polarität bezüglich einer Quadrik des S_n , was im vorigen Teil ausführlich behandelt worden ist. Wir wenden uns nunmehr dem schiefsymmetrischen Fall zu; dann definiert (1) die involutorische Korrelation bezgl. eines Nullsystems, wofür wir auch kurz *Nullkorrelation* sagen wollen. Im Falle schiefer Symmetrie hat die Bilinearform (1) die Gestalt :

$$(2) \quad \sum_{i,j=0}^n a_{ij} (x_i x_j' - x_j x_i') = 0$$

Fragt man andererseits nach den Korrelationen, bei denen Punkt und zugeordnete Hyperebene stets inzidieren, so führt dies ebenfalls auf eine Bilinearform der Gestalt (2). Führt man Plückerkoordinaten für die Verbindungsgeraden korrelativ entsprechender Punkte ein, so entsteht aus (2):

$$(3) \quad \sum_{i,j=0}^n a_{ij} p_{ij} = 0,$$

d. h. die Gleichung eines allgemeinen Geradenkomplexes des S_n . Im Teil III, Abschnitt 14 haben wir uns von der Seite der Grassmannschen $G_{n,1}$ her mit der Geometrie der schiefsymmetrischen Matrizen und projektiven Klassifikation der Geradenkomplexe (3) beschäftigt. Dabei wurde unter anderem festgestellt, dass die Determinante der a_{ij} nur bei ungeradem n nicht zu verschwinden braucht; das bedeutet aber, es existieren nur in Räumen ungerader Dimensionenzahl nicht-ausgeartete Nullkorrelationen. Es sei daher im folgenden, mit Ausnahme von Satz 2 das n stets als ungerade $= 2k + 1$ angenommen und unter Nullkorrelation eine nicht-ausgeartete des S_{2k+1} verstanden. Dann gilt zuerst:

SATZ 1. Durch geeignete Koordinatenwahl kann die Bilinearform (2) einer Nullkorrelation auf die Normalgestalt

$$(4) \quad (x_0 y'_0 - y_0 x'_0) + (x_1 y'_1 - y_1 x'_1) + \dots + (x_k y'_k - y_k x'_k) = 0$$

gebracht werden. Dabei sind die Koordinaten des S_{2k+1} mit $(x_i; y_i)$ (bzw. dieselben auch gestrichen) benannt worden. Es gibt somit bis auf projektive Transformationen nur einen nicht entarteten Typ von Nullkorrelationen. Es gibt ferner eine Gruppe von $\infty^{(k+1)(2k+3)}$ Kollineationen des S_{2k+1} , die die Korrespondenz (4) unverändert lassen, das ist die sog. symplektische Gruppe.

Beweis: Man wähle das Koordinatensystem so, dass den

$$\begin{array}{lll} \text{Punkten } (x_i = 1, \text{ sonst } 0) & \text{die Hyperebenen } y_i = 0 & (i = 0, 1, \dots, k) \\ \text{» } (y_i = 1, \text{ sonst } 0) & \text{» } & x_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k) \end{array}$$

entsprechen. Ferner ordne man noch dem Punkt $(1, \dots, 1; 1, \dots, 1)$ die Hyperebene $x_0 + x_1 + \dots + x_k - y_0 - y_1 - \dots - y_k = 0$ zu. Dadurch ist einerseits das Koordinatensystem im S_{2k+1} , andererseits aber auch die Nullkorrelation festgelegt, die dann die Gestalt (4) annimmt. Eine leichte Konstantenzählung ergibt nun, dass die Nullkorrelationen des S_{2k+1} von $(2k + 1)(k + 1) - 1$ Parametern abhängen; da in

den Projektivitäten des S_{2k+1} aber $(2k+2)^2 - 1$ Konstante stecken, müssen noch $\infty^{(k+1)(2k+3)}$ Projektivitäten vorhanden sein, die eine gegebene Nullkorrelation in sich überführen oder, anders ausgedrückt, die Punkt-Hyperebenenordnung derselben nicht zerstören. Diese Projektivitäten bilden dann natürlich von selber eine Gruppe.

Es ist für das Weitere wichtig, vorübergehend auch die ausgearteten Nullkorrelationen, von denen man auch in Räumen gerader Dimensionenzahl sprechen kann, in den Kreis der Betrachtungen einzubeziehen. Dazu ist zuvor folgendes zu beachten: Einer nicht entarteten Korrelation (1), wo also die Determinante der a_{ij} nicht verschwindet, kann man sofort, mit Hilfe der reziproken Matrix geschrieben, auch eine Korrespondenz zwischen den Hyperebenen desselben Raumes zuordnen. Im Falle der Nullkorrelationen schreibt sich diese wieder schief-symmetrisch. Im Ausartungsfall ergeben beide Auffassungen aber etwas Verschiedenes, und es lässt sich der Übergang von einer zur anderen nicht vollziehen. Bleiben wir bei unserer Auffassung der Nullkorrelationen als Punktkorrespondenzen, so gilt folgender:

SATZ 2. Eine ausgeartete Nullkorrelation des S_n , die vermöge (2) als Punkt - Punkt - Korrespondenz und damit aber auch gleich als Punkt - Hyperebenen - Beziehung aufgefasst wird, hat folgende Eigenschaften: Mit jedem Punkt S_0 des S_n ordnet sie allen Punkten des $(S_0 \cup A_d)$, wobei A_d ein umfassendster, fester Raum dieser Art ist, dieselbe Hyperebene durch A_d zu, sodass man auch von einer Zuordnung zwischen den S_{d+1} und den S_{n-1} durch A_d sprechen kann. d ist dann zugleich mit n gerade oder ungerade, und die genannte Zuordnung kann folgendermassen beschrieben werden: Man nehme einen beliebigen, zu A_d windschiefen Raum B_{n-d-1} , gebe in B_{n-d-1} eine nicht ausgeartete Nullkorrelation vor und verbinde Punkte und S_{n-d-2} , die sich dabei entsprechen, mit A_d . Man kann auch kurz sagen: Die ausgeartete Nullkorrelation entsteht durch Projektion einer nicht ausgearteten des B_{n-d-1} aus einem windschief dazu liegenden Raum A_d .

Beweis: Wie bei jeder ausgearteten Korrelation des S_n in sich gibt es auch hier einen festen, umfassendsten Raum A_d von der Art, dass die allen Punkten des S_n zugeordneten S_{n-1} sämtlich durch A_d gehen. Für den speziellen Fall der Nullkorrelation folgt dann sofort, dass allen Punkten eines S_{d+1} durch A_d ein und dieselbe Hyperebene durch S_{d+1} zugeordnet ist. B_{n-d-1} sei nun beliebig zu A_d windschief angenommen. Dann induziert die gegebene Nullkorrelation sofort eine solche des B_{n-d-1} . Diese kann aber ihrerseits nicht wieder ausgeartet sein; denn wäre das der Fall, so müssten die den Punkten des B_{n-d-1}

zugeordneten S_{n-1} durch einen festen Raum B_g in B_{n-d-1} gehen, d. h. da sie durch A_d ohnehin gingen, auch durch den Verbindungsraum $A_{d+g+1} = (A_d \cup B_g)$. Daraus folgt aber weiter, dass die allen Punkten des S_n zugeordneten S_{n-1} durch A_{d+g+1} gehen müssten, d. h. A_d wäre entgegen der Voraussetzung nicht maximal. Da somit in B_{n-d-1} eine nicht ausgeartete Nullkorrelation vorliegt, muss $n - d - 1$ ungerade, d. h. $n - d$ gerade sein oder n und d von derselben Parität.

Bemerkung 1. Auf hierzu duale Weise müssen diejenigen ausgearteten Nullkorrelationen beschrieben werden, die als Hyperebenenkorrespondenzen definiert sind (in (2) müssen die x und x' als Hyperebenenkoordinaten gedeutet werden). Es sei dem Leser überlassen, den Satz 2 dann auszusprechen.

Bemerkung 2. Geht man statt von (2) von der Gleichung (3) des zugehörigen Geradenkomplexes aus, der natürlich auch bei verschwindender Matrix eine Bedeutung hat, so kommt man zu demselben Ergebnis. Im Abschnitt 14 sind in den niedrigsten Fällen die linearen Komplexe (3) klassifiziert worden, was gleichwertig mit einer Klassifikation der Nullkorrelationen der verschiedenen Ausartungsstufen ist. Wir stellen im folgenden nochmals zusammen, welche Typen man bis zu $n = 5$ dabei erhält :

$n = 1$: Auf der Geraden ist die Identität die einzige Nullkorrelation.

$n = 2$: In der Ebene S_2 ordnet die einzige vorhandene, ausgeartete Nullkorrelation die Punkte ihren Verbindungsgeraden mit einem festen Punkt zu.

$n = 3$: Im S_3 gibt es eine nicht ausgeartete Nullkorrelation, das bekannte Nullsystem. Ausserdem gibt es einen Ausartungsfall, bei dem den Punkten des S_3 ihre Verbindungsebenen mit einer festen Geraden zugeordnet ist.

$n = 4$: Im S_4 gibt es zwei ausgeartete Typen, wovon der eine durch Projektion einer Nullkorrelation des S_3 aus einen Punkt A_0 entsteht, während beim zweiten Typ die allen Punkten des S_4 zugeordneten S_3 durch eine feste singuläre Ebene A_2 gehen.

$n = 5$: Im S_5 gibt es einen nicht ausgearteten Typ und zwei ausgeartete ; bei dem einen dieser ausgearteten Typen wird aus einer Geraden A_1 der nicht ausgeartete Fall des S_3 projiziert, beim zweiten erfüllen die zugeordneten Hyperebenen ein Bündel durch einen A_3 — man kann dies natürlich auch so ausdrücken : aus A_3 wird der nicht singuläre Fall auf der Geraden projiziert (s. oben $n = 1$).

Nunmehr sei die Nullkorrelation des S_{2k+1} wieder als nicht ausgeartet vorausgesetzt. Sind bei ihr die Räume S_k und S'_{2k-k} einan-

der paarweise zugeordnet, so ist es wichtig, die gegenseitigen Lage-möglichkeiten von S_h und S'_{2k-h} zu übersehen. Darüber gilt folgendes :

SATZ 3. Zwei zugeordnete S_h und S'_{2k-h} ($h < k$) in einer gegebenen Nullkorrelation des S_{2k+1} schneiden sich bei ungeradem h im all-gemeinen nicht, bei geradem h dagegen stets mindestens in einem Punkt. In spezielleren Fällen haben sie bei ungeradem h entweder eine Gerade oder einem S_3 usw. bis S_{h-2} gemeinsam, oder S_h liegt ganz in S'_{2k-h} ; bei geradem h kann die Inzidenz in einer Ebene, einem S_4 usw. bis zum vollen Ineinanderliegen stattfinden.

Beweis : Die zugeordneten Räume mögen A_h und A'_{2k-h} heissen. Ist die Nullkorrelation in der Normalgestalt (4) vorgegeben und $h = 2p + 1$ ungerade, so sind die beiden Räume :

$$A_h, \text{ definiert durch } x_{p+1} = y_{p+1} = x_{p+2} = y_{p+2} = \dots = x_{2k+1} = y_{2k+1} = 0$$

$$\text{und } A'_{2k-h}, \text{ definiert durch } x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = \dots = x_p = y_p = 0$$

nullkorrelativ und windschief zueinander, sodass dieser allgemeine Fall bei ungeradem h wirklich vorkommt. Den Punkten aus A_h entsprechen nun korrelativ die Hyperebenen durch A'_{2k-h} . Wenn A_h nicht ganz in A'_{2k-h} liegt, ist einem allgemeinen Punkt S_0 aus A_h eine Hyperebene S'_{2k} zugeordnet, die A_h nicht ganz enthält, sondern nur in einem durch S_0 gehenden S_{h-1} schneidet ; hieraus folgt, dass unsere Nullkorrelation des S_{2k+1} eine solche des A_h induziert. Haben nun A_h und A'_{2k-h} den Raum A_s ($s < h$) gemein, so ist diese induzierte Korrelation in A_h ausgeartet mit A_s als singulärem Raum ; umgekehrt können, wenn diese Nullkorrelation im A_h ausgeartet ist, A_h und A'_{2k-h} nicht punkt-fremd zueinander sein, und ihr Durchschnitt A_s muss auch der singuläre Raum der in A_h induzierten Korrelation sein. Nach Satz 2 ergibt sich daraus dann, dass s dieselbe Parität besitzt wie h , was oben behauptet wurde.

Man kann jetzt aufgrund dieses Satzes die S_h des S_{2k+1} bezüglich der gegebenen Nullkorrelation in Klassen einteilen ; alle S_h , die ihren zugeordneten S'_{2k-h} s -dimensional schneiden, sollen dabei derselben Klasse angehören. Das am meisten spezialisierte Verhalten besitzen dann diejenigen S_h , die ganz in ihrem zugeordneten S'_{2k-h} enthalten sind oder diesen ganz enthalten. Wir wollen diese Räume als *voll zugehörig* zur Nullkorrelation bezeichnen. Es ist zweckmässig, ausser dem S_h auch den korrelativ entsprechenden S'_{2k-h} in dieselbe Klasse zu legen. Demgemäss können wir sagen, dass alle Punkte und Hyperebenen bezüglich der Nullkorrelation in eine Klasse fallen und der Null-

korrelation voll angehören. Das gilt für $k \geq 1$ aber nicht mehr für alle Geraden und entsprechenden S'_{2k-1} . Denn sind A und B zwei Punkte einer voll zugehörigen Geraden, so müssen A und B in der Nullkorrelation, wenn man diese als Korrespondenz zwischen Punkten gemäss (2) auffasst, konjugiert zueinander sein; das besagt aber gerade die Bedingung (3) für die Linienkoordinaten der Verbindungsgeraden AB .

Von besonderer Wichtigkeit wird für uns das Verhalten der Räume S_k bezüglich der Nullkorrelation sein. Nach Satz 3 kann bei ungeradem k ein S_k seinen zugeordneten S'_k entweder gar nicht oder in einem S_1, S_3, \dots, S_{k-2} schneiden, bzw. ganz mit ihm zusammenfallen; bei geradem k findet der Schnitt entweder in einem Punkt einer Ebene usw. statt bis zur Möglichkeit des vollkommenen Zusammenfallens. Alle diese Fälle, die jeweilig verschiedene Klassen festlegen, erfassen wir zweckmässig mittels folgender Definitionen:

Ein S_k heisst bei $(S_k \cap S'_k) = S_s$ zur Nullkorrelation des S_{2k+1}

- a) $\frac{s+1}{k+1}$ — zugehörig im Falle ungerader k ,
- b) $\frac{s}{k}$ — zugehörig im Falle gerader k .

Wie üblich, ist dabei im Falle der Windschiefe von S_k und S'_k zu setzen $s = -1$; damit erhält sowohl bei geradem wie auch bei ungeradem k im allgemeinsten Fall der S_k die Zugehörigkeitszahl 0. Im anderen Extremfall speziellsten Verhaltens, d. h. bei $s = k$, nennt man die S_k mit der Zugehörigkeitszahl 1 auch *autopolar* bezüglich der Nullkorrelation. Dazwischen treten alle echten Brüche mit dem Nenner $\frac{k}{2}$, bzw. $\frac{k+1}{2}$ auf. Wir stellen im folgenden bis zu $k = 7$ zusammen, welche S_k -Typen es bezüglich der vorgegebenen Nullkorrelation des S_{2k+1} gibt, mitsamt der Parameterzahl, die zu ihnen gehört. Die Richtigkeit dieser nach einem Rekursionsverfahren leicht herleitbaren Zahlen möge der Leser selber nachprüfen:

$k = 1.$ ∞^4 0 - zugehörige und ∞^3 1 - zugehörige Geraden

$k = 2.$ ∞^9 0 - zugehörige und ∞^6 1 - zugehörige Ebenen

$k = 3.$ ∞^{16} 0 - zugehörige, $\infty^{15} \frac{1}{2}$ - zugehörige, ∞^{10} 1 - zugehörige
Räume S_3

- $k = 4.$ $\infty^{25} 0$ - zugehörige, $\infty^{22} \frac{1}{2}$ - zugehörige, $\infty^{15} 1$ - zugehörige
Räume S_4
- $k = 5.$ $\infty^{36} 0$ - zugehörige, $\infty^{35} \frac{1}{3}$ - zugehörige, $\infty^{30} \frac{2}{3}$ - zugehörige
 $\infty^{21} 1$ - zugehörige Räume S_5
- $k = 6.$ $\infty^{49} 0$ - zugehörige, $\infty^{48} \frac{1}{3}$ - zugehörige, $\infty^{39} \frac{2}{3}$ - zugehörige
 $\infty^{28} 1$ - zugehörige Räume S_6
- $k = 7.$ $\infty^{64} 0$ - zugehörige, $\infty^{63} \frac{1}{4}$ - zugehörige, $\infty^{58} \frac{2}{4}$ - zugehörige
 $\infty^{49} \frac{3}{4}$ - zugehörige, $\infty^{36} 1$ - zugehörige Räume S_7 .

Wir verzichten darauf, diese Ergebnisse zu verallgemeinern, was nicht schwer ist, und formulieren lediglich für die uns wichtigsten Räume, die autopolaren S_k , folgenden Satz :

SATZ 4. Eine Nullkorrelation des S_{2k+1} besitzt $\infty^{\binom{k+2}{2}}$ autopolare S_k . Jeder Teilraum A_h in einem solchen S_k gehört der Nullkorrelation ganz an, und man erhält alle autopolaren S_k durch einen solchen A_h in der Gestalt $S_k = (A_h \cup S_{k-h-1})$, worin S_{k-h-1} alle autopolaren S_{k-h-1} einer Nullkorrelation eines zu A_h windschief liegenden Raumes $B_{2k-2h-1}$ durchläuft ; $B_{2k-2h-1}$ kann dabei beliebig, sein, muss jedoch so gewählt werden, dass $(A_h \cup B_{2k-2h-1}) = A'_{2k-h}$ der zu A_h korrelativ entsprechende Raum ist.

Beweis : A_0 sei ein beliebiger Punkt des S_{2k+1} und A'_{2k} die A_0 zugeordnete Hyperbene, sodass die ∞^{2k-1} Geraden durch A_0 in A'_{2k} der Nullkorrelation voll angehören. Bei $k = 1$ sind diese Geraden autopolar, und es stimmen in diesem Fall ersichtlich die Behauptungen des Satzes. Nunmehr sei A_h ein beliebiger Teilraum des autopolaren S_k ; der zu A_h nullreziproke Raum A'_{2k-h} muss dann A_k enthalten, und die den Punkten von A'_{2k-h} zugeordneten Hyperbenen gehen alle durch A_h und haben in ihrer Gesamtheit auch nicht mehr als A_h gemein. $B_{2k-2h-1}$ in A'_{2k-h} sei windschief zu A_h gewählt. Dann induziert unsere Nullkorrelation eine solche in $B_{2k-2h-1}$, die auch nicht ausgeartet sein kann, da sich sonst sofort ergeben würde, dass die den Punkten von A'_{2k-h} zugeordneten S_{2k} insgesamt mehr als bloss den Raum A_h gemein haben. B_{k-h-1} sei in der in $B_{2k-2h-1}$ induzierten Nullkorrelation autopolar. Dann ist zunächst gewiss der Raum $(A_h \cup B_{k-h-1})$ in der ursprünglichen Nullkorrelation auto-

polar. Es ergibt sich aber auch, dass jeder durch A_h gehende autopolare Raum in dieser Gestalt sich schreiben lässt. Denn zunächst kann ein C'_k durch A_h , der nicht in A'_{2k-h} liegt, nicht autopolar sein, da sein nullreziproker Raum C'_k nicht einmal A_h enthält, ein $C_h = (A_h \cup B_{k-h-1})$ mit B_{k-h-1} aus $B_{2k-2h-1}$ ist aber reziprok zu $C'_k = (A_h \cup B'_{k-h-1})$, wobei B_{k-h-1} und B'_{k-h-1} innerhalb der Nullkorrelation des $B_{2k-2h-1}$ reziprok voneinander sind. Es muss also, wenn $C'_k = C_h$ sein soll, auch $B_{k-h-1} = B'_{k-h-1}$ sein. Nun gibt es in jeder Nullkorrelation autopolare S_h , z. B. die beiden gegenüberliegenden Räume $x_0 = x_1 = \dots = x_k = 0$ und $y_0 = y_1 = \dots = y_k = 0$, wenn man die Normalform (4) voraussetzt. Die behauptete Parameterzahl folgt induktiv; für $k = 1$ stimmt sie; angenommen ihre Richtigkeit wäre schon bis zu $k - 1$ bewiesen, dann wissen wir nach den vorhergehenden Betrachtungen, dass durch jeden Punkt des $S_{2k+1} \infty \binom{k+1}{2}$ autopolare S_k gehen, insgesamt also $\infty \binom{k+2}{2} = \infty \binom{k+1}{2} + 2k+1-k$.

Wir zeigen nunmehr noch einen Satz, der uns einen interessanten Zusammenhang zwischen den Nullkorrelationen und den Quadriken Q_{2k} erschliesst:

Satz 5. A_k und B_k seien zwei zueinander windschiefe, autopolare Räume der gegebenen Nullkorrelation. Dann induziert diese eine Korrelation zwischen A_k und B_k von der Art, dass alle Räume der Art $(U_h \cup V_{k-h-1})$, wobei $U_h \subset A_k$ und $V_{k-h-1} \subset B_k$ in dieser Korrelation einander zugeordnet sind, also nach Abschnitt 17, Satz 1 alle einer Quadrik $Q_{2k} = A_k - B_k$ angehören, autopolar sind. Alle autopolaren Räume der Gestalt $(U_h \cup V_{k-h-1})$ gehören umgekehrt auch dieser Quadrik Q_{2k} an.

Beweis: A_k und B_k seien zwei windschiefe, autopolare Räume. Dann gehen die den Punkten von A_k nullkorrelativ zugeordneten Hyperebenen sämtlich durch A_k und bestimmen $k - 1$ -dimensionale Teilräume auf B_k ; umgekehrt ergibt jeder B_{k-1} aus B_k , mit A_k verbunden, eine Hyperebene, deren nullkorrelativ zugeordneter Punkt auf A_k liegt. Dies definiert eine Korrelation zwischen den Punkten aus A_k und den Hyperebenen aus B_k . In dieser Korrelation möge nun der Raum U_h aus A_k dem Raum V_{k-h-1} aus B_k zugeordnet sein; das bedeutet, den Punkten von A_k sind in der ursprünglichen Nullkorrelation die S_{2k} durch $(U_h \cup B_k)$ zugeordnet. Daraus folgt aber, dass $(U_h \cup V_{k-h-1})$ autopolar ist. Umgekehrt müssen bei Autopolarität von $(U_h \cup V_{k-h-1})$ sich die den Punkten von U_h nullkorrelativen S_{2k} genau in $(A_k \cup V_{k-h-1})$ schneiden, d. h. aber in der soeben erklärten Korrelation zwischen A_k und B_k sind U_h und V_{k-h-1} einander zugeordnet.

22. KONSTRUKTION DER N -MANNIGFALTIGKEITEN

Wir suchen nunmehr Mannigfaltigkeiten, deren Punkte eindeutige Bilder der $\infty^{\binom{k+2}{2}}$ autopolaren X_k einer nicht ausgearteten Nullkorrelation des X_{2k+1} sind. Wir nennen diese gesuchten Mannigfaltigkeiten $N^{\binom{k+2}{2}}$, in Worten N -Mannigfaltigkeiten. Wenn wir diese gefunden haben, werden sich weitere Mannigfaltigkeiten, deren Punkte in derselben Weise den mindestens in einem bestimmten Grade der Nullkorrelation zugehörigen X_k zugeordnet sind, von selber ergeben. Es mögen zunächst die einfachsten Fälle $k = 0$ und 1 betrachtet werden :

$k = 0$. Da die Nullkorrelation auf der Geraden die Identität ist, hat man sofort : N_1 ist die Gerade selber.

$k = 1$. Die ∞^3 autopolaren Geraden eines Nullsystems im X_3 sind ein allgemeiner linearer Komplex. Das Plückerbild desselben ist nun ein allgemeiner S_4 -Schnitt der $G_{3,1} = Q_4$. Offensichtlich gibt es keine einfachere Punktmannigfaltigkeit, die die ∞^3 Geraden des linearen Komplexes ausnahmslos eindeutig abbildet, als die so erhaltene Q_3 , sodass wir sagen können : Das gesuchte Minimalmodell N_3 ist die nicht entartete Quadrik Q_3 des S_4 .

Wir werden nach dem Muster von $k = 0$ und 1 auch in den weiteren Fällen die N -Mannigfaltigkeiten in den Grassmannbildern der $\infty^{\binom{k+2}{2}}$ autopolaren X_k suchen und erklären kurzerhand, ohne zu zeigen, dass es sich dabei wirklich um das Minimalmodell im Sinne Severis handelt :

$N^{\binom{k+2}{2}}$ ist die Bildmenge der $\infty^{\binom{k+2}{2}}$ autopolaren X_k der gegebenen Nullkorrelation, die man erhält, wenn man die X_k des X_{2k+1} auf die Punkte der $G_{2k+1;k}$ abbildet. Entsprechendes gilt für die Bildmengen der anderen, in bestimmter Weise mit der Nullkorrelation verknüpften X_k .

Da nach Abschnitt 12 Satz 3 alle durch einen festen A_k gehenden X_k des X_{2k+1} auf die Punkte einer $G_{2k-k; k-k-1}$ abgebildet werden, ergibt sich zusammen mit Satz 4 sofort, dass diejenigen autopolaren X_k , die einen festen A_k enthalten, auf die Punkte einer $N^{\binom{k-h+1}{2}}$ innerhalb der $N^{\binom{k+2}{2}}$ abgebildet werden. Weiterhin folgt hieraus zusammen mit dem, was wir vom Teil IV her über die, $G_{2k+1;k}$ wissen, folgende wichtige Aussage über den lokalen Aufbau der $N^{\binom{k+2}{2}}$:

SATZ 6. $N_{\binom{k+2}{2}}$ ist eine Mannigfaltigkeit, die Geraden als Räume höchster Dimension enthält. Durch jeden Punkt P_0 der $N_{\binom{k+2}{2}}$ gehen ∞^k Geraden, die einen Kegel $\{P_0 \cup V_k^2\}$ bilden.

Beweis: Aus der Theorie der Grassmannmannigfaltigkeiten wissen wir, dass lineare Räume auf der $G_{2k+1;k}$ entweder

- a) den $\infty^{m-k} X_k$ durch einen X_{k-1} in einem X_m ($m > k$)
- b) allen $\infty^{k+1} X_k$ in einem X_{k+1} oder
- c) allen $\infty^{k-s} X_k$ durch einen X_s in einem X_{k+1}

entsprechen. Nun sind nach Satz 4 alle $\infty^1 X_k$ durch einen der Nullkorrelation zugehörigen X_{k-1} in dem zu X_{k-1} nullkorrelativen X'_{k+1} autopolar und sonst bestehen, wie man sofort sieht, keine der unter a) bis c) aufgezählten Typen von X_k -Mengen aus lauter autopolaren Räumen. Das bedeutet aber, die $N_{\binom{k+2}{2}}$ enthält keine höheren linearen Räume als Geraden. Von diesen Geraden gehen aber ∞^k durch jeden Punkt der $N_{\binom{k+2}{2}}$, wie man folgendermassen sieht: Jeder autopolare X_k enthält $\infty^k X_{k-1}$, die alle der Nullkorrelation voll angehören, jeder autopolare X_k gehört also zu ∞^k Mengen von je ∞^1 autopolaren X_k durch einen X_{k-1} . Nun besitzt nach Abschnitt 13, Satz 7 die $G_{2k+1;k}$ in jedem Punkt P_0 $\infty^k P_{k+1}^I$ und $\infty^k P_{k+1}^{II}$, die einen durch P_0 als Spitze gehenden Kegel $\{P_0 \cup S_{k;k}\}$ ausmachen. Ist P_0 das Bild des Raumes A_k , so entsprechen die Punkte eines dieser P_{k+1}^I den $\infty^k P_k$ durch einen A_{k-1} des A_k , und die Punkte eines dieser P_{k+1}^{II} den $\infty^k X_k$ in einem A_{k+1} durch A_k . Unsere Nullkorrelation bezieht aber gerade die A_{k+1} durch und die A_{k+1} in A_k korrelativ aufeinander. Diese Beziehung überträgt sich nun auf eine projektive Korrespondenz der $\infty^k P_{k+1}^I$ und der $\infty^k P_{k+1}^{II}$ des Segrekegels oder auf eine ebensolche zwischen den $\infty^k P_k^I$ und den $\infty^k P_k^{II}$ einer $S_{k;k}$, die vom Segrekegel übrig bleibt, wenn man ihn mit einer nicht durch die Spitze P_0 gehenden Hyperbene schneidet. Nach Abschnitt 3, Satz 22 wird aber durch diese eindeutige Beziehung der beiden Sorten von P_k der $S_{k;k}$ aufeinander eine Veronesesche V_k^2 definiert, die mit P_0 verbunden, zu dem erwähnten Veroneseskegel im Punkt P_0 der $N_{\binom{k+2}{2}}$ führt.

Zu einer ersten Möglichkeit, weitere Einblicke in den Aufbau der $N_{\binom{k+2}{2}}$ zu gewinnen, führt dann folgender

SATZ 7. A_k und B_k seien 2 windschiefe, autopolare Räume der Nullkorrelation des X_{2k+1} . Dann spannen die Bildpunkte sämtlicher autopolaren $X_h = (A_h \cup B_{k-h-1})$ ($h = 0, 1, \dots, k-1$), die nach Satz 5 alle einer bestimmten Quadrik $Q_{2k} = (A_k - B_k)$ angehören, zusammen mit den Bildpunkten von A_k und B_k selber die ganze $N_{\binom{k+2}{2}}$ auf. Die $N_{\binom{k+2}{2}}$ wird somit durch folgende, zueinander unabhängig liegende $k+1$ Punktmengen aufgespannt:

- 1) einen Punkt U_0 als Bild von A_k
- 0) eine $V_k^2 = V^2(G_{k;0})$ als Bild der $X_k = (A_{k-1} \cup B_0)$
- 1) eine $V^2(G_{k;1})$ als Bild der $X_k = (A_{k-2} \cup B_1)$
-
- $k-1$) eine $V_k^2 = V^2(G_{k;k-1})$ als Bild der $X_k = (A_0 \cup B_{k-1})$
- k) einen Punkt V_0 als Bild von B_k .

Beweis: Nach Abschnitt 3, Satz 17 wird die Bildmenge aller X_k des X_{2k+1} , die den festen A_k treffen, durch die $k+1$ Bildmengen aller derjenigen X_h aufgespannt, die A_k h -dimensional und B_k $k-h-1$ -dimensional schneiden ($h = 0, 1, \dots, k$). Weiterhin war dort festgestellt worden, das diese $k+1$ Mengen alle in zueinander windschiefen unabhängigen Räumen liegen und zusammen eine ausgezeichnete Hyperebene des dualen Gebildes $\widehat{G}_{2k+1;k}$ aufspannen; diese Hyperebene enthält den Bildpunkt V_0 von B_k nicht, weil B_k nach Voraussetzung den A_k nicht treffen sollte. Nimmt man V_0 noch hinzu, so wird dadurch der ganze Raum $\langle G_{2k+1;k} \rangle$ aufgespannt. Wir interessieren uns nun hier nur noch für diejenigen Untermengen dieser insgesamt $k+2$ Teilmengen der $G_{2k+1;k}$, die auch unserer $N_{\binom{k+2}{2}}$ angehören. Das bedeutet aber, sich auf folgende Teilmengen aller $k+2$ soeben beschriebenen Mengen zu beschränken:

- 1) den Bildpunkt U_0 von A_k
- 0) die Bildmenge aller autopolaren $X_k = (A_{k-1} \cup B_0)$
- 1) die Bildmenge aller autopolaren $X_k = (A_{k-2} \cup B_1)$
-
- $k-1$) die Bildmenge aller autopolaren $X_k = (A_0 \cup B_{k-1})$
- k) den Bildpunkt V_0 von B_k

(unter A und B mit entsprechenden Indizes sind stets Unterräume von A_k und B_k verstanden). Man stellt nun leicht fest, dass die Menge mit der linken Nummer j) auf die Punkte der V^2 -Transformierten einer $G_{k;j}$ abgebildet wird. Denn nehme man zur einfachen Berechnung A_k und B_k je in der Gestalt $y_0 = y_1 = \dots = y_k = 0$ und $x_0 = x_1 = \dots = x_k = 0$ an, so hat man die Grassmannkoordinaten aller $X_k = (A_{k-j-1} \cup B_j)$ zu berechnen, die der Quadrik $x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_k y_k = 0$ angehören (s. Satz 5). Wegen unserer besonderen Koordinatenwahl ergeben sich diese aber in der Gestalt $p_{\mu_0 \dots \mu_{k-j}} q_{\nu_{k-j+1} \dots \nu_k}$, wobei die p alle Grassmannkoordinaten 1. Art irgendeines A_{k-j-1} des A_k sind und die q unabhängig davon diejenigen 2. Art des zu A_{k-j-1} korrelativen B_j in B_k bedeuten. Es gilt aber bei uns, wieder wegen der Koordinatenwahl, $q_{\nu_{k-j+1} \dots \nu_k} = p_{\nu_0 \dots \nu_{k-j}}$, d. h. aber die Koordinaten der Menge j) schreiben sich, sofern sie nicht von vornherein verschwinden, in der Gestalt aller quadratischen Monome in den Grassmannkoordinaten irgendeines A_{k-j-1} des A_k , und die Menge j) ist eine V^2 -Transformierte von $G_{k;j}$. Dass alle $k+2$ Mengen auch wirklich $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ aufspannen, folgt genau so wie die entsprechende Tatsache bei der $G_{2k+1;k}$ (vgl. Abschnitt 16, Satz 18).

Wir wollen nunmehr aufgrund dieses Satzes überlegen, welche Räume durch die $N_{\binom{k+2}{2}}$ für $k = 1, 2, \dots, 5$ aufgespannt werden.

$k = 1$. Da $G_{1;0}$ die Gerade ist, deren V^2 -Transformierte ein Kegelschnitt ist, wird N_3 durch die Punkte eines Kegelschnitts und noch 2 weitere aufgespannt, also hat der Raum $\langle N_3 \rangle$, wie wir wissen, 4 Dimensionen.

$k = 2$. Die Mannigfaltigkeiten $G_{2;0}$ und $G_{2;1}$ sind beides Ebenen, deren V^2 -Bilder Veronesesche Flächen V_2^2 sind und je einen S_5 aufspannen. N_6 wird somit durch die Punkte dieser beiden S_5 und noch 2 weitere Punkte aufgespannt, mithin hat der Raum $\langle N_6 \rangle$ 13 Dimensionen. Man kann auch sagen, dass der $\langle N_6 \rangle_{13}$ durch die Tangential- T_6 in 2 allgemeinen Punkten U_0 und V_0 aufgespannt wird.

$k = 3$. Der Raum $\langle N_{10} \rangle$ wird nach Satz 6 und 7 durch die Tangentialräume $T_{10}(U_0)$ und $T_{10}(V_0)$ in den beiden Punkten U_0 und V_0 sowie einen Raum $\langle V^2(G_{3;1}) \rangle$ aufgespannt. Dieser letztgenannte Raum hat aber 19 Dimensionen; dies folgt daraus, dass $G_{3;1}$ eine Quadrik des S_5 ist, sodass also $V^2(G_{3;1})$ durch eine Hyperebene aus der V_5^2 des S_{20} ausgeschnitten wird. Zusammengenommen ergibt dies, dass der Raum $\langle N_{10} \rangle$ 41 Dimensionen hat.

$k = 4$. Um die Dimension des Raumes $\langle N_{15} \rangle$ auszurechnen,

braucht man die Dimensionen der Räume $\langle V^2(G_{4;i}) \rangle$ ($i = 0, \dots, 3$). Nun war gemäss Abschnitt 14 die $G_{4;1}$ eine durch 5 linear unabhängige quadratische Relationen beschriebene Mannigfaltigkeit des S_9 ; $V^2(G_{4;1})$ wird also durch 5 linear unabhängige Hyperebenen aus der V_9^2 ausgeschnitten. Da V_9^2 einen S_{54} aufspannt, hat also der Raum $\langle V^2(G_{4;1}) \rangle$ die Dimension 49. Die von $V^2(G_{4;1})$ projektiv nicht verschiedene $V^2(G_{4;2})$ spannt einen weiteren S_{49} auf. $\langle V^2(G_{4;0}) \rangle$ und $\langle V^2(G_{4;3}) \rangle$ fügen sich je mit den Punkten U_0 und V_0 zu den 15-dimensionalen Tangentialräumen in den Punkten U_0 und V_0 zusammen, sodass wir schliesslich als Dimension für den Raum $\langle N_{15} \rangle$ die Zahl 131 erhalten.

$k = 5$. Zur Berechnung der Dimension von $\langle N_{21} \rangle$ benötigt man die der Räume $\langle V^2(G_{5;i}) \rangle$. Hierzu ist wiederum erforderlich, zu wissen, wie gross die Anzahl linear unabhängiger, quadratischer Relationen der $G_{5;i}$ ($i = 1, 2, 3$) ist. Nun ergibt sich leicht aus Abschnitt 14, Satz 9, dass die $G_{5;1} = G_{5;3}$ durch 15 linear unabhängige quadratische Relationen beschrieben wird, während wir für die $G_{5;2}$ in Abschnitt 15 die dort bestehenden 35 Relationen explizit hingeschrieben haben. Berücksichtigt man ferner, dass die $G_{5;1}$ und $G_{5;2}$ je einen Raum von 14 und 19 Dimensionen aufspannen und V_{14}^2 und V_{19}^2 je einen von 119 und 209 Dimensionen, so gewinnen wir leicht 104 und 174 als die Dimensionenzahlen von $\langle V^2(G_{5;1}) \rangle$ und $\langle V^2(G_{5;2}) \rangle$. Hinzu kommen noch die Tangentialräume an die N_{21} in den Punkten U_0 und V_0 , sodass wir nach Satz 7 schliesslich folgendes Ergebnis erhalten: die N_{21} spannt einen Raum von $21 + 21 + 104 + 174 + 104 + 4 = 428$ Dimensionen auf.

Um auf diese Weise eine allgemeine Formel für die Dimensionenzahl des Raumes $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ aufzustellen, müsste man eine Formel für die Dimensionen der Räume $\langle V^2(G_{k;i}) \rangle$ herleiten und diese Dimensionen alle addieren, was etwas umständlich wäre. Wir werden im nächsten Abschnitt eine Formel für die Dimension von $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ die in einfacher Weise von k abhängt, gewinnen. Dies wird dadurch gelingen, dass wir nicht die Zahl der linear unabhängigen Punkte abzählen, die $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ aufspannen, wie soeben für $k = 1, \dots, 5$, sondern die Anzahl linear unabhängiger Hyperebenen des $\langle G_{2k+1;k} \rangle$, die durch $N_{\binom{k+2}{2}}$ gehen, was wesentlich einfacher ist. Das, was einem hyperebenen Schnitt der $G_{2k+1;k}$ im X_{2k+1} zugeordnet ist, heisse linearer X_k -Komplex. Wir werden also jetzt zu untersuchen haben, wie wir die

Gesamtheit der autopolaren, und dann auch die in einem niederen Mindestgrad als 1 der Nullkorrelation angehörigen X_b in bestimmter Weise als Durchschnitt linearer X_3 -Komplexe des X_{2k+1} erhalten werden können. Um dahin zu gelangen, ist es zweckmässig, die $N_{\binom{k+2}{2}}$ nicht nur als Schnitt der Grassmanschen, sondern vermittels dieser auch als Schnitt der in vorigem Teil eingeführten M_Q -Mannigfaltigkeiten aufzufassen. Wir beweisen dazu den

Satz 8. Gegeben seien 3 zueinander windschiefe Räume A_{2k+1} , B_{2k+1} , C_{2k+1} einer Q_{4k+2} , die bei ungeradem k zur Sorte I und bei geradem k zur Sorte II gehören sollen und deren Unterräume wir auch mit A , B , C und den entsprechenden Indizes bezeichnen wollen. Dann wird die Gesamtheit aller $S_{2k+1}^I = A_b \cup B_b$ der Q_{4k+2} nach Abschnitt 19, Satz 21 auf die Punkte einer, $G_{2k+1; k}^{AB}$ genannten, Grassmannschen Mannigfaltigkeit abgebildet. Die Gesamtheit aller $S_{2k+1}^I = A_b \cup B_b$ der Q_{4k+2} , die ausserdem noch den Raum C_{2k+1} mindestens s -dimensional schneiden, wird auf eine bestimmte Punktmenge innerhalb der $G_{2k+1; k}^{AB}$ abgebildet, die sich auch als Bildmenge aller einer gewissen Nullkorrelation des X_{2k+1} mindestens $\frac{s+1}{k+1}$ - oder $\frac{s}{k}$ -fach zugehörigen X_b (je nachdem, ob k ungerade oder gerade ist) auffassen lässt. Speziell werden so alle $S_{2k+1}^I = A_b \cup B_b \cup C_b$ der Q_{4k+2} auf die Punkte einer N -Mannigfaltigkeit $N_{\binom{k+2}{2}}$ innerhalb der $G_{2k+1; k}^{AB}$ und damit auch der $M_{\binom{2k+2}{2}}$ abgebildet.

Beweis: Nach Abschnitt 17, Satz 1 kann die Q_{4k+2} durch korrelative Beziehung der beiden windschiefen und zur selben Schar gehörigen Räume A_{2k+1} und B_{2k+1} erzeugt werden. C_{2k+1} sei ein weiterer, A_{2k+1} und B_{2k+1} nicht treffender Raum der Q_{4k+2} , der mithin zur selben Schar wie diese beiden gehört. Dann existiert nach Abschnitt 6, Satz 4 eine, A_{2k+1} , B_{2k+1} und C_{2k+1} enthaltende, Segresche Mannigfaltigkeit $S_{2k+1; 1}$; die erzeugenden Geraden dieser $S_{2k+1; 1}$ treffen alle A_{2k+1} , B_{2k+1} und C_{2k+1} , gehören also ganz der Q_{4k+2} an, da sie je 3 Punkte mit ihr gemein haben. $S_{2k+1; 1}$ ist also ein Teil von Q_{4k+2} . Projizieren wir nun aus C_{2k+1} alles in einen X_{2k+1} , so ist durch die erzeugenden ∞^{2k+1} Geraden der $S_{2k+1; 1}$, die bei dieser Projektion in die Punkte des X_{2k+1} übergehen, genau festgelegt, in welcher Weise dabei die Punkte von A_{2k+1} und B_{2k+1} zur Deckung gelangen. Die Korrelation zwischen den getrennt liegenden Räumen A_{2k+1} und B_{2k+1} , wodurch die Q_{4k+2} erzeugt wurde, geht dann in eine wohlbestimmte des X_{2k+1} in sich über.

Dies ist aber eine Nullkorrelation; denn ein erzeugender Raum $D_{2k+1} = A_0 \cup B_{2k}$ der Q_{4k+2} , der den Punkt A_0 aus A_{2k+1} mit dem ihm korrelativ zugeordneten B_{2k} aus B_{2k+1} verbindet, gehört nach Abschnitt 17, Satz 4 zur andern Schar wie A_{2k+1} , B_{2k+1} und C_{2k+1} , muss also nach den Inzidenzregeln auch C_{2k+1} treffen, was ersichtlich wegen der Windschiefe von B_{2k} und C_{2k+1} nur in einem Punkt C_0 stattfinden kann. Die Gerade $A_0 C_0$ muss dann, da sie in D_{2k+1} liegt und somit auch B_{2k} schneidet, eine Erzeugende von $S_{2k+1;1}$ sein; dies bedeutet aber wiederum, dass die korrelativ zugeordneten A_0 und B_{2k} nach der Projektion aus C_{2k+1} in X_{2k+1} zur Inzidenz gelangen. Es ist also nach der Projektion eine Nullkorrelation im X_{2k+1} entstanden. Diese kann aber nicht ausgeartet sein; denn jede Hyperebene C_{4k+2} durch C_{2k+1} trifft B_{2k+1} in einem B_{2k} und umgekehrt erhält man alle B_{2k} auch so; durch B_{2k} geht nun ein wohlbestimmter P_{2k+1} der Q_{4k+2} , der C_{2k+1} und A_{2k+1} je in einem Punkt C_0 und A_0 schneidet, also ganz dem C_{4k+2} angehört und ausserdem korrelativ Entsprechendes in A_{2k+1} und B_{2k+1} verbindet. Durch Verändern von C_{4k+2} erhält man so jeden Punkt von A_{2k+1} , und es kann somit bei der projizierten Nullkorrelation des X_{2k+1} nicht vorkommen, dass die allen Hyperbenen zugeordneten Punkte nur einen Raum von niederer Stufe erfüllen. Hieraus ergibt sich weiterhin folgendes: Gegeben sei ein beliebiges $S_{2k+1}^I = A_b \cup B_b$ der Q_{4k+2} . In der Polarität bezüglich der Q_{4k+2} mögen A_b und B_b die Räume $A_{2k+1} \cup C_k'$ und $B_{2k+1} \cup C_k''$ zugeordnet sein. Dann sind $A_{2k+1}' = A_b \cup C_k'$ und $A_{2k+1}'' = B_b \cup C_k''$ weitere S_{2k+1} der Schar I. Ist $C_k' \cap C_k'' = C_s$, wobei bei ungeradem k auch $s = -1$ sein kann, so treffen die von C_s ausgehenden und einen S_{2s+1} aufspannenden Geraden obiger $S_{2k+1;1}$ alle sowohl A_b als auch B_b . Daraus folgt aber sofort, dass $A_{2k+1}'' \cap A_{2k+1}' = S_{2s+1}$ ist. Infolge der Erklärung unserer durch Projektion entstandenen Nullkorrelation des X_{2k+1} gehen dann A_b und B_b (oder A_{2k+1}' und A_{2k+1}'' , was auf dasselbe hinauskommt) bei der Projektion aus C_{2k+1} in die korrelativ entsprechenden Räume X_b und Y_b in X_{2k+1} über mit $X_b \cap Y_b = X_s$. Sie sind mithin bei $s = k$ autopolar zu nennen und allgemein $\frac{s+1}{k+1}$ - oder $\frac{s}{k}$ -zugehörig, je nach der Parität von k . Indem man diesen Gedankengang rückwärts verfolgt, sieht man auch leicht, dass man auf diese Weise alle unsere Klassen von X_k des X_{2k+1} so durch Projektion erhält.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man sich nun leicht eine Übersicht darüber verschaffen, in welcher Weise man die $N_{\binom{k+2}{2}}$ und die weiteren

Bildmengen der ausgezeichneten X_k einer Nullkorrelation des X_{2k+1} als lineare Schnitte der $G_{2k+1;k}^{AB}$ erhält. Das wird in folgendem Satz ausgedrückt werden, dem wir jedoch noch einen Hilfssatz voranschicken.

HILFSSATZ. Gegeben seien eine Q_{2k} (k ungerade) und A_k, B_k, C_k , drei untereinander windschiefe Räume darauf. Dann gibt es Räume $S_k^I = B_{s-1} \cup C_{k-s}$ auf der Q_{2k} mit B_{s-1} und C_{k-s} je aus B_k und C_k ($s = k+1, k-1, \dots, 2, 0$), die A_k nicht treffen.

Beweis: Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass Q_{2k} die Gleichung $x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_k y_k = 0$ hat, B_k durch $x_0 = \dots = x_k = 0$ und C_k durch $y_0 = \dots = y_k = 0$ sowie schliesslich A_k durch

$$x_0 = -y_1, x_1 = y_0, \dots, x_{k-1} = -y_k, x_k = y_{k-1}$$

beschrieben werden. Dann erfüllt der auch der Q_{2k} angehörige Raum

$$y_0 = y_1 = \dots = y_{s-1} = x_s = x_{s+1} = \dots = x_k = 0$$

ersichtlich die Bedingungen des Hilfssatzes.

SATZ 9. Die Gesamtheit aller $S_{2k+1} = A_k \cup B_k$ der Q_{4k+2} , die gleichzeitig alle $S_{2k+1}^I = B_{s-1} \cup C_{2k+1-s}$ treffen, fällt zusammen mit der Menge aller $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k \cup C_t$ ($t \geq s$); hierbei ist s eine feste Zahl aus der Reihe 1, 3, ..., $k-1$, bzw. 0, 2, ..., $k-1$, je nach der Parität von k , und t durchläuft dann jeweils alle Zahlen $s, s+2, \dots$ bis k , bzw. $s+1, s+3, \dots$, bis k .

Beweis: Weil ein C_t ($t \geq s$) und ein C_{2k+1-s} im C_{2k+1} sich stets treffen, ist es klar, dass auch jeder $A_k \cup B_k \cup C_t$ jeden $S_{2k+1}^I = B_{s-1} \cup C_{2k+1-s}$ schneidet. Es ist daher nur noch zu zeigen, dass umgekehrt ein $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k \cup C_r$ mit $r < s$ nicht alle $S_{2k+1}^I = B_{s-1} \cup C_{2k+1-s}$ treffen kann. Wir haben daher die Aufgabe, zu gegebenem $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k \cup C_r$ einen diesen nicht treffenden $T_{2k+1}^I = B_{s-1} \cup C_{2k+1-s}$ zu konstruieren ($r < s$). Zunächst sei $r = -1$, d. h. ein zu C_{2k+1} windschiefer $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k$ sei gegeben. Der zu A_k bezüglich der Q_{4k+2} polare Raum sei A_{3k+2} , der als Verbindung von A_{2k+1} mit B_k , aber auch mit C_k erklärt werden kann. Wir werden den gesuchten T_{2k+1}^I unter der Schar der Räume durch C_k finden. Zu C_k sei polar der Raum $(C_{2k+1} \cup A_k) = (C_{2k+1} \cup B_k')$, hierbei sind B_k und B_k' windschief, da sonst S_{2k+1}^I den C_{2k+1} treffen würde. C_{3k+2} schneidet aus Q_{4k+2} einen Kegel $\{C_k \cup \bar{Q}_{2k}\}$ mit der Spitze C_k aus, und alle S_{2k+1}^I durch C_k erhält man in der Gestalt $C_k \cup \bar{S}_k^I$ mit \bar{S}_k^I aus \bar{Q}_{2k} . Unsere Forderung, die wir an den Raum T_{2k+1}^I durch C_k stellten, überträgt sich dann folgendermassen: \bar{S}_k^I auf \bar{Q}_{2k} so zu bestimmen, dass es einen von 3 zueinander windschie-

fen Räumen nicht trifft, die beiden anderen aber in 2 Räumen komplementärer Dimensionen $k-s$ und $s-1$. Dies ist aufgrund des Hilfssatzes möglich. Jetzt sei $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k \cup C_k$, mit $r \geq 0$ gege-

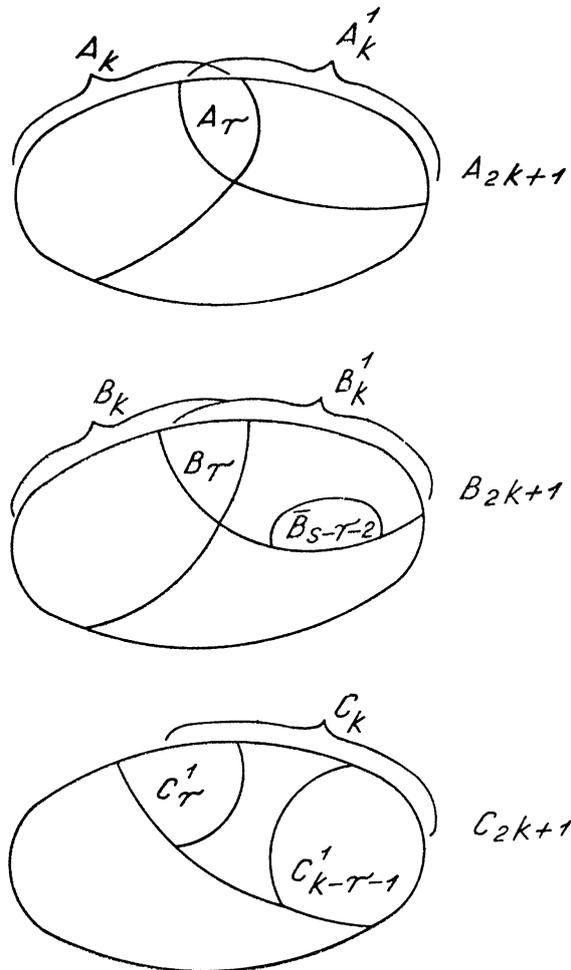


Bild 30

ben (s. Bild 30). Zu A_k möge der Raum $A_{2k+1} \cup B_k = A_{2k+1} \cup C_k$ und zu C_k der Raum $(C_{2k+1} \cup B'_k) = (C_{2k+1} \cup A'_k)$ polar sein. Es sei $B_r = B_k \cap B'_k$ und $A_r = A_k \cap A'_k$. Wir wollen den T_{2k+1}^I so bestimmen, dass er durch C'_{k-r-1} geht, wobei C'_{k-r-1} beliebig in C_k windschief

zu C_r gewählt sei. In der Polarität bzgl. der Q_{4k+2} entsprechen sich dann :

$$\begin{array}{l|l} C_r & (C_{2k+1} \cup B_{2k-r}), \text{ wobei } B_{2k-r} = B_k \cup B'_k \\ C'_{k-r-1} & (C_{2k+1} \cup B'_{k+r+1}), \text{ wobei } B'_{k+r+1} \cap B_{2k-r} = B'_k \end{array}$$

Wir wählen nunmehr in B'_{k+r+1} einen \bar{B}_{s-1} mit $\bar{B}_{s-1} \cap B'_k = \bar{B}_{s-r-2}$, derart dass \bar{B}_{s-r-2} den B , nicht trifft. Durch \bar{B}_{s-1} geht dann ein wohlbestimmter Raum $T'_{2k+1} = \bar{B}_{s-1} \cup \bar{C}_{2k-s+1}$. Dieser T'_{2k+1} spannt infolge seiner Konstruktion mit $C_{2k+1} \cup B_{2k-r}$ den ganzen Aussenraum der Q_{4k+2} auf, schneidet den $C_{2k+1} \cup B_{2k-r}$ also in \bar{B}_{s-r-2} , der seinerseits S'_{2k+1} nicht trifft. T'_{2k+1} erfüllt somit die in unserem Satze gestellte Bedingung.

Dieser Satz 9 sagt zusammen mit Satz 8 folgendes aus : Die Menge der Bildpunkte aller derjenigen X_k des X_{2k+1} , die der Nullkorrelation mindestens in einem bestimmten Grade angehören, wird in der Auffassung von Satz 8 aus der $G_{2k+1;k}^{AB}$ durch bestimmte Systeme ausgezeichneter Hyperebenen des $\langle M_{\binom{2k+2}{2}} \rangle$ ausgeschnitten ; diese Hyperebenen haben für die Geometrie der Q_{4k+2} eine ganz einfache Bedeutung ; sie bilden nämlich diejenigen S'_{2k+1} der Q_{4k+2} ab, die gewisse feste, aus einer bestimmten Menge entnommene S'_{2k+1} treffen. Es handelt sich nunmehr darum, auch im X_{2k+1} selber, dessen X_k auf die Punkte der $G_{2k+1;k}^{AB}$ abgebildet waren, die Bedeutung der durch diese Hyperebenen ausgeschnittenen linearen X_k -Komplexe kennen zu lernen. Wir definieren zu diesem Zweck zunächst folgende X_k -Systeme, in denen wir gemäss einem darauf folgenden Satz die gesuchten linearen Komplexe finden werden.

DEFINITION : Gegeben seien eine Nullkorrelation des X_{2k+1} und ein Raum Y_s im X_{2k+1} ($s = k-2, k-4, \dots, 3, 1$ bei ungeradem k und $s = k-2, k-4, \dots, 2, 0$ bei geradem k). Man versteht dann unter dem der Nullkorrelation in Y_s angepassten X_k -Komplex eine Gesamtheit, die aus folgenden X_k besteht :

- 1) allen X_k , die Y_s schneiden,
- 2) allen X_k , die zusammen mit Y_s einen X_{k+s+1} aufspannen, der mit seinem nullkorrelativen Raum X'_{k-s-1} mindestens eine Gerade gemein hat, d. h. spezielles Verhalten bezüglich der Nullkorrelation zeigt.

Unter die so definierten X_k -Komplexe nehmen wir noch für $s = -1$ und ungerades k , wo also gar kein Y_s besonders vorgegeben ist, den

Komplex der der Nullkorrelation mindestens im Grade $1 : \frac{1}{2}(k+1)$ zugehörigen X_k auf. Dann gilt folgender :

SATZ 10. Der Gesamtheit aller $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k$, die den festen Raum $\bar{S}_{2k+1}^I = \bar{B}_{s-1} \cup \bar{C}_{2k+1-s}$ treffen, entspricht auf der $G_{2k+1;k}^{AB}$ gerade die Bildmenge aller der Nullkorrelation in einem Y_{s-1} angepassten X_k , sodass diese einen linearen Komplex definieren.

Beweis : Gegeben seien der Raum $\bar{S}_{2k+1}^I = \bar{B}_{s-1} \cup \bar{C}_{2k+1-s}$ und der diesen treffende $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k$. Dann kann dies Treffen dadurch zustande kommen, dass B_k und \bar{B}_{s-1} sich schneiden. Ist dies nicht der Fall, dann betrachte man den Raum $B_{k+s} = B_k \cup \bar{B}_{s-1}$, zu ihm sei polar bezüglich der Quadrik der Raum $B_{2k+1} \cup A_{k-s}$, wobei A_{k-s} in A_k liegt. Der vorausgesetzte Schnitt zwischen S_{2k+1}^I und \bar{S}_{2k+1}^I muss im Schnitt von $(B_{2k+1} \cup A_{k-s})$ mit S_{2k+1}^I , d. h. in $(B_{k+s} \cup A_{k-s})$ liegen. Da dieser Schnitt ferner nach den Inzidenzregeln der Quadriken mindestens eine Gerade ist, so folgt daraus weiter, dass \bar{C}_{2k+1-s} den Raum $(B_{k+s} \cup A_{k-s})$ mindestens in einer Geraden trifft, oder anders ausgedrückt : bei Projektion aus dem Zentrum C_{2k+1} auf den X_{2k+1} gehen B_{k+s} und A_{k-s} in 2 Räume Y_{k+s} und X_{k-s} über, die sich mindestens in einer Geraden schneiden. Nun wissen wir aber nach Satz 8, dass Y_{k+s} und X_{k-s} in der Nullkorrelation des X_{2k+1} einander zugeordnet sind. 2 derartige zugeordnete Räume haben aber bei geradem $k+s$ im allgemeinen einen Punkt und bei ungeradem $k+s$ gar nichts gemein (s. Satz 3); da hier aber, wie wir sahen, ihr Schnitt mindestens eindimensional ist, liegt, wie behauptet, spezielles Verhalten vor. Sei umgekehrt $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k$ gegeben mit der Eigenschaft, dass B_k nach Verbindung mit einem gewissen \bar{B}_{s-1} einen B_{k+s} ergibt, der zu seinem ihm im A_{2k+1} korrelativ zugeordneten A_{k-s} auf A_k so liegt, dass B_{k+s} und A_{k-s} nach Projektion aus C_{2k+1} auf X_{2k+1} in die nullkorrelativen X_{k-s} und X_{k+s} spezieller Lage übergehen, so ist dies ersichtlich nicht anders möglich, als dass S_{2k+1}^I und der durch \bar{B}_{s-1} bestimmte $S_{2k+1}^I = \bar{B}_{s-1} \cup \bar{C}_{2k+1-s}$ sich schneiden.

Aufgrund der vorliegenden Satzes und der vorherigen ergibt sich dann : Die Menge der einer Nullkorrelation mindestens im Grade $\frac{s}{k}$ (bzw. $\frac{s+1}{k+1}$) zugehörigen X_k des X_{2k+1} erhält man als Durchschnittsmenge aller der Nullkorrelation in irgendeinem Y_s angepassten linearen X_k -Komplexe. Wir wollen jetzt kurz durchgehen, was sich daraus im einzelnen für die Fälle $k=1$ bis 5 ergibt.

$k = 1$. Bei der Nullkorrelation des X_3 haben wir, wie bekannt, einen einzigen, damit verbundenen linearen Geradenkomplex autopolarer Geraden, der auf die Punkte einer $Q_3 = N_3$ abgebildet wird.

$k = 2$. Die Ebenen des X_5 werden bezüglich der gegebenen Nullkorrelationen in 2 Klassen eingeteilt, die allgemeinen und die autopolaren. Nach unserer Auffassung haben wir dann eine $Q_{10} = A_5^{II} - B_5^{II}$ und einen weiteren zu A_5^{II} und B_5^{II} windschiefen C_5^{II} darauf zu betrachten. Nach Satz 8 werden alle Räume $S_5^I = A_2 \cup B_2 \cup C_2$ der Q_{10} auf die Punkte der N_6 innerhalb der M_{15} des S_{31} abgebildet. Weiterhin wissen wir, dass diese S_5^I -Menge mit derjenigen aller $S_5^I = A_2 \cup B_2$ zusammenfällt, die gleichzeitig sämtliche $\bar{S}_5^I = \bar{C}_4 \cup \bar{B}_0$ treffen. Nun war im Teil IV, Abschnitt 18 festgestellt worden, dass alle diese \bar{S}_5^I auf die Punkte eines W_5^I der M_{15} abgebildet werden. Diesem W_5^I entspricht in der Fundamentalkorrelation des $\langle M_{15} \rangle_{31}$ ein W_{25} durch W_5^I , womit dann demnach die Bildmenge $G_{5;2}^{AB}$ aller $S_5^I = A_2 \cup B_2$ zu schneiden ist. Nun ergibt sich zunächst, dass W_5^I windschief zum $\langle G_{5;2}^{AB} \rangle_{19}$ liegt, denn sonst müsste es einen Raum $S_5^I = A_2 \cup B_2$ geben, der gleichzeitig C_5^{II} vierdimensional träge, was unmöglich ist. Ferner kann keine der ∞^5 Hyperebenen W_{30} durch W_{25} , die in der Fundamentalkorrelation des $\langle M_{15} \rangle_{31}$ den Punkten aus W_5^I entsprechen, ganz $G_{5;2}^{AB}$ enthalten; denn sonst müsste ein gewisser $\bar{S}_5^I = \bar{C}_4 \cup \bar{B}_0$ von allen $S_5^I = A_2 \cup B_2$ getroffen werden, was nicht der Fall ist, wie wir uns beim Beweis von Satz 9 überzeugt haben. Die ∞^5 W_{30} durch W_{25} schneiden also aus $G_{5;2}^{AB}$ lauter verschiedene Teilmengen aus, die genau die ∞^5 in irgendeinem Punkte der Nullkorrelation angepassten Ebenenkomplexe des X_5 abbilden. Hieraus folgt erneut, was wir bereits wissen, dass die N_6 einen S_{13} aufspannt. Ferner erhält man folgendes Ergebnis, was für höhere k in ähnlicher Form nicht mehr richtig ist: Es gibt auch keine anderen linearen Ebenenkomplexe des X_5 , die alle autopolaren Ebenen einer Nullkorrelation enthalten, als die der in irgendeinem Punkt der Nullkorrelation angepassten Ebenen.

$k = 3$. Man hat jetzt ausser den autopolaren X_3 bezüglich der gegebenen Nullkorrelation des X_7 noch die $\frac{1}{2}$ -zugehörigen X_3 zu berücksichtigen. Diese bilden, wie wir wissen, einen ausgezeichneten linearen Komplex. In unserer Auffassung erhält man diesen in seinem Bild auf der $G_{7;3}^{AB}$ wenn man diese mit einer ausgezeichneten Hyperebene W_{126} des $\langle M_{28} \rangle_{127}$, in dem die $G_{7;3}^{AB}$ gelegen ist, schneidet. M_{28} ist dabei allen S_7^I der Quadrik Q_{14} zugeordnet, auf der A_7^I , B_7^I und C_7^I als windschief angenommen wurden, W_{126} ist dann die dem Bildpunkt

W_0 von C_7^I in der Fundamentalkorrelation des $\langle M_{28} \rangle_{127}$ zugeordnete Hyperebene. Ferner wissen wir nach Satz 9, dass N_{10} auf der M_{28} die Bildmenge aller $S_7^I = A_3 \cup B_3 \cup C_3$ ist, diese aber wiederum die Gesamtheit aller derjenigen $S_7^I = A_3 \cup B_3$ sind, die gleichzeitig sämtliche $\bar{S}_7^I = \bar{C}_5 \cup \bar{B}_1$ treffen. Die Bildpunkte aller derartigen \bar{S}_7^I erfüllen zunächst eine $G_{7;1}^{CB}$ der M_{28} , zu deren Punkten, die einen $\langle G_{7;1}^{CB} \rangle_{28}$ aufspannen, in der Fundamentalkorrelation bezüglich der M_{28} die Hyperebenen durch einen W_{98} korrelativ sind. W_{98} schneidet daher aus $G_{7;3}^{AB}$ die gesuchte Mannigfaltigkeit N_{10} aus, und gewisse ∞^{12} (nicht alle) W_{126} durch W_{98} , die sich insgesamt aber nur in W_{98} schneiden, bestimmen auf der $G_{7;3}^{AB}$ die in irgendeiner Geraden der Nullkorrelation angepassten X_3 -Komplexe des X_7 . Man hat sich dabei gerade auf diejenigen W_{126} durch W_{98} zu beschränken, die zu den Punkten der obigen $G_{7;1}^{CB}$ fundamentalkorrelativ sind. Wir wissen nach einer Abzählung auf S. 138, dass N_{10} einen $\langle N_{10} \rangle_{41}$ aufspannt. Benutzt man diese Tatsache, so ergibt sich, dass W_{98} zusammen mit $G_{7;3}^{AB}$ mindestens eine Hyperebene des $\langle W_{28} \rangle_{127}$ aufspannt. Man könnte beweisen, dass dies genau eine Hyperebene ist, und zwar die ausgezeichnete V_{126} , die dem Bildpunkt V_0 von B_7^I in der Fundamentalkorrelation entspricht

$k = 4$. Auch jetzt hat man, wie bei $k = 3$, ausser den autopolaren X_4 bezüglich einer Nullkorrelation des X_9 nur noch die $\frac{1}{2}$ -zugehörigen

zu unterscheiden. Wir betrachten diese $\frac{1}{2}$ -zugehörigen zuerst. Es gibt davon nach unserer Zählung auf S. 133 ∞^{22} unter allen ∞^{25} X_4 des X_9 . Hieraus ist es schon klar, dass sie keinen Komplex mehr bilden können, wie bei $k = 3$. In unserer Übertragung haben wir nun eine $Q_{18} = A_9^{II} - B_9^{II} - C_9^{II}$ mit der zugehörigen M_{45} des S_{511} als Bildmenge ihrer S_9^I zu betrachten. Auf M_{45} liegt wiederum eine ausgezeichnete $G_{9;4}^{AB}$ eines $\langle G_{9;4}^{AB} \rangle_{251}$. Nach Satz 9 wird die Menge aller $S_9^I = A_4 \cup B_4 \cup C_4$ auf die der Punkte einer N_{15} und die aller $S_9^I = A_4 \cup B_4 \cup C_4$ oder $A_4 \cup B_4 \cup C_2$ auf eine weitere, N_{15} enthaltende Mannigfaltigkeit F_{22} abgebildet. Nach Satz 9 erhält man die letztgenannte S_9^I -Menge auf der Q_{18} dadurch, dass man alle $S_9^I = A_4 \cup B_4$ sucht, die gleichzeitig alle $\bar{S}_9^I = \bar{C}_8 \cup \bar{B}_0$ schneiden. Nun entsprechen alle diese \bar{S}_9^I zunächst den Punkten eines auf der M_{45} gelegenen W_9^I . In der Fundamentalkorrelation bezüglich der M_{45} entspricht diesem W_9^I ein W_{501}^I durch W_9^I . Keiner der ∞^9 Hyperebenen W_{510} durch W_{501}^I kann ganz $G_{9;4}^{AB}$ enthalten; denn sonst müsste es einen $\bar{S}_9^I = \bar{C}_8 \cup \bar{B}_0$ geben, der von allen $S_9^I = A_4 \cup B_4$ getroffen wird, was nach Satz 9 nicht der Fall ist. Nach

Satz 10 schneiden diese $\infty^9 W_{510}$ genau die Bildmengen der in irgendeinem der ∞^9 Punkte der Nullkorrelation angepassten, linearen X_4 -Komplexe aus $G_{9;4}^{AB}$ aus. Alle diese und keine anderen X_4 -Komplexe haben dann die Eigenschaft, sämtliche mindestens $\frac{1}{2}$ -zugehörigen X_4

der Nullkorrelation zu enthalten. Ferner ergibt sich sofort, dass die Bildmenge F_{22} einen Raum von 251 (der Dimension von $G_{9;4}^{AB}$) weniger 10 gleich 241 Dimensionen aufspannt. Es ist $\langle F_{22} \rangle_{241} = (W_{510} \cap \langle G_{9;4}^{AB} \rangle_{251})$.

Wir betrachten jetzt die auf N_{15} abzubildende Menge aller $S_9^I = A_4 \cup B_4 \cup C_4$, nach Satz 9 der Durchschnitt aller $S_9^I = A_4 \cup B_4$ die gleichzeitig alle $\bar{S}_9^I = \bar{C}_6 \cup \bar{B}_2$ schneiden. Auf der M_{45} ergeben die Bildpunkte dieser \bar{S}_9^I zunächst eine $G_{9;2}^{CB}$ eines $\langle G_{9;2}^{CB} \rangle_{119}$. In der Fundamentalkorrelation bezüglich der M_{45} entspricht diesem $\langle G_{9;2}^{CB} \rangle_{119}$ ein durch ihn gehender Raum W_{291} , der aus $G_{9;4}^{AB}$ die N_{15} ausschneidet. Eine genauere Untersuchung, die aber hier unterbleiben soll, würde bald ergeben, dass der W_{391} zusammen mit dem $\langle G_{9;4} \rangle_{251}$ den ganzen $\langle M_{45} \rangle_{511}$ aufspannt und ihn mithin in einem Raum von 131 Dimensionen schneidet, das ist aber nach einer früheren Abzählung die Dimension des $\langle N_{15} \rangle$, was man somit erneut bestätigen kann.

$k = 5$. Bezüglich einer Nullkorrelation des X_{11} hat man erstmalig zwischen 3 Klassen von Räumen X_5 , den $\frac{1}{3}$ -, den $\frac{2}{3}$ -zugehörigen und den autopolaren zu unterscheiden. Zunächst merken wir uns wieder an, dass die mindestens im Grade $\frac{1}{3}$ zugehörigen X_5 einen schlechthin mit der Nullkorrelation verbundenen, linearen Komplex bilden. Für das Weitere haben wir eine $Q_{22} = A_{11}^I - B_{11}^I - C_{11}^I$ zugrunde zu legen, deren S_{11}^I auf die Punkte der M_{66} eines $\langle M_{66} \rangle_{2047}$ abzubilden sind. C_{11}^I entspreche der Punkt W_0 , dessen in der Fundamentalkorrelation bezüglich der M_{66} zugeordnete Hyperebene W_{2046} aus der $G_{11;5}^{AB}$ die Bildmenge des soeben erwähnten, ausgezeichneten Komplexes ausschneidet. Die $\bar{S}_{11}^I = \bar{C}_9 \cup \bar{B}_1$ der Q_{22} werden auf die Punkte einer $G_{11;1}^{CB}$ abgebildet. Dem Raum $\langle G_{11;1}^{CB} \rangle_{65}$ entspricht in der Fundamentalkorrelation ein W_{1981} , der aus $G_{11;5}^{AB}$ nach Satz 9 die Bildmenge aller mindestens $\frac{2}{3}$ -zugehörigen X_5 ausschneidet. Gewisse ∞^{20} Hyperebenen durch W_{1981} bestimmen dann die in einer Geraden der Nullkorrelation zugehörigen X_5 -Komplexe, und die ausgezeichnete, N_{21} enthaltende Menge, die W_{1981} mit $G_{11;5}^{AB}$ gemein hat, spannt einen Raum von 857 Dimensionen

auf, wie man am besten unter Vorwegnahme einiger Betrachtungen des nächsten Abschnitts einsieht.

Von der N_{21} selber schliesslich wissen wir nach der Abzählung auf S. 139 bereits, dass sie einen S_{495} aufspannt. Hier finden wir sie als Schnitt der $G_{11;5}^{AB}$ mit der Gesamtheit der zu allen $\bar{S}_{11}^I = \bar{C}_7 \cup \bar{B}_3$ gehörigen Hyperebenen des $\langle M_{66} \rangle_{2047}$. Diese Hyperebenen bestimmen die in irgendeinem X_3 der Nullkorrelation angepassten X_5 -Komplexe. Die Bildpunkte dieser \bar{S}_{11}^I erfüllen eine $G_{11;3}^{CB}$, in der Fundamentalkorrelation entspricht dem Raum $\langle G_{11;3}^{CB} \rangle_{494}$ derselben ein W_{1553} , der aus der $G_{11;5}^{AB}$ genau die N_{21} ausschneidet.

23. EINIGES WEITERE ÜBER DIE N -MANNIGFALTIGKEITEN, INSBESONDERE IHRE DUALITÄTSEIGENSCHAFTEN UND EINIGE DARSTELLUNGEN DER SYMPLEKTISCHEN GRUPPE

Wir hatten die $N_{\binom{k+2}{2}}$ als Schnitte der $G_{2k+1;k}$ definiert. Auf dieselbe ähnliche Weise kann man allgemein in jeder $G_{2k+1;i}$ ($i < k$) eine mit der gegebenen Nullkorrelation des X_{2k+1} ausgezeichnet verbundene Teilmannigfaltigkeit definieren. Es ist die Menge der Bildpunkte aller der Nullkorrelation voll zugehörigen X_i des X_{2k+1} . Hierbei hat man nach den Definitionen des Abschnitts 21 unter « voll zugehörigen X_i » einfach die X_i innerhalb der autopolaren X_k zu verstehen. Man zählt leicht nach, dass es davon $\infty^{p(k,i)}$ mit $p(k,i) = 2k(i+1) - \frac{i}{2}(3i+1) + 1$ gibt. Die betrachtete Teilmenge aus $G_{2k+1;i}$ heisse $F_{p(k,i)}$, sodass also $F_{p(k,k)} = N_{\binom{k+2}{2}}$ ist. Nun kann man $G_{2k+1;i}$ als Bildmenge aller $S_{2k+1}^I = A_i \cup B_{2k-i}$ der Q_{4k+2} des vorigen Kapitels auffassen. Nach den dort angestellten Überlegungen folgt dann weiterhin sofort, dass alle $S_{2k+1}^I = A_i \cup B_{2k-i} \cup C_i$ auf die $F_{p(k,i)}$ abgebildet werden. Hieraus ergibt sich aber, dass man $F_{p(k,i)}$ dadurch erhält, dass man die Bildmenge $G_{2k+1;i}^{AB}$ aller $S_{2k+1}^I = A_i \cup B_{2k-i}$ mit einem bestimmten linearen Raum innerhalb von $\langle M_{\binom{2k+2}{2}} \rangle$ schneidet. Wir können somit von einem Raum $\langle F_{p(k,i)} \rangle = H_{p(k,i)}$ sprechen, der mit $G_{2k+1;i}$ genau die Punkte von $F_{p(k,i)}$ gemein hat. In $H_{p(k,i)}$ wird nun die symplektische Gruppe g^k ersichtlich treu dargestellt; denn nur die identische Transformation hat die Eigenschaft, jeden voll zugehörigen X_i wieder in sich überzuführen. Es ist für das Weitere bei uns aber auch wichtig, die Irreduzibilität dieser Darstellungen zu zeigen. Es gilt der

Satz 11. Die symplektische Gruppe g^k des X_{2k+1} gestattet eine treue und irreduzible Darstellung in dem Raum $H_{p(k,i)}$, der von den Bildpunkten aller voll zugehörigen X_i der Nullkorrelation aufgespannt wird ($i < k$).

Beweis: Für $i = 0$ und beliebiges k liegt die Darstellung der g^k im Urraum X_{2k+1} der Nullkorrelation selber vor, die natürlich irreduzibel ist. Wir können daher Induktion ansetzen und behandeln zunächst den Fall $i = 1$ zu beliebigem k . Nach Teil III, Abschnitt 14 wissen wir bereits, dass $H_{p(k,1)}$ eine allgemeine Hyperebene im $\langle G_{2k+1;1} \rangle$ ist, die den mit der Nullkorrelation verbundenen linearen Komplex definiert. Dann betrachten wir einen allgemeinen G_{2k-1} , der also zu seiner nullpolaren Geraden g'_1 windschief liegt, sowie diejenige Untergruppe der symplektischen Gruppe g^k , die G_{2k-1} in sich überführt und g'_1 punktweise festlässt. Diese Untergruppe ist ersichtlich eine g^{k-1} der nächstniederen Stufe. Wir wollen die Aufspaltung von $H_{p(k,1)}$ bezüglich dieser g^{k-1} untersuchen. Alle Komplexgeraden zerfallen danach in folgende Klassen:

- a) Die Geraden in G_{2k-1} ,
- b) Diejenigen Geraden, die g'_1 und damit auch G_{2k-1} treffen,
- c) Alle übrigen Komplexgeraden.

Die Menge a) wird auf eine, einen $H_{p(k-1,1)}$ aufspannende Mannigfaltigkeit $F_{p(k-1,1)}$ abgebildet, während die Geraden b) auf die Punkte einer Segremannigfaltigkeit $S_{2k-1;1}$ übergehen. Die Untergruppe g^{k-1} operiert nach Induktionsvoraussetzung in $H_{p(k-1,1)}$ irreduzibel, ferner transformiert sie ersichtlich auch die ∞^1 erzeugenden S_{2k-1}^I der $S_{2k-1;1}$ irreduzibel in sich. Ferner liegen $H_{p(k-1,1)}$ und die $S_{2k-1;1}$ windschief zueinander. Angenommen, es existierte noch ein weiterer, von den S_{2k-1}^I und $H_{p(k-1,1)}$ verschiedener Raum R in $\Phi = H_{p(k-1,1)} \cup \langle S_{2k-1;1} \rangle$, der ebenfalls durch g^{k-1} irreduzibel in sich transformiert wird. Nun werden die ∞^1 Verbindungsräume von $H_{p(k-1,1)}$ mit den S_{2k-1}^I alle je in sich transformiert; R müsste somit als ganzes einem dieser Räume angehören oder sie alle nicht treffen, da man sonst sofort entgegen der Annahme einen in sich transformierten Teil von R hätte. Im ersten Falle würde dann die Projektion von R aus $\langle S_{2k-1;1} \rangle$ auf $H_{p(k-1,1)}$ einen dort nach Induktionsannahme nicht vorhandenen Teilraum ergeben, im zweiten Fall würde die Projektion von R aus $H_{p(k-1,1)}$ auf $\langle S_{2k-1;1} \rangle$ einen mit keinem erzeugenden S_{2k-1}^I zusammenfallenden, irreduziblen Teilraum ergeben. Ein solcher darf jedoch nicht existieren, da man aus seiner Existenz durch Schnitte und Projektionen sofort auf die eines nicht zulässigen irreduziblen Teilraumes in den erzeugenden S_{2k-1}^I selber schliessen könnte. Nun induziert unsere Nullkorrelation

im Grundraum X_{2k+1} sofort eine solche im $\langle G_{2k+1;1} \rangle$, wobei Φ einer Geraden φ' zugeordnet ist. φ' enthält den Bildpunkt der nicht zum Komplex gehörigen Geraden g'_i , sodass φ' bestimmt windschief zu Φ liegt. Der Schnittpunkt P_0 von φ' mit $H_{p(k,1)}$ ergibt den noch fehlenden Bestandteil der durch g^{k-1} in $H_{p(k,1)}$ bewirkten Aufspaltung. Dass dann auch in ganz $H_{p(k,1)}$ keine weiteren irreduziblen Bestandteile vorhanden sein können als die soeben aufgezählten, folgt durch dieselbe Schlussweise wie vorher für den Teil Φ . Wir gehen jetzt zur vollen symplektischen Gruppe g^k über. Die bei der Untergruppe soeben festgestellten Teilräume können, wie aus ihrer Bedeutung hervorgeht, bei der vollen Gruppe gewiss nicht festbleiben. Andere als die aufgezählten Teilräume hat aber die Untergruppe nicht, also auch erst recht nicht die volle Gruppe.

Für den weiteren Beweis können wir nunmehr $i > 1$ voraussetzen. Wieder wie bei $i = 1$ betrachten wir die beiden nullkorrelativen G_{2k-1} und g'_i . Die Gesamtheit aller voll zugehörigen X_i ist dann in folgende Klassen einzuteilen:

- a) Alle voll zugehörigen X_i in G_{2k-1} ,
- b) Alle voll zugehörigen $X_i = X_{i-1} \cup X'_0$ mit X_{i-1} aus G_{2k-1} und X'_0 aus g'_i ,
- c) Alle übrigen, die mithin G_{2k-1} in einem der Nullkorrelation zugehörigen X_{i-2} schneiden.

Die Räume der Menge a) werden auf die Punkte einer $F_{p(k-1,i)}$ und die der Menge b) auf die Punkte einer Produktmannigfaltigkeit $F_{p(k-1,i-1)} \times G'_1$ abgebildet. $F_{p(k-1,i)}$ spannt einen $H_{p(k-1,i)}$ auf, und die $\infty^1 F_{p(k-1,i-1)}$ des Produkts definieren $\infty^1 H_{p(k-1,i-1)}$. Es sei Φ der Verbindungsraum aller Bildpunkte von a) und b). Die Untergruppe g^{k-1} transformiert Φ in sich und innerhalb davon die erwähnten H -Räume irreduzibel in sich; ebenso wie beim Fall $i = 1$ überzeugt man sich dann davon, dass dies die einzigen irreduziblen Bestandteile in Φ bezüglich g^{k-1} sind. Zu der noch fehlenden Komponente der Aufspaltung gelangt man dann folgendermassen: Wir betrachten alle diejenigen zur Nullkorrelation gehörigen X_i , die durch einen festen X_{i-2} aus G_{2k-1} , den wir A_{i-2} nennen, gehen. Hiervon gibt es ebensoviele wie Komplexgeraden in einem X_{2k-i-3} , d. h. $\infty^{p(k-i+1,1)}$. Ihre Bildpunkte erfüllen eine $F_{p(k-i+1,1)}$ eines Raumes $H_{p(k-i+1,1)}$; man prüft leicht nach, dass eine durch eine Hyperebene $H_{p(k-i+1,1)-1}$ daraus ausgeschnittene Teilmenge bereits in Φ liegt. Nach dem, was wir von dem vorher behandelten Fall $i = 1$ her wissen, gibt es dann noch einen ausgezeichneten Punkt P_0 , der zusammen mit $H_{p(k-i+1,1)-1}$ den Raum $H_{p(k-i+1,1)}$ aufspannt. P_0

kann man demnach A_{i-2} eindeutig zuordnen. Verändert man danach A_{i-2} zur Menge aller $\infty^p(k-1, i-2)$ voll zugehörigen X_{i-2} in G_{2k-1} , so beschreibt P_0 eine Mannigfaltigkeit F . Um einzusehen, dass F mit dem G -Bild $F_{p(k-1, i-2)}$ aller obigen X_{i-2} projektiv zusammenfällt, beachten wir, dass die Gesamtheit aller X_i des X_{2k+1} durch folgende Teile im Sinne der G -Abbildungen aufgespannt wird:

- a) Alle X_i in G_{2k-1} ,
- b) Alle $X_i = G_{i-1} \cup G'_0$, mit G_{i-1} aus G_{2k-1} und G'_0 aus G'_1 ,
- c) Alle $X_i = G_{i-2} \cup g'_1$ mit G_{i-2} aus G_{2k-1} .

Die beiden ersten Gesamtheiten kann man auch als die Bildmengen aller X_i auffassen, die G_{2k-1} mindestens $i-1$ -dimensional treffen. Die ganze $G_{2k+1; i}$ wird aus dem von ihnen aufgespannten Raum in die Bildmenge von c), das ist eine $G_{2k-1; i-2}$, projiziert. Diese Projektion induziert speziell in unserem Raum $H_{p(k, i)}$ eine solche aus Φ , wobei die oben beschriebenen Punkte P_0 der Menge F in die $G_{2k-1; i-2}$ übergehen. Denn Φ hat keinen Teilraum mit F gemein, da sonst sofort auf die Existenz eines nicht zulässigen Teilraums in Φ bezüglich g^{k-1} geschlossen werden könnte. Daher ist F bei der Projektion aus Φ nicht verändert und also gleichfalls eine $G_{2k-1; i-2}$. Hiermit ist die Aufpalstung des Gesamttraumes $H_{p(k, i)}$ bezüglich g^{k-1} klar; nach derselben Schlussweise wie bei $i=1$ darf dann kein weiterer irreduzibler Bestandteil vorhanden sein. Diese Bestandteile erweisen sich aber alle als nicht invariant bei der Gesamtgruppe g^k , sodass schliesslich folgt, dass diese irreduzibel in $H_{p(k, i)}$ dargestellt wird.

Aus diesem Satz entnehmen wir insbesondere, dass die Darstellung der symplektischen Gruppe g^k im Raume $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ treu und irreduzibel ist. Wir gehen nunmehr dazu über, wie bei allen bisherigen Grundmannigfaltigkeiten, so auch bei den $N_{\binom{k+2}{2}}$ ein duales Gebilde $\widehat{N}_{\binom{k+2}{2}}$ aufzustellen. Das ist jedoch, nachdem wir wissen, dass die $N_{\binom{k+2}{2}}$ lineare Schnitte der $G_{2k+1; k}$ sind, besonders einfach. Denn nach Abschnitt 15, Satz 14 besteht zwischen $G_{2k+1; k}$ und $\widehat{G}_{2k+1; k}$ ein einfacher Übergang vermittle einer sog. Fundamentalkorrelation, die eine ebensolche im Teilraum $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ induziert. Genauer gilt:

Satz 12. Die Gesamtheit derjenigen autopolaren X_k des X_{2k+1} , die einen festen autopolaren A_k treffen, wird auf einen dem Bildpunkt U_0 von A_k in ausgezeichneter Weise zugeordneten, hyperebenen Schnitt der $N_{\binom{k+2}{2}}$ abgebildet. Durch Veränderung von U_0 über ganz $N_{\binom{k+2}{2}}$

erhält man so in den zugeordneten Hyperebenen das duale Gebilde $\widehat{N}_{\binom{k+2}{2}}$. Der Übergang zwischen $N_{\binom{k+2}{2}}$ und $\widehat{N}_{\binom{k+2}{2}}$ ist eine ausgezeichnete, sog. Fundamentalkorrelation und wie bei der $G_{2k+1;k}$ bei ungeradem k eine Polarität und bei geradem k eine Nullkorrelation. Jede andere Korrelation, die auch $N_{\binom{k+2}{2}}$ in $\widehat{N}_{\binom{k+2}{2}}$ überführt, erhält man durch Zusammensetzen dieser Fundamentalkorrelation mit einer beliebigen Kollineation, die $N_{\binom{k+2}{2}}$ in sich transformiert.

Beweis: Dem Punkt U_0 auf $N_{\binom{k+2}{2}}$ entspricht vermöge der Fundamentalkorrelation im Raume $\langle G_{2k+1;k} \rangle$ eine ausgezeichnete Hyperebene; diese wird niemals ganz $N_{\binom{k+2}{2}}$ enthalten, da sonst jeder autopolare X_k einen festen aus seiner Menge schneiden müsste, was bekanntlich nicht der Fall ist (s. Satz 5). Die den Punkten von $N_{\binom{k+2}{2}}$ im Grassmannraum $\langle G_{2k+1;k} \rangle$ zugeordneten Hyperebenen mögen den Raum K^k gemein haben. Erst wenn man weiss, dass die Räume K^k und $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ sich nicht treffen, sind wir sicher, dass die auf die beschriebene Weise in $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ induzierte Fundamentalkorrelation nicht ausgeartet ist, also $N_{\binom{k+2}{2}}$, wie behauptet, in das duale Gebilde $\widehat{N}_{\binom{k+2}{2}}$ überführt. Nun werden aber $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ und K^k ersichtlich durch die symplektische Gruppe g^k je in sich transformiert; hätten sie einen nicht leeren Durchschnitt, so wäre dies entgegen der Aussage von Satz 11 ein durch g^k in sich transformierter Teilraum von $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$. Wir haben somit im N -Raum eine Fundamentalkorrelation gewonnen, die natürlich ebenso wie die umfassendere im Grassmannraum bei geradem k eine Nullkorrelation und bei ungeradem k eine Polarität ist. Hat man ferner eine beliebige Korrelation, die $N_{\binom{k+2}{2}}$ in $\widehat{N}_{\binom{k+2}{2}}$ überführt, so setze man diese mit der Fundamentalkorrelation zusammen und erhält eine Kollineation von $N_{\binom{k+2}{2}}$ in sich.

Wir hatten im vorigen Abschnitt die Mannigfaltigkeit $N_{\binom{k+2}{2}}$ als Schnitt der $G_{2k+1;k}$ definiert. Die symplektische Gruppe g^k des X_{2k+1} transformiert zunächst die autopolaren X_k in sich, dann aber auch alle übrigen X_k des X_{2k+1} so ineinander, dass die der Nullkorrelation in einem bestimmten Grade zugehörigen X_k nur in X_k derselben Eigenschaft übergehen, wie sofort aus geometrischen Gründen folgt. Das be-

deutet wiederum, dass man \mathfrak{g}^k auch als Gruppe von Projektivitäten des Grassmannraumes $\langle G_{2k+1; k} \rangle$ darstellen kann. Die Zerlegung dieser Darstellung in irreduzible Bestandteile interessiert uns; es werden die in Satz 11 beschriebenen Bestandteile sein, die dabei herauskommen werden. Nun haben wir im Satz 12 soeben bewiesen, dass dem Raum $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ mittels der Fundamentalkorrelation im $\langle G_{2k+1; k} \rangle$ ein dazu windschief liegender Raum K^k von der Dimensionenzahl $\binom{2k+2}{k+1} - m_k - 2$ entspricht, wenn m_k die Dimension von $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ ist. K^k wird durch \mathfrak{g}^k ebenfalls in sich transformiert, und es handelt sich jetzt darum, die weitere Aufspaltung von K^k zu finden. Dass eine solche für $k > 2$ vorliegen muss, ergibt sich folgendermassen: Alle mindestens im Grade $\frac{k-i+1}{k+1}$ bei ungeradem, bzw. $\frac{k-i}{k}$ bei geradem k der Nullkorrelation zugehörigen X_k werden nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts auf eine durch einen bestimmten linearen Raum $N^{k, k-2i}$ aus der $G_{2k+1; k}$ ausgeschnittene Punktmenge abgebildet. Diese Räume $N^{k, k-2i}$ bilden folgende Kette:

$$(1) \quad \begin{aligned} N^{k, k} &\subset N^{k, k-2} \subset N^{k, k-4} \subset \dots \subset N^{k, 1} \text{ bei ungeradem } k, \text{ bzw.} \\ N^{k, k} &\subset N^{k, k-2} \subset N^{k, k-4} \subset \dots \subset N^{k, 2} \text{ bei geradem } k; \end{aligned}$$

alle diese Räume sind schliesslich in $\langle G_{2k+1; k} \rangle$ enthalten, der demnach mit $N^{k, -1}$, bzw. $N^{k, 0}$ bezeichnet werden müsste. Es sei $N^{k, k-2i} \cap K^k = K^{k-2i}$, und $N^{k, k-2i}$ entspreche in der Fundamentalkorrelation des $\langle G_{2k+1; k} \rangle$ ein Raum \bar{K}^{k-2i} , von dem sich später von selber ergeben wird, dass er zu $N^{k, k-2i}$ windschief liegt. Bezeichnen wir schliesslich noch mit $P^{k, i}$ den Durchschnitt $N^{k, k-2i} \cap K^{k, k-2i+2}$, so werden wir folgende Aufspaltung von K^k bezüglich \mathfrak{g}^k erhalten:

$$(2) \quad \begin{aligned} K^k &= P^{k, 1} - P^{k, 2} - \dots - P^{k, \frac{k+1}{2}} \text{ bei ungeradem } k, \text{ bzw.} \\ K^k &= P^{k, 1} - P^{k, 2} - \dots - P^{k, \frac{k}{2}} \text{ bei geradem } k. \end{aligned}$$

Wir haben nunmehr folgende Fragen zu beantworten: Wie wirkt \mathfrak{g}^k in den Räumen $P^{k, i}$ und ist die Darstellung dort, wie zu erwarten, irreduzibel? Spannen die $P^{k, i}$ ($i = 1, \dots, \frac{k+1}{2}$ bzw. $\frac{k}{2}$) wirklich K^k auf und wie gross sind ihre Dimensionen sowie die Dimension m_k von

$N^{k,k}$? Zur Beantwortung dieser Fragen ist es zweckmässig, die Überlegungen des vorigen Abschnitts heranzuziehen. Wir haben dort die $G_{2k+1;k}^{AB}$ als Teilmenge $G_{2k+1;k}^{AB}$ derjenigen $M_{\binom{2k+2}{2}}$ aufgefasst, deren Punkte den S_{2k+1}^I einer $Q_{4k+2} = A_{2k+1} - B_{2k+1}$ zugeordnet waren, wobei A_{2k+1} , B_{2k+1} und der weitere Raum C_{2k+1} drei zueinander windschiefe Räume der Q_{4k+2} waren, die eine bestimmte Segresche Mannigfaltigkeit $S_{2k+1;1}$ auf der Q_{4k+2} festlegen. Wir erklären dann folgendermassen eine zu g^k isomorphe Gruppe von Transformationen der $S_{2k+1;k}$ in sich:

- a) Die Punkte aus A_{2k+1} sollen nach Massgabe von g^k transformiert werden.
- b) A_{2k+1} , B_{2k+1} und C_{2k+1} sollen als ganze unverändert bleiben.
- c) Die Punkte von B_{2k+1} und C_{2k+1} sollen genau so verändert werden, wie die ihnen vermöge der erzeugenden Geraden der $S_{2k+1;k}$ auf A_{2k+1} zugeordneten Punkte.

Dies definiert eine zu g^k isomorphe Gruppe von Projektivitäten des ganzen umgebenden Raumes; dabei geht auch die Q_{4k+2} in sich über. Denn sei $A_{2k+1}^{II} = A_{2k} \cup B_0 \cup C_0$ ein erzeugender Raum der Q_{4k+2} dann geht durch B_0 eine C_0 und A_{2k} in A_0 treffende, erzeugende Gerade g der $S_{2k+1;1}$. Der Transformation τ der symplektischen Gruppe g^k sei die projektive Transformation T zugeordnet, bei der A_{2k} , B_0 und C_0 in A'_{2k} , B'_0 und C'_0 übergehen mögen, dann muss bei T auch A_0 in den Schnittpunkt A'_0 der Geraden $g' = B'_0 C'_0$ mit A'_{2k} übergehen, weil τ zur symplektischen Gruppe gehört. $(A'_{2k} \cup B'_0 \cup C'_0)$ ist daher auch ein erzeugender Raum der Q_{4k+2} . Die soeben definierten Transformationen der Q_{4k+2} in sich sind ersichtlich solche 1. Art, d. h. sie führen die S_{2k+1}^I wieder in S_{2k+1}^I über. Die aus ihnen gebildete, zu g^k isomorphe Gruppe kann daher auch auf die Bildmenge $M_{\binom{2k+2}{2}}$ aller S_{2k+1}^I der Q_{4k+2} ausgeübt werden und definiert im $S_{2^{2k+1}}$ der $M_{\binom{2k+2}{2}}$ wiederum eine zu g^k isomorphe Gruppe von Projektivitäten, die $M_{\binom{2k+2}{2}}$ in sich transformieren. Ersichtlich gehen dabei alle $G_{2k+1;i}^{AB}$, $G_{2k+1;i}^{BC}$ usw. in sich über; diese sind ihrerseits wie im vorigen Abschnitt durch die Gesamtheit aller S_{2k+1}^I definiert, die A_{2k+1} und B_{2k+1} , bzw. B_{2k+1} und C_{2k+1} in bestimmter Weise in Räumen komplementärer Dimension schneiden.

Wir könnten jetzt die Aufgabe lösen, ganz $\langle M_{\binom{2k+2}{2}} \rangle$ bezüglich der g^k aufzuspalten; es interessiert uns jedoch nur die darin enthaltene Aufspaltung von $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$, die wir von dem umfassenderen Stand-

punkt aus jetzt leicht erhalten. Im Raum $\langle M_{\binom{2k+2}{2}} \rangle$ gibt es zunächst die sog. «grosse Fundamentalkorrelation», die in der bekannten Weise die «kleinen Fundamentalkorrelationen», in $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ und $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ induziert. Dem Raum $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ entspreche in der grossen Fundamentalkorrelation der dazu windschiefe Raum L^k ; sei dann H_0 ein weder auf $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ noch auf L^k gelegener Punkt, so ist ihm eine Hyperebene zugeordnet, die weder L^k noch $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ ganz enthält, sondern $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ in H' schneide. $(H_0 \cup L^k)$ ist dann in der grossen Fundamentalkorrelation dem Raum H' zugeordnet und dem Schnittpunkt $H'_0 = (H_0 \cup L^k) \cap \langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ demnach die Hyperebene $(H' \cup L^k)$. H'_0 und H' sind dann in der kleinen Fundamentalkorrelation des Raumes $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ einander zugeordnet, und H'_0 entsteht durch Projektion des Punktes H_0 aus dem Zentrum L^k auf $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$. Ebenso wie einzelne Punkte kann man aber auch ganze Räume aus L^k projizieren; machen wir dies mit gewissen Räumen $H^{k,i}$, die durch die Bildmengen aller $S_{2k+1}^i = A_i \cup B_j \cup C_{2k-j}$ aufgespannt werden, so erhalten wir gerade die Bestandteile der Aufspaltung (2) des Raumes $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$. Genauer gilt folgender:

SATZ 13. Die Gesamtheit aller $S_{2k+1}^i = A_{k-2i} \cup B_{k-2i} \cup C_{k+2i}$ der Q_{4k+2} wird auf die Punkte einer einen Raum $H^{k,k-2i}$ aufspannenden Mannigfaltigkeit $F_{p(k,k-2i)}$ abgebildet. $H^{k,k-2i}$ wird dann ohne projektive Veränderung auf einen ebenso zu bezeichnenden Raum innerhalb von $\langle G_{2k+1;k}^{AB} \rangle$ projiziert und ergibt dort den in (2) mit $P^{k,i}$ bezeichneten Bestandteil der Aufspaltung von K^k . Lässt man hierin i von 1 bis $\frac{k+1}{2}$ (bzw. bis $\frac{k}{2}$) laufen und versteht bei ungeradem k unter $H^{k,-1}$ einen Punkt, so erschöpfen die Bestandteile $H^{k,k-2i}$ ($i = 1, 2, \dots, \frac{k+1}{2}$, bzw. $\frac{k}{2}$) die gesamte Aufspaltung des Komplexraumes K^k bezüglich der symplektischen Gruppe g^k .

Beweis: Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnitts ist es zunächst klar, dass die Gesamtheit aller $S_{2k+1}^i = A_{k-2i} \cup B_{k-2i} \cup C_{k+2i}$ der Q_{4k+2} auf die Punkte einer Mannigfaltigkeit $F_{p(k,k-2i)}$ als Bildmenge der voll zugehörigen X_{k-2i} einer Nullkorrelation des X_{2k+1} abgebildet wird. Wir haben ferner im Satz 11 gesehen, dass die symplektische Gruppe g^k im Raume $H^{k,k-2i}$, der von dieser $F_{p(k,k-2i)}$ aufgespannt wird, treu und irreduzibel dargestellt wird. Wegen dieser Irreduzibilität kann $H^{k,k-2i}$ nur entweder windschief zu L^k sein oder vollständig darin enthalten sein. Die letztgenannte Möglichkeit kommt jedoch nicht in Frage,

da man hieraus schliessen könnte, dass jeder $S_{2k+1}^I = A_k \cup B_k$ jeden $S_{2k+1}^I = A_{k-2i} \cup B_{k-2i} \cup C_{k+2i}$ treffen würde, was ersichtlich nicht der Fall ist. Bei Projektion aus L^k werden daher die Räume $H^{k, k-2i}$ und die darin liegenden $F_{p^{(k, k-2i)}}$ projektiv nicht verändert; nach den Erklärungen des vorigen Abschnitts geht dann $F_{p^{(k, k-2i)}}$ in die Menge aller Komplexpunkte innerhalb von K^k über, die zu den in irgendeinem X_{k-2i} der Nullkorrelation angepassten Komplexen gehören, wobei X_{k-2i} jetzt aber selber der Nullkorrelation angehört. Bei ungeradem k erhält man so durch Projektion aus L^k noch den Bildpunkt $H^{k, -1} = P^k, \frac{k+1}{2}$ des Komplexes aller der Nullkorrelation spezieller zugehörigen X_k . Davon, dass diese $H^{k, k-2i}$ ($i = 1, 2, \dots, \frac{k+1}{2}$, bzw. $\frac{k}{2}$) den ganzen Komplexraum K^k aufspannen, überzeugt man sich folgendermassen: Man bezeichne vorübergehend mit $\Phi^{k, k-2i}$ die Bildmenge der mindestens im Grade $\frac{k-2i}{k}$ (bzw. $\frac{k-2i+1}{k+1}$) der Nullkorrelation zugehörigen X_k , sodass also $\Phi^{k, k-2i}$ den Raum $N^{k, k-2i}$ aufspannt. Z_k sei dann ein Raum des X_{2k+1} , der mit seinem nullkorrelativ entsprechenden Z'_k genau den Raum $Z_{k-2i} = Z_k \cap Z'_k$ gemein hat. Der Bildpunkt R_0 von Z_k liegt dann in $\Phi^{k, k-2i}$, aber nicht in $\Phi^{k, k-2i+2}$. Nun folgt leicht durch Rekursionsbetrachtung, dass alle durch Z_{k-2i} gehenden und in $Z_k \cup Z'_k$ liegenden X_k auf Punkte abgebildet werden, die ganz im Raum $R_0 \cup N^{k, k-2i}$ liegen (diese X_k verhalten sich wie die X_{2i-1} bezüglich einer Nullkorrelation des X_{4i-1}). Projiziert man den $N^{k, k-2i}$ aus dem Auge $N^{k, k-2i+2}$ auf $P^{k, i}$, so gehen mithin alle diese Punkte in denselben Punkt R'_0 aus $P^{k, i}$ über. R'_0 ist daher dem Raum Z_{k-2i} speziell zugeordnet, und es folgt auch leicht, dass es gerade derjenige Punkt ist, der den linearen Komplex aller in Z_{k-2i} der Nullkorrelation angepassten X_k definiert. Die hierbei auftretenden Z_{k-2i} sind alle voll zugehörig; lässt man weiterhin noch i variieren, so wird der ganze Grassmannraum überdeckt, die Aufspaltung (2) von K^k , zu der man noch den Raum $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$ hinzunehmen hat, spannt mithin ganz $\langle G_{2k+1; k} \rangle$ auf, wie behauptet.

Auf dieselbe Weise könnte man auch die Aufspaltung der übrigen Grassmannräume $G_{2k+1; j}$ ($j < k$) bezüglich der symplektischen Gruppe \mathfrak{g}^k herleiten. Es gilt dann folgende Verallgemeinerung von Satz 13:

SATZ 14. Der Grassmannraum $\langle G_{2k+1; k-2i} \rangle$, wobei i eine der ganzen Zahlen von 0 bis $\left[\frac{k}{2} \right]$ ist, wird bezüglich der symplektischen Gruppe \mathfrak{g}^k in folgende irreduziblen Teilräume aufgespalten:

$$(3) \quad \langle G_{2k+1; k-2i} \rangle = H^{k, k-2i} - H^{k, k-2i-2} - \dots - H^{k, 0}, \text{ (bzw. } H^{k, -1} \text{).}$$

Beweis: Der Beweis dieses Satzes geht genau nach dem Muster der bisherigen Überlegungen und sei daher nur angedeutet: Man fasse die Punkte der $G_{2k+1; k-2i}$ als Bilder der $S_{2k+1}^I = C_{k+2i} \cup B_{k-2i}$ unserer Q_{4k+2} auf. Hierin spannen dann die Bildpunkte aller $S_{2k+1}^I = C_{k+2i} \cup B_{k-2i} \cup A_{k-2i}$ den ersten Bestandteil $H^{k, k-2i}$ auf. Nimmt man zu diesen Punkten noch die Bildpunkte aller $S_{2k+1}^I = C_{k+2i} \cup B_{k-2i} \cup A_{k-2i-2}$ hinzu, so wird diese Gesamtmenge aus $H^{k, k-2i}$ in eine Mannigfaltigkeit $F_{p(k, k-2i-2)}$ des Bestandteils $H^{k, k-2i-2}$ projiziert usw., bis man den ganzen Raum $\langle G_{2k+1; k-2i}^{BC} \rangle$ erschöpft hat.

Wir ziehen nunmehr aus dem Bisherigen noch einen Schluss über die Dimensionen der bisher aufgetretenen Räume, speziell die Dimension des Raumes $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$.

Satz 15. Die Bildpunkte aller, einer gegebenen Nullkorrelation des X_{2k+1} mindestens im Grade $\frac{k-2i}{k}$ bei geradem k , bzw. $\frac{k-2i+1}{k+1}$ bei ungeradem k , angehörigen X_k spannen einen Raum $N^{k, k-2i}$ von $\binom{2k+2}{k+1} - \binom{2k+2}{k-2i-1} - 1$ Dimensionen auf. Speziell ist $\binom{2k+2}{k+1} - \binom{2k+2}{k-1} - 1$ die Dimension des Raumes $\langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$.

Beweis: Wir wissen bereits, dass der ganze Grassmannraum $\langle G_{2k+1; k} \rangle$ folgende Aufspaltung bezüglich der symplektischen Gruppe \mathfrak{g}^k hat: $\langle G_{2k+1; k} \rangle = N^{k, k} - H^{k, k-2} - \dots - H^{k, k-2i} - \dots - H^{k, 0}$ (bzw. $H^{k, -1}$) Ferner wissen wir, dass die Bestandteile $N^{k, k} = \langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$, $H^{k, k-2}$, ..., $H^{k, k-2i}$ den Raum $N^{k, k-2i}$ aufspannen. Nach Satz 14 spannen aber die Restbestandteile $H^{k, k-2i-2}$ usw. bis $H^{k, 0}$ (bzw. $H^{k, -1}$) einen Grassmannraum $\langle G_{2k+1; k-2i-2} \rangle$ auf. Da dieser die Dimension $\binom{2k+2}{k-2i-1} - 1$ und $\langle G_{2k+1; k} \rangle$ die Dimension $\binom{2k+2}{k+1} - 1$ hat, folgt sofort die behauptete Formel.

Bei der weiteren Untersuchung der N -Mannigfaltigkeiten wird man ebenso wie bei den umfassenderen Grassmann-Mannigfaltigkeiten von selber auf die durch Inzidenzvorschriften im Grundraum X_{2k+1} definierten linearen Schnitte geführt. Wir gehen zum Schluss dieses Teils nur noch ein wenig auf die einfachsten derselben ein, die man im Einklang mit unserer Definition in der Einleitung auch Schmiegräume in einem Punkt der $N_{\binom{k+2}{2}}$ nennen kann, ein. Unter dem Schmiegrum $T^{(s)}(U_0)$ im Punkt U_0 , der das Bild des autopolaren A_k im Grund- X_{2k+1}

ist, versteht man denjenigen linearen Raum, der die Bilder aller autopolaren X_k aus $N_{\binom{k+2}{2}}$ ausschneidet, die A_k mindestens $k - s$ -dimensional schneiden ($s < k$). Ebenso wie bei den $G_{2k+1;k}$ sieht man folgenden Satz ein, den wir ohne Beweis angeben :

SATZ 15. Seien A_k und B_k zwei zueinander windschiefe, autopolare Räume einer gegebenen Nullkorrelation des X_{2k+1} und ist U_0 der Bildpunkt von A_k , so wird der Schmiegraum s -ter Stufe $T^{(s)}(U_0)$ folgendermassen aufgespannt :

$\text{Im } X_{2k+1}$	$\text{Im RAUM } \langle N_{\binom{k+2}{2}} \rangle$
A_k	U_0
Gesamtheit aller autopolaren $A_{k-1} \cup B_0$	$V_k^2 = V^2(G_{k;0})$
Gesamtheit aller autopolaren $A_{k-2} \cup B_1$	$V^2(G_{k;1})$
.....	
Gesamtheit aller autopolaren $A_{k-s} \cup B_{s-1}$	$V^2(G_{k;s-1})$

Ferner stehen sich in der Fundamentalkorrelation folgende Räume dual gegenüber : $T^{(s)}(U_0)$ und $T^{(k-s)}(U_0)$ ($s = 0, \dots, k$).

Wir betrachten schliesslich noch gesondert für die Werte $k = 1$ bis 5, welche Schmiegräume wir somit im einzelnen zu unterscheiden haben :

$k = 1$: Bei der N_3 , die eine Quadrik Q_3 des S_4 ist, sind in bekannter Weise die Tangentialräume $T_3^{(1)}$ zu betrachten, die in der Polarität bezüglich der Q_3 ihren Berührungspunkten zugeordnet sind.

$k = 2$. Bei der N_6 des S_{13} hat man folgende Kette von Berührungsräumen in jedem Punkt U_0 zu unterscheiden :

$$U_0 = T^{(0)}(U_0) \subset T_6^{(1)}(U_0) \subset T_{12}^{(2)}(U_0)$$

U_0 und $T_{12}^{(2)}(U_0)$ stehen sich in der Fundamentalkorrelation des $\langle N_6 \rangle_{13}$, die jetzt eine Nullkorrelation ist, gegenüber, während die $T_6^{(1)}$ autopolar sind.

$k = 3$. Bei der N_{10} des S_{41} hat man folgende Kette von Berührungsräumen im allgemeinen Punkt U_0 der N_{10} :

$$U_0 = T^{(0)}(U_0) \subset T_{10}^{(1)}(U_0) \subset T_{30}^{(2)}(U_0) \subset T_{40}^{(3)}(U_0)$$

hierbei stehen sich in der ausgezeichneten Polarität des $\langle N_{10} \rangle_{41}$ folgende Räume gegenüber : U_0 und $T_{40}^{(3)}(U_0)$ sowie $T_{10}^{(2)}$ und $T_{30}^{(3)}$.

$k = 4$. Bei der N_{15} des S_{131} gibt es folgende Berührungsräume im allgemeinen Punkt U_0 :

$$U_0 = T^{(0)}(U_0) \subset T_{15}^{(1)}(U_0) \subset T_{65}^{(2)}(U_0) \subset T_{115}^{(3)}(U_0) \subset T_{130}^{(4)}(U_0).$$

Die angeschriebenen Dimensionszahlen ergeben sich besonders einfach, wenn man beachtet, dass dem Tangential- $T^{(1)}$ von 15 Dimensionen nach Satz 15 ein $T^{(3)}$ von 115 Dimensionen in der Fundamentalkorrelation des $\langle N_{15} \rangle_{131}$ zugeordnet sein muss. Für den dazwischenliegenden $T^{(2)}$ kommen nur 65 Dimensionen in Frage, da er sich selbst entsprechen, d. h. autopolar in der durch N_{15} definierten Nullkorrelation des S_{131} sein muss.

$k = 5$. Im vorigen Abschnitt haben wir bereits ausgerechnet, dass jetzt eine N_{21} des S_{428} vorliegt. Die Kette der Schmiegräume lautet folgendermassen:

$$U_0 = T^{(0)}(U_0) \subset T_{21}^{(1)}(U_0) \subset T_{126}^{(2)}(U_0) \subset T_{301}^{(3)}(U_0) \subset T_{406}^{(4)}(U_0) \subset T_{427}^{(5)}(U_0)$$

Bei der Ausrechnung dieser Dimensionszahlen braucht man nur zu wissen, dass $V^2(G_{5;1})$ einen Raum von 104 Dimensionen aufspannt, wie wir zu Beginn des vorigen Abschnitts ausgerechnet hatten. Daraus ergibt sich mit Hilfe von Satz 15 die Dimension 126 des $T_{126}^{(2)}$, der Tangentialraum $T_{21}^{(1)}$ hat natürlich 21 Dimensionen, alles übrige ergibt sich durch Dualisieren. Denn es stehen sich gemäss Satz 15 folgende Schmiegräume in der Fundamentalkorrelation des $\langle N_{21} \rangle_{428}$, die jetzt eine Polarität ist, gegenüber: $T^{(0)}$ und $T^{(5)}$, $T^{(1)}$ und $T^{(4)}$, sowie schliesslich $T^{(2)}$ und $T^{(3)}$.

TEIL VI

RELATIONENSYSTEME UND STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION DER GRUNDMANNIGFALTIGKEITEN

24. ALLGEMEINE BEMERKUNGEN ÜBER DIE RELATIONENSYSTEME DER MANNIGFALTIGKEITEN

Unsere Grundmannigfaltigkeiten hatten wir teils durch eine Parameterdarstellung, wie die Veroneseschen und Segreschen, teils durch ein Übertragungsprinzip und damit verbundene rekursive Erzeugung definiert, wie die Grassmannschen und die M_Q -Mannigfaltigkeiten oder schliesslich als ausgezeichnete lineare Schnitte der Grassmannschen

$G_{2k+1;k}$, wie die N -Mannigfaltigkeiten des Teils V. Nun wird bekanntlich in der algebraischen Geometrie eine Mannigfaltigkeit stets als Nullstellengebilde eines Primideals \mathfrak{P} definiert; es wird daher auch für uns von Wichtigkeit sein, unsere Grundmannigfaltigkeiten einmal erneut, systematisch unter diesem Gesichtspunkt zu betrachten, wobei wir viele weitere interessante Einsichten gewinnen werden. In einigen Fällen, wie bei der V_2^2 , den $S_{m;n}$, der $G_{5;2}$, den $G_{n;1}$ und den einfachsten M_Q hatten wir in den betreffenden Abschnitten explizit ein System linear unabhängiger quadratischer Polynome angegeben, das als Basis des zugehörigen Primideals diene. Wir wissen auch bereits, dass alle Grundmannigfaltigkeiten durch quadratische Relationen so vollständig beschrieben werden können. Wir machen nun zunächst einige allgemeine Bemerkungen darüber, in welcher Weise wir diese Dinge weiter geometrisch ausdeuten und untersuchen wollen.

Sei F_d eine beliebige Mannigfaltigkeit des S_n , die als Nullstellengebilde folgender m linear unabhängigen Polynome k -ten Grades definiert werde:

$$(1) \quad f^1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f^m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Diese Polynome sollen also nicht mehr gemeinsame Nullstellen als die Punkte von F_d haben, und jedes Polynom k -ten Grades, das auf allen Punkten von F_d verschwindet, ist Linearkombination der Polynome in (1). Dann betrachten wir die im Teil I mit V_n^k bezeichnete Mannigfaltigkeit mit folgender Parameterdarstellung:

$$(2) \quad x_{i_0 i_1 \dots i_n} = x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (i_0 + i_1 + \dots + i_n = k)$$

Jeder Hyperfläche k -ten Grades des S_n entspricht dann eineindeutig eine Hyperebene in dem von der V_n^k aufgespannten Raume $\langle V_n^k \rangle$, derart dass die m Hyperflächen (1) m Hyperebenen zugeordnet sind, die sich wegen der linearen Unabhängigkeit von (1) in einem F_d zugeordneten Raum $L^k(F_d)$ des $\langle V_n^k \rangle$ schneiden, der $\binom{n+k}{k} - m - 1$ Dimensionen hat. $L^k(F_d)$ schneidet aus V_n^k eine bestimmte, eineindeutig auf F_d bezogene Punktmannigfaltigkeit aus, die wir im Teil I die « V^k -Transformierte oder das V^k -Bild von F_d » nannten. Wir bemerken noch, dass man durch Multiplizieren der Polynome (1) mit allen Monomen s -ten Grades in den x_i und Auswahl von linear unabhängigen unter den so entstandenen $m \cdot \binom{n+s}{s}$ Polynomen $k+s$ -ten Gra-

des eine Basis für das Linearsystem aller Hyperflächen $k + s$ -ten Grades durch F_d erhält. Durch entsprechende Deutung im Raum $\langle V_n^{k+s} \rangle$ ergibt sich dann $L^{k+s}(F_d)$ und darin $V^{k+s}(F_d)$. Um den Umfang der Untersuchungen nicht zu sehr anschwellen zu lassen, wird bei uns im folgenden bis auf eine Ausnahme, wenn F_d gleich der Veroneseschen Fläche V_2^2 ist, k stets gleich 2 sein. Lassen wir dann F_d mit einer unserer Grundmannigfaltigkeiten zusammenfallen, so werden wir unser Augenmerk auf folgende Fragestellungen zu richten haben:

1) Wie gross ist die Zahl m linear unabhängiger Relationen k -ten Grades, denen F_d genügt (im allgemeinen wird $k = 2$ sein), oder was nach unserer Überlegungen von vorhin auf dasselbe hinauskommt: Welche Dimension hat der von den Punkten der transformierten Mannigfaltigkeit $V^k(F_d)$ aufgespannte Raum?

2) Stellt man die quadratischen Hyperflächen durch F_d so auf, wie sie sich unmittelbar aus der Parameterdarstellung der F_d oder der Erzeugung von F_d ergeben, wobei also bereits ein Koordinatensystem im Raume $\langle F_d \rangle$ ausgezeichnet ist, so beobachtet man folgendes: In den quadratischen Polynomen kommt fast immer nur ein Teil der Koordinaten x_0, x_1, \dots, x_n vor, d. h. die entsprechenden Quadriken, durch deren Schnitt F_d definiert ist, sind Kegel mit einem bestimmten Spitzenraum. Es entsteht dann die Aufgabe, die Kegel eines bestimmten, insbesondere des niedrigsten Ranges zu bestimmen, die durch F_d gehen. Es genügt dazu, die Spitzenräume anzugeben, die stets eine geometrisch ausgezeichnete Lage bezüglich der F_d besitzen. Den höchst entarteten Kegeln durch F_d wird dann eine Menge von Hyperebenen im $\langle V_n^2 \rangle$ und dual dazu dort eine in wichtiger Beziehung zu F_d stehende Punktmannigfaltigkeit zugeordnet sein.

3) Unsere Grundmannigfaltigkeiten wurden stets durch eine Gruppe von Projektivitäten transitiv in sich transformiert. Diese Gruppe definiert durch die Übertragung auf die V_n^2 dort im Raum $\langle V_n^2 \rangle$ eine isomorphe Gruppe von Projektivitäten, die $V^2(F_d)$ in sich überführen, aber ausser $\langle V^2(F_d) \rangle$ noch eine bestimmte Zahl weiterer Fixräume besitzt. Es ist dann von Bedeutung, diese Zerlegung in Fixräume anzugeben sowie die Bedeutung derselben, d. h. der zugehörigen Teilsysteme von Quadriken zu klären. Man wird so von selber auch wieder auf die in 2) erwähnten Systeme von Kegeln des niedrigsten Ranges kommen.

Um diese Fragen anzugreifen, wollen wir zuvor noch die Irreduzibilität der Darstellungen der betreffenden Gruppen in den Räumen unserer Grundmannigfaltigkeiten $\langle F_d \rangle$ nachweisen. Unter Gruppe \mathcal{G}

der F_d genügt es hierbei, den kontinuierlichen Bestandteil der Gruppe aller Projektivitäten der F_d in sich zu verstehen.

Satz 1. Die Darstellung der Gruppe \mathcal{G} einer Grundmannigfaltigkeit F_d in ihrem Raume $\langle F_d \rangle$ ist irreduzibel.

Beweis: Zum Beweis gehen wir der Reihe nach alle Mannigfaltigkeitsklassen durch, wobei wir die $N_{\binom{k+2}{2}}$ übergehen können, da für sie unser Satz bereits im Satz 11 von Abschnitt 23 enthalten ist. Wir werden hier das gleiche Beweisverfahren anwenden wie bei jenem Satz, d. h. den Raum $\langle F_d \rangle$ nach einer geeigneten Untergruppe von aufspalten und Induktion anwenden. Wir behandeln zunächst:

a) V -Mannigfaltigkeiten. Gegeben sei eine V_n^k , etwa in der Parameterdarstellung (2). \mathcal{G} ist jetzt die Gruppe aller Projektivitäten des Grundraums X_n , \mathfrak{g} sei die Untergruppe derjenigen projektiven Transformationen des X_n , die einen gegebenen Punkt A_0 und eine gegebene, mit A_0 nicht inzidente Hyperebene B_{n-1} festlassen. A_0 werde dann auf den Punkt U_0 und B_{n-1} auf die Teilmenge V_{n-1}^k aus V_n^k abgebildet. Der Schmiegraum $k-1$ -ter Stufe $T^{k-1}(U_0)$ in U_0 ist dann zum Raum $\langle V_{n-1}^k \rangle$ windschief, und beide Räume spannen zusammen ganz $\langle V_n^k \rangle$ auf; dies folgt aufgrund unserer Entwicklungen im Teil I daraus, dass es keine Hyperfläche k -ten Grades im X_n gibt, die einen k -fachen Punkt in A_0 hat, d. h. ein Kegel mit Spitze in A_0 ist, und ausserdem B_{n-1} als Bestandteil besitzt. Dann erinnern wir an folgende Tatsache: $T^{k-1}(U_0)$ wird durch die Punkte einer V_n^{k-1} aufgespannt; V_n^{k-1} enthält U_0 und ist auf diejenigen Hyperflächen k -ter Klasse des X_n abzubilden, die in A_0 und einen beliebigen weiteren, $k-1$ -fach zählenden Punkt zerfallen. Wir nehmen zunächst $n-1$ an; V_1^k ist die rationale Normkurve C^k und \mathfrak{g} die eingliedrige Gruppe der Projektivitäten der C^k in sich, die 2 Punkte U_0 und V_0 der C^k festhalten. Für die Gerade C^1 ist es klar, dass diese Untergruppe nichts anderes festlässt, sodass wir Induktion ansetzen können. Die Fixpunkte U_0 und V_0 auf der jetzt vorliegenden C^k mögen den binären Polynomen $x_0^k = 0$ und $x_1^k = 0$ entsprechen, dann gibt es noch $k-1$ weitere ausgezeichnete Polynome $x_0^{k-i} x_1^i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), denen ebensoviele Punkte im Raum $\langle C^k \rangle$ zugeordnet sind. Zusammen mit U_0 und V_0 ergibt das $k+1$ Punkte eines Simplex, die ersichtlich bei \mathfrak{g} invariant bleiben. k dieser Punkte liegen im Schmiegraum $T^{k-1}(U_0)$ und bilden dort ein Simplex, das in derselben Weise einer C^{k-1} daselbst zugeordnet ist (diese C^{k-1} nannte man früher Oskulante der C^k). Nun kann man nach Induktion annehmen, dass in $T^{k-1}(U_0)$ kein

weiterer Unterraum als diese k Punkte durch \mathfrak{g} irreduzibel in sich transformiert werde. Dann folgt das Entsprechende aber sofort auch für $\langle C^k \rangle$, da man sonst durch Projektion von V_0 auf $T^{k-1}(U_0)$ dort einen unzulässigen Teilraum finden würde. Da die $k+1$ Punkte ihrer Bedeutung nach aber gewiss nicht bei der vollen Gruppe \mathcal{G} fest bleiben können, folgt, dass durch \mathcal{G} der Raum $\langle C^k \rangle$ irreduzibel in sich transformiert wird.

Jetzt können wir $k > 1$ annehmen und erhalten zunächst sofort folgende Aufspaltung des Raumes $\langle V_n^k \rangle$ bezüglich unserer Untergruppe \mathfrak{g} :

$$(3) \quad \langle V_n^k \rangle = U_0 - \langle V_{n-1}^{k-1} \rangle - \langle V_{n-1}^k \rangle.$$

Wir nehmen jetzt an, für alle $V_n^{k'}$ mit $n' + k' < n + k$ wäre alles gezeigt. Dann ist die Darstellung von \mathfrak{g} in den Räumen $\langle V_{n-1}^k \rangle$ und $\langle V_{n-1}^{k-1} \rangle$ gewiss irreduzibel. Wäre in $\langle V_n^k \rangle$ noch ein anderer irreduzibler Teilraum bezüglich \mathfrak{g} ausser den 3 Bestandteilen vorhanden, so könnte man durch Verbinden und Schneiden sofort auf nicht zulässige Teilräume in $\langle V_{n-1}^{k-1} \rangle$ oder $\langle V_{n-1}^k \rangle$ schliessen. (vgl. den Beweis zu Satz 11 von Abschnitt 23). Bei der ganzen Gruppe \mathcal{G} bleiben diese Bestandteile aber gewisse nicht invariant, sodass \mathcal{G} in $\langle V_n^k \rangle$ irreduzibel dargestellt wird.

b) S -Mannigfaltigkeiten. Wir beschränken uns auf die $S_{m;n}$. Die Gruppe \mathcal{G} ist das direkte Produkt der beiden projektiven Gruppen je eines X_m und Y_n . \mathfrak{g} sei diejenige Untergruppe von \mathcal{G} , die die Parameterpunkte aus Y_n alle festlässt, d. h. der eine Faktor des direkten Produkts soll die Identität sein. Dann wird \mathfrak{g} im Raum $\langle S_{m;n} \rangle$ so dargestellt, dass die erzeugenden Räume S_m^I der $S_{m;n}$ alle einzeln invariant bleiben und nach der vollen projektiven Gruppe des X_m , d. h. irreduzibel in sich transformiert werden. Ein weiterer, von den S_m^I verschiedener Raum kann aber durch \mathfrak{g} nicht irreduzibel in sich transformiert werden, da man durch Schnitte und Projektionen mit den S_m^I sofort auf invariante Teilräume in den S_m^I geführt würde. Bei der vollen Gruppe \mathcal{G} bleiben diese S_m^I aber nicht fest, sodass \mathcal{G} im Segreraum irreduzibel dargestellt wird. •

c) Grassmannsche Mannigfaltigkeiten. Die Gruppe \mathcal{G} einer $G_{n;k}$ ist wieder die projektive Gruppe des X_n . Für die Gerade $G_{1;0}$ stimmt ferner die Behauptung des Satzes, sodass wir Induktion nach der Indexsumme $n+k$ ansetzen können. Wir erinnern jetzt daran, dass wir im Abschnitt 13 die $G_{n;k}$ nach der symbolischen Formel

$$(4) \quad G_{n;k} = G_{n-1;k}^B - G_{n-1;k-1}^A$$

erzeugt hatten, wobei $G_{n-1;k}^B$ die X_k in der festen Hyperebene B_{n-1} und $G_{n-1;k-1}^A$ diejenigen durch einen festen, mit B_{n-1} nicht inzidenten Punkt A_0 abbilden sollten. Wie unter a) sei dann g wieder die Untergruppe derjenigen Projektivitäten des X_n , bei denen A_0 und B_{n-1} fest bleiben; dann werden bei g die beiden Teilräume $\langle G_{n-1;k-1}^A \rangle$ und $\langle G_{n-1;k}^B \rangle$ ersichtlich je in sich und nach Induktionsvoraussetzung auch irreduzibel transformiert. Angenommen, es existierte noch ein von diesen beiden Räumen verschiedener Raum R des $\langle G_{n;k} \rangle$, der ebenfalls bei g irreduzibel in sich transformiert wird. R dürfte dann keinen der beiden Räume schneiden; ist die Dimension von $\langle G_{n-1;k-1}^A \rangle$ kleiner als die von $\langle G_{n-1;k}^B \rangle$, so projiziere man R aus $\langle G^A \rangle$ auf $\langle G^B \rangle$ und erhält in $\langle G^B \rangle$ einen in sich transformierten Teilraum, der nicht auftreten darf. Ist die Dimension von $\langle G^B \rangle$ kleiner als die von $\langle G^A \rangle$, so vertausche man die Rolle der beiden Räume bei dieser Überlegung. Dieser Schluss könnte höchstens versagen, wenn $n = 2k + 1$ ist, also $\langle G^A \rangle$ und $\langle G^B \rangle$ dieselben Dimensionen haben, die auch die Dimension m von R ist. Dann würden die 3 Räume aber eine Segresche $S_{m;1}$ bestimmen, die durch g ersichtlich in sich transformiert würde; dies wiederum hätte aber zur Folge, dass die Punkte von $\langle G_{2k;k}^B \rangle$ zu denen von $\langle G_{2k;k-1}^A \rangle$ kogredient transformiert würden durch die Gruppe g . Dies wiederum ist aber nicht der Fall, da es für den Grundraum folgenden Sachverhalt nach sich ziehen würde: in einer eindeutigen Weise entspricht jedem X_k durch A_0 ein solcher in B_{n-1} , d. h. die X_{k-1} und X_k in B_{n-1} sind korrelativ einander zugeordnet, und diese Zuordnung wird durch die Gruppe g nicht zerstört. Dies ist aber nicht möglich, da g die volle projektive Gruppe auf B_{n-1} induziert. Nachdem man sich so überzeugt hat, dass die Untergruppe g nichts ausser $\langle G^A \rangle$ und $\langle G^B \rangle$ festlässt, folgt in der üblichen Weise die Behauptung für die volle Gruppe \mathcal{G} .

d) $M_{\mathcal{Q}}$ — Mannigfaltigkeiten. \mathcal{G} ist jetzt die sog. Drehgruppe, d. h. Gruppe der Projektivitäten 1. Art einer Quadrik Q_{2k} in sich. Wir erinnern daran, dass wir im Abschnitt 18 die zur Q_{2k} gehörige $M_{\binom{k+1}{2}}$ nach Auszeichnung zweier Punkte A und B der Q_{2k} nach der symbolischen Formel:

$$(5) \quad M_{\binom{k+1}{2}} = M_{\binom{k}{2}}^A - M_{\binom{k}{2}}^B$$

erzeugt hatten, wobei $M_{\binom{k}{2}}^A$ und $M_{\binom{k}{2}}^B$ je die S_k^I der Q_{2k} , die durch A und B gehen, abbildeten. g sei diejenige Untergruppe von \mathcal{G} , die A und

B festhält und damit im Raume $\langle M_{\binom{k+1}{2}} \rangle$ so dargestellt wird, dass die Räume $\langle M_{\binom{k}{2}}^A \rangle$ und $\langle M_{\binom{k}{2}}^B \rangle$ festbleiben und je nach einer Drehgruppe der nächstniedereren Stufe transformiert werden. Für die Q_2 und Q_4 fällt die Drehgruppe mit je einer vollen projektiven Gruppe zusammen, die zugehörigen M_1 und M_3 sind lineare Räume, für die die Behauptung erwiesen ist. Wir können daher Induktion anwenden und annehmen, dass unsere Untergruppe g die Räume $\langle M_{\binom{k}{2}}^A \rangle$ und $\langle M_{\binom{k}{2}}^B \rangle$ je irreduzibel in sich transformiert. Ist nun R ein von diesen beiden verschiedener Raum, der ebenfalls irreduzibel in sich bei g transformiert wird, so muss R punktfremd zu beiden sein. Hat R kleinere Dimension als $\langle M_{\binom{k}{2}}^A \rangle$, so würde in der Projektion von R aus $\langle M_{\binom{k}{2}}^A \rangle$ auf $\langle M_{\binom{k}{2}}^B \rangle$ ein dort nicht zulässiger Teilraum entstehen; hat R dieselbe Dimension m wie die beiden anderen Räume, so bestimmen $\langle M^A \rangle$, $\langle M^B \rangle$ und R eine Segresche $S_{m;1}$, die durch g in sich transformiert wird. Dies würde für die Q_{2k} wiederum zur Folge haben, dass jedem S_k^I durch A eindeutig ein S_k^I durch B in einer durch die Gruppe g nicht zerstörbaren Weise zugeordnet ist, was ersichtlich nicht sein kann. Hieraus folgt aber wieder, wie üblich, die Irreduzibilität des Raumes $\langle M_{\binom{k+1}{2}} \rangle$ bezüglich der vollen Gruppe.

Es gilt nun nicht nur die Irreduzibilität der Darstellung der betreffenden Gruppe \mathcal{G} im Raume der Grundmannigfaltigkeit F_a , sondern auch im Raume $\langle V^k(F_a) \rangle$ der V^k -Transformierten $V^k(F_a)$. Dies werden wir, wenigstens für $k=2$, in den nächsten Abschnitten für die einzelnen Mannigfaltigkeitsklassen in ähnlicher Weise wie soeben Satz 1 beweisen. Wir nehmen dies Ergebnis für den Rest dieses Abschnitts vorweg und erinnern uns ferner daran, dass wir bei jeder Grundmannigfaltigkeit F_a ein damit eng verknüpft, duales Gebilde \widehat{F}_a im Raume $\langle F_a \rangle$ erklärt hatten, das aus geometrischen Gründen durch die Transformationen der entsprechenden Gruppe \mathcal{G} ebenfalls transitiv in sich transformiert wird. Dann können wir folgenden interessanten Satz aussprechen:

Satz 2. F_a im S_n sei eine Grundmannigfaltigkeit und \widehat{F}_a das eindeutig dazu bestimmte duale Gebilde. Die Anzahl der linear unabhängigen Hyperflächen k -ten Grades durch F_a sei m . Die transformierte Mannigfaltigkeit $V^k(F_a)$ wird dann durch einen bestimmten Raum $\langle V^k(F_a) \rangle$ aus der V_n^k ausgeschnitten. Zu $\langle V^k(F_a) \rangle$ gibt es dann einen wohlbestimmten, dazu windschiefen Raum K_{m-1} , der zusammen

mit $\langle V^k(F_d) \rangle$ ganz $\langle V_n^k \rangle$ aufspannt, derart dass bei der im $\langle V_n^k \rangle$ induzierten Darstellung der Gruppe \mathcal{G} ausser $\langle V^k(F_d) \rangle$ auch K_{m-1} in sich transformiert wird. Die Punkte von K_{m-1} sind eineindeutig den Hyperflächen k -ter Klasse durch \widehat{F}_d zugeordnet.

Beweis: Die Hyperebenen des $\langle V_n^k \rangle$ durch $V^k(F_d)$ entsprechen den Hyperflächen k -ter Ordnung durch F_d ; da es hiervon m linear unabhängige geben sollte, hat der Raum $\langle V^k(F_d) \rangle$ die Dimension $\binom{n+k}{k} - m - 1$. Nun hatten wir im Teil I den Hyperflächen k -ter Klasse des $\langle F_d \rangle_n$ einindeutig die Punkte des $\langle V_n^k \rangle$ zugeordnet. Statt von dem System der Hyperflächen k -ter Ordnung durch F_d , können wir auch von dem Linearsystem aller Hyperflächen k -ter Klasse durch \widehat{F}_d sprechen. Diesem entspricht dann ein linearer Raum K_{m-1} des $\langle V_n^k \rangle$. Im K_{m-1} wird die Gruppe \mathcal{G} ebenfalls dargestellt. Es ist nur noch zu zeigen, dass $\langle V^k(F_d) \rangle$ und K_{m-1} keinen Punkt gemein haben. Wären $\langle V^k(F_d) \rangle$ und K_{m-1} nicht punktfremd zueinander, so müsste $\langle V^k(F_d) \rangle$, da dieser Raum bezüglich \mathcal{G} als irreduzibel vorausgesetzt war, ganz in K_{m-1} enthalten sein. In diesem Falle gehörten aber auch die Punkte von $V^k(F_d)$, d. h. gewisse Punkte von V_n^k zu K_{m-1} . Das bedeutet aber, unter den Hyperflächen k -ter Klasse durch \widehat{F}_d kämen auch k -fach zählenden Punkte vor oder dual: die Punkte von F_d sind alle in gewissen Hyperebenen ihres eigenen Raumes $\langle F_d \rangle$ enthalten, was natürlich widersinnig ist.

Im allgemeinen wird der soeben mit K_{m-1} bezeichnete Raum durch die Gruppe \mathcal{G} nicht mehr irreduzibel in sich transformiert werden. Es entsteht dann im Einklang mit Punkt 3 des vorher angegebenen Programms die interessante Aufgabe, die Zerlegung des «Relationenraumes K_{m-1} », wenigstens im Falle quadratischer Relationen ($k = 2$) bezüglich der Gruppe \mathcal{G} anzugeben und die geometrische Bedeutung der einzelnen irreduziblen Komponenten festzustellen. In den folgenden Abschnitten werden wir demnach alle Grundmannigfaltigkeiten nochmals durchgehen, aber selbst bei fast ausschliesslicher Beschränkung auf den Fall $k = 2$ uns nur typische Beispiele vornehmen, allgemeinere Dinge gelegentlich auch ohne Beweis angeben und somit manche Frage noch offen lassen.

Schliesslich sei daran erinnert, dass alle unsere F_d vom Standpunkt der algebraischen Geometrie zu den einfachsten Gebilden, den sogenannten rationalen Mannigfaltigkeiten, gehören, d. h. birational auf den S_d bezogen werden können. Im letzten Abschnitt wird gezeigt werden, wie bei allen Grundmannigfaltigkeiten ohne Ausnahme diese birationalen Abbildungen durch unmittelbare Verallgemeinerungen der bei den Qua-

driken wohlbekanntem stereographischen Projektion direkt geometrisch vollzogen werden können.

Es sei noch bemerkt, dass in den folgenden Abschnitten, im Gegensatz zu Teil IV, unter Quadrik wieder eine beliebige, auch ausgeartete Hyperfläche 2. Grades des betreffenden Raumes verstanden werden soll.

25. RELATIONEN DER V-MANNIGFALTIGKEITEN

Wir wenden uns jetzt der ersten Klasse von Grundmannigfaltigkeiten zu, den V_n^k , bei denen wir die Relationen nach den im vorigen Abschnitt beschriebenen Grundsätzen studieren wollen. Allgemein gilt:

Satz 3. Die V^k -Transformierte einer Mannigfaltigkeit V_n^h ist eine V_n^{h+k} . Demnach gehen $\binom{h+n}{n} - 1 + k$ $\binom{h+n}{k} - \binom{h+n}{n}$ linear unabhängige Hyperflächen k -ten Grades durch V_n^h .

Beweis: Setzt man in das System aller Monome k -ten Grades in $\binom{n+h}{h}$ homogenen Variablen für diese Variablen sämtliche Monome h -ten Grades in $n+1$ anderen Variablen (x_0, x_1, \dots, x_n) ein, so erhält man ersichtlich alle Monome k -ten Grades in den x_i . Darin ist aber der Satz erhalten.

Bemerkung zu Satz 3: Hierin steckt natürlich auch die im Satz 2 im Falle der V -Mannigfaltigkeiten V_n^h benötigte Irreduzibilität der Darstellung der projektiven Gruppe des X_n im Raume $\langle V^h(V_n^h) \rangle$.

Als ersten Fall behandeln wir die Normkurve C^3 , wobei man natürlich längst bekannte Dinge in etwas anderer Sprechweise zu bringen hat.

a) Quadratische Relationen der C^3 .

Die rationale Normkurve C^3 besitzt ∞^2 quadratische Relationen; setzt man die C^3 in der Parametergestalt:

$$(1) \quad x_0 = u^3, \quad x_1 = u^2 v, \quad x_2 = u v^2, \quad x_3 = v^3$$

voraus, so sind alle quadratischen Quadriken durch C^3 Linearkombinationen folgender 3:

$$(2) \quad x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0, \quad x_1^2 - x_0 x_2 = 0, \quad x_2^2 - x_1 x_3 = 0.$$

Es ist bekannt, dass hierunter ∞^1 Kegel vorkommen, deren Spitze ein beliebiger Punkt der C^3 sein darf; zwei dieser Kegel bestimmen bereits

die C^3 mitsamt der Verbindungsgeraden der Spitzen. Umgekehrt schneiden sich die Quadriken eines beliebigen durch C^3 gehenden Büschels ausser in C^3 noch in einer Sehne, die speziell auch Tangente sein kann, d. h. im allgemeinen Büschel sind 2 Kegel enthalten. In der Abbildung des Raumes $\langle C^3 \rangle_3$ auf die V_3^2 wird aus C^3 nach Satz 3 eine C^6 . Zum Raum $\langle C^6 \rangle_6$ dieser C^6 windschief liegt die Ebene K_2 , die die Bildpunkte der durch das duale Gebilde \widehat{C}^3 gehenden Klassenquadriken trägt. Übersetzt man das, was wir oben über das Bündel der Quadriken durch C^3 festgestellt haben, ins Duale, so ergibt sich: In K_2 ist ein Kegelschnitt C^2 ausgezeichnet, dessen Punkte den entarteten Klassenquadriken durch \widehat{C}^3 entsprechen. Bei der Darstellung, die die projektive Gruppe der Geraden in Raume $\langle V_3^2 \rangle$ erfährt, geht diese C^2 ersichtlich in sich über, und wir haben folgende Aufspaltung des Raumes $\langle V_3^2 \rangle_9$:

$$(3) \quad \langle V_3^2 \rangle_9 = \langle C^6 \rangle_6 - \langle C^2 \rangle_2$$

Wir können auch folgendes sagen: Projiziert man die V_3^2 aus dem Raum $\langle C^6 \rangle_6$ auf die Ebene $K_2 = \langle C^2 \rangle_2$, so gehen die Kegelschnitte, die die V^2 -Bilder der Sehnen von C^3 sind, in die Punkte von K_2 über und aus den V^2 -Bildern der Tangenten werden die Punkte von C^2 in K_2 .

Die höheren Normkurven C^n mit $n > 3$ wollen wir erst im Anschluss an die Segreschen $S_{n,1}$ behandeln; daher wenden wir uns jetzt gleich der V_2^2 zu.

b) *Quadratische Relationen der V_2^2 .*

Die V_2^2 liege in der Parametergestalt:

$$(4) \quad x_{00} = x_0^2, \quad x_{01} = x_0 x_1, \quad x_{02} = x_0 x_2, \quad x_{11} = x_1^2, \quad x_{12} = x_1 x_2, \quad x_{22} = x_2^2$$

vor. Nach Satz 3 gehen ∞^5 linear unabhängige Quadriken durch V_2^2 . Man findet aus (4) leicht ein System von 6 linear unabhängigen Quadriken, die man als Basis des betreffenden Linearsystems nehmen kann. Es sind dies nach Bertini (1) die 6 den Ecken des Koordinatensimplex zugeordneten Polarquadriken bezüglich der Determinantenhyperebene:

$$(5) \quad D_4 = \|x_{ij}\| = 0.$$

Bezeichnet man dann sinngemäss die Parameter unseres Linearsystems mit λ_{ij} , so hat dieses die Gestalt:

$$(6) \quad \lambda_{00}(x_{11}x_{22} - x_{12}^2) + \lambda_{11}(x_{00}x_{22} - x_{02}^2) + \lambda_{22}(x_{00}x_{11} - x_{01}^2) \\ + \lambda_{01}(x_{01}x_{22} - x_{02}x_{12}) + \lambda_{02}(x_{01}x_{12} - x_{02}x_{11}) + \lambda_{12}(x_{01}x_{02} - x_{00}x_{12})$$

Unter den Basisquadriken von (6) kommen 2 Typen von Kegeln vor : 1) der Typ $x_{00}x_{11} - x_{01}^2 = 0$, ein Kegel, der ersichtlich als Spitze die Tangentialebene des Punktes der V_2^2 mit den Parametern $(0, 0, 1)$ besitzt ; 2) der Typ $x_{01}x_{02} - x_{00}x_{12} = 0$, der als Spitze diejenige Sehne der V_2^2 besitzt, die die Punkte mit den Parametern $(0, 0, 1)$ und $(0, 1, 0)$ verbindet. Wir wollen diese beiden Typen «Tangential-» und «Sehnenkegel» nennen. Es wird sich herausstellen, dass durch die V_2^2 ausser ihnen nur noch nicht entartete Quadriken gehen. Es gilt nämlich der :

SATZ 4. Die Punkte der Parameterebene X_2 seien durch (4) auf die Punkte der V_2^2 abgebildet (und damit auch, wie wir wissen, alle Klassenkegelschnitte des X_2 auf die Punkte in $\langle V_2^2 \rangle_5$). Dann kann man auch die ∞^5 Quadriken (6) durch V_2^2 den Klassenkegelschnitten aus X_2 in folgender Weise eineindeutig zuordnen : Jede Quadrik aus dem System (6) enthält $\infty^1 C^2$ -Ebenen der V_2^2 ganz, derart dass die zugehörigen $\infty^1 C^2$ gerade die V^2 -Bilder der ∞^1 Geraden einer Kurve 2. Klasse des X_2 sind, und jede Kurve 2. Klasse aus X_2 kommt auch dabei vor.

Beweis : Wir erinnern zunächst daran, dass wir die Hyperfläche (5) sowohl durch die $\infty^2 C^2$ -Ebenen, als auch durch die Tangentialebenen der V_2^2 erzeugt hatten (s. I, 3). Q_4 sei nun eine beliebige, V_2^2 ganz enthaltende Quadrik des Systems (6). Schneiden sich die beiden Hyperflächen Q_4 und D_4 in dem Punkt P ausserhalb von V_2^2 , so müssen sie gleich die ganze durch P bestimmte C^2 -Ebene $\langle C^2 \rangle_2$ gemeinsam haben, da Q_4 von zweiter Ordnung ist und mit dieser Ebene den Kegelschnitt C^2 und den ausserhalb desselben vorausgesetzten Punkt P gemein hat. Daraus folgt zunächst, dass der Durchschnitt $(Q_4 \cap D_4)$ ganz aus $\infty^1 C^2$ -Ebenen erzeugt wird, also wenn man auf die in X_2 gelegenen Urbilder der zugehörigen $\infty^1 C^2$ zurückgeht, deren Ebenen Q_4 ganz enthält, ist so der Q_4 eine Menge von ∞^1 Geraden aus X_2 zugeordnet, d. h. eine Klassenkurve k_1 . Um zu prüfen, welche Klasse k_1 hat, haben wir zu sehen, wieviele der in Q_4 enthaltenen C^2 -Ebenen durch einen allgemeinen Punkt U_0 aus V_2^2 gehen. Nun hatten wir in Kapitel 3 festgestellt, dass die $\infty^1 C^2$ -Ebenen durch U_0 einen Kegel 3. Grades mit der Spitze U_0 über einer Normregelfläche des Typs $C^1 - C^2$ bilden. Q_4 muss dann diesen Kegel entweder ganz enthalten oder infolge des Bézoutschen Satzes in einer Fläche f_2 höchstens 6. Grades schneiden. Wir nehmen U_0 so allgemein an, dass der erste Fall nicht vorliegt ; f_2 enthält nun bereits die Fläche V_2^2 , die vom 4-ten Grade ist, sodass f_2 in V_2^2 und noch einen Restschnitt höchstens zweiten Grades zerfällt ; dieser kann aber nur aus den gesuchten Ebenen durch U_0 bestehen, die Klasse

ist also höchstens 2. Wir haben uns jetzt umgekehrt davon zu überzeugen, dass auch jeder Kurve zweiter Klasse k_1 aus X_2 eine Quadrik des Systems (6) zugeordnet ist. Dies wissen wir bereits für die ausgearteten k_1 . Denn man sieht sofort, dass sich folgendes entspricht :

IN DER EBENE X_2	IM RAUM $\langle V_2^2 \rangle_5$
Kurve 2. Klasse, die in die beiden Punkte $(0, 0, 1)$ und $(0, 1, 0)$ zerfällt	Sehnenkegel $x_{01}x_{02} - x_{00}x_{12} = 0$ mit der Verbindungsgeraden der Punkte $(0, 0, 1)$ und $(0, 1, 0)$ als Spitze
Kurve 2. Klasse, die in den doppelt zählenden Punkt $(1, 0, 0)$ zerfällt	Tangentialkegel $x_{11}x_{22} - x_{12}^2 = 0$ mit der Tangentialebene im Punkt $(1, 0, 0)$ als Spitze.

Durch Linearkombination der beiden rechts angeführten Quadriken erhält man dann ein Büschel von im allgemeinen nicht entarteten Quadriken, denen links keine anderen als die Kegelschnitte des entsprechenden Klassenbüschels zugeordnet sein können. Durch entsprechende Koordinatenwahl kann man auf diese Weise links jeden Klassenkegelschnitt erhalten, womit alles bewiesen ist.

Geht man zur dualen Sprechweise über, so hat man statt der Ordnungsquadriken durch V_2^2 die Klassenquadriken durch \widehat{V}_2^2 zu betrachten. Man sieht dann leicht, dass die höchsten Entartungen sich in folgender Weise entsprechen :

Tangentialkegel der V_2^2	C^2 auf der V_2^2 , als entartete Klassenquadrik des Raumes $\langle V_2^2 \rangle_5$ aufgefasst.
-----------------------------	---

Wir untersuchen jetzt die Bilder der höchstentarteten Klassenquadriken im Relationenraum K_5 und finden dort wieder eine V_2^2 .

SATZ 5. Die höchstentarteten Klassenquadriken durch \widehat{V}_2^2 entsprechen in ihrem Bildraum K_5 den Punkten einer anderen \widehat{V}_2^2 , sodass dann den Klassenquadriken der nächsten Entartungsstufe (d. h. den dualen Gebilden zu den Sehnenkegeln) die Punkte der zu dieser \widehat{V}_2^2 gehörigen Hyperfläche \overline{D}_4 zugeordnet sind.

Beweis: Eine allgemeine Quadrik des Linearsystems (6) hat die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_{22} & -\lambda_{12} & \lambda_{11} \\ 0 & -\lambda_{22} & \lambda_{12} & 0 & \lambda_{02} & \lambda_{01} \\ 0 & \lambda_{12} & -\lambda_{11} & -\lambda_{02} & -\lambda_{01} & 0 \\ \lambda_{22} & 0 & -\lambda_{02} & 0 & 0 & \lambda_{00} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{02} & -\lambda_{01} & 0 & -\lambda_{00} & 0 \\ \lambda_{11} & \lambda_{01} & 0 & \lambda_{00} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Fordert man, dass diese Matrix den Rang 3 hat, so hat dies dieselben 6 Relationen zwischen den λ_{ij} zur Folge, durch die man eine V_3^2 beschreiben kann und die in (6) als Basispolynome des linearen Systems benutzt waren. Daraus folgt aber alles weitere.

c) *Quadratische Relationen der V_3^2 und allgemein der V_n^2 .*

Wir behandeln nunmehr die quadratischen Relationen der V_3^2 des S_9 , von wo aus man die Verallgemeinerungen für die V_n^2 schon erkennen kann. Nach Satz 3 hat der Relationsraum, der zu einer V_3^2 gehört, 19 Dimensionen und sei K_{19} genannt. Es wäre leicht, wieder aus der normalen Parameterdarstellung der V_3^2 ein System von 20 linear unabhängigen Quadriken durch V_3^2 zu finden, das man als Basis für das Linearsystem aller dieser Quadriken nehmen kann. Aus Platzgründen sei dies hier nicht explizit getan. Wir erinnern zunächst daran, dass gemäss unseren Feststellungen im Abschnitt 4 die V_3^2 in den Rangmannigfaltigkeiten D_6 und D_8 ausgezeichnet enthalten ist. Dabei wird D_6 von den ∞^4 C^2 -Ebenen erzeugt, worin C^2 das V^2 -Bild irgendeiner Geraden des Grundraumes X_3 ist. Wir wissen ferner, dass die Punkte der V_3^2 für die D_6 singulär sind und dass die durch einen Punkt der V_3^2 gehenden C^2 -Ebenen bereits den ganzen Raum $\langle V_3^2 \rangle_9$ aufspannen. Daraus folgt, dass keine der durch V_3^2 gehenden Quadriken ganz D_6 enthalten kann. Eine solche Quadrik Q_8 müsste dann in allen Punkten von V_3^2 singulär sein, was natürlich nicht geht. Das Verhalten der Quadriken Q_8 bezüglich der D_6 wird uns dann, ähnlich wie bei der V_2^2 , dazu verhelfen, den Q_8 Gebilde im Grundraum X_3 zuzuordnen (vgl. den späteren Satz 7). Zunächst beweisen wir jedoch:

SATZ 6. Die höchstentarteten Quadriken durch die V_3^2 sind Kegel, deren Spitze der Berührungsraum T_6 erster Stufe an die V_3^2 längs einer C^2 derselben ist. Diese Kegel Q_8 sind dual zu den C^2 der V_3^2 selber, wobei diese C^2 als Klassenquadriken \widehat{Q}_8 des Raumes $\langle V_3^2 \rangle_9$ aufgefasst werden müssen. Im Relationsraum K_{19} entsprechen dann den Q_8 die Punkte einer F_4 , die die V^2 -Transformierte einer Plückerquadrik $G_{3,1}$ ist.

Beweis: Zunächst ist es klar, dass die beschriebenen Berührungsräume T_6 wirklich Spitzen von Kegeln, die durch V_3^2 gehen, sind. Denn projiziert man die V_3^2 aus dem Tangentialraum T_3 eines Punktes U_0 , so entsteht eine V_2^2 , wie wir im Abschnitt 4 festgestellt hatten. Der T_3 in dem von U_0 verschiedenen Punkt V_0 der V_3^2 geht bei dieser Projektion in eine Tangentialebene der V_2^2 über, die ihrerseits einen Tangentialkegel der V_2^2 definiert. Aus dem Raum $T_3(U) \cup T_3(V)$ der ein T_6 ist, wird daher V_3^2 in einen Kegelschnitt projiziert; T_6 ist also Spitzenraum eines Kegels vom niedrigsten Rang und berührt andererseits, wie wir aus Abschnitt 4 wissen, längs aller Punkte der U_0 und V_0 verbindenden Kurve C^2 . Wir entnehmen weiterhin dem Abschnitt 4, dass sich in der durch irgendeine Korrelation des Grundraumes X_3 vermittelten Dualität im $\langle V_3^2 \rangle_9$ gegenüberstehen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Berührungsraum } T^6(C^2) \text{ an } V_3^2 \\ \text{längs einer } C^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Ebene } \langle \bar{C}^2 \rangle_2 \text{ eines Kegelschnitts} \\ \bar{C}^2 \text{ auf } V_3^2 \end{array}$$

Weiterhin entspricht sich dual:

$$\left. \begin{array}{l} \infty^5 \text{ Kegel mit der Spitze } T^6(C^2) \end{array} \right| \begin{array}{l} \infty^5 \text{ Klassenkegelschnitte in der} \\ \text{Ebene } \langle \bar{C}^2 \rangle_2, \text{ als Klassenquadriken} \\ \text{des Raumes } \langle V_3 \rangle_9 \\ \text{aufgefasst.} \end{array}$$

Dem einen ausgezeichneten Kegel links, der die V_3^2 enthält, entspricht ersichtlich auch rechts eine ausgezeichnete Klassenquadrik, die \hat{V}_3^2 enthält. Wir gehen jetzt zur V^2 -Transformation über. Dann wird aus der Ebene $\langle \bar{C}^2 \rangle_2$ eine \bar{V}_2^2 , derart dass den ∞^5 Klassenquadriken, die rechts beschrieben sind, die ∞^5 Punkte des Zugehörigkeitsraumes $\langle \bar{V}_2^2 \rangle_5$ derselben zuzuordnen sind. Speziell entspricht dann der einen ausgezeichneten Klassenquadrik des ∞^5 -Systems ein Punkt des Relationsraumes K_{19} , in dem dieser vom Raum $\langle \bar{V}_2^2 \rangle_5$ eindeutig geschnitten wird. Lässt man dann in dieser Überlegung \bar{C}^2 die allen ∞^4 Geraden des Grundraumes X_3 entsprechenden \bar{C}^2 auf V_3^2 durchlaufen, so erhält man eine wohlbestimmte Mannigfaltigkeit F_4 auf K_{19} , deren Punkte eineindeutig den Geraden des X_3 zuzuordnen sind. Zunächst sieht man sofort, dass diese F_4 den K_{19} aufspannt. Denn andernfalls müssten durch die oben D_6 genannte Mannigfaltigkeit aller C^2 -Ebenen Quadriken gehen, was nicht der Fall ist, wie wir gesehen haben. Es fehlt noch einzusehen, dass F_4 die V^2 -Transformierte $V^2(G_{3;1})$ einer Plücker-

quadrik $G_{3;1}$ ist. Dazu betrachten wir eine beliebige V_2^2 auf der V_3^2 ; Die ∞^2 Punkte der F_4 , die von den $\infty^2 \bar{C}^2$ auf V_2^2 herrühren, erfüllen nach dem, was wir vom vorigen Absatz b) her wissen, wieder eine V_2^2 ; demnach wissen wir, dass die F_4 die Geraden des X_3 ebenso wie die $V^2(G_{3;1})$ derart abbildet, dass den ∞^2 Geraden in irgendeiner Ebene des X_3 die Punkte einer V_2^2 zugeordnet sind. Daraus folgt aber weiter, dass auch die Geraden durch einen Punkt des X_3 auf die Punkte einer V_2^2 abgebildet werden und die F_4 zwei Systeme von je $\infty^3 V_2^2$ enthält. Von hier aus kann man die F_4 aber leicht auf eine $V^2(G_{3;1})$, die ja auch einen S_{19} aufspannt und die soeben festgestellten Eigenschaften hat, projektiv abbilden (vgl. auch den Beginn des übernächsten Abschnitts, worin die projektive Konstruktion der $V^2(G_{n;h})$ genauer beschrieben ist).

Hieraus ergibt sich leicht folgender, bereits von Reye (11) stammender, nur damals etwas anders ausgesprochene Satz :

Satz 7. Jede Quadrik, die V_3^2 enthält, schneidet die zur V_3^2 gehörige Rangmannigfaltigkeit D_6 in $\infty^3 C^2$ -Ebenen, deren C^2 gerade die V^2 -Bilder der Geraden eines quadratischen Komplexes im X_3 sind; umgekehrt ist auch jedem quadratischen Geradenkomplex des X_3 auf diese Weise eine durch V_3^2 gehende Quadrik zugeordnet.

Beweis : Der Beweis hierfür ergibt sich im Zusammenhang mit dem vorhergehenden Satz 6 unmittelbar daraus, dass die quadratischen Geradenkomplexe so definiert sind, dass sie auf lineare Schnitte der $V^2(G_{3;1})$ abgebildet werden. Einer Quadrik durch V_3^2 ist nun eine $V^2(V_3^2)$ enthaltende Hyperebene im $\langle V_3^2 \rangle_{54}$ zugeordnet, die den K_{19} in einem K_{18} schneidet, also mit der den K_{19} aufspannenden $V^2(G_{3;1})$ die Bildmenge eines quadratischen Komplexes bestimmt. Eine C^2 -Ebene wird aber auf eine V_2^2 der V_3^2 abgebildet, wovon eine C^4 bereits auf der $V^2(V_3^2) = V_3^4$ liegt; unsere der Quadrik zugeordnete Hyperebene des $\langle V_3^2 \rangle_{54}$ enthält entweder diese V_2^2 ganz oder schneidet sie nur in der C^4 .

Zum Verständnis der Quadriken durch V_3^2 kann jetzt die weit entwickelte Theorie der quadratischen Geradenkomplexe und aller ihrer Ausartungen herangezogen werden, oder auch umgekehrt das Verständnis dieser durch das Studium der quadratischen Relationen der V_3^2 gefördert werden. Wir müssen auf weitere Einzelheiten darüber verzichten.

Man sieht jetzt verhältnismässig leicht ein, wie sich diese Dinge auf den Fall der allgemeinen V_n^2 verallgemeinern. Wir erwähnen ohne Beweis den

Satz 8. Die höchstentarteten Quadriken durch eine V_n^2 sind Kegel, deren Spitze ein beliebiger Berührungsraum an die V_n^2 längs einer V_{n-2}^2 ist. Nach Dualisierung und Abbildung auf den Relationenraum K der

V_n^2 erhält man darin eine ausgezeichnete Mannigfaltigkeit $V^2(G_{n;1})$, die den K gerade aufspannt. Die Quadriken durch V_n^2 und die quadratischen Geradenkomplexe im Grundraum X_n lassen sich dann eindeutig einander zuordnen.

d) *Quadratische Relationen der V_2^3 .*

Als einzigen Fall einer V_n^h mit $n \geq 2$ und $h \geq 3$ wollen wir die V_2^3 behandeln. Nach Satz 2 gehen ∞^{26} Quadriken durch die V_2^3 ; für das Linearsystem, das diese bilden, kann man sich wieder aus der monomialen Parametergestalt der V_2^3 leicht ein System von 27 linear unabhängigen Basispolynomen aufstellen, was hier der Kürze halber unterbleiben mag. Aus unserer im Abschnitt 5 gewonnenen Einsicht in die V_2^3 können wir uns aber leicht ein System von ∞^3 Kegeln niedrigsten Ranges durch die V_2^3 verschaffen, von dem wir dann nachweisen werden, dass ihre Bilder den Relationsraum B_{26} aufspannen. Wir haben seinerzeit im Abschnitt 5 gesehen, dass die V_2^3 aus dem Schmiegraum $T_5(U_0)$ eines ihrer Punkte U_0 in eine Normkurve \bar{C}^3 projiziert wird, wobei die Punkte dieser \bar{C}^3 aus den durch U_0 gehenden C^3 auf V_2^3 entstanden sind. Projiziert man die \bar{C}^3 weiterhin aus einem ihrer Punkte in einen Kegelschnitt und setzt beide Projektionen zusammen, so hat man die V_2^3 in einen Kegelschnitt projiziert, d. h. einen Kegel vom niedrigstem Rang durch die V_2^3 gefunden. Der S_6 , der dabei als Spitze auftritt, wird durch $T_5(U_0)$ und eine durch U_0 gehende C^3 aufgespannt, ist also in der Grundebene X_2 , auf die die Punkte der V_2^3 bezogen sind, einem Punkt mit hindurchgehender Geraden, d. h. einem Linienelement, zugeordnet.

SATZ 9. Durch die V_2^3 gehen ∞^3 ausgezeichnete Kegel vom niedrigsten Rang. Die Spitzenräume dieser Kegel werden durch den Schmiegraum $T_5(U_0)$ in einem Punkt U_0 der V_2^3 und eine durch U_0 gehende C^3 auf V_2^3 aufgespannt. Diesen Kegeln stehen dual gegenüber die Oskulantenkegelschnitte in den C^3 -Räumen, aufgefasst als Klassenquadriken des $\langle V_2^3 \rangle_9$. Im Relationsraum K_{26} der V_2^3 werden diese dualen Gebilde auf die Punkte einer den K_{26} aufspannenden Mannigfaltigkeit L_3 abgebildet. L_3 ist den Linienelementen der Grundebene X_2 eindeutig zugeordnet.

Beweis: In einer Korrelation, die V_2^3 in \widehat{V}_2^3 überführt, entspricht sich nach unseren Ergebnissen in Abschnitt 5 folgendes:

Schmiegrau $T_5(U_0)$ an V_2^3 in U_0	Raum $\langle \bar{C}^3 \rangle_3$ einer C^3 auf V_2^3
Verbindungsraum $T_5(U_0) \cup C^3$ mit C^3 durch U_0	Schnittebene \bar{U}_2 von $\langle \bar{C}^3 \rangle_3$ und $T_5(\bar{U}_0)$, wobei \bar{U}_0 auf \bar{C}^3 liegt, d. h. Schmiegeebene an \bar{C}^3 in \bar{U}_0
∞^5 Kegel mit $T_6 = T_5(U_0) \cup C^3$ als Spitze	∞^5 Klassenkegelschnitte in \bar{U}_2 , als Klassenquadriken des $\langle V_2^3 \rangle_9$ aufgefasst
Ausgezeichneter Kegel mit T_6 als Spitze, der V_2^3 enthält	Ausgezeichneter Oskulantenkegelschnitt in \bar{U}_2

Gehen wir jetzt zur V^2 -Transformation des ganzen Raumes $\langle V_2^3 \rangle_9$ über, so wird der Raum $\langle \bar{C}^3 \rangle_3$ rechts in eine \bar{V}_2^3 abgebildet, \bar{C}^3 selber in eine \bar{C}^6 darauf, und windschief zu \bar{C}^6 liegt eine, die Relationspunkte der \bar{C}^3 tragende Ebene \bar{K}_2 mit $\langle \bar{V}_2^3 \rangle = \bar{C}^6 \cup \bar{K}_2$. \bar{K}_2 enthält einen ausgezeichneten Kegelschnitt \bar{C}^2 , dessen Punkte den ∞^1 zu \bar{C}^3 gehörigen Oskulantenkegelschnitten zugeordnet sind, der also auch dem Relationenraum K_{26} angehört. Variiert man in dieser Überlegung die \bar{C}^6 über alle ∞^2 C^6 auf $V_2^6 = V^2(V_2^3)$ so erzeugen die zugehörigen \bar{C}^2 eine im K_{26} gelegene Mannigfaltigkeit L_3 . Diese L_3 muss aber ganz K_{26} aufspannen; denn sonst wäre die von allen ∞^2 C^3 -Räumen aufgespannte Mannigfaltigkeit D_5 des $\langle V_2^3 \rangle_9$ in einer Quadrik enthalten. Dies ist jedoch nicht möglich, denn im Abschnitt 5 hatten wir festgestellt, dass D_5 in allen Punkten von V_2^3 singular ist, es würde daraus sofort folgen, dass eine solche Quadrik in allen Punkten von V_2^3 singular sein müsste (vgl. den analogen Schluss im vorigen Absatz c für die D_6 der V_2^3).

Es sei noch erwähnt, dass diese L_3 , die den ebenen Linienelementen eineindeutig zugeordnet ist, sich als V^2 -Transformierte des allgemeinen S_7 -Schnitts der Segreschen $S_{2;2}$ des S_8 erweist, was wir aber nicht beweisen wollen.

Von weiteren Dingen, die sich über die Quadriken durch die V_2^3 aussagen lassen, erwähnen wir nur noch folgendes: Ausser den beschriebenen gibt es noch weitere, insgesamt ∞^4 , Kegel vom Rang 2 durch die V_2^3 , die man sofort feststellen kann. Ihre Spitzen entstehen durch Verbindung einer beliebigen Tangentialebene und eines beliebigen C^3 -Raumes. Diese Kegel lassen sich den Paaren «Punkt - Gerade» der Grundebene X_2 zuordnen; liegt der Punkt auf der Geraden, so ist der zugeordnete Kegel von dem schon behandelten spezielleren Typ. Das bedeutet aber, im K_{26} ist die L_3 in einer gewissen L_4 enthalten, die sich

ihrerseits als Projektion der Produktmenge zweier Veroneseschen Flächen V_2^2 darstellt, worauf wir jedoch nicht näher eingehen können.

Bei den V_n^h mit $h \geq 4$ wird der Relationsraum nicht mehr wie bisher irreduzibel in sich transformiert werden. Mit Ausnahme des Falls der Normkurven ($n = 1$), der im nächsten Abschnitt behandelt werden wird, können wir jedoch auf diese Dinge hier nicht weiter eingehen. (*)

e) *Kubische Relationen der V_2^2 und Studysche C^2 -Mannigfaltigkeit.*

Das Studium der kubischen Relationen der V_2^2 ist besonders wichtig für ein tieferes Eindringen in die ebene Kegelschnittgeometrie. Nach Satz 2 gehen ∞^{27} kubische Hyperflächen durch die V_2^2 , wir haben daher von einem Relationsraum K_{27} windschief zum Raum der $V^3(V_2^2) = V_2^6$, der auch 27 Dimensionen hat, zu sprechen. Beide zusammen spannen den Raum $\langle V_5^3 \rangle_{55}$ auf. Nun kennen wir bereits eine ausgezeichnete Kubik durch V_2^2 , nämlich die Determinantenhyperfläche D_4 , ihre Bildmenge $V^3(D_4)$ erfüllt eine durch V_2^6 gehende Hyperebene W_{54} , die K_{27} in K_{26} schneiden möge. Dieser K_{26} geht bei der hier vorliegenden projektiven Gruppe der Grundebene X_2 ersichtlich in sich über, sodass diese Gruppe jetzt im K_{27} nicht mehr irreduzibel dargestellt wird. Wir wissen ferner, dass man durch Zusammensetzen einer beliebigen, durch V_2^2 gehenden Quadrik mit einer beliebigen Hyperebene und Linearkombination jede kubische Hyperfläche durch V_2^2 erhält. Unter den so zerfallenden Kubiken suchen wir jetzt möglichst spezielle; dabei werden wir von selber auf folgende geführt: Tangentialkegel an die V_2^2 im Punkt U_0 und berührende Hyperebene längs eines beliebigen, durch U_0 gehenden Kegelschnitts C^2 der V_2^2 (= Hyperebene des dualen Gebildes \widehat{V}_2^2 .) Derartige Gebilde mögen kurz «kubische Tangentialkegel k_4 » genannt sein; sie stehen in eindeutiger Beziehung zu den Linien-elementen der Grundebene X_2 , und es entsprechen ihnen dual folgende Gebilde \widehat{k}_4 : Kegelschnitt C^2 der V_2^2 mit festem Punkt auf C^2 , alles als zerfallende Klassenkubik des Raumes $\langle V_2^2 \rangle_5$ aufgefasst. Dann gilt:

SATZ 10. Die soeben beschriebenen, zu den kubischen Tangentialkegeln dualen ∞^3 Gebilde \widehat{k}_4 werden auf die Punkte einer die ausgezeichnete Hyperebene K_{26} des Relationsraumes K_{27} aufspannende Mannigfaltigkeit L_3 abgebildet.

Beweis: Es sei daran erinnert, dass die C^2 - und die Tangentialebenen

(*) s. W. Burau. Proj. Klassifikation der V-Relationen, IV. 35 (1953), 299 - 326.

der V_2^3 sich dual gegenüberstehen. Dann entspricht sich auch folgendes in irgendeiner Korrelation, die V_2^3 in \widehat{V}_2^3 überführt :

∞^9 kubische Kegel mit der Spitze in einer festen Tangentialebene $T_2(U_0)$ der V_2^3	∞^9 Klassenkubiken in einer festen C^2 -Ebene $\langle \overline{C}^2 \rangle_2$, als Hyperflächen 3. Klasse des $\langle V_2^3 \rangle_5$ aufgefasst
∞^2 kubische Kegel mit der Spitze $T_2(U_0)$, die in den quadratischen Tangentialkegel und eine belie- bige Hyperebene durch $T_2(U_0)$ zerfallen	\overline{C}^2 aus V_2^3 und ein beliebiger Punkt seiner Ebene, als zerfallende Hyperflächen 3. Klasse aufge- fasst

Wir gehen jetzt zum Raum $\langle V^3(\langle V_2^3 \rangle_5) \rangle_{55}$ über. Darin entspricht dem rechts stehenden ∞^9 -System ein Raum $\langle \overline{V}_2^3 \rangle_9$, wobei \overline{V}_2^3 das V^3 -Bild der Ebene $\langle \overline{C}^2 \rangle_2$ ist. Dieser Raum $\langle \overline{V}_2^3 \rangle_9$ hat mit K_{27} nur die Punkte einer Ebene \overline{K}_2 gemein, die gerade aus den Bildpunkten des zweiten Systems rechts besteht ; denn man sieht sofort, dass unter den ∞^9 Hyperflächen links nur diejenigen der 2. Zeile auch V_2^3 enthalten. Der Raum $\langle \overline{V}_2^3 \rangle_9$ wird durch eine Kurve $\overline{C}^3 = V^3(\overline{C}^2)$ und die Ebene \overline{K}_2 aufgespannt, und es liegt derselbe Sachverhalt wie im vorigen Absatz vor, nur dass die Dinge jetzt etwas anders zu deuten sind. Verändert man aber nunmehr \overline{V}_2^3 , d. h. die zugehörige Kurve \overline{C}^2 der V_2^3 auf die ∞^2 möglichen Weisen, so überdecken die \overline{V}_2^3 einerseits ganz $V^3(D_4)$ und die in den Ebenen \overline{K}_2 liegenden ausgezeichneten Kegelschnitte die erwähnte Mannigfaltigkeit L_3 . Es ist damit auch bereits gezeigt, dass L_3 ganz K_{26} aufspannt.

Wir verzichten darauf, nachzuweisen, dass die hier auftretende L_3 mit der im vorigen Absatz vorgekommenen zusammenfällt, sondern gehen gleich zu weiteren, damit zusammenhängenden Gebilden über. Wir wissen bereits, dass L_3 durch ein System von $\infty^2 C^2$ erzeugt wird, das waren die in den Räumen $\langle \overline{V}_2^3 \rangle_9$ gelegenen ; die Punkte einer solchen C^2 entsprechen in der Grundebene X_2 allen Linienelementen mit fester Gerade und variablem Punkt. Nimmt man die ganzen Ebenen dieser Kegelschnitte hinzu, so entsteht die Mannigfaltigkeit L_4^I . Von dieser L_4^I können wir sagen, dass sie durch Projektion der $V^3(D_4)$ aus V_2^3 auf K_{26} entsteht. Zu dieser Auffassung wird man geführt, wenn man die Wirkung unserer Projektion auf eine \overline{V}_2^3 betrachtet : eine solche \overline{V}_2^3 wird dabei aus einer \overline{C}^3 in eine Ebene \overline{K}_2 projiziert, und die Punkte der in \overline{K}_2 liegenden \overline{C}^2 rühren von den Tangentialebenen an \overline{V}_2^3 längs \overline{C}^3 her. Nun sieht man aber von dieser Auffassung her leicht ein,

dass L_3 durch ein weiteres System von Kegelschnitten erzeugt wird; diese Kegelschnitte entsprechen den ebenen Linienelementen je mit festem Punkt. Auf dies zweite System kommt man folgendermassen: D_4 wird bekanntlich nicht nur durch die C^2 -Ebenen, sondern auch durch die Tangentialebenen T_2 der V_2^2 erzeugt. Die Ebene T_2 möge in der V^3 -Abbildung in die Fläche $V_2^3(T_2)$ übergehen; $V_2^3(T_2)$ berühre V_2^6 im Punkt U_0 ; ihr Raum $\langle V_2^3(T_2) \rangle_9$ hat dann mit $\langle V_2^6 \rangle_{27}$ gewiss die Tangentialebene in U_0 , aber auch nicht mehr gemein. Nun hatten wir im Abschnitt 5 festgestellt, dass eine V_2^3 aus einer Tangentialebene im Punkt U_0 in eine Regelfläche des Typs $C^2 - C^3$ projiziert wird, wobei die Punkte der Leitkurve C^2 durch «Aufspalten der Umgebung von U_0 » entstehen. Jede $V^3(T_2)$ gibt somit auch bei unserer Projektion zu einem Kegelschnitt Veranlassung. In den durch Veränderung von U_0 so sich ergebenden $\infty^2 C^2$ hat man das weitere System von Kegelschnitten, das ebenfalls L_3 erzeugt. Nimmt man wieder zu diesen Kegelschnitten 2. Art die ganzen Ebenen hinzu, in denen sie liegen, so haben wir eine zu L_4^I gleichartige, L_4^{II} genannte Mannigfaltigkeit, in der L_3 ebenfalls enthalten ist. Eine weitere wichtige Mannigfaltigkeit erhält man dann durch Projektion der Punkte $V_5^3 = V^3(\langle V_2^3 \rangle_5)$ aus V_2^6 . Die entstehende fünfdimensionale Mannigfaltigkeit spannt ersichtlich den ganzen K_{27} und nicht nur den K_{26} , auf und sei St_5 genannt zur Erinnerung an E. Study, der sie zuerst eingeführt hat (20). Wir fassen jetzt das, was wir bisher über L_3 , L_4^I , L_4^{II} und St_5 festgestellt haben, nebst einigem weiterem in folgendem Satz zusammen:

Satz 11. Projiziert man die $V_5^3 = V^3(\langle V_2^3 \rangle_5)$ aus dem Raum der $V_2^6 = V^3(V_2^2)$ in den K_{27} , so entsteht eine den K_{27} aufspannende Mannigfaltigkeit St_5 , deren Schnitt mit K_{26} sich auf die beiden, je durch ∞^2 Ebenen erzeugten Mannigfaltigkeiten L_4^I und L_4^{II} reduziert. L_4^I und L_4^{II} durchdringen sich ihrerseits in einer durch 2 Scharen von je ∞^2 Kegelschnitten erzeugten L_3 , die man als Bildmenge der ebenen Linienelemente auffassen kann. St_5 ist birational, aber nicht ausnahmslos eindeutig auf die Punkte des linearen Raumes $\langle V_2^3 \rangle_5$ bezogen.

Beweis: Wir haben uns nur noch von der behaupteten Eineindeutigkeit der Projektion von V_5^3 auf St_5 zu überzeugen. Würde diese nicht vorhanden sein, so hätte das für den Grundraum $\langle V_2^3 \rangle_5$ folgende Bedeutung: jede Hyperfläche 3. Grades, die V_2^2 enthält und ausserdem noch einen allgemeinen Punkt P dieses Raumes, enthält gleichzeitig noch einen weiteren Punkt P' . Nun folgt leicht aus den Entwicklungen von Absatz b), dass dies schon nicht für die Quadriken durch V_2^2 der Fall ist, also erst recht nicht für die Hyperflächen 3. Grades. Ein Punkt

der V_5^3 , der nicht zu $V^3(D_4)$ gehört, geht bei unserer Projektion gewiss nicht in einen auf K_{25} gelegenen Punkt der St_5 über; ferner wissen wir bereits, dass die Punkte auf $V^3(D_4)$ in allgemeine Punkte von L_4^I übergehen. Es fragt sich nur, woher die Punkte von L_4^{II} herrühren; diese stammen aus der «Nachbarschaft von V_2^6 auf V_5^2 ». Dies ist folgendermassen zu verstehen: U_0 sei ein Punkt auf V_2^6 , die Tangentialebene in U_0 an V_2^6 sei $T_2(U_0)$, und der Tangentialraum an V_5^2 in U_0 sei $T_5(U_0)$. Es ist natürlich $T_2(U_0)$ in $T_5(U_0)$ enthalten; bei unserer Projektion muss daher aus $T_5(U_0)$ eine gewisse, auf St_5 gelegene Ebene E_2 entstehen. E_2 ist jedoch nichts anderes als eine erzeugende Ebene von L_4^{II} , wie sofort folgt, wenn man die ∞^1 , auf $V^3(D_4)$ gelegenen, durch U_0 gehenden V_2^3 betrachtet, deren Tangentialebenen einerseits alle in $T_5(U_0)$ liegen, andererseits bei unserer Projektion in die Punkte eines C^2 zweiter Art auf L_3 übergehen. Man kann sich auch leicht rechnerisch davon überzeugen, dass $T_5(U_0)$ mit dem Schmiegraum $T_5^{(2)}$ zweiter Stufe an die V^3 -Transformierte der Tangentialebene der ursprünglichen Veroneseschen Fläche im fraglichen Punkt zusammenfällt.

Wir müssen darauf verzichten, weitere interessante Einzelheiten über die St_5 zu bringen und erwähnen nur, in welcher Weise man sie in der Kegelschnittgeometrie verwendet:

a) Einem nicht zerfallendem Kegelschnitt, der ja sowohl als Ordnungs- als auch als Klassenkurve aufzufassen ist, wird ein allgemeiner Punkt des linearen Raumes $\langle V_2^3 \rangle_5$ und damit auch der V_5^3 und vermittleils unserer Projektion der St_5 zugeordnet,

b) den in Paare verschiedener Geraden entarteten Ordnungskegelschnitten werden die nicht zu L_3 gehörigen Punkte auf L_4^I ,

c) den in Paare verschiedener Punkte entarteten Klassenkegelschnitten werden die nicht zu L_3 gehörigen Punkte auf L_4^{II} zugeordnet. Schliesslich:

d) Die Kegelschnitte der höchsten Entartungsstufen müssen dann auf die Punkte von L_3 abgebildet werden. Diese Abbildung kann aber aus Dimensionsgründen schon nicht mehr eindeutig sein. Man wird zwangsläufig zu folgendem geführt: einer Doppelgeraden alle Punkte eines Kegelschnitts 1. Art auf der L_3 und einem Doppelpunkt alle Punkte eines Kegelschnitts 2. Art auf der L_3 zuzuordnen.

26. QUADRATISCHE RELATIONEN DER SEGRE-MANNIGFALTIGKEITEN

Wir beschränken uns auf die Behandlung der quadratischen Relationen der Segre-Mannigfaltigkeiten $S_{m;n}$ mit 2 Indizes. Zunächst beweisen wir jedoch sehr einfach folgenden allgemeinen Satz:

SATZ 12. Die V^k -Transformierte einer Segreschen $S_{m;n}$ ist die Produktmannigfaltigkeit $V_m^k \times V_n^k$ zweier Veroneseschen Mannigfaltigkeiten.

Durch die $S_{m;n}$ gehen demnach $\binom{(m+1)(n+1)+k-1}{k} - \binom{m+k}{k} \binom{n+k}{k}$ linear unabhängige Hyperflächen k -ten Grades, aus denen man alle anderen linear kombinieren kann. Das direkte Produkt der beiden projektiven Gruppen der Parameterräume X_m und Y_n wird auch im Raume $\langle V^k(S_{m;n}) \rangle$ irreduzibel dargestellt.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt sofort, wenn man die normale Parameterdarstellung der $S_{m;n}$ in die ebenfalls normale Parameterdarstellung einer $V_{(m+1)(n+1)-1}^k$ einsetzt. Da eine $V_m^k \times V_n^k$ einen Raum von $\binom{m+k}{k} \binom{n+k}{k} - 1$ Dimensionen aufspannt, ergibt sich auch unmittelbar die Aussage über die Parameterzahl der Hyperflächen durch $S_{m;n}$. Die behauptete Irreduzibilität der Darstellung des direkten Produkts im Raum $\langle V^k(S_{m;n}) \rangle$ zeigt man schliesslich nach demselben Prinzip wie für den Fall $k = 1$ (s. Satz 1 im Abschnitt 24). Man spalte nach derjenigen Untergruppe des direkten Produkts auf, die die V_m^k der einen Sorte auf $V^k(S_{m;n})$ als ganze festlässt und benutze die schon bekannte Irreduzibilität des Raumes $\langle V_m^k \rangle$ bezüglich der projectiven Gruppe des X_m .

a) Quadratische Relationen der $S_{m;1}$.

Nach Satz 12 gehen durch die $S_{2;1}$ des S_5 insgesamt ∞^2 Quadriken. Diese findet man sofort in Gestalt der eindeutig bestimmten quadratischen Kegel, die die $S_{2;1}$ aus irgendeiner ihrer ∞^2 erzeugenden Geraden S_1^I projizieren. Diese Kegel sind hinsichtlich der vorliegenden Gruppe alle gleichberechtigt, und nach Satz 12 erschöpfen sich damit auch alle Quadriken durch die $S_{2;1}$.

Die $S_{3;1}$ des S_7 besitzt nach Satz 12 ∞^5 Quadriken, die durch sie gehen. Rein geometrisch erkennt man folgende ∞^4 Kegel, die die $S_{3;1}$ enthalten: man projiziere die $S_{3;1}$ aus dem Raum irgendeiner darin enthaltenen $S_{1;1}$. Da eine solche $S_{1;1}$ durch irgendeine Gerade g in einem festen, erzeugenden Raum S_3^I und die durch die Punkte von g gehenden

erzeugenden Geraden S_1^{II} bestimmt ist, kann man die Menge der so definierten Kegel den Geraden eines S_3 zuordnen. Andererseits wissen wir aus Abschnitt 22, dass es auch nichtentartete Quadriken durch $S_{3;1}$ gibt. Das führt auf die Vermutung, dass im Relationenraum K_5 der $S_{3;1}$ eine $G_{3;1}$ ausgezeichnet ist, deren Punkte die Bilder der zu jenen Kegeln dualen Gebilde sind. Wir beweisen diese Tatsache im folgenden Satz gleich in ihrer Verallgemeinerung auf die $S_{m;1}$.

SATZ 13. Durch die $S_{m;1}$ gehen $\infty^{2(m-1)}$ Kegel vom niedrigsten Rang, deren Spitze eine der auf $S_{m;1}$ gelegenen $S_{m-2;1}$ ist. Dual zu diesen Kegeln sind die $S_{1;1}$ auf der $S_{m;1}$, wenn man diese $S_{1;1}$ als Klassenquadriken des $\langle S_{m;1} \rangle$ auffasst. Diese Gebilde werden auf die Punkte einer den Relationenraum $K_{\binom{m+1}{2}-1}$ aufspannenden Grassmannschen $G_{m;1}$ abgebildet.

Beweis: Dass die Kegel der beschriebenen Art wirklich durch die $S_{m;1}$ gehen, ist sofort klar, ebenso ihre Dualisierung, wenn wir unsere Betrachtungen von Abschnitt 7 heranziehen. Wir gehen jetzt weiterhin rechnerisch vor. Die $S_{m;1}$ kann man, wie wir wissen, auch als Rangmanigfaltigkeit im Raum der zweireihigen Matrizen auffassen (s. Abschnitt 10). Demnach erhält man eine Basis für das Linearsystem aller Quadriken durch $S_{m;1}$ in den $\binom{m+1}{2}$ ersichtlich linear unabhängigen, zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & \dots & x_{0m} \\ x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1m} \end{pmatrix}$$

Das Linearsystem hat dann die Gestalt:

$$(2) \quad \sum \lambda_{ij} (x_{0i} x_{1j} - x_{0j} x_{1i}) = 0$$

Daneben sei nochmals die Parameterdarstellung der $S_{m;1}$ hingeschrieben:

$$(3) \quad x_{i0} = x_i y_0, \quad x_{i1} = x_i y_1 \quad (i = 0, 1, \dots, m).$$

Die Basisquadrik $x_{00} x_{11} - x_{01} x_{10} = 0$ aus dem System (2) ist ein Kegel mit der Spitze

$$(4) \quad x_{00} = x_{11} = x_{01} = x_{10} = 0.$$

Dieser Raum schneidet aber aus der $S_{m;1}$ die Gesamtheit aller Punkte aus, für die $x_0 = x_1 = 0$ bei beliebigen y_0, y_1 ist, das sind aber gerade

die Punkte einer $S_{m-2;1}$ auf $S_{m;1}$, und dasselbe gilt für die anderen Basiskegel in (2). Die allgemeine Quadrik aus diesem System hat eine Matrix der Gestalt

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 0, & S \\ S, & 0 \end{pmatrix},$$

worin S die aus den λ_{ij} gebildete, schiefsymmetrische Matrix bedeuten soll. Den niedrigsten Rang, den (5) besitzen kann, ohne dass alle Elemente verschwinden, ist 3; die Bedingungen dafür, dass (5), d. h. S diesen Rang 3 hat, sind jedoch nach dem, was wir vom Abschnitt 14 her wissen, gerade die Relationen einer Grassmannschen $G_{m;1}$ im Raum der $\binom{m+1}{2}$ Parameter (λ_{ij}) . In der entsprechenden dualen Umdeutung war dies aber gerade behauptet worden.

Es sei noch bemerkt, dass alle diese Höchstkegel in der zur $S_{m;1}$ gehörigen Gruppe gleichberechtigt sind. Diese Gruppe, ein direktes Produkt der vollen projektiven Gruppen des X_m und der Geraden Y_1 , wird nach Satz 1 im Relationsraum zwar noch irreduzibel dargestellt, aber ersichtlich nicht mehr treu. Das direkte Produkt wird vielmehr homomorph auf einen seiner Faktoren, die Gruppe des X_m , abgebildet durch die vorliegende $\langle G_{m;1} \rangle$ -Darstellung.

Durch diesen einfachen Zusammenhang kann man die im Abschnitt 14 entwickelte Liniengeometrie des X_m , d. h. Geometrie der $G_{m;1}$, auf das Studium der Quadriken durch $S_{m;1}$ anwenden. Es gibt z. B. genau so viele verschiedene Typen von Quadriken durch $S_{m;1}$, wie es verschiedene Möglichkeiten von Lagen eines Punktes im Raum $\langle G_{m;1} \rangle$ bezüglich der $G_{m;1}$ gibt. Z. B. gibt es 2 Typen von Quadriken durch $S_{4;1}$, nämlich die speziellsten Kegel mit $\langle S_{2;1} \rangle$ als Spitze sowie den allgemeinen Typ mit einer erzeugenden Geraden S_1^t als Spitze; durch die $S_{5;1}$ gehen 3 Sorten von Quadriken, wobei jetzt als allgemeiner Typ wieder nicht entartete Quadriken vorkommen, usw.

b) Quadratische Relationen der rationalen Normkurven

Wir erinnern uns jetzt daran, dass wir im Abschnitt 7 gelernt hatten, die rationalen Normkurven C^{m+1} als allgemeine S_{m+1} -Schnitte der Segreschen $S_{m;1}$ zu verstehen. Diese Tatsache benutzt man auch zweckmässig, wenn man eine Übersicht über die durch die C^{m+1} gehenden Quadriken gewinnen will. Es gilt nämlich der

Satz 14. Der Raum $\langle C^{m+1} \rangle_{m+1}$ möge aus einer gegebenen $S_{m;1}$ die rationale Normkurve C^{m+1} ausschneiden. Dann bestimmt jede, die

$S_{m;1}$ enthaltende Quadrik in ihrem Schnitt mit $\langle C^{m+1} \rangle_{m+1}$ eine diesem Raum angehörige Quadrik durch C^{m+1} , und umgekehrt wird auch jede Quadrik durch C^{m+1} auf diese Weise erhalten. Ein allgemeiner Kegel vom niedrigsten Range durch $S_{m;1}$ ($m \geq 3$) bestimmt in seinem Schnitt mit $\langle C^{m+1} \rangle_{m+1}$ einen Kegel mit einem gewissen Raum S_{m-3} als Spitze. Alle derartigen S_{m-3} haben die Eigenschaft, dass durch sie $\infty^1 S_{m-1}$ gehen, die die C^{m+1} in $m-1$ Punkten schneiden. Als Sonderfälle erhält man auf die beschriebene Weise auch diejenigen ∞^{m-1} Kegel vom niedrigsten Rang durch C^{m+1} , die diese Kurve aus $m-1$ beliebigen ihrer Punkte in einen Kegelschnitt projizieren. Diese Kegel werden — nach Dualisierung — auf die Punkte einer Veroneseschen V_{m-1}^2 im Relationenraum $K_{\binom{m+1}{2}-1}$ der C^{m+1} abgebildet.

Beweis: Zunächst überzeugen wir uns algebraisch davon, dass keine der Quadriken durch $S_{m;1}$ den Raum $\langle C^{m+1} \rangle_{m+1}$ ganz enthalten kann. Wir wählen die Koordinaten und Parameter der Normaldarstellung der $S_{m;1}$ so, dass die darauf liegende C^{m+1} durch einen Raum mit den Gleichungen:

$$(6) \quad x_{10} - x_{01} = 0, \quad x_{20} - x_{11} = 0, \quad \dots, \quad x_{m0} - x_{m-11} = 0$$

ausgeschnitten werde, was man stets tun kann. Setzt man dann aufgrund von (6) in der Gleichung irgendeiner Quadrik des Systems (2) $x_{i0} = x_{i-11}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), so sieht man, dass diese Gleichung nicht identisch verschwinden kann. Nun gibt es andererseits nach Satz 3 durch

die C^{m+1} $\binom{m+1}{2}$ linear unabhängige Quadriken des Raumes $\langle C^{m+1} \rangle_{m+1}$,

also ebensoviele wie durch die $S_{m;1}$; daher bestimmen diese sich gegenseitig. Der Raum einer $S_{m-2;1}$ auf $S_{m;1}$ in allgemeiner Lage gegen die C^{m+1} schneidet dann den $\langle C^{m+1} \rangle_{m+1}$ in einem S_{m-3} ($m \geq 3$), der die Spitze eines die C^{m+1} enthaltenden Kegels ist. S_{m-3} projiziert die C^{m+1} in eine auf einer Quadrik Q_2 des X_3 gelegene Kurve, die die eine Sorte von Erzeugenden derselben in m , und die andere in einem Punkt trifft. Man kann auch sagen, wie oben behauptet, auf C^{m+1} gibt es eine Punktgruppenschar g_m^1 , die durch gewisse ∞^1 durch S_{m-3} gehende S_{m-1} ausgeschnitten wird. Nun gibt es ersichtlich ∞^{m-1} besondere Kegel durch C^{m+1} , deren Spitze der Verbindungs- S_{m-2} von $m-1$ beliebigen Punkten auf der C^{m+1} ist. Man erhält diese Kegel, die wir kurz Sekantenkegel nennen wollen, folgendermassen von der $S_{m;1}$ her: Gegeben seien $m-1$ Punkte auf der C^{m+1} , durch diese Punkte lege man die erzeugenden Geraden S_1^I der $S_{m;1}$. Diese $m-1$

Geraden bestimmen eine $S_{m-2;1}$, deren Raum die Spitze desjenigen Kegels ist, der den Sekantenkegel zum Schnitt hat. Die Gesamtheit aller Sekantenkegel erzeugt man folgendermassen: Man denke sich die $S_{m;1}$ durch projektive Beziehung der Räume A_m und B_m erzeugt (s. Bild 31). Dann stellen die durch die Punkte von C^{m+1} gehenden erzeugenden Geraden eine Regelfläche vom Typ $C^m - C^m$ dar, die die Leitkurven C_A^m und C_B^m besitzen mag. Jeder S_{m-2} in A_m , der C_A^m in $m-1$ Punkten

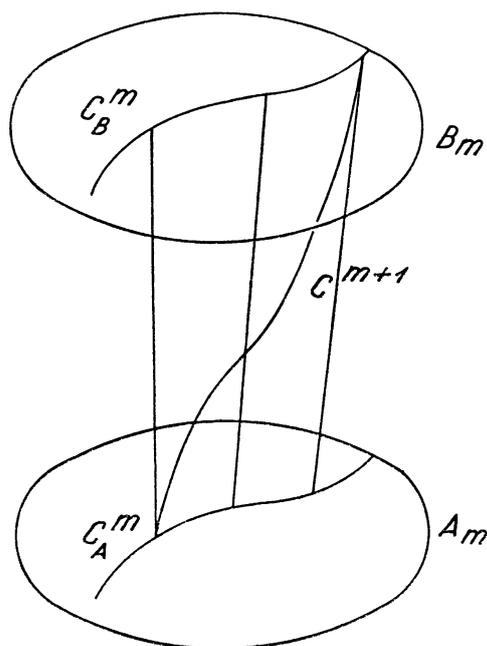


Bild 31

trifft, gehört eindeutig zu dem Spitzenraum eines solchen Kegels durch $S_{m;1}$, der einen Sekantenkegel in $\langle C^{m+1} \rangle_{m+1}$ bestimmt und umgekehrt. Wenn wir schliesslich wissen wollen, welche Punkte den Sekantenkegeln der C^{m+1} — nach Dualisierung — im Relationsraum $K_{\binom{m+1}{2}-1}$ entsprechen, haben wir nach Satz 13 nur festzustellen, was Grassmannbild der ∞^{m-1} Sekanten- S_{m-2} einer C^m ist. Dazu fassen wir die C^m als allgemeinen Schnitt einer $S_{m-1;1}$ auf (s. Bild 31, worin diesmal nur alle Indizes um eine Einheit zu erniedrigen sind) und finden sofort die Sekantenräume der C^m eineindeutig als Schnitte der Räume

$\langle S_{m-2;1} \rangle$ mit $\langle C^m \rangle$, wobei $S_{m-2;1}$ auf $S_{m-1;1}$ liegt. Die Gesamtheit der Räume aller ∞^{m-1} $S_{m-2;1}$ der $S_{m-1;1}$ wird aber, wie wir in Abschnitt 16 gelegentlich ausgerechnet haben, auf die Punkte einer V_{m-1}^2 innerhalb der $G_{2m+1;2m-1}$ abgebildet. Das gleiche gilt mithin auch für die G -Bilder der Sekanten- S_{m-2} der C^m .

Nun sind offenbar gewiss nicht alle Sekantenkegel der C^{m+1} projektiv gleichberechtigt; von einer ausgezeichneten ∞^1 -Schar darunter kann man dies aber sagen, das sind diejenigen Sekantenkegel, deren Spitzenraum durch Zusammenrücken aller $m-1$ Punkte zu einem Schmiegs- S_{m-2} geworden ist. Dies führt durch Übertragung auf den Relationenraum dazu, die bereits von Cartan (4) stammende Aufspaltung des Raumes $\langle V_{m+1}^2 \rangle$ bezüglich der projektiven Gruppe der Geraden zu finden, die wir in folgendem Satz formulieren:

Satz 15. Bildet man die Sekantenkegel einer C^{m+1} nach Satz 14 auf die Punkte einer V_{m-1}^2 im Relationenraum der C^{m+1} ab, so bilden sich die ∞^1 Schmiegskegel der C^{m+1} auf die Punkte einer C^{2m-2} innerhalb der V_{m-1}^2 ab (alles natürlich nach Dualisieren der betr. Kegel verstanden). Die Gruppe der ∞^3 Transformationen der C^{m+1} in sich induziert dann in der V^2 -Abbildung folgende Aufspaltung des Raumes $\langle V_{m+1}^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle V_{m+1}^2 \rangle &= \langle C^{2m+2} \rangle - \langle C^{2m-2} \rangle - \langle C^{2m-6} \rangle - \dots - \langle C^4 \rangle - \langle C^0 \rangle \quad (m \text{ ungerade}) \\ \langle V_{m+1}^2 \rangle &= \langle C^{2m+2} \rangle - \langle C^{2m-2} \rangle - \langle C^{2m-6} \rangle - \dots - \langle C^6 \rangle - \langle C^2 \rangle \quad (m \text{ gerade}) \end{aligned}$$

Hierbei ist $C^{2m+2} = V^2(C^{m+1})$, die übrigen Räume spannen den Relationenraum auf; darin bedeuten — nach Dualisierung — die Punkte der C^{2m-2} die Bilder der Schmiegskegel, die anderen Kurven der Aufspaltung gehören zu weiteren ausgezeichneten Quadriken (vgl. weiter unter die Spezialfälle $m=4$ und 5), C^0 rührt von der bei ungeradem m vorhandenen nicht entarteten Quadrik her, die die Fundamentakorrelation der C^{m+1} in \widehat{C}^{m+1} definiert.

Beweis: Um zu wissen, auf welche Punkte der V_{m-1}^2 des Relationenraumes die Schmiegskegel der C^{m+1} nach Dualisierung übergehen, hat man nach unseren vorherigen Feststellungen lediglich nachzusehen, welches das Grassmannbild der Schmiegs- S_{m-2} einer C^m ist. Dies erhält man aber wiederum, wenn man die C^m als Schnitt einer $S_{m-1;1}$ auffasst und beachtet, dass die Schmiegs- S_{m-2} der C^m als Schnitte gewisser ∞^1 Räume $\langle S_{m-2;1} \rangle_{2m-3}$ entstehen, die ihrerseits auf die V^2 -Transformierten einer C^{m-1} , d. h. die Punkte einer C^{2m-2} abgebildet werden. Auf unserer V_{m-1}^2 im Relationenraum der C^{m-1} ist somit eine C^{2m-2} , ausge-

zeichnet, die nur das V^2 -Bild einer C^{m-1} sein kann, wenn man die V_{m-1}^2 als $V^2(X_{m-1})$ auffasst. Der Raum $\langle V_{m-1}^2 \rangle$ wird dann in seiner ersten Bedeutung als Relationenraum der C^{m+1} in derselben Weise transformiert, wie in der jetzt gewonnenen zweiten Auffassung als Raum $\langle V^2(X_{m-1}) \rangle$ in der Darstellung der Gruppe aller Transformationen die eine C^{m-1} des X_{m-1} in sich transformieren. Wir haben damit ein Induktionsprinzip für die gesuchte Aufspaltung unseres Relationenraumes gewonnen, was mit Leichtigkeit zu dem angegebenen Ergebnis führt, wenn man ausserdem die schon bekannten Anfangsergebnisse für $m = 1$ und 2 mit berücksichtigt.

Die Bedeutung der angeschriebenen Normkurven in den invarianten Teilräumen der Aufspaltung ist ebenfalls leicht zu ersehen. Wir erläutern dies für $m = 3, 4, 5$, was man dann ohne weiteres verallgemeinert.

$m = 3$. Der Relationenraum K_5 der C^4 hat die Aufspaltung $K_5 = \langle C^4 \rangle - \langle C^0 \rangle$, was von den Schmiegekegeln und der Fundamentalquadrik durch die C^4 herrührt.

$m = 4$. Der Relationenraum K_9 der C^5 hat die Aufspaltung $K_9 = \langle C^6 \rangle - \langle C^2 \rangle$; hiervon rühren, wie wir wissen, die Punkte der C^6 von den dualisierten Schmiegekegeln her. Nun gibt es folgende weiteren ∞^1 ausgezeichneten Kegel durch die C^5 , die man so erhält: man projiziere die C^5 aus einem ihrer Punkte in eine C^1 und nehme im Raume dieser C^4 die Fundamentalquadrik. Die Bildpunkte der zu diesen Kegeln dualen Klassenquadriken können wegen der Irreducibilität der Teilräume von K_9 offenbar nur die Punkte von C^2 sein.

$m = 5$. Der Relationenraum K_{14} der C^6 hat die Aufspaltung: $K_{14} = \langle C^8 \rangle - \langle C^4 \rangle - \langle C^0 \rangle$. Der Punkt C^0 und die C^8 rühren von der Fundamentalquadrik und den Schmiegekegeln der C^6 her. Dann gibt es noch folgende ∞^1 untereinander gleichberechtigte Kegel durch C^6 , die man folgendermassen erhält: Man projiziere die C^6 aus einer beliebigen Tangente in eine C^4 und nehme die Fundamentalquadrik dieser C^4 . Dieses System kann nach Dualisierung nicht anders als auf die Punkte der Kurve C^4 abgebildet werden.

c) Quadratische Relationen der $S_{m;n}$.

Wir beginnen mit der einfachsten, nach den $S_{m;1}$ zu behandelnden $S_{m;n}$, nämlich der $S_{2;2}$, und formulieren gleich folgenden

SATZ 16. Durch die $S_{2;2}$ des S_8 gehen ∞^8 Quadriken, die in folgende 3 Typen wachsender Allgemeinheit zerfallen:

1) ∞^4 Kegel mit dem Verbindungs- S_4 eines S_2^I und S_2^{II} , d. h. Tangential- T_4 als Spitze,

2) ∞^7 Kegel mit der Ebene eines auf $S_{2;2}$ gelegenen Kegelschnittes C^2 als Spitze (die Ebene selber gehört jedoch nicht $S_{2;2}$ an)

3) ∞^8 nicht ausgeartete Quadriken.

Die Kegel der Sorte 1) werden nach Dualisierung auf die Punkte einer $\bar{S}_{2;2}$ des Relationsraums K_8 , die der Sorte 2) auf die zugehörige Determinantenhyperfläche abgebildet.

Beweis: Wir hatten im Abschnitt 10 bereits festgestellt, dass die $S_{2;2}$ als geometrischer Ort aller Punkte des Matrizenraumes S_8 aufgefasst werden kann, deren zugeordnete Matrix den Rang 1 besitzt, d. h. dass $S_{2;2}$ durch folgende 9 linear unabhängige Relationen 2. Grades definiert ist:

$$(7) \quad x_{00}x_{11} - x_{01}x_{10} = 0, \dots, x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = 0.$$

Wir schreiben daneben nochmals die Parameterdarstellung der $S_{2;2}$:

$$(8) \quad x_{ij} = x_i y_j \quad (i, j = 0, 1, 2).$$

Die Quadriken (7) sind bereits die Kegel vom niedrigsten Rang, z. B. hat die erste davon als Spitze den durch

$$(9) \quad x_{00} = x_{01} = x_{10} = x_{11} = 0$$

definierten S_4 , der aber ersichtlich die durch die Parameterbeziehungen $x_0 = x_1 = 0$ und $y_0 = y_1 = 0$ definierten Ebenen S_2^I und S_2^{II} ganz enthält. Nun beachten wir, dass die $S_{2;2}$ sich aus einer festen Ebene E_2^I erster Art auf ihr in eine $S_{2;1}$ projiziert, wobei sämtliche Ebenen S_2^{II} der anderen Sorte, die ja alle E_2^I treffen, in die ∞^2 erzeugenden Geraden auf $S_{2;1}$ übergehen. Da diese Geraden aber wiederum die Spitzen der ∞^2 Kegel sind, die als einzige Quadriken des $\langle S_{2;1} \rangle_5$ die $S_{2;1}$ enthalten, folgt sofort, dass die Gesamtheit derjenigen Kegel durch $S_{2;2}$, deren Spitzenraum die feste Ebene E_2^I der $S_{2;2}$ enthält, nach Dualisierung, im Relationsraum K_8 der $S_{2;2}$ auf die Punkte einer Ebene, die wir \bar{E}_2^I nennen wollen, abzubilden ist. Wir können auch kurz sagen: Jeder Ebene S_2^I der $S_{2;2}$ ist im K_8 eine Ebene \bar{S}_2^I zugeordnet. Ebenso kann man aber auch jeder S_2^{II} auf $S_{2;2}$ eine Ebene \bar{S}_2^{II} im K_8 zuordnen. Die ∞^2 \bar{S}_2^I und \bar{S}_2^{II} schneiden einander aber in Punkten, da durch eine S_2^I und S_2^{II} der Kegel durch $S_{2;2}$ eindeutig bestimmt ist. Ferner wissen wir, wie wir soeben gesehen haben, dass die Kegel dieser Art als Basis für das System aller Quadriken durch $S_{2;2}$ genommen werden können, das bedeutet aber, die ihnen zugeordneten Bildpunkte im K_8

bilden eine $\overline{S}_{2;2}$ (dies folgt genau so wie die bekannte Kennzeichnung der Quadriken des S_3 durch ihre beiden Regelscharen). Hieraus ergibt sich weiterhin, dass es ausser den betrachteten Kegeln und den allgemeinsten Quadriken noch einen weiteren Typ geben muss, entsprechend der zur $\overline{S}_{2;2}$ gehörigen Determinantenhyperfläche \overline{D}_7 . Da diese auch mit der Menge aller Sehnen aus $\overline{S}_{2;2}$ zusammenfällt, erhält man einen Kegel dieses zweiten Typs etwa in der Gestalt :

$$(10) \quad a(x_{00}x_{11} - x_{01}x_{10}) + b(x_{00}x_{22} - x_{02}x_{20}) = 0.$$

Dies ist ein Kegel mit dem durch

$$(11) \quad x_{00} = x_{01} = x_{10} = x_{02} = x_{20} = ax_{11} + bx_{22} = 0$$

bestimmten Spitzen- S_2 . Die ersten 5 Gleichungen in (11) bestimmen den Raum der durch die Parameterbeziehungen $x_0 = y_0 = 0$ auf der $S_{2;2}$ festgelegten $S_{1;1}$, die letzte Hyperebene schneidet aus dieser $S_{1;1}$ eine C^2 aus, deren Ebene nicht der $S_{2;2}$ ganz angehört. Man kann aber auch umgekehrt von einer solchen C_2 ausgehen und durch geeignete Wahl der Koordinaten und Parameter erreichen, dass ihre Ebene durch das System (11) beschrieben wird. Ferner zählt man sofort nach, dass es $\infty^7 C^2$ auf der $S_{2;2}$, d. h. ebensoviele Kegel der 2. Art durch die $S_{2;2}$ gibt. Schliesslich überzeugt man sich davon, dass die allgemeinste Quadrik durch die $S_{2;2}$ nicht entartet ist, an besten durch etwa folgendes Beispiel :

$$(12) \quad x_{00}x_{11} + x_{00}x_{22} + x_{11}x_{22} - x_{01}x_{10} - x_{02}x_{20} - x_{12}x_{21} = 0.$$

Wir gehen jetzt gleich zum allgemeinen Fall der $S_{m;n}$ über, wollen jedoch nicht alle Quadriken durch die Mannigfaltigkeiten klassifizieren, sondern begnügen uns damit, die Kegel vom niedrigsten Rang anzugeben. Über diese und ihre im Relationenraum zugeordnete Mannigfaltigkeit gilt folgender Satz :

SATZ 17. Die Spitzenräume der durch eine $S_{m;n}$ (m und $n \geq 2$) gehenden Kegel niedrigsten Ranges werden durch eine beliebige $S_{m-2;n}$ und $S_{m;n-2}$ der $S_{m;n}$ aufgespannt. Die diesen $\infty^{2(m-1)+2(n-1)}$ Kegeln nach Dualisierung in Relationenraum $K_{\binom{m+1}{2} \binom{n+1}{2}-1}$ der $S_{m;n}$ zugeordneten Punkte spannen diesen Raum auf und bilden darauf die Produktmannigfaltigkeit $G_{m;1} \times G_{n;1}$ zweier Grassmannschen Mannigfaltigkeiten. Die Gruppe von Projektivitäten, die $S_{m;n}$ in sich überführen, erfährt im Relationenraum eine irreduzible Darstellung.

Beweis : Wir wissen aus Abschnitt 10, dass die $S_{m;n}$ als Rangmannigfaltigkeit durch Nullsetzen aller zweireihigen Minoren einer Matrix von $m + 1$ Spalten und $n + 1$ Zeilen definiert werden kann. Diese Minoren sind bereits die Kegel, von denen im Satz die Rede war. Wie im Spezialfall $m = n = 2$, den wir soeben behandelt haben, sieht man, dass etwa durch $x_{00} x_{11} - x_{01} x_{10} = 0$ ein Kegel definiert ist, dessen Spitzenraum aus der $S_{m;n}$ die beiden, durch die Parameterbeziehungen

$$(13) \quad x_0 = x_1 = 0 \text{ bei beliebigen } y \quad \text{und} \quad y_0 = y_1 = 0 \text{ bei beliebigen } x$$

definierten Teilgebilde $S_{m-2;n}$ und $S_{m-2;n}$ ausschneidet. Diese beiden Segreschen Untermannigfaltigkeiten durchdringen sich in einer $S_{m-2;n-2}$, für die die Beziehungen (13) beide gleichzeitig erfüllt sind, also spannen sie zusammen auch gerade den Spitzenraum von $(m + 1)(n + 1) - 5$ Dimensionen auf. Nun kann man jede derartige $S_{m;n-2}$ und jede $S_{m-2;n}$ auf der $S_{m;n}$ zu einem Spitzenraum unserer Kegel zusammenfügen, diese Kegel sind also den Paaren X_{m-2}, Y_{m-2} je aus den Parameterräumen eineindeutig zugeordnet. Man sieht ferner algebraisch leicht, dass unser Linearsystem auch keine Quadriken von noch niederem Rang besitzt. Projizieren wir die $S_{m;n}$ aus einer darauf liegenden $S_{m;n-2}$, so entsteht eine $S_{m;1}$, deren niedrigste Kegel nach Satz 13 auf die Punkte einer $G_{m;1}$ abzubilden sind. Jeder Kegel dieser durch Projektion entstandenen $S_{m;1}$ ergibt durch Verbindung mit dem Projektionszentrum $\langle S_{m;n-2} \rangle$ einen Kegel durch $S_{m;n}$ von der zu betrachtenden Art. Hieraus folgt, dass die im Relationenraum der $S_{m;n}$ ausgezeichnete Mannigfaltigkeit durch $\infty^{(2n-1)} G_{m;1}$, die $G_{m;1}^I$ heissen mögen, erzeugt wird. Durch eine gleichartige Überlegung ergibt sich aber auch, dass sie durch $\infty^{(2m-1)} G_{n;1}^{II}$ erzeugt wird, derart dass jeder Punkt der ausgezeichneten $M_{2m+2n-4}$ im Relationenraum genau durch Schnitt einer $G_{m;1}^I$ und einer $G_{n;1}^{II}$ definiert ist. Es liegt also eine Produktmannigfaltigkeit $M_{2m+2n-4} = G_{m;1} \times G_{n;1}$ vor, die einen Raum von $\binom{m+1}{2} \binom{n+1}{2} - 1$ Dimensionen aufspannt, was je auch nach Satz

12 die Dimensionszahl des Relationenraumes der $S_{m;n}$ ist. Das direkte Produkt der projektiven Gruppen der Parameterräume X_m und Y_n der $S_{m;n}$ erfährt dann, wenn beide Indizes grösser als 2 sind, ersichtlich auch im Relationenraum K eine treue Darstellung. Die Irreduzibilität derselben beweist man nach demselben Verfahren wie in Satz 1 für die Darstellung im Raum $\langle S_{m;n} \rangle$ selber. Man hat dabei nur die nach Satz 1 gleichfalls schon feststehende Irreduzibilität in den Grassmanräumen $\langle G_{m;1} \rangle$ zu benutzen.

27. QUADRATISCHE RELATIONEN DER GRASSMANNSCHEN
MANNIGFALTIGKEITEN

Bei den Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{n;h}$ ist es etwas schwerer als bei den vorherigen Klassen, den Aufbau der transformierten Gebilde $V^k(G_{n;h})$ und die Irreduzibilität der Darstellungen in ihrem Raum einzusehen. Wir beschränken uns, wie üblich, auf den Fall $k = 2$ und erklären zweckmässigerweise zuerst in folgender Weise eine gemeinsame Verallgemeinerung der $G_{n;h}$ und der $V^2(G_{n;h})$:

Gegeben seien 3 natürliche Zahlen n, a, b mit $n \geq a \geq b \geq 0$. Dann stelle man die Bedingungen in den Grassmannkoordinaten dafür auf, dass ein X'_b in einem X_a des X_n ganz enthalten ist. Dies wird durch eine Reihe von sog. Inzidenzrelationen ausgedrückt, die je in den Koordinaten $p_{i_0 \dots i_a}$ des X_a und $p'_{i_0 \dots i_b}$ des X'_b linear sind (vergleiche den Abschnitt 13, wo der Fall $a = b + 1$ bereits behandelt wurde). Dann bilde man die Produktmannigfaltigkeit $G_{n;a} \times G'_{n;b}$ als Bildmenge aller Paare X_a, X'_b des X_n . Die Inzidenzrelationen bedeuten im Produktraum der Grassmannräume ersichtlich lineare Gleichungen, die ein System von Hyperebenen definieren, das insgesamt aus $G_{n;a} \times G'_{n;b}$ die mit $J^{n;a,b}$ bezeichnete Punktmenge ausschneidet. Die Punkte von $J^{n;a,b}$ sind den ineinanderliegenden Raumpaaren $X_a \supset X'_b$ zugeordnet, oder, wie wir kurz sagen wollen, den $(n; a, b)$ -Elementen. Bei $a = b$ besagen die Inzidenzrelationen ersichtlich die völlige Proportionalität der p und p' . Da aber auf einer Segreschen $S_{m;m}$ durch Gleichsetzen der beiden Parameterserien bekanntlich eine V^2_m definiert wird und jede $G_{n;a} \times G'_{n;a}$ in einer $S_{m;m}$ mit $m = \binom{n+1}{a+1} - 1$ enthalten ist folgt sofort, dass $J^{n;a,a} = V^2(G_{n;a})$ ist. Bei $a = n$ ist ferner $J^{n;n,b} = G_{n;b}$; wir wollen auch $b = -1$ zulassen und sinngemäss $J^{n;a,-1}$ als $G_{n;a}$ erklären. Weiterhin sieht man sofort, dass $J^{n;a,b}$ durch $\infty^{(n-a)(a+1)} G_{a,b}$ und $\infty^{(n-b)(b+1)} G_{n-b-1;a-b-1}$ erzeugt wird; diese entstehen, wenn man alle $(n; a, b)$ -Elemente je mit festem X_a oder X'_b betrachtet. Die Gruppe \mathcal{G} aller Projektivitäten des X_n transformiert ersichtlich alle $(n; a, b)$ -Elemente beliebig transitiv ineinander und erfährt demnach im Raume $\langle J^{n;a,b} \rangle$ eine Darstellung, deren Irreduzibilität wir später zeigen wollen. Zuvor ist es zweckmässig, den Fall $a = n - 1$ und $b = 0$ gesondert zu behandeln.

Man bilde zuerst die Paare X_{n-1}, X'_0 des X_n auf die Punkte einer $S_{n;n}$ ab. Es gibt nur eine Inzidenzrelation für vereinigte Lage von

X_{n-1} und X'_0 ; diese definiert dann $J^{n;n-1,0}$ als allgemeinen hyper-ebenen Schnitt der $S_{n;n}$. Aus der im Abschnitt 6 entwickelten Dualitätstheorie der Segremannigfaltigkeiten wissen wir ferner, dass mit der Abbildung der Paare (X_{n-1}, X'_0) auf die Punkte der $S_{n;n}$ auch automatisch die Hyperebenen des dualen Gebildes $\widehat{S}_{n;n}$ auf die Paare (X_0, X'_{n-1}) abgebildet werden. Die Inzidenzbeziehung sondert dann wieder eine ∞^{2n-1} -Menge solcher Hyperebenen aus $\widehat{S}_{n;n}$ aus, die durch einen Punkt J_0 gehen. Wir werden zeigen, dass $J^{n;n-1,0}$ und dieser Punkt J_0 zusammen den $\langle S_{n;n} \rangle$ aufspannen. Zuvor beweisen wir den

SATZ 18. Die volle projektive Gruppe \mathcal{G} des X_n erfährt durch Übertragung vermittels der Bildmenge $J^{n;n-1,0}$ der $(n; n-1, 0)$ -Elemente eine treue, irreduzible Darstellung durch Transformationen, welche die $J^{n;n-1,0}$ in sich überführen.

Beweis: Die $J^{1;0,0}$ ist als allgemeiner Schnitt der Quadrik $S_{1;1}$ eine C^2 . Die projektive Gruppe auf der Geraden wird dann, wie man weiss, in der Ebene dieser C^2 treu und irreduzibel dargestellt. Wir nehmen an, bis $n-1$ sei schon alles bewiesen. Wir betrachten dann im X_n die Untergruppe \mathfrak{g} derjenigen Projektivitäten, die einen festen Punkt A_0 und eine damit nicht inzidente Hyperebene B_{n-1} invariant lassen. Hinsichtlich \mathfrak{g} sind dann folgende Sonderklassen von $(n; n-1, 0)$ -Elementen zu unterscheiden:

- 1) Solche (X'_0, X_{n-1}) mit $X'_0 = A_0$ und $X_{n-1} \supset A_0$. Bildmenge: S_{n-1}^A
- 2) Solche (X'_0, X_{n-1}) mit $X'_0 \subset B_{n-1}$ und $X_{n-1} = B_{n-1}$. Bildmenge: S_{n-1}^B
- 3) Solche (X'_0, X_{n-1}) mit $X'_0 \subset B_{n-1}$ und $X_{n-1} \supset A_0$. Bildmenge: $J^{n-1;n-2,0}$.

Die 3 zugehörigen Bildmengen spannen erst einen Raum von $(n+1)^2 - 3$ Dimensionen auf, also noch nicht den gesamten Raum $\langle J^{n;n-1,0} \rangle$, der $(n+1)^2 - 2$ Dimensionen hat. Weitere spezielle Elemente sind nur noch diejenigen, bei denen noch X'_0 in B_{n-1} liegt, jedoch X_{n-1} nicht durch A_0 geht. Von den Bildpunkten derselben sieht man aber sofort, dass sie auf Geraden, die Punkte von 2) und 3) verbinden, liegen. Um den noch fehlenden Bestandteil der Aufspaltung des Raumes $\langle J^{n;n-1,0} \rangle$ zu finden, das ist nur noch ein Punkt, betrachten wir vorübergehend nicht nur die Elemente, sondern alle Paare (X_{n-1}, X'_0) hinsichtlich der Untergruppe. Dann kommt zu den bisherigen Mengen noch folgendes ausgezeichnete Paar hinzu:

- 4) B_{n-1} zusammen mit A_0 mit dem Bildpunkt W_0 auf $S_{n;n}$. Weiterhin liegt $J^{n-1;n-2,0}$ in einer ausgezeichneten $S_{n-1;n-1}$ der $S_{n;n}$, die

bestimmt nicht den Punkt W_0 enthält. Ferner wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, dass g im $\langle S_{n-1}; n-1 \rangle$ ausser $\langle J^{n-1}; n-2, 0 \rangle$ noch einen davon unabhängigen Punkt S_0 invariant lässt. Damit ist aber die Aufspaltung von ganz $\langle S_{n;n} \rangle$ bezüglich g klar; sie lautet:

$$(1) \quad \langle S_{n;n} \rangle = S_{n-1}^A - S_{n-1}^B - \langle J^{n-1}; n-2, 0 \rangle - S_0 - W_0.$$

W_0 liegt gewiss nicht im Raum $\langle J^{n;n-1,0} \rangle$, da W_0 der Bildpunkt eines Nicht-Elements ist; also schneidet die Gerade $S_0 W_0$ die Hyperebene $\langle J^{n;n-1,0} \rangle$ im Punkt U_0 . Hieraus erfahren wir, dass die Gerade $S_0 W_0$ ganz aus Fixpunkten bezüglich g besteht, und erhalten ferner folgende Aufspaltung von $\langle J^{n;n-1,0} \rangle$ bezüglich \mathcal{G} :

$$(2) \quad \langle J^{n;n-1,0} \rangle = S_{n-1}^A - S_{n-1}^B - \langle J^{n-1}; n-2, 0 \rangle - U_0.$$

Von hier aus schliessen wir ebenso wie früher bei ähnlichen Gelegenheiten, dass zunächst bei g kein anderer Raum als die 4 Teile in (2) irreduzibel in sich transformiert wird. Diese aber bleiben bei der vollen Gruppe \mathcal{G} ersichtlich sämtlich nicht invariant, also wird $\langle J^{n;n-1,0} \rangle$ durch \mathcal{G} irreduzibel in sich transformiert.

Wir gehen jetzt zum allgemeinen Fall über und zeigen:

SATZ 19. Gegeben sei diejenige Untergruppe g der vollen projektiven Gruppe \mathcal{G} des X_n , bei der ein Punkt A_0 und eine nicht durch A_0 gehende Hyperebene B_{n-1} fest bleiben. Dann wird der Raum $\langle J^{n;a,b} \rangle$ folgendermassen in invariante Teilräume bezüglich \mathcal{G} aufgespalten:

$$(3) \quad \langle J^{n;a,b} \rangle = \langle J^{n-1;a-1,b-1} \rangle - \langle J^{n-1;a,b} \rangle - \langle J^{n-1;a-1,b} \rangle - \langle J^{n-1;a,b-1} \rangle$$

(hierbei sei unter $J^{n;a',b}$ bei $a' < b$ die leere Menge verstanden). Ferner transformiert die volle projektive Gruppe \mathcal{G} den Raum $\langle J^{n;a,b} \rangle$ irreduzibel in sich.

Beweis: Zunächst ist der letzte Teil des Satzes, auf den es uns besonders ankommt, für $n = 1$ und 2 gewiss richtig, sodass wir ihn nach Induktion bis $n - 1$ und für beliebige a und b als bewiesen annehmen können. Nach Abschnitt 13 kann man zunächst die Grassmannräume $\langle G_{n;a} \rangle$ und $\langle G'_{n;b} \rangle$, mit denen man jetzt zu tun hat, bezüglich der Untergruppe g folgendermassen aufspalten:

$$\langle G_{n;a} \rangle = \langle G_{n-1;b-1}^A \rangle - \langle G_{n-1;a}^B \rangle \quad \text{und} \quad \langle G'_{n;b} \rangle = \langle G_{n-1;b-1}^A \rangle - \langle G_{n-1;b}^B \rangle$$

wobei durch die oberen Indizes A und B die Bildmengen der durch A_0 gehenden oder der in B_{n-1} liegenden Räume bezeichnet sind. Dann gestattet der Produktraum $\langle G_{n;a} \times G'_{n;b} \rangle$ folgende Aufspaltung:

$$\begin{aligned} & \langle G_{n-1;a-1}^A \times G_{n-1;b-1}^A \rangle - \langle G_{n-1;a}^B \times G_{n-1;b}^B \rangle - \\ & - \langle G_{n-1;a-1}^A \times G_{n-1;b}^B \rangle - \langle G_{n-1;a}^B \times G_{n-1;b-1}^A \rangle \end{aligned}$$

wobei die einzelnen Bestandteile eine leicht ersichtliche Bedeutung haben. Wir fragen nun, wie weit sich die Punkte von $J^{n;a,b}$ auf diese 4, kurz mit I - IV bezeichneten Teilräume verteilen und finden sofort für die Bestandteile I bis III folgendes:

- 1) Alle Elemente (X_a, X'_b) mit $X_a \supset A_0$ und $X'_b \supset A_0$. Bildmenge: $J^{n-1;a-1,b-1}$
- 2) Alle Elemente (X_a, X'_b) mit $X_a \subset B_{n-1}$ und $X'_b \subset B_{n-1}$. Bildmenge: $J^{n-1;a,b}$
- 3) Alle Elemente (X_a, X'_b) mit $X_a \supset A_0$ und $X'_b \subset B_{n-1}$. Bildmenge: $J^{n-1;a-1,b}$.

Zu IV gehören keine Punkte $J^{n;a,b}$, da ein X'_b durch A_0 und ein X_a in B_{n-1} nicht ineinanderliegen können. Weitere spezielle Lagen eines $(n; a, b)$ -Elements bezüglich der Untergruppe g sind diejenigen, bei denen X'_b in B_{n-1} liegt oder X_a durch A_0 geht, ohne dass notwendigerweise beides gleichzeitig eintritt. Man sieht aber sofort, dass derartige Elemente auf Punkte von $J^{n;a,b}$ abgebildet werden, die den durch 1), 2) und 3) aufgespannten Räumen angehören. Wir bemerken, bevor wir jetzt den noch fehlenden vierten Bestandteil der Aufspaltung von $\langle J^{n;a,b} \rangle$ suchen, dass g den Raum $\langle J^{n-1;a-1,b-1} \cup J^{n-1;a,b} \cup J^{n-1;a-1,b} \rangle$ der kurz Φ heißen mag, so in sich transformiert, dass nach Induktion die 3 Bestandteile je irreduzibel in sich übergehen. Daraus folgt in bekannter Weise sofort, dass in Φ keine weiteren irreduziblen Teile ausser diesen drei vorhanden sind. Jetzt betrachten wir das Element (E_a, E'_b) das von allgemeinstem Verhalten bezüglich A_0 und B_{n-1} sein soll, d. h. es sei

$$E_a \cup A_0 = E_{a+1}^A, \quad E_a \cap B_{n-1} = E_{a-1}^B, \quad E'_b \cup A_0 = E_{b+1}^A, \quad E'_b \cap B_{n-1} = E_{b-1}^B.$$

Es liegt dann nahe, die Menge aller derjenigen Paare (X_a, X'_b) ins Auge zu fassen, bei denen X_a und X'_b durch E_{b-1}^B gehen und gleichzeitig in

E_{a+1}^A liegen. Diese Gesamtheit verhält sich wie die der Paare (X_{a-b}, X_0') eines X_{a-b+1} , wie durch Schnitt mit einem von E_{b-1}^B unabhängigen Raum F_{a-b+1} des E_{a+1}^A zu sehen ist; daher bildet sie sich auf eine $S_{a-b+1; a-b+1}$ innerhalb von $G_{n;a} \times G'_{n;b}$ ab. Die $(n; a, b)$ -Elemente darunter haben eine $J^{a-b+1; a-b, 0}$ als Bildmenge, und alle Betrachtungen beim Beweis des vorigen Satzes lassen sich unter Ersatz von n durch $a - b + 1$ jetzt anwenden. Dem dort W_0 genannten Punkt ist das Paar $(E_{a+1}^A \cap B_{n-1}), (E_{b-1}^B \cup A_0)$ zugeordnet, und W_0 gehört der Menge IV an. U_0 ist ein gewisser Punkt des Raumes $\langle J^{a-b+1; a-b, 0} \rangle$ und damit auch des $\langle J^{n; a, b} \rangle$. Lassen wir jetzt in diesen Überlegungen E_{a+1}^A und E_{b-1}^B variieren, so beschreibt W_0 eine $J_{IV}^{n-1; a, b-1}$ und U_0 eine $j^{n-1; a, b-1}$, von der zu zeigen ist, dass sie auch eine $J^{n-1; a, b-1}$ ist. Zunächst ist der Raum $\langle j^{n-1; a, b-1} \rangle$ gewiss zu Φ windschief, da sich sonst sofort ein von den 3 ausgezeichneten Bestandteilen verschiedener, bezüglich g invarianter Bestandteil darin befinden würde. Weiterhin wissen wir aus unserer Überlegung, mit der wir ja alle $(n; a, b)$ -Elemente in X_n erfasst haben, dass Φ zusammen mit $j^{n-1; a, b-1}$ den $\langle J^{n; a, b} \rangle$ aufspannt. Aus einer Berechnung der Dimension von $\langle J^{n; a, b} \rangle$, die wir hier übergehen wollen, folgt dann zunächst, dass $\langle j^{n-1; a, b-1} \rangle$ dieselbe Dimension wie $\langle J_{IV}^{n-1; a, b-1} \rangle$ hat. Nun waren bei den Betrachtungen zum vorigen Satz U_0 und W_0 durch eine Gerade aus lauter Fixpunkten bezüglich g verbunden. Daher kann man jetzt sagen, dass alle Punkte von $j^{n-1; a, b-1}$ und $J_{IV}^{n-1; a, b-1}$ durch Gerade verbunden sind, die als ganze bei den Transformationen von g ineinander übergehen, jedoch so, dass jeder Punkt einer jeden Geraden nur in einen wohlbestimmten auf einer jeden anderen übergehen darf; das heisst aber mit anderen Worten, die Geraden werden projektiv aufeinander bezogen. Hieraus folgt aber weiter, dass hinreichend viele von ihnen eine Segresche $S_{m;1}$ erzeugen, wobei m die gemeinsame Dimension von $\langle j^{n-1; a, b-1} \rangle$ und $\langle J^{n-1; a, b-1} \rangle$ ist. Daraus ergibt sich dann, dass diese beiden fraglichen Mannigfaltigkeiten projektiv equivalent sind, und dass also $j^{n-1; a, b-1}$ auch eine $J^{n-1; a, b-1}$ ist. Nachdem wir so die behauptete Zerlegung des Raumes $\langle J^{n; a, b} \rangle$ bezüglich der Untergruppe gezeigt haben, folgt seine Irreduzibilität in Bezug auf die volle Gruppe in der üblichen Weise.

Wenden wir das gefundene Ergebnis speziell auf den Fall der $J^{n; h, h} = V^2(G_{n; h})$ an, so wissen wir hiernach, dass der Raum $\langle V^2 \langle G_{n; h} \rangle \rangle$ sich bezüglich der vollen projektiven Gruppe des X_n in $\langle V^2 \langle G_{n; h} \rangle \rangle$ und einen Relationsraum K aufspaltet. Wir untersuchen jetzt gemäss dem Programm im Abschnitt 25 in einigen Fällen den Aufbau von K .

a) *Quadratische Relationen der $G_{n;1}$.*

Nach dem trivialen Fall der $G_{3;1}$, wo $V^2(G_{3;1})$ einen S_{19} aufspannt, und der Relationenraum nur aus einem Punkt besteht, der zusammen mit $\langle V^2(G_{3;1}) \rangle_{19}$ den $\langle V_5^2 \rangle_{20}$ aufspannt, wenden wir uns gleich der $G_{4;1}$ zu. Dies ist eine 6-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\langle G_{4;1} \rangle_9$. Wir wissen bereits aus Abschnitt 14, dass alle durch $G_{4;1}$ gehenden Quadriken sich aus 5 linear unabhängigen zusammensetzen lassen, woraus man schließen kann, dass $V^2(G_{4;1})$ einen S_{49} aufspannt. Sind die 10 Grassmannkoordinaten des X_4 mit (p_{01}, \dots, p_{34}) benannt, so lautet eine der Grundquadriken nach Abschnitt 14 z. B.

$$(4) \quad p_{01} p_{23} + p_{02} p_{31} + p_{03} p_{12} = 0.$$

Dies ist ein Kegel des $\langle G_{4;1} \rangle_9$ mit der durch

$$(5) \quad p_{01} = p_{02} = p_{03} = p_{12} = p_{13} = p_{23} = 0$$

definierten Spitze. Durch (5) werden aber alle diejenigen Geraden des X_4 gekennzeichnet, die durch den Punkt $(0, 0, 0, 0, 1)$ gehen. Der Spitzenraum des Kegels ist also ein auf der $G_{4;1}$ gelegener S_3^I . Infolge der Transformierbarkeit der $G_{4;1}$ in sich kann dann aber jeder der $\infty^4 S_3^I$ auf der $G_{4;1}$ Spitzenraum eines Kegels durch $G_{4;1}$ sein. Damit sind aber bereits alle Quadriken durch $G_{4;1}$ erschöpft, da es nicht mehr als ∞^4 davon gibt. Somit haben wir den folgenden:

SATZ 20. Sämtliche Quadriken durch $G_{4;1}$ sind Kegel, deren Spitze einer der ∞^4 auf der $G_{4;1}$ gelegenen S_3^I ist. Die projektive Gruppe des X_4 erfährt somit im Relationenraum K_4 der $G_{4;1}$ dieselbe Darstellung wie im Grundraum X_4 .

Durch die $G_{5;1}$ gibt es ∞^{14} Quadriken, die jedoch jetzt nicht mehr alle projektiv gleichberechtigt sind. Es gilt vielmehr:

SATZ 21. Das Linearsystem der ∞^{14} Quadriken durch die $G_{5;1}$ wird durch ∞^8 Kegel aufgespannt, deren Spitze irgendein Tangential- T_8 der $G_{5;1}$ ist. Die zu diesen Kegeln dualen Gebilde werden im Relationenraum K_{14} der $G_{5;1}$ auf die Punkte einer anderen $G_{5;1}$ abgebildet.

Beweis: Zunächst ergibt es sich, dass alle Geraden des Grundraumes X_5 , für deren Koordinaten (5) gilt, dadurch gekennzeichnet sind, dass sie die Gerade $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$ treffen, entsprechendes, nur für andere der 15 Geraden des Koordinatensimplex erhält man, wenn man die Bedeutung des Spitzenraumes der 15 aus der Matrix (p_{ij}) zu

gewinnenden Grundquadriken sucht. Andererseits wissen wir, dass die Tangential- T_8 der $G_{5;1}$ aus der $G_{5;1}$ gerade die Bildmenge der eine feste Gerade treffenden Geraden ausschneidet. Jeder der $\infty^8 T_8$ der $G_{5;1}$ ist somit Spitze eines sog. Tangentialkegels. Den zu diesen Kegeln dualen Gebilden ist eine bestimmte, den Relationsraum K_{14} aufspannende Bildmenge F_8 zugeordnet. Zu den Punkten dieser F_8 gelangt man auch folgendermassen: Einem beliebigen X_3 des Grundraumes X_5 entspricht eine $G_{3;1}$ auf $G_{5;1}$. In der V^2 -Transformation wird aus der $G_{3;1}$ eine $V^2(G_{3;1})$, die zusammen mit einem Punkt K_0 des K_{14} den Raum $\langle V^2\langle G_{3;1} \rangle \rangle$ aufspannt. Es entspricht sich dann folgendes:

$$\infty^{20} \text{ Punkte des } \langle V^2\langle G_{3;1} \rangle \rangle_{20} \quad \left| \quad \infty^{20} \text{ Quadriken im } \langle G_{3;1} \rangle_5, \text{ als} \right. \\ \left. \text{Klassenquadriken des } \langle G_{5;1} \rangle \text{ aufgefasst.} \right.$$

Bei einer Korrelation, die $G_{5;1}$ in $\widehat{G}_{5;1}$ überführt, gehen die Klassenquadriken rechts in die ∞^{20} Kegel über, deren Spitze einen festen Tangential- T_8 der $G_{5;1}$ enthält. Genau einer unter diesen Kegeln enthält aber die $G_{5;1}$. Diesem Tangentialkegel kann dual nur der Punkt K_0 des K_{14} entsprechen. Der geometrische Ort aller ∞^8 Punkte K_0 ist dann die oben F_8 genannte Mannigfaltigkeit. Von F_8 wissen wir, dass ihre Punkte eindeutige Bilder der X_3 des X_5 sind und dass sie den K_{14} aufspannen. Es handelt sich nur noch darum, einzusehen, dass F_8 eine Grassmannsche $G_{5;3}$ (was dasselbe wie $G_{5;1}$ bedeutet) ist. Zunächst überzeugt man sich davon, dass F_8 die X_3 des X_5 derart abbildet, dass die X_3 eines Büschels auf die Punkte einer Geraden abgebildet werden. Dazu betrachte man die Quadriken des Büschels:

$$\lambda(p_{01}p_{23} + p_{12}p_{31} + p_{03}p_{12}) + \mu(p_{01}p_{24} + p_{12}p_{41} + p_{04}p_{12}) = 0.$$

Dies sind einerseits alles Tangentialkegel, andererseits solche, die im Grundraum X_5 den Geraden durch den Punkt $(0, \dots, 0, 1)$ in der Ebene $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ zugeordnet sind. Daraus folgt aber durch Dualisieren, dass auf F_8 die Bildpunkte der X_3 eines und damit auch gleich aller Büschel eine Gerade erfüllen. Hieraus schliesst man weiter, dass auf F_8 die X_3 durch einen festen X_1 auf die Punkte einer Ebene und die X_3 in einem festen X_4 auf die Punkte eines S_4 abgebildet werden. Daraus folgt weiterhin, dass alle X_3 durch eine Gerade auf die Punkte einer $G_{3;1}$ und alle durch einen Punkt auf die einer $G_{4;2}$ abgebildet werden, da man die im Abschnitt 13 ausführlich behandelten Erzeugun-

gen der $G_{n;k}$ auf die entsprechenden Teilgebilde der F_8 unmittelbar anwenden kann. Schliesslich ergibt sich dann aus demselben Grunde, dass die F_8 selber ein $G_{5;3}$ ist, wozu man nur noch benötigt, dass F_8 einen Raum mit der richtigen Zahl von 14 Dimensionen aufspannt.

Auf genau dieselbe Weise beweist man dann ganz allgemein:

Satz 22. Durch die $G_{n;1}$ ($n \geq 4$) gehen $\infty^{4(n-3)}$ ausgezeichnete Kegel, deren Spitzenräume durch Teilmengen $G_{n-4;1}$ der $G_{n;1}$ aufgespannt werden. Die $G_{n-4;1}$ sind dabei die Bildmengen der Geraden in einem X_{n-4} des X_n (bzw. der Geraden durch einen X_0 bei $n = 4$). Die Gesamtheit der so beschriebenen Kegel wird nach Dualisieren auf die Punkte einer den Relationenraum $K_{\binom{n+1}{4}-1}$ der $G_{n;1}$ aufspannenden $G_{n;3}$ abgebildet. Die projektive Gruppe des X_n erfährt dann im Relationenraum der $G_{n;1}$ eine irreduzible Darstellung durch Transformationen, die diese $G_{n;3}$ in sich überführen.

b) *Quadratische Relationen der allgemeineren $G_{n;k}$.*

Der einfachste Fall einer Grassmannschen Mannigfaltigkeit, die nicht zu dem im vorigen Absatz behandelten Typ gehört, ist bekanntlich die $G_{5;2}$ des S_{19} . Die Relationen der $G_{5;2}$ sind im Abschnitt 15 alle aufgestellt worden. Es gibt, wie wir dort feststellten, 35 linear unabhängige Quadriken durch die $G_{5;2}$, d. h. der Relationenraum ist ein K_{34} . Es sei weiterhin daran erinnert, dass wir im Abschnitt 15 mit der $G_{5;2}$ eine Mannigfaltigkeit D_{14} , verknüpft hatten, die durch die Räume der $\infty^9 G_{3;1}$ auf der $G_{5;2}$ erzeugt wird, wobei die $G_{3;1}$ die Bildmengen derjenigen Ebenen des X_5 sind, die gleichzeitig durch einen Punkt gehen und in einem X_4 liegen. Diese $\langle G_{3;1} \rangle_5$ erzeugen ihrerseits wiederum je $\infty^5 \langle G_{4;1}^I \rangle_9$ und $\infty^5 \langle G_{4;2}^{II} \rangle_9$, wobei die $G_{4;1}^I$ die Ebenen durch einen Punkt und die $G_{4;2}^{II}$ die Ebenen jeweils in einem X_4 des X_5 abbilden. Jeder $\langle G_{3;1} \rangle_5$ ist demnach genau der Schnitt eines $\langle G_{4;1}^I \rangle_9$ und eines $\langle G_{4;2}^{II} \rangle_9$, und D_{14} wird auch durch die $\infty^9 \langle G_{4;1}^I \rangle_9$ und die $\infty^5 \langle G_{4;2}^{II} \rangle_9$ erzeugt. Diese Tatsachen werden uns nützlich sein, um zu dem Ergebnis des folgenden Satzes zu gelangen:

Satz 23. Durch die $G_{5;2}$ gehen ∞^9 ausgezeichnete Kegel, deren Spitzenräume durch irgendwelche $G_{4;1}^I$ und $G_{4;2}^{II}$, die sich in einer $G_{3;1}$ schneiden, aufgespannt werden. Diese Kegel sind den $(5; 4, 0)$ -Elementen des X_5 eindeutig zugeordnet. Sie werden nach Dualisierung auf die Punkte einer den Relationenraum K_{34} der $G_{5;2}$ aufspannenden $J_{5;4,0}$ abgebildet. Die projektive Gruppe des X_5 wird im K_{34} irreduzibel dargestellt.

Beweis: Wir nehmen irgendeine der dreigliedrigen Relationen der $G_{5;2}$, wie sie im Abschnitt 15 aufgestellt worden sind, etwa:

$$(6) \quad p_{015} p_{235} + p_{025} p_{315} + p_{035} p_{125} = 0$$

und stellen fest, dass durch

$$(7) \quad p_{015} = p_{025} = p_{035} = p_{235} = p_{315} = p_{125} = 0,$$

d. h. die Gleichungen des zu (6) gehörigen Spitzenraumes, im X_5 genau diejenigen Ebenen gekennzeichnet sind, die entweder durch den Punkt $(0, \dots, 0, 1)$ gehen oder in der Hyperebene $x_5 = 0$ liegen. Das heisst aber, dieser Spitzenraum ist gerade ein $\langle G_{4;1}^I \rangle_3 \cup \langle G_{4;2}^{II} \rangle_3$. Auch von der Erzeugung $G_{5;2} = G_{4;1}^A - G_{4;2}^B$ der $G_{5;2}$ aus überzeugt man sich leicht, dass alle derartig definierten Kegel durch die $G_{5;2}$ gehen. Denn aus $G_{4;1}^A$ projiziert sich zunächst die $G_{5;2}$ in die $G_{4;2}^B$; irgendeiner der $\infty^4 S_3$ auf $G_{4;2}^B$ projiziert diese weiterhin in eine Quadrik Q_4 . Fasst man beide Projektionen zusammen, so ist es eine solche der $G_{5;2}$ auf Q_4 ; als Auge der Projektion, d. h. Spitzenraum eines Kegels durch $G_{5;2}$ tritt dabei gerade ein oben beschriebener S_{13} auf, und es kommen auch alle solche S_{13} dabei vor, wie man sich leicht überzeugt. Diese speziellen Kegel sind somit den Elementen (X_4, X_0') des Grundraumes eindeutig zugeordnet. Wir untersuchen jetzt, welche Mannigfaltigkeit $j^{5;4,0}$ im Relationenraum K_{34} ihnen nach Dualisierung zugeordnet ist. Dazu betrachten wir einen $\langle G_{4;1}^I \rangle_9$ des $\langle G_{5;2} \rangle_{19}$. In der V^2 -Abbildung wird daraus eine Mannigfaltigkeit, deren Raum sich nach den Ergebnissen des vorigen Absatzes in den Raum $\langle V^2(G_{4;1}^I) \rangle_{49}$ und einen K_4^I aufspaltet. Es entsprechen sich ferner:

$$\infty^{54} \text{ Punkte des } \langle V^2(\langle G_{4;1}^I \rangle_9) \rangle = \langle V^2(G_{4;1}^I) \rangle_{49} \cup K_4^I \quad \left| \quad \begin{array}{l} \infty^{54} \text{ Klassenquadriken des } \langle G_{4;1}^I \rangle_9, \\ \text{als Klassenquadriken des} \\ \langle G_{5;2} \rangle_{19} \text{ aufgefasst.} \end{array} \right.$$

Nehmen wir dann irgendeine Korrelation, am einfachsten die Fundamentalkorrelation, an, die $G_{5;2}$ in $\widehat{G}_{5;2}$ überführt, so gehen die Klassenquadriken rechts in die Kegel mit der Spitze $\langle G_{4;1}^I \rangle_9$ über. Darunter gibt es genau ∞^4 Kegel, die $G_{5;2}$ enthalten. Ihnen können nach Dualisierung links nur die Punkte des K_4^I zugeordnet sein. Der geometrische Ort aller ∞^5 so erhaltenen K_4^I ist ersichtlich unsere $j^{5;4,0}$. Hätte ich dieselbe Überlegung mit einem $G_{4;2}^{II}$ der $G_{5;2}$ angestellt, so wäre ich zu der Erkenntnis gelangt, dass dieselbe $j^{5;4,0}$ auf eine zweite Weise durch $\infty^5 K_4^{II}$ erzeugt wird. Wir haben uns jetzt davon zu überzeugen, dass

die $j^{5;4,0}$ den K_{34} aufspannt. Wäre dies nicht der Fall, so müsste nach den soeben angestellten Überlegungen durch die von den $\langle G_{4;1}^I \rangle_9$ und $\langle G_{4;2}^{II} \rangle_3$ erzeugte D_{14} mindestens eine Quadrik Q_{18} geben. Q_{18} enthält natürlich auch $G_{5;2}$ und sei im Punkt S_0 der $Q_{5;2}$ nicht singular. Die durch S_0 gehenden $G_{4;1}^I$ und $G_{4;2}^{II}$ liegen in der S_0 nach der Fundamentalkorrelation zugeordneten Hyperebene S'_{18} und spannen diese auch auf. Denn alle Ebenen des X_5 , die die feste Ebene E_2 , deren Bildpunkt S_0 ist, treffen, verteilen sich auf die durch die Punkte von E_2 gehenden und auf die in den X_4 durch E_2 liegenden Teilscharen. Q_{18} müsste also in fast allen Punkten S_0 der $Q_{5;2}$ von der Hyperebene S'_{18} , die S_0 nach der Fundamentalkorrelation zugeordnet ist, berührt werden. Das ist jedoch nicht möglich, da die Beziehung zwischen S_0 und S'_{18} keine Polarität, sondern eine Nullkorrelation ist. Um schliesslich noch zu zeigen, dass $j^{5;4,0} = J^{5;4,0}$ ist, kann man folgendermassen vorgehen, was wir jedoch nur skizzieren wollen. Man weiss, dass $J^{5;4,0}$ ein allgemeiner hyperebener Schnitt der $S_{5;5}$ ist, und versuche danach, auch die $j^{5;4,0}$ als solchen zu erklären. Zuerst stellt man leicht fest, dass die Bildmenge aller derjenigen $(5;4,0)$ -Elemente, bei denen der Punkt auf eine Gerade beschränkt ist bei beiden Mannigfaltigkeiten eine Regelschar ($C^1 - C^1 - C^1 - C^1 - C^2$) ist. Dann lege man Durch 7 allgemeine erzeugende K_4^I der $j^{5;4,0}$ je einen allgemeinen S_5^I innerhalb eines den K_{34} enthaltenden K_{35} . Diese 7 S_5^I bestimmen dann eine $S_{5;5}$, von der $j^{5;4,0}$ hyperebener Schnitt ist.

Ausser den soeben behandelten, speziellsten Kegeln gibt es aber noch weitere bemerkenswerte Quadriken durch die $G_{5;2}$. Wir wollen davon nur die Kegel vom Rang 7 kurz ins Auge fassen, von denen 5 Exemplare in dem im Abschnitt 15 aufgestellten Basissystem vorkamen. Über sie gilt

ZATZ 24. Zu jedem Paar (G_1, G_3) des Grundraumes X_5 , wobei G_1 und G_3 windschief sein sollen, ist ein durch die $G_{5;2}$ gehender Kegel vom Rang 8 zugeordnet. Der Spitzen- S_{11} desselben schneidet aus $G_{5;2}$ die Bildmenge aller derjenigen Ebenen aus, die g_1 in einem Punkt und G_3 in einer Geraden schneiden. Die im vorigen Satz behandelten Höchstkegel lassen sich als Grenzfälle dieser Kegel auffassen.

Beweis: Die viergliedrige Relation

$$(8) \quad p_{045} p_{123} - p_{145} p_{023} + p_{245} p_{013} - p_{345} p_{012} = 0$$

stellt im $\langle G_{5;2} \rangle_{19}$ einen Kegel mit der durch

$$(9) \quad p_{045} = p_{145} = p_{245} = p_{345} = p_{012} = p_{013} = p_{023} = p_{123} = 0$$

definierten Spitze S_{11} dar. Dieser S_{11} schneidet aber ersichtlich aus der $G_{5;2}$ die Gesamtheit der Bildpunkte aller Ebenen aus, die gleichzeitig durch einen Punkt der Geraden

$$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

gehen und in einer Hyperebene durch den S_3 :

$$x_4 = x_5 = 0$$

liegen, d. h. aber der Kegel (8) ist von der Art, wie wir sie im der Formulierung des Satzes beschrieben haben. Da es je ∞^9 Gerade und G_3 im X_5 gibt, haben wir ∞^{16} Kegel dieser Sorte. Lassen wir jetzt G_1 und G_3 eine solche spezielle Lage annehmen, dass sie einen Punkt G_0 gemein haben und einen G_4 aufspannen, so kann man das beschriebene Ebenensystem auch aufstellen, es zerfällt jedoch in das System aller Ebenen in G_4 , die G_1 treffen und in das aller Ebenen durch G_0 , die mit G_4 eine Gerade gemein haben. Der zugehörige Spitzenraum S_{11} liegt dann eindeutig in einem S_{13} , der den dem Element (G_4, G_0) zugeordneten Kegel des einfacheren Typus definiert. Damit ist klar, in welcher Weise die vorher behandelten Kegel von einem um 2 Einheiten niedrigeren Rang jetzt als Grenzfälle auftreten.

Bei der Untersuchung der allgemeineren $G_{n;2}$ ($n \geq 5$) würde man finden, dass der Relationenraum durch eine $J^{n; n-1, n-5}$ aufgespannt wird und dass die projektive Gruppe auch darin nach Satz 19 irreduzibel dargestellt wird. Jedoch tritt eine Aufspaltung des Relationenraumes zum ersten Male bei der $G_{7;3}$ des S_{69} auf, der einfachsten $G_{n;k}$, die nicht mehr zum Typus der $G_{n;1}$ und $G_{n;2}$ gehört. Der Relationenraum der $G_{7;3}$ ist ein K_{720} , wie man leicht bestätigt. Wir hatten im Abschnitt 15 festgestellt, dass alle $G_{2k+1;k}$ Fundamentalkorrelationen besitzen, die sie in das duale Gebilde $\widehat{G}_{2k+1;k}$ überführen. Diese ist bei der $G_{7;3}$ eine Polarität bezüglich einer gewissen nicht entarteten Quadrik Q_{68} . Dies bedeutet wiederum, im Relationenraum K_{720} ist eine Hyperebene K_{719} ausgezeichnet, die zusammen mit $V^2(G_{7;3})$ den Raum der $V^2(Q_{68})$ aufspannt. Dieselbe Q_{68} lässt sich auch als Hüllgebilde ihrer Tangentialhyperebenen auffassen und ist dann mit \widehat{Q}_{68} zu bezeichnen. \widehat{Q}_{68} entspricht dann ein nicht auf K_{719} gelegener Punkt K_0 . Aus geometrischen Gründen werden K_{719} und K_0 bei der Darstellung, die die projektive Gruppe des X_7 im K_{720} erfährt, je in sich übergeführt. Durch Schlüsse, die ähnlich sind wie bei der $G_{5;2}$, findet man dann, dass der K_{719} nicht weiter zerfällt, sondern durch die Punkte einer in sich trans-

formierten $J^{7;5,1}$ aufgespannt wird. Die Punkte dieser $J^{7;5,1}$ sind Bilder der $(7; 5, 1)$ -Elemente des X_7 . Ein Element (A_1, A_5) des X_7 definiert eindeutig einen Kegel, dessen Spitzen- S_{63} aus $G_{7;3}$ die Bildmenge aller derjenigen X_3 ausschneidet, die entweder A_1 treffen oder A_5 mindestens in einer Ebene schneiden.

Bei den allgemeineren $G_{n;3}$ ($n \geq 7$) findet wieder nur eine Aufspaltung des Relationsraumes in 2 Teile statt; sie lautet:

$$\langle J^{n;n-2,n-6} \rangle - \langle G_{n;n-8} \rangle \quad \text{oder besser} \quad \langle J^{n;n-2,n-6} \rangle - \langle J^{n;n,n-8} \rangle$$

Beim Relationsraum der $G_{n;4}$ sind auch nur 2 Komponenten zu unterscheiden, und zwar:

$$\langle J^{n;n-3,n-7} \rangle - \langle J^{n;n-1,n-9} \rangle \quad (n \geq 9)$$

Von hier aus erhält man schon einen Fingerzeig, wie die Zerlegung im allgemeinsten Fall zu lauten hat. Wir formulieren dies im folgenden lediglich ohne den Beweis (*) der uns hier zu weit führen würde.

SATZ 25. Der Raum K der quadratischen Relationen einer $G_{n;h}$ ($h < \frac{n}{2}$) wird im folgender Weise in Teilräume zerlegt, die bei der Darstellung der projektiven Gruppe des Grundraumes X_n je in sich transformiert werden:

- a) h ungerade: $K = \langle J^{n;n-h+1,n-h-3} \rangle - \langle J^{n;n-h+3,n-h-5} \rangle - \dots$
 $\quad \quad \quad - \langle J^{n;n-2,n-2h} \rangle - \langle J^{n;n,n-2h-2} \rangle$
- b) h gerade: $K = \langle J^{n;n-h+1,n-h-3} \rangle - \langle J^{n;n-h+3,n-h-5} \rangle - \dots$
 $\quad \quad \quad - \langle J^{n;n-3,n-2h+1} \rangle - \langle J^{n;n-1,n-2h-1} \rangle.$

Die in Klammern geschriebenen Inzidenzmannigfaltigkeiten der einzelnen Teile werden durch die Gruppe je in sich transformiert.

28. QUADRATISCHE RELATIONEN DER M_Q -MANNIGFALTIGKEITEN

Wir haben jetzt die V^2 -Transformierten der im Teil IV ausführlich behandelten Mannigfaltigkeiten M_Q zu betrachten, die den S_r^I einer nicht entarteten Quadrik Q_{2k} zugeordnet waren. Von $V^2(M_{\binom{k+1}{2}})$ kann man nachweisen, dass sie mit dem Grassmannbild der $\infty^{\binom{k+1}{2}} S_k^I$ der

(*) s. W. Burau, Proj. Klassifikation der Grassmannrelationen, Ann. di Mat, IV, 34 (1953), 133 - 160,

Q_{2k} zusammenfällt. Es erweist sich bei weiteren Untersuchungen als zweckmässig, grundsätzlich die G -Bilder aller S_h auf der Q_{2k} zu betrachten und sich dabei nicht nur auf den Fall $h = k$ zu beschränken.

Wir definieren daher: $\Gamma^{h,h}$ sei bei $0 \leq h < k$ die Menge der G -Bildpunkte aller auf Q_{2k} gelegenen S_h ; bei $h = k$ seien mit $\Gamma_I^{k,k}$ und $\Gamma_{II}^{k,k}$ je die G -Bildmengen der S_k^I und S_k^{II} der Q_{2k} bezeichnet. Dann gilt folgender:

SATZ 26. Die G -Bildmenge $\Gamma^{h,h}$ aller auf Q_{2k} gelegenen S_h ($0 \leq h < k$) spannt den ganzen Raum $\langle G_{2k+1;h} \rangle$ auf. Bei $k = h$ spannen die Mengen $\Gamma_I^{k,k}$ und $\Gamma_{II}^{k,k}$ zusammen den Raum $\langle G_{2k+1;k} \rangle$ auf.

Beweis: Bei beliebigem k und $h = 0$ ist $\Gamma^{k,0} = Q_{2k}$; hierfür stimmt die Behauptung; ferner ist aus der gewöhnlichen Liniengeometrie des S_3 bekannt, dass $\Gamma_I^{1,1}$ und $\Gamma_{II}^{1,1}$ zwei Kegelschnitte sind, die zusammen den ganzen Raum $\langle G_{3;1} \rangle$ aufspannen. Wir können daher annehmen, bis $k - 1$ wäre alles gezeigt. Gegeben sei dann die Q_{2k} , auf der die S_h betrachtet werden sollen ($0 < h \leq k$). Wir wissen, dass alle durch den Punkt P_0 gehenden S_h der Q_{2k} durch Verbinden von P_0 mit den S_{h-1} einer im Tangential- T_{2k} in P_0 unabhängig von P_0 liegenden $Q_{2(k-1)}$ erhält. Nach Induktionsvoraussetzung spannen die G -Bilder der S_{h-1} auf $Q_{2(k-1)}$ ihren Grassmannraum auf. Daraus folgt zunächst, dass ein beliebiger, durch P_0 gehender und in $T_{2k}(P_0)$ liegender S_h im Sinne der G -Bilder durch die P_0 enthaltenden S_h der Q_{2k} «aufgespannt» wird. Durch Veränderung von P_0 erfasst man so alle S_h des $\langle Q_{2k} \rangle$, die Q_{2k} berühren, d. h. ausgeartet schneiden. A_h sei dann ein Raum, der Q_{2k} nicht berührt; durch A_h lege man den A_{h+1} , der auch nicht berühren, sondern mit Q_{2k} die nicht entartete Quadrik Q_h gemein haben mag. Ist ferner A_{h-1} in A_h allgemein gewählt, so gibt es durch A_{h-1} in A_{h+1} zwei berührende S_h . Das Büschel aller S_h durch A_{h-1} in A_{h+1} , wozu auch A_h gehört, hat als G -Bild eine Gerade, von der 2 Punkte, also auch jeder andere, durch Punkte der Menge $\Gamma^{h,h}$ (bei $h < k$), bzw. durch $\Gamma_I^{h,h}$ und $\Gamma_{II}^{h,h}$ (bei $h = k$) aufgespannt wird. Damit ist aber alles gezeigt.

Wir bezeichnen mit \mathcal{G} jetzt die kontinuierliche Gruppe aller Projektivitäten der Q_{2k} in sich, die die S_k^I und damit natürlich auch die S_k^{II} wieder in Räume derselben Sorte überführen. Durch Übertragung auf die Grassmannräume ergeben sich dann wichtige Darstellungen der Gruppe \mathcal{G} , deren Irreduzibilität wir auf die übliche Weise zeigen wollen. Dazu benötigen wir zuvor folgenden wichtigen:

SATZ 27. \mathfrak{g} sei diejenige Untergruppe der kontinuierlichen Gruppe \mathcal{G} aller Projektivitäten der Q_{2k} in sich, wobei 2 gegebene, nicht konjugierte Punkte A und B der Q_{2k} fest bleiben. Dann spaltet sich bei

$0 \leq h < k - 1$ der Grassmannraum $\langle G_{2k+1; k} \rangle$, der nach Satz 26 mit dem Raum $\langle \Gamma^{k, h} \rangle$ zusammenfällt, in folgender Weise bezüglich \mathfrak{g} in Teilräume auf:

$$\langle \Gamma^{k, h} \rangle = \langle \Gamma_A^{k-1, h-1} \rangle - \langle \Gamma_B^{k-1, h-1} \rangle - \langle \Gamma^{k-1, h} \rangle - \langle \Gamma^{k-1, h-2} \rangle$$

bei $h = k - 1$ lautet diese Aufspaltung:

$$\langle \Gamma^{k, k-1} \rangle = \langle \Gamma_A^{k-1, k-2} \rangle - \langle \Gamma_B^{k-1, k-2} \rangle - \langle \Gamma_I^{k-1, k-1} \rangle - \langle \Gamma_{II}^{k-1, k-1} \rangle - \langle \Gamma^{k-1, k-3} \rangle$$

Hierbei transformiert \mathfrak{g} diese invarianten Teilräume jeweils so dass die darin liegenden Γ -Mannigfaltigkeiten, die eine leicht ersichtliche Bedeutung haben, je in sich übergehen Bei $b = -1$ ist unter $\Gamma^{a, b}$ ein Punkt und bei $b < -1$ die leere Menge zu verstehen. Im Falle $h = k$ spaltet sich der Raum der $\Gamma_I^{k, k}$ in folgender Weise auf:

$$\langle \Gamma_I^{k, k} \rangle = \langle \Gamma_{A, I}^{k-1, k-1} \rangle - \langle \Gamma_{B, I}^{k-1, k-1} \rangle - \langle \Gamma_I^{k-1, k-2} \rangle$$

Eine analoge Aufspaltung besitzt $\langle \Gamma_{II}^{k, k} \rangle$; $\Gamma_I^{k, h}$ und $\Gamma_{II}^{k, k}$ liegen windschief zueinander.

Beweis: Zur Geraden $A B$ sei der Raum der Quadrik Q_{2k-2}^{AB} bezüglich der Q_{2k} polar. Dann besagt der Satz für $h = 0$ die einfache Tatsache, dass der Raum $\langle Q_{2k} \rangle$ durch die Punkte A, B und Q_{2k-2}^{AB} aufgespannt wird, die ersichtlich bei \mathfrak{g} invariant bleiben. Wir wissen ferner, dass $\Gamma_I^{1, 1}$ und $\Gamma_{II}^{1, 1}$ Kegelschnitte sind, die $\langle G_{3; 1} \rangle$ aufspannen. Den Geraden der Scharen I und II auf Q_2 durch A und B mögen dabei die Punkte $A_0^I, A_0^{II}, B_0^I, B_0^{II}$ entsprechen. Mit A_0^I, B_0^I und dem Kegelschnitt $\Gamma_I^{1, 1}$ bleibt auch der Tangentschnittpunkt C_0^I bei der Untergruppe \mathfrak{g} invariant, sodass wir gewünschte Aufspaltung der Ebene $\langle \Gamma_I^{1, 1} \rangle$ erhalten. A_0^I wäre gleich $\Gamma_{A, I}^{0, 0}$, B_0^I gleich $\Gamma_{B, I}^{0, 0}$ und C_0^I gleich $\Gamma_I^{0, -1}$ zu setzen; Entsprechendes gilt für die Ebene $\langle \Gamma_{II}^{1, 1} \rangle$ (s. Bild 32). Wir nehmen jetzt induktiv an, dass bis $k - 1$ alles bewiesen sei. Gegeben sei dann eine Q_{2k} mit den Punkten A und B ; bezüglich der auf A, B begründeten Untergruppe \mathfrak{g} sind dann folgende Teilmengen aus der Gesamtheit aller S_h auf Q_{2k} zu betrachten ($h > 0$):

- 1) Alle S_h durch A , abzubilden innerhalb $\Gamma^{k, h}$ bei $h < k$ auf $\Gamma_A^{k-1, h-1}$, bzw. bei $h = k$ auf $\Gamma_{A, I}^{k-1, k-1}$ und $\Gamma_{A, II}^{k-1, k-1}$
- 2) Alle S_h durch B , abzubilden innerhalb $\Gamma^{k, h}$ bei $h < k$ auf $\Gamma_B^{k-1, h-1}$, bzw. bei $h = k$ auf $\Gamma_{B, I}^{k-1, k-1}$ und $\Gamma_{B, II}^{k-1, k-1}$

- 3) Alle S_h auf Q_{2k-2}^{AB} bei $h < k-1$ abzubilden auf $\Gamma^{k-1,h}$, bzw. bei $h = k-1$ auf $\Gamma_I^{k-1,k-1}$ und $\Gamma_{II}^{k-1,k-1}$; bei $h = k$ ist dieser Bestandteil nicht vorhanden.

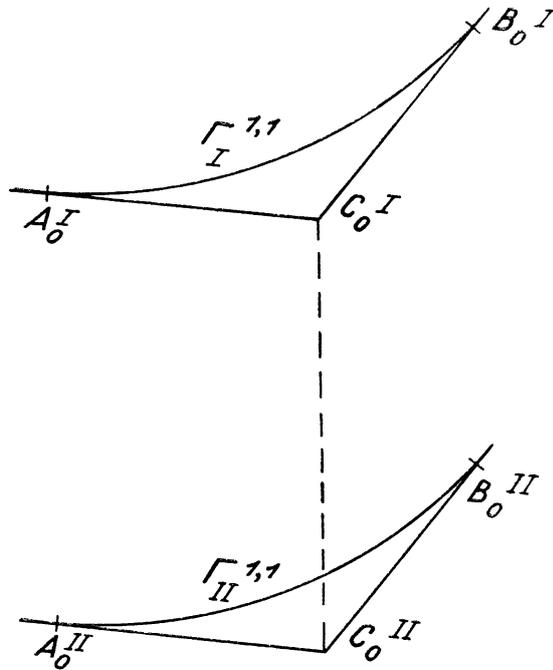


Bild 32

Nun hatten wir in Abschnitt 16 gelernt, dass die Gesamtheit aller S_h des S_{2k+1} bezüglich des windschiefen Paares g_1, G_{2k-1} im Sinne der G -Bilder durch folgende Teilmengen aufgespannt werden kann:

- Alle $S_h = g_1 \cup G_{h-2}$, abzubilden auf eine $G_{2k-1;h-2}$,
- Alle $S_h = g_0 \cup G_{h-1}$, abzubilden auf eine Produktmannigfaltigkeit $G_{2k-1;h-1} \times g_1$,
- Alle S_h auf G_{2k-1} , abzubilden auf eine $G_{2k-1;h}$.

Lassen wir g_1 mit AB und G_{2k-1} mit $\langle Q_{2k-2} \rangle$ zusammenfallen, so sehen wir, dass von unseren obigen Gesamtheiten 1) und 2) zu b) und 3) zu c) gehören, während zu a) kein S_h auf Q_{2k} gehört, da die Gerade AB

nicht auf Q_{2k} liegt. Es sei zuerst $h < k$ angenommen. Zuzufolge Satz 26 wissen wir dann, dass c) durch 3), sowie b) durch 1) und 2) aufgespannt werden (1) und 2) spannen zwei unabhängig liegende $G_{2k-1;h-1}$ d. h. das ganze Produkt $G_{2k-1;h-1} \times g_1$ auf). Schliesslich wissen wir noch, dass die Bildpunkte aller Räume $S_k = A \cup B \cup S_{k-2}$, wobei S_{k-2} beliebig aus Q_{2k-2}^{AB} entnommen ist, auf die Punkte einer den Grassmannraum $\langle G_{2k-1;h-2} \rangle$ zu a) aufspannenden $\Gamma^{k-1,h-2}$ abgebildet werden; die Punkte dieser $\Gamma^{k-1,h-2}$ gehören nicht zu $\Gamma^{k,h}$ werden jedoch aus geometrischen Gründen bei der Untergruppe g auch in sich transformiert. Damit ist aber für $h < k$ alles gezeigt. Einige besondere Überlegungen erfordert noch der Fall $h = k$. Wir betrachten gleichzeitig die Mannigfaltigkeiten $\Gamma_I^{k,h}$ und $\Gamma_{II}^{k,h}$ und kennen davon bereits folgende Teilgebilde bezüglich g : $\Gamma_{A,I}^{k-1,k-1}$, $\Gamma_{A,II}^{k-1,k-1}$, $\Gamma_{B,I}^{k-1,k-1}$, $\Gamma_{B,II}^{k-1,k-1}$. Ausserdem sei $\Gamma_C^{k-1,k-2}$ die Bildmenge aller $S_k = A \cup B \cup S_{k-2}$ mit einem beliebigen S_{k-2} aus Q_{2k-2}^{AB} . Dann wissen wir nach Induktionsannahme und aus unserer Kenntnis von der $G_{2k+1;k}$, dass diese 5 Mengen windschief zueinander liegen. Dem festem Raum $A \cup B \cup E_{k-2}$ mit E_{k-2} aus Q_{2k-2} entspreche der Punkt E auf $\Gamma_C^{k-1,k-2}$. Durch E_{k-2} gehen je ∞^1 S_k^I und S_k^{II} , die sich wie die beiden Geradenscharen einer Q_2 verhalten und auf die Punkte je eines C_0^I und C_0^{II} aus $\Gamma_I^{k,h}$ und $\Gamma_{II}^{k,h}$ abgebildet werden mögen. Diese beiden Kegelschnitte spannen den Raum einer $G_{3;1}^E$ auf, in der ausserdem der Punkt E liegt. Die Treffgerade von E an die Kegelschnittebenen schneide diese in den Punkten C_0^I und C_0^{II} (s. Bild 32). Die Berührungspunkte der Tangenten von C_0^I und C_0^{II} aus seien A_0^I , B_0^I und A_0^{II} , B_0^{II} . Lässt man jetzt E_{k-2} über alle S_{k-2} der Q_{2k-2}^{AB} variieren, so beschreibt E , wie wir wissen, die $\Gamma_C^{k-1,k-2}$. C_0^I und C_0^{II} mögen dabei die Mannigfaltigkeiten $\Gamma_I^{k-1,k-2}$ und $\Gamma_{II}^{k-1,k-2}$ durchlaufen. Γ_I und Γ_{II} spannen zusammen mit $\Gamma_{A,I}$ und $\Gamma_{B,I}$ bzw. $\Gamma_{A,II}$ und $\Gamma_{B,II}$ die Räume $\langle \Gamma_I^{k,h} \rangle$ und $\langle \Gamma_{II}^{k,h} \rangle$ auf, ferner enthält $\langle \Gamma_I \cup \Gamma_{II} \rangle$ den Raum $\langle \Gamma_C^{k-1,k-2} \rangle$. Hätte $\langle \Gamma_I \rangle$ mit dem Verbindungsraum $\langle \Gamma_{A,I} \cup \Gamma_{B,I} \rangle$ etwas gemein, so müsste dasselbe auch für $\langle \Gamma_{II} \rangle$ bezüglich $\langle \Gamma_{A,II} \cup \Gamma_{B,II} \rangle$ gelten; dann könnte aber nicht $\Gamma_C^{k-1,k-2}$ windschief zur Verbindung der 4 Räume $\langle \Gamma_{A,I} \rangle$, $\langle \Gamma_{B,I} \rangle$, $\langle \Gamma_{A,II} \rangle$, $\langle \Gamma_{B,II} \rangle$ liegen, wie es der Fall ist. Es bleibt somit nichts anderes übrig als dass diese 4 Räume auch zusammen mit Γ_I und Γ_{II} unabhängig liegen und damit auch $\Gamma_I^{k,h}$ und $\Gamma_{II}^{k,h}$ zwei zueinander windschiefe Teilräume von $\langle G_{2k+1;k} \rangle$ aufspannen. Weiterhin folgt aber auch sofort, dass Γ_I und Γ_{II} mit $\Gamma_C^{k-1,k-2}$ projektiv übereinstimmen müssen. Denn $\Gamma_I^{k-1,k-2}$ entsteht z. B. durch Projektion der $\Gamma_C^{k-1,k-2}$ aus dem Auge $\langle \Gamma_I^{k,h} \rangle$ auf den Raum $\langle \Gamma_{II}^{k,h} \rangle$. Das Auge und der Raum, der projiziert wird,

haben nichts gemein, sodass in der Tat die projektiven Eigenschaften bei der Projektion nicht verändert werden.

Nachdem die Zerlegung der Räume $\langle \Gamma^{k,k} \rangle$ bzw. $\langle \Gamma_I^{k,k} \rangle$ bezüglich der Untergruppe \mathfrak{g} bekannt ist, lässt sich die Irreduzibilität der Darstellungen der Gesamtgruppe \mathfrak{G} in diesen Räumen auf die übliche Weise leicht einsehen, sodass wir ohne Beweis formulieren:

SATZ 28. Die Drehgruppe \mathfrak{G} wird in den Räumen $\langle \Gamma^{k,k} \rangle$, bzw. $\langle \Gamma_I^{k,k} \rangle$, die durch die G -Bildmengen aller S_k , bzw. S_k^I der Q_{2k} aufgespannt werden, irreduzibel dargestellt.

Wir haben jetzt nur noch den Zusammenhang zwischen dem G -Bild $\Gamma_I^{k,k}$ der S_k^I und der im Teil IV ausführlich beschriebenen, auch den S_k^I zugeordneten Mannigfaltigkeit $M_{\binom{k+1}{2}}$ zu finden. Für $k = 1$ ist M_1 eine Gerade S_1 und $\Gamma_I^{1,1}$ ein Kegelschnitt, also das V^2 -Bild von S_1 . Ebenso weiss man schon seit langem, dass $\Gamma_I^{2,2}$ eine V_3^2 , also das V^2 -Bild der $M_3 = S_3$ ist. Diese Beziehung gilt allgemein:

SATZ 29. Das G -Bild $\Gamma_I^{k,k}$ der Menge aller S_k^I auf der Q_{2k} ist das V^2 -Bild der $M_{\binom{k+1}{2}}$.

Beweis: Wir wollen den Beweis dieser Tatsache, den man auf verschiedene Weise führen kann, nur andeuten. Einmal sieht man die Behauptung durch Ausrechnung der Grassmannschen Koordinaten der S_k^I der Q_{2k} aus der im Abschnitt 20 angegebenen Matrix ein. Man kann andererseits aber auch leicht eine auf Satz 27 beruhende, projektive Erzeugung für die Mannigfaltigkeit $\Gamma^{k,k}$ angeben durch $\infty^{\binom{k+1}{2}-1}$ Kegelschnitte anstelle der Geraden, durch die im Abschnitt 18 die $M_{\binom{k+1}{2}}$ erzeugt wurde. Eine gleichartige Erzeugung findet man andererseits aber auch für die $V^2(M_{\binom{k+1}{2}})$, sodass man eine direkte projektive Abbildung unter Benutzung einer zulässigen Induktion nach k zwischen $\Gamma^{k,k}$ und $V^2(M_{\binom{k+1}{2}})$ herstellen kann.

Hieraus ergibt sich zusammen mit Satz 27 sofort die Dimensionszahl des durch $V^2(M_{\binom{k+1}{2}}) = \Gamma^{k,k}$ aufgespannten Raumes und damit auch die Anzahl der linear unabhängigen, durch $M_{\binom{k+1}{2}}$ gehenden Quadriken:

SATZ 30. Durch die $M_{\binom{k+1}{2}}$ gehen Quadriken die ein von $2^{k-1}(2^k + 1) - \binom{2k+1}{k} - 1$ Parametern abhängiges Linearsystem bilden.

Wir wollen jetzt die einfachsten Fälle der $M_{\binom{k+1}{2}}$ und die hindurchgehenden Quadrikensysteme gesondert betrachten. Für $k = 3$ ist die M_6 selber eine Quadrik, sodass der erste interessante Fall bei $k = 4$ eintritt. Durch die M_{10} des S_{15} gehen ∞^9 Quadriken. Hierunter findet man sofort ein ausgezeichnetes Teilsystem spezieller Kegel, wenn man an die Erzeugung $M_{10} = M_6^A - M_6^B$ denkt. Aus dem Raum einer solchen M_6^A wird die M_{10} ersichtlich in die Quadrik M_6^B projiziert. Derartige M_6^A gibt es aber auf der M_{10} ebensoviele, wie es Punkte auf der Grundquadrik Q_8 gibt, also ∞^8 . Es gilt dann:

SATZ 31. Durch die M_{10} gehen ∞^8 spezielle Kegel, denen nach Dualisierung die Punkte einer den Relationenraum R_9 aufspannenden Quadrik entsprechen.

Beweis: Die in Abschnitt 20 angegebenen 10 Quadriken, die dort als Basis für das Linearsystem aller dienen, sind bereits von der behaupteten Art. Denn z. B.

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

hat als Spitzenraum gerade den Raum der durch

$$x_0 = x_1 = \dots = x_3 = y_3 = 0$$

gekennzeichneten M_6 , die in den übrigen Koordinaten die Gleichung

$$x'_0 y'_0 + x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 + x'_3 y'_3 = 0$$

bestzt. Nach Dualisierung entsprechen diesen Kegeln also gewiss ∞^8 Punkte, die den ganzen Relationenraum R_9 aufspannen. Man hat sich nur noch davon zu überzeugen, dass sie auch wirklich eine \bar{Q}_8 bilden. Dazu betrachte man die beiden Kegel:

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_0 y'_0 + x_1 y'_1 + x_2 y'_2 + x_3 y'_3 = 0,$$

die solchen Punkten A und A' der Grundquadrik zugeordnet sind, die bezüglich dieser Q_8 konjugiert sind. Den Punkten der Geraden AA' entsprechen dann die Quadriken des Büschels

$$a(x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + b(x_0 y'_0 + x_1 y'_1 + x_2 y'_2 + x_3 y'_3) = 0,$$

die ersichtlich sämtlich Kegel des gleichen Typs sind. Die Punkte der Q_8 werden also im R_9 so abgebildet, dass den Punkten einer Geraden der Q_8 wieder die Punkte einer Geraden zugeordnet sind. Hieraus folgt

weiterhin, dass auch Ebenen und S_3 der Q_8 wieder solche Räume zugeordnet sind, d. h. aber die fragliche Punktmenge im R_9 kann nichts anderes als wieder eine Quadrik \bar{Q}_8 sein.

Wir gehen jetzt zur M_{15} des S_{31} über. Im Abschnitt 20 war ein System von 66 linear unabhängigen Quadriken durch M_{15} angegeben worden, wovon 60 von einem 4-gliedrigen und 6 von einem 6-gliedrigen Typ waren. Die viergliedrigen Relationen, die Kegel vom Rang 8 sind, entsprechen dann den Geraden der Grundquadrik Q_{10} , derart dass der Spitzenraum eines solchen Kegels gerade durch die Bildmenge aller dergleichen S_5^I aufgespannt wird, die eine feste Gerade der Q_{10} schneiden. Dies ergibt sich ebenso wie die entsprechende Tatsache für die M_{10} . Es gibt ∞^{17} derartige Kegel; die ihnen nach Dualisierung im Relationenraum entsprechende Punktmenge findet man auch folgendermassen:

Es entsprechen sich zwischen der Q_{10} und der M_{15} :

Gesamtheit der $\infty^6 S_5^I$ durch g | ∞^6 Punkte einer M_6^g auf M_{15} .

Die M_6^g rechts ist eine Q_6 ; in der V^2 -Abbildung wird aus dem Raum $\langle M_6^g \rangle_7$ einer solchen M_6^g eine V_7^2 , deren Raum sich wiederum in $\langle V^2(M_6^g) \rangle$ und einen Punkt R_0^g des Relationenraumes R_{65} aufspaltet. Die Gesamtheit der so erhaltenen ∞^{17} Punkte R_0^g bilden eine ausgezeichnete Mannigfaltigkeit, von der man sich zu überzeugen hat, dass es eine den R_{65} aufspannende $I^{5,1}$ ist. Dazu betrachten wir die von den ∞^{17} $\langle M_6^g \rangle_7$ erzeugte Mannigfaltigkeit D_{24} des S_{31} . Diese D_{24} besitzt tatsächlich 24 Dimensionen; denn man überzeugt sich sofort, dass zwei $\langle M_6^g \rangle$ entweder einen Punkt, einen S_1 oder S_3 der M_6^g oder nichts gemein haben, je nach der gegenseitigen Lage der zugeordneten Geraden auf der Q_{10} . Die D_{24} enthält ferner M_{15} als singuläre Punktmenge, und die durch einen Punkt P_0 der M_{15} gehenden $\langle M_6^g \rangle_7$ spannen die P_0 in der Fundamentalkorrelation zugeordnete Hyperebene P'_{30} auf. Würde nun D_{24} in einer der durch M_{15} gehenden Quadriken liegen, so müsste diese in einem allgemeinen Punkt P_0 der M_{15} durch die P_0 zugeordnete P'_{30} berührt werden. Dies ist jedoch unmöglich, da wir im Abschnitt 19 gesehen haben, dass die Beziehung zwischen den Punkten P_0 und den Hyperebenen P'_{30} eine Nullkorrelation und keine Polarität ist. Daraus ergibt sich aber weiterhin die für uns hier wichtige, Tatsache, dass die von den ∞^{17} Punkten R_0^g beschriebene Mannigfaltigkeit den R_{65} aufspannt. Durch weitere Überlegungen, die auf Kennzeichnung der $I^{5,1}$ durch gewisse innere Eigenschaften hinauslaufen, folgt dann leicht der

SATZ 32. Die Kegel vom niedrigsten Rang durch die M_{15} des S_{31} sind den ∞^{17} Geraden der Grundquadrik Q_{10} zugeordnet; sie werden nach Dualisierung auf die Punkte einer den Relationsraum R_{65} aufspannenden $\Gamma^{5,1}$ abgebildet. Nach Satz 28 wird somit der R_{65} durch die Gruppe der Q_{10} in sich irreduzibel transformiert.

Wir übergehen die interessante Frage nach der Bedeutung der 6-gliedrigen Relationen der M_{15} . Man würde finden, dass sie den Paaren A_5^{II}, B_5^{II} allgemeiner Lage der Q_{10} zugeordnet sind. Beim Studium des Relationsraumes R_{363} der M_{21} des S_{63} würde man auf dieselbe Weise finden, dass er durch die vorliegende Gruppe irreduzibel in sich transformiert wird, und zwar so dass die Punkte einer darin liegenden $\Gamma^{6,2}$ dabei in sich transformiert werden. Erst bei der M_{28} des S_{127} , bei der ein Relationsraum R_{1820} vorliegt, haben wir eine Aufspaltung dieses R_{1820} in eine durch eine $\Gamma^{7,3}$ aufgespannte Hyperebene R_{1819} und einen Punkt. Denn bei der M_{28} hat man jetzt die von $\infty^{38} \langle M_6 \rangle_7$ aufgespannte Mannigfaltigkeit D_{45} zu betrachten, wobei die Punkte von einer dieser M_6 die S_7^I durch eine der $\infty^{38} S_3$ auf Q_{14} abbilden. Derselbe Schluss, der oben bei der M_{15} zu der Einsicht führte, dass die mit der M_{15} verknüpfte D_{24} in keiner Quadrik liegt, ergibt jetzt die Tatsache, dass D_{45} in der zu M_{28} gehörigen Fundamentalquadrik Q_{126} enthalten ist.

Allgemein gilt folgender Satz, den wir jedoch an dieser Stelle nicht beweisen können:

SATZ 33. Der Relationsraum R der $M_{\binom{k+1}{2}}$ spaltet sich bezüglich der kontinuierlichen Gruppe aller Transformationen der Grundquadrik Q_{2k} in folgender Weise auf:

$$R = \langle \Gamma^{k, k-4} \rangle - \langle \Gamma^{k, k-8} \rangle - \dots - \langle \Gamma^{k, g+4} \rangle - \langle \Gamma^{k, g} \rangle,$$

wobei $k \equiv g \pmod{4}$ mit $-1 \leq g \leq 2$ ist und unter $\Gamma^{k, -1}$ ein Punkt verstanden wird.

29. GESAMTSCHAU ALLER MANNIGFALTIGKEITEN, BESONDERS HINSICHTLICH IHRER STEREOGRAPHISCHEN PROJEKTION

In diesem Schlussabschnitt wollen wir nochmals sämtliche Grundmannigfaltigkeiten zusammenfassend betrachten und insbesondere ihre birationale Abbildung auf die entsprechenden linearen Räume.

Lassen wir die Normkurven und V-Mannigfaltigkeiten beiseite, so ergibt es sich, dass alle übrigen Grundmannigfaltigkeiten lineare Räume

besitzen, derart dass die durch einen Punkt der Mannigfaltigkeit gehenden Räume einen Kegel über einer anderen Grundmannigfaltigkeit bilden. Der Vollständigkeit halber wollen wir vorübergehend die Figur von s linearen Räumen der Dimensionen m_1, m_2, \dots, m_s , die zueinander unabhängig liegen, d. h. einen Raum der Dimension $m_1 + m_2 + \dots + m_s + s - 1$ aufspannen, mit hinzunehmen und mit $(P_{m_1} \cup P_{m_2} \cup \dots \cup P_{m_s})$ bezeichnen; ferner wollen wir der Kürze halber sagen: eine Mannigfaltigkeit F_a , deren Tangentialräume T_a aus ihr Kegel über einer anderen Mannigfaltigkeit F' ausschneiden, verhält sich im kleinen wie F' . Dann stellen wir folgendes fest:

Die Segremannigfaltigkeit $S_{n_1; n_2; \dots; n_k}$ verhält sich im kleinen wie $(P_{n_1-1} \cup P_{n_2-1} \cup \dots \cup P_{n_k-1})$.

Die Grassmannschen $G_{n;k}$ verhalten sich im kleinen wie die Segreschen $S_{n-k-1;k}$.

Die M_Q -Mannigfaltigkeiten $M_{\binom{k+1}{2}}$ verhalten sich im kleinen wie die Grassmannschen $G_{k;1}$.

Die N -Mannigfaltigkeiten $N_{\binom{k+2}{2}}$ verhalten sich im kleinen wie die Veroneseschen V_k^2 .

Eine nicht entartete Quadrik Q_m verhält sich im kleinen wie eine Q_{m-2}

Hieraus kann man dann folgende bemerkenswerte Kette von Gebilden herstellen, von denen jede folgende sich im kleinen so wie die vorhergehende verhält:

$$(P_{k-1} \cup P_0) - S_{k;1} - G_{k+2;1} - M_{\binom{k+3}{2}}.$$

Dieselbe Kette, für allgemeinere Indexpaare gebildet, endet bereits bei den $G_{m;n}$, während sie, mit $(P_{n_1-1} \cup \dots \cup P_{n_k-1})$ begonnen, bereits bei $S_{n_1; \dots; n_k}$ endet. Eine weitere, nur zweigliedrige Kette ist:

$$V_k^2 - N_{\binom{k+2}{2}}.$$

Nur die Ketten der Quadriken, von denen man 2 Bilden kann, nämlich

$$Q_0 - Q_2 - Q_4 - \dots \quad \text{und} \quad Q_1 - Q_3 - Q_5 - \dots$$

sind unbegrenzt.

Hieran fällt nun auf, dass die allgemeineren V_k^s mit $s > 2$ zu keiner Kette Veranlassung geben, d. h. es kam unter unseren Grundmannigfaltigkeiten keine vor, die sich im kleinen etwa wie eine C^3 , V_2^3 usw. verhielt. Das Abbrechen der Ketten bedeutet sonst auch, dass wir z. B. keine Grundmannigfaltigkeit gefunden hatten, die sich im kleinen wie eine $M_{\binom{k+1}{2}}$ ($k \geq 4$), eine $G_{5;2}$ usw. verhalten. Es sei auf das interessante Problem hingewiesen, solche Mannigfaltigkeiten zu suchen, bzw. zu beweisen, dass es sie nicht gibt; dies dürfte richtig sein, wenn man an die Mannigfaltigkeiten noch die weitere Forderung der transitiven Transformierbarkeit in sich durch Projektivitäten des umgebenden Raumes stellt.

Weitere Klarheit in allen diesen Dingen gewinnt man, wenn man sich die birationale Abbildung aller unserer Grundmannigfaltigkeiten auf die linearen Räume ihrer Dimension vor Augen hält. Es stellt sich heraus, dass sie alle in derselben, nur sinngemäss verallgemeinerten Weise wie die Quadriken stereographisch auf einen linearen Raum ihrer Dimension projiziert werden können. Wir erinnern zunächst daran, wie die stereographische Projektion bei einer Q_m zustande kommt: Ein fester Punkt S_0 der Q_m wird herausgegriffen, und alle anderen Punkte der Q_m mit S_0 verbunden, darauf alle diese ∞^m Geraden mit einem festen, nicht S_0 enthaltenden S_{m-1} geschnitten. Wenden wir diese Konstruktion ins Duale, so bedeutet dies, alle ∞^m Tangential- T_m der Q_m durch Schnitt mit einem festen Tangentialraum \bar{T}_m auf die Hyperebenen in \bar{T}_m birational zu beziehen. Nun war aber, wie wir uns erinnern, bei allen Grundmannigfaltigkeiten F_d ein damit verknüpfteduales Gebilde \widehat{F}_d erklärt worden, sodass wir in der dualen Gestalt die stereographische Projektion von den Q_m auf alle F_d unmittelbar übertragen können, was folgendermassen formuliert werde:

Satz 34. Jede unserer Grundmannigfaltigkeiten F_d lässt sich auf den S_d aus einem gewissen Raum Z im allgemeinen eineindeutig projizieren. Die hierbei als Projektionszentren in Frage kommenden Räume Z sind dual zu den Tangentialräumen T_d der F_d , sodass die Projektion in der dualisierten Fassung auch folgendermassen beschrieben werden kann: Man nehme einen festen Tangentialraum \bar{T}_d und schneide alle ∞^d Hyperebenen des mit F_d verknüpften dualen Gebildes mit \bar{T}_d . Bei der Projektion aus Z geht das System der hyperebenen Schnitte von F_d in ein bestimmtes Linearsystem von Hyperflächen eines bestimmten Grades $h \geq 2$ über; das bedeutet aber dasselbe wie die Aussage: es ist möglich, die V_d^h im allgemeinen eineindeutig auf die F_d zu projizieren.

Der Beweis dieses Satzes wird im wesentlichen die noch folgenden Seiten füllen. Es wird sich also darum handeln, bei jeder einzelnen Mannigfaltigkeitsklasse, soweit es nicht schon früher geschehen ist, die behauptete stereographische Projektion nachzuweisen, gleichzeitig die obige Zahl h anzugeben und die Art des Linearsystems von Hyperflächen h -ten Grades zu beschreiben, die die Abbildung vermitteln.

a) *Stereographische Projektion der V_n^h .*

Dieser Fall ist ganz besonders einfach; es sei auf die Behandlung der Sonderfälle in den Abschnitten 3 bis 5 verwiesen. Wir haben uns beim allgemeinen Fall nur zu überlegen, was einem Tangential- T_n der V_n^h dual entspricht. Wir erinnern uns daran, dass bei der Zuordnung der Punkte des Raumes $\langle V_n^h \rangle$ zu den Hyperflächen h -ter Klasse sich folgendes entspricht :

$$\infty^n \text{ Punkte eines Tangential-} T_n \text{ der } V_n^h \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{System aller } \infty^n \text{ Hyperflächen} \\ \text{ } h\text{-ter Klasse, die in einen festen,} \\ \text{ } h-1\text{-fachen und einen beliebigen} \\ \text{ } \text{Punkt zerfallen.} \end{array} \right.$$

Gehen wir rechts durch irgendeine Korrelation zu dem entsprechenden System von Hyperflächen h -ter Ordnung über, bilden den Durchschnitt aller diesen Hyperflächen zugeordneten Hyperebenen, so erhalten wir den Raum, der links dem T_n dual entspricht. Es ist dies ein Raum $Z_{\binom{n+h}{h}-n-2}$, der einer festen $h-1$ -fach zählenden Hyperebene des Grundraumes X_n zugeordnet ist. Wenn diese Hyperebene in den Parametern (x_0, x_1, \dots, x_n) der V_n^h durch $x_0 = 0$ beschrieben ist und die Parameterdarstellung der V_n^h

$$x_{i_0 \dots i_n} = x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (i_0 + i_1 + \dots + i_n = h)$$

lautet, so wird $Z_{\binom{n+h}{h}-n-2}$ durch

$$x_{h0 \dots 0} = x_{h-110 \dots 0} = \dots = x_{h-10 \dots 1} = 0$$

definiert; die aus Z projizierte Mannigfaltigkeit ist dann :

$$x_{h0 \dots 0} = x_0^h, \quad x_{h-110 \dots 0} = x_0^{h-1} x_1, \dots, x_{h-10 \dots 1} = x_0^{h-1} x_n,$$

d. h. wir haben den projektiven S_n , wie nach Wegstreichen des Faktors x_0^{h-1} folgt. Das abbildende Linearsystem aller hyper ebenen Schnitte der V_n^h ist natürlich das aller Hyperflächen h -ten Grades des S_n .

b) *Stereographische Projektion der Segremannigfaltigkeiten.*

Die Segremannigfaltigkeiten sind bereits durch eine rationale Parameterdarstellung definiert worden. Schreibt man die rechten Seiten dieser Parameterdarstellungen in nicht homogener Form und fasst ihre Linearkombinationen als System von Hyperflächen k -ter Ordnung des $S_{n_1 + \dots + n_k}$ auf, die man dann natürlich auch wieder homogen schreiben kann, so ergibt sich folgender :

SATZ 35. Die Gesamtheit der hyper ebenen Schnitte der Segreschen $S_{n_1; \dots; n_k}$ lässt sich auf das folgendermassen definierte System des $S_{n_1 + \dots + n_k}$ birational abbilden : Gesamtheit derjenigen Hyperflächen k -ten Grades, die k unabhängig liegende und daher eine Hyper ebene aufspannende Räume der Dimensionen $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1$ je $k - 1$ -fach enthalten.

Wir haben jetzt nur noch zu zeigen dass diese birationale Abbildung durch Projektion aus dem Dualen zu einem Tangentialraum vollzogen wird. Wir beschränken uns dabei auf die Fälle $k = 2$ und 3 woran man schon alles Wesentliche erkennt. Bei $k = 2$ haben wir im Abschnitt 10 gesehen, dass dual zu den Tangential- T_{m+n} der $S_{m;n}$ die Räume der Teilgebilde $S_{m-1;n-1}$ sind. Definiert man einen solchen $S_{m-1;n-1}$ durch die Parameterbeziehungen :

$$x_0 = y_0 = 0,$$

so wird der Raum $\langle S_{m-1;n-1} \rangle$ durch

$$x_{0i} = x_{j0} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n)$$

beschrieben. Die Projektion der $S_{m;n}$ aus $S_{m-1;n-1}$ wird dann in nicht homogenen Parametern durch

$$x_{00} = 1, \quad x_{10} = x_1, \dots, x_{m0} = x_m, \quad x_{01} = y_1, \dots, x_{0n} = y_n$$

definiert, woraus man alles ersehen kann.

Bei der $S_{m;n;r}$ dualisiert man Tangential- T_{m+n+r} auf folgende Weise : Der T_{m+n+r} ist als Verbindungsraum von irgendwelchen 3 erzeugenden Räumen $S_m^I, S_n^{II}, S_r^{III}$ zu erklären. Diese erzeugenden Räume dualisieren sich nach folgender Tabelle :

$$\begin{array}{ll}
 S_m^I & \text{Verbindungsraum } \langle S_{m;n;r-1} \cup S_{m;n-1;r} \rangle \\
 S_n^{II} & \quad \quad \quad \rangle \quad \quad \langle S_{m-1;n;r} \cup S_{m;n;r-1} \rangle \\
 S_r^{III} & \quad \quad \quad \rangle \quad \quad \langle S_{m-1;n;r} \cup S_{m;n-1;r} \rangle
 \end{array}$$

Die T_{m+n+r} dualisieren sich also zu einem Schnittraum der 3 rechts stehenden Räume. Das ergibt einen Raum Z , der eindeutig einen $\langle S_{m-1;n-1;r-1} \rangle$ enthält, jedoch damit nicht zusammenfällt. Legt man die hierbei in Frage kommenden Unterräume der Parameterräume durch

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0 \quad \text{und} \quad z_0 = 0$$

fest, so wird der soeben definierte Raum Z durch

$$x_{000} = x_{001} = \dots = x_{00r} = x_{010} = \dots = x_{0n0} = x_{100} = \dots = x_{m00} = 0$$

beschrieben. Die eindeutige Projektion der $S_{m;n;r}$ ist dann formelmässig sofort ersichtlich.

c) *Stereographische Projektion der Grassmannmannigfaltigkeiten.*

Es sei auf Abschnitt 16, Satz 17 verwiesen, in dem wir bereits die eineindeutige Projektion der $G_{n;k}$ aus einem zu den Tangential- $T_{(n-k)(k+1)}$ dualen Raum bewiesen haben sowie auf Satz 18 desselben Abschnitts, in dem das zugehörige System von Hyperflächen $k+1$ -ten Grades, das bezüglich einer $S_{k;n-k-1}$ des $S_{(n-k)(k+1)}$ definiert ist, ausführlich beschrieben wurde.

d) *Stereographische Projektion der M_Q -Mannigfaltigkeiten.*

Um die Existenz der stereographischen Projektion zu beweisen, erweist es sich hier, ebenso wie früher bei den $G_{n;k}$, als zweckmässig, im dualen Bilde zu bleiben und demnach alle Hyperebenen der $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$ mit einem festen Tangentialraum $\overline{T}_{\binom{k+1}{2}}$ der $M_{\binom{k+1}{2}}$ zu schneiden. Es möge folgendes in der Abbildung zwischen der Grundquadrik Q_{2k} und der $M_{\binom{k+1}{2}}$ einander zugeordnet sein :

$\overline{T}_{\binom{k+1}{2}}$ -Schnitt der $M_{\binom{k+1}{2}}$	Gesamtheit der S_k^I auf Q_{2k} die den festen Raum A_k^I mindestens $k-2$ -dimensional treffen
Hyperebene U_{2k-2} von $\widehat{M}_{\binom{k+1}{2}}$	Gesamtheit der S_k^I , die den festen B_k^I (bei ungeradem k), bzw. B_k^{II} (bei geradem k) treffen

Die Hyperebene U_{2k-2} links sei so allgemein gewählt, dass rechts A_k^I und B_k^I (bzw. B_k^{II}) windschief sind. Dann entspricht sich weiter folgendes :

$$\begin{array}{l} \text{Schnittraum } T_{\binom{k+1}{2}-1} \text{ von } \bar{T}_{\binom{k+1}{2}} \\ \text{und } U_{2k-2} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Gesamtheit aller } S_k^I = A_{k-2} \cup B_1 \\ \text{mit } A_{k-2} \subset A_k^I \text{ und } B_1 \subset B_k^I \\ \text{(bzw. } B_k^{II}) \end{array} \right.$$

Der Raum links hat mit der $M_{\binom{k+1}{2}}$ eine $G_{k;1}$ gemein; dies ist klar, da der Tangentialraum mit der $M_{\binom{k+1}{2}}$ einen $G_{k;1}$ -Kegel gemein hat und die Voraussetzung besagt, dass U_{2k-2} die Spitze dieses Kegels nicht enthält. Wir haben, um die Eineindeutigkeit der durch den Schnitt hergestellten Beziehungen zwischen den S_{2k-2} von $M_{\binom{k+1}{2}}$ und den Hyperebenen von $\bar{T}_{\binom{k+1}{2}}$ zu zeigen, uns nur zu überlegen, ob noch eine weitere Hyperebene V_{2k-2} denselben Raum $T_{\binom{k+1}{2}-1}$ aus $\bar{T}_{\binom{k+1}{2}}$ ausschneidet. Wäre dies der Fall, so müsste jeder $S_k^I = A_{k-2} \cup B_1$ auch noch C_k^I (bzw. C_k^{II}) treffen, wo dieser C_k ein weiterer Raum der betreffenden Schar auf Q_{2k} ist. Das heisst aber, in verständlicher Sprechweise, jeder $S_k^I = A_{k-2} \cup B_1$ ist auch ein $A_{k-2} \cup C_1$. Dann vermittelt ein System von erzeugenden S_k^I zwischen den A_{k-2} von A_k und den Geraden von B_k , aber auch denen von C_k eine korrelative, d. h. zwischen den Geraden aus B_k und C_k eine projektive Beziehung. Dies hat wiederum zur Folge, dass diejenigen $\infty^{2k-2} S_3$, die projektiv entsprechende Geraden aus B_k und C_k verbinden, ganz zur Q_{2k} gehören. Falls B_k und C_k windschief zueinander sind, erfüllen diese $\infty^{2k-3} S_3$ aber den ganzen Raum $\langle Q_{2k} \rangle$, wie die Abzählung sofort ergibt; falls B_k und C_k nicht windschief liegen, so erfüllen die S_3 nach einer analogen Abzählung wenigstens den von B_k und C_k aufgespannten Raum, der eine Dimension $> k$ hat. Auf der Q_{2k} liegen jedoch keine Räume von höherer Dimension als k .

Wir haben uns jetzt noch mit dem System von Hyperflächen des $S_{\binom{k+1}{2}}$ zu beschäftigen, das bei der stereographischen Projektion aus den hyperebenen Schnitten der $M_{\binom{k+1}{2}}$ entsteht und wollen dies in den Fällen $k = 4$ und 5 explizit hinschreiben, (die Fälle $k < 4$ sind trivial).

$k = 4$. Wir beziehen uns auf das im Abschnitt 20 aufgestellte System von 10 Relationen der M_{10} und übernehmen auch die Koordinatenbezeichnungen von dort. Dual zu den Tangential- T_{10} der M_{10} sind,

wie wir wissen, die auf der M_{10} liegenden Räume S_4^I . Ein solcher S_4^I wird durch

$$(1) \quad Y_0 = Y_1 = Y_2 = Y_3 = X_1 = X_2 = X_3 = X'_1 = X'_2 = X'_3 = 0$$

beschrieben. Wir projizieren die M_{10} aus dem Raum (1) in den durch Nullsetzen der übrigen definierten Raum. Bezeichnet man die durch Y_0 dividierten Y_i , X_i und X'_i durch die entsprechenden kleinen Buchstaben, so erhalten wir folgende rationale Parameterdarstellung der M_{10} :

$$\begin{aligned} X_0 &= -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3, & X'_0 &= -x'_1 y_1 - x'_2 y_2 - x'_3 y_3, & Y'_0 &= y'_0 \\ Y'_1 &= x'_2 x_3 - x'_3 x_2 + y_1 y'_0, & Y'_2 &= x'_3 x_1 - x'_1 x_3 + y_2 y'_0 \\ Y'_3 &= x'_1 x_2 - x'_2 x_1 + y_3 y'_0, & X'_i &= x'_i, & X_i &= x_i, & Y_i &= y_i \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

wodurch gleichzeitig die stereographische Projektion der M_{10} beschrieben wird. Den hyperebenen Schnitten der M_{10} entsprechen dann die Hyperflächen des folgenden Systems im S_{10} :

$$\begin{aligned} (2) \quad & a_0(-x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) + a'_0(-x'_1 y_1 - x'_2 y_2 - x'_3 y_3) \\ & + b'_1(y_1 y'_0 - x_2 x'_3 + x_3 x'_2) + b'_2(y_2 y'_0 + x_1 x'_3 - x_3 x'_1) \\ & + b'_3(y_3 y'_0 + x_2 x'_1 - x_1 x'_2) \\ & + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_0 = 0. \end{aligned}$$

Dies System (2) kann folgendermassen beschrieben werden: Sämtliche Quadriken des S_{10} , die eine in einer Hyperebene S_9 des S_{10} gelegene $G_{4;1}$ enthalten; denn die ersten 5 Klammern ergeben, für sich gleich Null gesetzt, gerade die Relationen einer $G_{4;1}$, wie wir von Abschnitt 14 her wissen.

$k = 5$. Bei der M_{15} des S_{31} wissen wir aus Abschnitt 19, dass die Tangential- T_{15} sich selbst dual gegenüberstehen. Wir haben daher die M_{15} aus einem solchen T_{15} zu projizieren. Unter Benutzung der Bezeichnungen des Abschnitts 20 wählen wir dazu denjenigen T_{15} , der im Punkte mit den Koordinaten: ($Y_0 = 1$, sonst 0) berührt. Dieser T_{15} wird durch

$$(3) \quad X_0 = X'_0 = X'_1 = X'_2 = X'_3 = U_0 = U_1 = U_2 = U_3 = U'_1 = U'_2 = U'_3 \\ = V'_0 = V_1 = V_2 = V_3 = 0.$$

definiert.

Wir führen wieder für die durch Y_0 dividierten Koordinaten die entsprechenden kleinen Buchstaben ein und erhalten dann folgende mit der stereographischen Projektion zusammenhängende Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned}
X_0 &= -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3, & X'_0 &= -x'_1 y_1 - x'_2 y_2 - x'_3 y_3, \\
U_1 &= x_1 v_0 + y'_0 u'_1 - x'_1 v'_0, & V_1 &= y_1 v_0 - x'_2 u'_3 + x'_3 u'_2 \\
U_2 &= x_2 v_0 + y'_0 u'_2 - x'_2 v'_0, & V_2 &= y_2 v_0 - x'_3 u'_1 + x'_1 u'_3 \\
U_3 &= x_3 v_0 + y'_0 u'_3 - x'_3 v'_0, & V_3 &= y_3 v_0 - x'_1 u'_2 + x'_2 u'_1 \\
Y'_1 &= y_1 y'_0 - x_2 x'_3 + x x', & V'_1 &= y_1 v'_0 + x_2 u'_3 - x'_3 u'_2 \\
Y'_2 &= y_2 y'_0 - x_1 x'_3 + x_3 x'_1, & V'_2 &= y_2 v'_0 + x_1 u'_3 - x'_3 u'_1 \\
Y'_3 &= y_3 y'_0 - x_1 x'_3 + x_3 x'_2, & V'_3 &= y_3 v'_0 + x_2 u'_3 - x'_3 u'_2 \\
U'_0 &= -y_1 u'_1 - y_2 u'_2 - y_3 u'_3 \\
U_0 &= -v_0 (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + v'_0 (x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + x'_3 y_3) - \\
&\quad u'_1 (y_1 y'_0 - x_2 x'_3 + x_3 x'_2) - u'_2 (y_2 y'_0 + x_1 x'_3 - x_3 x'_1) - \\
&\quad u'_3 (y_3 y'_0 + x_2 x'_1 - x_1 x'_2) \\
X_i &= x_i, & X'_i &= x'_i, & Y_i &= y_i, & U'_i &= u_i \quad (i = 1, 2, 3), \\
Y'_0 &= y'_0, & V_0 &= v_0, & V'_0 &= v_0.
\end{aligned}$$

Auf den rechten Seiten dieser Parameterdarstellung kommen nun aber alle 15 Quadriken vor, die gleich Null gesetzt, eine $G_{5;1}$ definieren, sowie die zu diesem $\langle G_{5;1} \rangle_{14}$ gehörige Ranghyperfläche D_{13} oder Pfaffiana (in der vorletzten Zeile). Dies sieht man am besten ein, wenn man die 15 Parameter in folgender Weise in Gestalt einer schiefsymmetrischen Matrix schreibt :

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 & x_1 & x'_1 & u'_1 \\ -y_3 & 0 & y_1 & -x_2 & x'_2 & u'_2 \\ y_2 & -y_1 & 0 & x_3 & -x'_3 & u'_3 \\ -x_1 & x_2 & -x_3 & 0 & y'_0 & -v'_0 \\ -x'_1 & -x'_2 & x'_3 & -y'_0 & 0 & v_0 \\ -u'_1 & -u'_2 & -u'_3 & v'_0 & -v_0 & 0 \end{pmatrix}$$

und für diese Matrix die Rangbedingungen aufstellt. Den hyperebenen Schnitten der M_{15} entspricht demnach das folgendermassen definierte Linearsystem des S_{15} : Gesamtheit aller Hyperflächen 3. Grades des S_{15} , die die zu einer $G_{5;1}$ gehörige D_{13} einfach und die $G_{5;1}$ doppelt enthalten, wobei die $G_{5;1}$ und zugehörige D_{13} in einer Hyperebene des S_{15} vorgegeben sind.

Von hier aus sei das Entsprechende für die allgemeine $M_{\binom{k+1}{2}}$ ohne Beweis folgendermassen formuliert :

SATZ 36. Gegeben sei ein $S_{\binom{k+1}{2}}$ und darin innerhalb einer Hyper-

ebene eine $G_{k;1}$ mit sämtlichen damit verknüpften Ranggebilden (s. Abschnitt 14). Dann entspricht bei der stereographischen Projektion der $M_{\binom{k+1}{2}}$ auf den $S_{\binom{k+1}{2}}$ den hyper ebenen Schnitten der $M_{\binom{k+1}{2}}$ folgendes Linearsystem: Gesamtheit aller Hyperflächen $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ -ten Grades des $S_{\binom{k+1}{2}}$, die die höchste Rangmannigfaltigkeit der $G_{k;1}$ einfach, die nächste doppelt usw. und schliesslich die $G_{k;1}$ selber als niederste Rangmannigfaltigkeit $\left[\frac{k+1}{2}\right] - 1$ -fach enthalten.

e) *Stereographische Projektion der N-Mannigfaltigkeiten.*

Die stereographische Projektion der $N_{\binom{k+2}{2}}$ werde wieder in der dualen Fassung behandelt. Es ist somit ein fester Tangential- $T_{\binom{k+2}{2}}$ der $N_{\binom{k+2}{2}}$ mit allen Hyper ebenen des dualen Gebildes $\widehat{N}_{\binom{k+2}{2}}$ zu schneiden. Nach den Ergebnissen von Teil V hat man dazu im Grundraum die Durchschnitte folgender S_k -Systeme zu bilden:

- 1) Gesamtheit der autopolaren S_k , die einen festen autopolaren A_k mindestens $k - 1$ -dimensional schneiden,
- 2) Gesamtheit der autopolaren S_k , die einen festen autopolaren B_k schneiden.

Der Durchschnitt besteht dann, wenn A_k und B_k keinen Punkt gemein haben, aus der Menge aller autopolaren $S_k = A_{k-1} \cup B_0$ mit $A_{k-1} \subset A_k$ und $B_0 \subset B_k$. Dann ist weiterhin A_k festzuhalten und B_k zu verändern. Unsere stereographische Projection ist danach gesichert, wenn es feststeht, dass alle autopolaren $S_k = A_{k-1} \cup B_0$ nicht gleichzeitig einen dritten autopolaren Raum C_k treffen. Dies wird durch folgenden besonderen Hilfssatz sichergestellt:

HILFSSATZ: A_k und B_k seien 2 zueinander windschiefe, autopolare Räume einer Nullkorrelation des S_{2k+1} . Dann treffen alle ∞^k autopolaren Räume $S_k = A_{k-1} \cup B_0$ nicht gleichzeitig noch einen weiteren autopolaren Raum C_k .

Beweis: Für $k = 1$ ist der Satz richtig. Denn wenn alle Geraden eines regulus einem linearen Komplex angehören, so enthält der Komplex nicht mehr als 2 Geraden des konjugierten regulus. Wir nehmen an, bis $k - 1$ sei schon alles bewiesen, und es mögen die Voraussetzungen für k vorliegen. Die autopolaren $S_k = A_{k-1} \cup B_0$ erzeugen dann

eine Q_{2k} , und es gibt weitere Scharen autopolarer $S_k = A_{k-i} \cup B_{i-1}$, die durch die Korrelation zwischen A_k und B_k definiert sind und ebenfalls zu Q_{2k} gehören. Nehmen wir an, es gäbe entgegen der Behauptung einen von allen $S_k = A_{k-1} \cup B_0$ getroffenen, autopolaren Raum C_k , so muss C_k auch zu Q_{2k} gehören, und es besteht zwischen A_k und C_k ebenfalls eine Korrelation, sodass diejenigen S_k , die korrelativ Entsprechendes verbinden, ebenfalls autopolar sind. Dem Punkt \bar{A}_0 auf A_k entspreche nun in den Korrelationen je \bar{B}_{k-1} und \bar{C}_{k-1} auf B_k und C_k . Dann sind die Räume $\bar{A}_0 \cup \bar{B}_{k-1}$ und $\bar{A}_0 \cup \bar{C}_{k-1}$ ebenfalls autopolar und gewiss bei allgemeiner Lage des Punktes \bar{A}_0 auch voneinander verschieden. Bei allen autopolaren $S_k = A_{k-1} \cup B_0 \cup C_0$, wobei A_{k-1} durch \bar{A}_0 geht, liegt B_0 in \bar{B}_{k-1} und C_0 in \bar{C}_{k-1} . Nun weiss man, dass die durch einen Punkt des S_{2k+1} gehenden autopolaren S_k sich so verhalten wie die autopolaren S_{k-1} einer Nullkorrelation des S_{2k-1} . Die soeben festgestellten Sachverhalte zeigen dann, dass für die durch \bar{A}_0 gehenden, autopolaren S_k eine Situation vorliegen würde, die der Induktionsvoraussetzung für $k-1$ widerspricht. Der Raum C_k darf also gar nicht existieren.

Im Falle $k=1$ ist N_3 die Quadrik Q_3 , bei der man natürlich von stereographischer Projektion im üblichen Sinne sprechen kann. Das abbildende Linearsystem besteht dann aus allen Quadriken des S_3 , die einen Kegelschnitt C^2 enthalten: Beim nächsten Fall besteht dies System aus allen Quadriken des S_6 , die eine in einer Hyperebene des S_6 gegebene V_2^2 doppelt und die zugehörige Diskriminantenhyperfläche D_4 einfach enthalten. Allgemein sei ohne Beweis formuliert:

SATZ 37. Gegeben sei innerhalb eines $S_{\binom{k+2}{2}}$ eine durch eine V_k^2 aufgespannte Hyperebene. Zur V_k^2 gehöre die Kette der Rangmännigfaltigkeiten:

$$D_{\binom{k+2}{2}-2}^{(k)} \supset D^{(k-1)} \supset \dots \supset D^{(1)} = V_k^2.$$

Folgendes Linearsystem ist dann das mit der stereographischen Projektion der $N_{\binom{k+2}{2}}$ verknüpfte Bildsystem der hyperebenen Schnitte: Gesamtheit derjenigen Hyperflächen $k+1$ -ten Grades des $S_{\binom{k+2}{2}}$, die $D^{(k)}$ einfach, $D^{(k-1)}$ doppelt, usw., V_k^2 schliesslich k -fach enthalten.

Man beachte das bemerkenswerte Wechselspiel zwischen Satz 36 und 37: Die Rollen, die die Räume der symmetrischen und schiefssymmetrischen Matrizen in beiden Fällen spielen, sind miteinander vertauscht.