NOTA SOBRE CURVAS EN SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE

POR

E. VIDAL ABASCAL Y E. G. RODEJA F.

Dada una curva de clase C^3 cerrada y que limita un área sobre una superficie de curvatura constante, el objeto principal de esta nota, es deducir la fórmula (2.11) para el área limitada por la curva descrita por el vértice de un triángulo geodésico mientras los dos vértices restantes se apoyan constantemente en la curva dada.

De esta fórmula y como casos particulares de la misma, se obtienen las generalizaciones de las fórmulas de Steiner y del teorema de Holditch en superficies de curvatura constante.

1. *Dada una curva E de clase C^3, sobre una superficie diferenciable de clase C^3, consideremos sobre ella coordenadas curvilíneas, de modo que E esté representada por la ecuación $v^1 = 0$, y sean $v^2 = c$, (constante), las geodésicas tangentes a esta línea en el sentido creciente del arco ; siendo además v^2 la longitud del arco sobre E y v^1 la longitud del arco sobre cada geodésica. Si tomamos sobre estas geodésicas a partir de su punto de tangencia con E una distancia l variable (función de v^2), se obtiene una curva C, verificándose entonces :*

$$\int_C \cos\alpha\, ds = L_E + [l]_{v_0^2}^{v_1^2}$$

en donde α representa el ángulo que forma C con cada una de las geodésicas $v^2 = c$; ds el elemento de arco de C y L_E la longitud de E entre los puntos que corresponden a $v^2 = v_0^2$ y $v^2 = v_1^2$.

Demostración. En virtud de las hipótesis hechas, la primera fórmula fundamental es (*)

(1.2) $$ds^2 = (dv^1)^2 + 2\,dv^1\,dv^2 + g_{22}\,(dv^2)^2$$

(*) E. VIDAL ABASCAL. *Area engendrada ...*, Rev. Mat. Hisp. Amer., T. VII, 1947, pág. 132-142.

y las ecuaciones paramétricas de la curva C sobre la superficie son:

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} v^1 &= l\,(v^2) \\ v^2 &= v^2 \end{aligned}$$

De la fórmula que determina el ángulo de dos curvas: (*)

$$(1.4)\qquad \cos\alpha = \frac{g_{ik}\,dv^i\,\delta v^k}{\sqrt{g_{ik}\,dv^i\,dv^k}\,\sqrt{g_{ik}\,\delta v^i\,\delta v^k}}$$

se obtiene para la curva C y las geodésicas $v^2 = c$:

$$(1.5)\qquad \cos\alpha = \frac{(l' + 1)\,dv^2}{ds}$$

siendo ds como ya hemos dicho el elemento de arco de C.

Se obtiene, por lo tanto:

$$(1.6)\qquad \int \cos\alpha\,ds = \int (l' + 1)\,dv^2 = [l]_{v_1^2}^{v_0^2} + U_E$$

Si las curvas E y C son cerradas y efectuamos la integración a lo largo de toda la E, se deduce:

$$(1.7)\qquad \int \cos\alpha\,ds = U_E$$

siendo U_E la longitud de E.

De la fórmula (1.6), puede también deducirse como caso particular, cuando C es una trayectoria ortogonal de las geodésicas $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\int \cos\alpha\,ds = 0$

$$(1.8)\qquad U_E = l\,(v_0^2) - l\,(v_1^2)$$

que constituye el teorema de la curva envolvente: En un haz de líneas geodésicas que cortan perpendicularmente a una curva C y envuelven a una curva E, el incremento de la distancia geodésica es igual al arco correspondiente de la envolvente (**).

(*) Eisenhart. *Differential Geometry.* Princeton, 1947. (pág. 130).

(**) W. Blaschke. Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Berlín, 1930 (fórmula (86), pág. 167).

2. Sobre las superficies de curvatura constante K, la fórmula para el área F limitada por la curva paralela a otra dada C, (cerrada y que limita un área F), según la distancia constante l y el ángulo variable, (Función del punto de la curva), es: (**)

$$(2.1)\quad F^* = F + \frac{\operatorname{sen}[l\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\int \operatorname{sen}\beta\, ds + \frac{1-\cos[l\sqrt{K}]}{K}(2\pi - KF)$$

Dado un triángulo $A_1 A_2 P$ (fig. 1) formado por geodésicas, cuando los puntos A_1 y A_2 permaneciendo constantemente sobre la curva cerrada C recorren esta, el punto P describe una curva paralela a la misma, según la distancia l_1 constante y el ángulo β_1 variable.

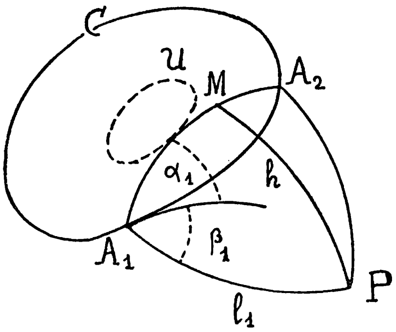

Fig. 1

Para el cálculo de sen β_1, obsérvese que llamando $\widehat{A}_1$ al ángulo correspondiente al mismo vértice del triángulo, y α_1 al ángulo formado por la cuerda $A_1 A_2$ con la tangente, es: $\beta_1 = \widehat{A}_1 - \alpha_1$.

Siendo PM la altura del triángulo, de longitud h y a_1 la longitud de $A_1 M$, en el triángulo rectángulo PMA_1, se deduce:

$$(2.2)\qquad \operatorname{sen} A_1 = \frac{\operatorname{sen}[h\sqrt{K}]}{\operatorname{sen}[l_1\sqrt{K}]}, \qquad \cos\widehat{A}_1 = \frac{\operatorname{tg}[a_1\sqrt{K}]}{\operatorname{tg}[l_1\sqrt{K}]}$$

y por tanto:

$$(2.3)\qquad \operatorname{sen}\beta_1 = \frac{\operatorname{sen}[h\sqrt{K}]}{\operatorname{sen}[l_1\sqrt{K}]}\cos\alpha_1 - \frac{\operatorname{tg}[\alpha_1\sqrt{K}]}{\operatorname{tg}[l_1\sqrt{K}]}\operatorname{sen}\alpha_1$$

Para hallar el valor de $\int \operatorname{sen}\beta_1 ds$, hemos de calcular $\int \cos\alpha_1 ds$ y $\int \operatorname{sen}\alpha_1 ds$.

(**) E. Vidal Abascal, (Loc. cit. fórmula (6.3)).

Para la primera de estas integrales empleamos la fórmula (1.7), y se obtiene:

$$(2.4) \qquad \int \cos \alpha_1 \, ds = U_{2a}$$

en donde indicamos con U_{2a} la longitud de la curva que envuelven las cuerdas de C de longitud constante $2a$ igual al lado $A_1 A_2$ del triángulo.

Para la segunda de estas integrales empleamos la misma fórmula (2.1), considerando que la curva paralela a la C según la distancia constante $2a$ y el ángulo $(-\alpha)$ variable, es la misma curva C, por lo tanto, se obtiene

$$(2.5) \quad F = F - \frac{\operatorname{sen}[2a_1\sqrt{K}]}{\sqrt{K}} \int \operatorname{sen} \alpha_1 \, ds + \frac{1 - \cos[2a_1\sqrt{K}]}{K} (2\pi - KF)$$

de donde

$$(2.6) \qquad \int \operatorname{sen} \alpha_1 \, ds = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1 - \cos[2a_1\sqrt{k}]}{\operatorname{sen}[2a_1\sqrt{k}]} (2\pi - KF)$$

A partir de la fórmula (2.1) y utilizando las relaciones (2.3), (2.4) y (2.6) se deduce para el área F_h limitada por la curva descrita por el punto P:

$$(2.7) \quad F_h = F + \frac{2\pi - KF}{K} \left[1 - \cos[l_1\sqrt{K}] - \operatorname{sen}[h\sqrt{K}] \frac{\operatorname{tg}[a_1\sqrt{K}]}{\operatorname{tg}[l_1\sqrt{K}]} \frac{1 - \cos[2a\sqrt{K}]}{\operatorname{sen}[2a\sqrt{K}]} \right] + \frac{\operatorname{sen}[h\sqrt{K}]}{\sqrt{K}} U_{2a}$$

en donde, teniendo en cuenta la relación

$$(2.8) \qquad \cos[l_1\sqrt{K}] = \cos[a_1\sqrt{K}] \cos[h\sqrt{K}]$$

podemos escribir la expresión que figura entre corchetes en la forma:

$$(2.9) \quad \left[1 - \cos[a_1\sqrt{K}] - \operatorname{sen}[a_1\sqrt{K}] \frac{1 - \cos[2a\sqrt{K}]}{\operatorname{sen}[2a\sqrt{K}]} \right] +$$

$$+ (1 - \cos[h\sqrt{K}]) \left[\cos[a_1\sqrt{K}] + \operatorname{sen}[a_1\sqrt{K} \frac{1 - \cos[2a\sqrt{K}]}{\operatorname{sen}[2a\sqrt{K}} \right]$$

e introduciendo en esta la longitud $a_2 = 2a - a_1$ y efectuando operaciones puede transformarse en

$$(2.10) \qquad -\frac{2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} a_1 \sqrt{K}\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} a_2 \sqrt{K}\right]}{\cos [a \sqrt{K}]} + \\ + (1 - \cos [h\sqrt{K}]) \left[\frac{\operatorname{sen} [a_1 \sqrt{K}] + \operatorname{sen} [a_2 \sqrt{K}]}{\operatorname{sen} [2a\sqrt{K}]}\right]$$

que sustituído en (2.7) da lugar a la principal fórmula de este trabajo, obteniéndose que:

El área limitada por la curva descrita por el vértice de un triángulo geodésico, mientras los dos vértices restantes se apoyan constantemente sobre una curva regular cerrada, en una superficie de curvatura constante, viene dada por la fórmula:

$$(2.11) \quad F_h = F + \frac{2\pi - KF}{K}\left\{\frac{-2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} a_1 \sqrt{K}\right] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} a_2 \sqrt{K}\right]}{\cos [a\sqrt{K}]} + \right. \\ \left. + (1 - \cos [h\sqrt{K}]) \frac{\operatorname{sen} [a_1 \sqrt{K}] + \operatorname{sen} [a_2 \sqrt{K}]}{\operatorname{sen} [2a\sqrt{K}]}\right\} + \frac{\operatorname{sen} [h\sqrt{K}]}{\sqrt{K}} U_{2a}$$

Cuando K es negativo (2.11) puede escribirse de manera más apropiada en la forma

$$(2.12) \quad F_h = F + \frac{2\pi - KF}{K}\left\{\frac{2 \operatorname{senh}\left[\frac{1}{2} a_1 \sqrt{-K}\right] \operatorname{senh}\left[\frac{1}{2} a_2 \sqrt{-K}\right]}{\cosh [a\sqrt{-K}]} + \right. \\ \left. + (1 - \cosh [h\sqrt{-K}]) \frac{\operatorname{senh} [a_1 \sqrt{-K}] + \operatorname{senh} [a_2 \sqrt{-K}]}{\operatorname{senh} [2a\sqrt{-K}]}\right\} + \\ + \frac{\operatorname{senh} [h\sqrt{-K}]}{\sqrt{-K}} U_{2a}.$$

3. A partir de las dos fórmulas anteriores (2.11) y (2.12) pueden deducirse las correspondientes a diversos casos particulares. Indicaremos aquí, en especial, las siguientes: Si el punto P pertenece a la misma cuerda $A_1 A_2$ de longitud constante $2a$ dividiendo a esta en dos seg-

mentos fijos a_1 y a_2, se obtiene entonces que en la fórmula (2.11) debemos hacer simplemente $h = 0$, obteniéndose:

$$(3.1)\quad F^* = F + \frac{2\pi - KF}{K}\left[\frac{-2\ \mathrm{sen}\left[\frac{1}{2}a_1\sqrt{K}\right]\mathrm{sen}\left[\frac{1}{2}a_2\sqrt{K}\right]}{\cos\left[\beta\sqrt{K}\right]}\right]$$

y de aquí se deduce que la expresión

$$(3.2)\qquad \frac{F - F^*}{2\pi - KF}$$

es independiente de la curva C de la que hemos partido, e igual a

$$(3.3)\qquad \frac{1}{k}\left[\frac{2\ \mathrm{sen}\left[\frac{1}{2}a_1\sqrt{K}\right]\mathrm{sen}\left[\frac{1}{2}a_2\sqrt{K}\right]}{\cos\left[a\sqrt{K}\right]}\right]$$

Este resultado, constituye la generalización del teorema de Holditch (*) en las superficies de curvatura constante (**).

También en el caso general y a partir de la fórmula (2.11) se encuentra la expresión:

$$(3.4)\qquad \frac{F - F_h + \dfrac{\mathrm{sen}\left[h\sqrt{K}\right]}{\sqrt{K}}U_{2a}}{2\pi - FK}$$

que es independiente de la curva C.

Como segundo caso particular, cuando los puntos A_1 y A_2 coincidan y la geodésica secante A_1A_2 a la curva C se convierte, por lo tanto, en la tangente. La curva descrita por el punto P será en este caso la curva geodésicamente paralela a la C a la distancia h, curva que se obtiene trazando geodésicas ortogonales a C y tomando sobre ellas a partir de la curva la distancia constante h.

La fórmula correspondiente, se obtiene de la fundamental (2.11) cuando hacemos $a \to 0$, y por tanto también $a_1 \to 0$, $a_2 \to 0$, conser-

(*) «Lady's and Gentleman's». Diary, 1858.

(**) E. Vidal Abascal (Loc. cit. pág. 142).

vándose siempre la relación: $a_1 + a_2 = 2a$; tendremos también en cuenta que la curva envuelta por las cuerdas se convierte ahora en la misma curva C, a cuya longitud llamaremos U, obteniéndose:

$$F_h = F + \frac{2\pi - KF}{K}\left(1 - \cos\left[h\sqrt{K}\right]\right) + \frac{\operatorname{sen}\left[h\sqrt{K}\right]}{\sqrt{K}}\, U \tag{3.5}$$

Esta fórmula constituye la generalización de la de Steiner en el plano para las superficies de curvatura constante.

Sección Matemática

Observatorio de la Universidad
de Santiago de Compostela