ENSAYO DE UN ALGEBRA LINEAL INFINITA EN EL CAMPO DE LAS MATRICES ACOTADAS

POR

ANTONIO PLANS SANZ DE BREMOND

RESUMÉ

Je commence définissant la dépendance linéaire des formes linéaires dans le domaine des suites au carré sommables, en sens restreint (c'est à dire, les combinaisons linéaires ont des coefficients au carré sommables) et généralisé (coefficients quelconques), portant cette dépendance à les lignes et colonnes des matrices bornées diagonales et des matrices bornées du cas $1 - \mathcal{C}$ (v. ma mémoire intitulée « Algunas propiedades lineales de las matrices acotadas »).

En appliquant le théorème que j'appelle « fondamental de l'algèbre infinie », nous trouvons comme condition nécessaire et suffisante de compatibilité d'un système d'équations linéaires que les relations linéaires (en sens généralisé) qu'ont lieu entre les premiers membres soient vérifiées par les seconds.

Nous finissons ce mémoire en établissant un déterminant infini dont l'annulation est la condition nécessaire de dépendance linéaire (en sens généralisé) d'une suite d'éléments $A^1, \ldots, A^k, \ldots$ dans $\mathcal{H}$. En particulier j'applique ce determinant à la dépendance des lignes et des colonnes d'une matrice bornée.

Pour le présent article est d'importance fondamentale la classification que j'ai fait des matrices bornées dans ma mémoire déjà mentionnée « Algunas propiedades lineales de las matrices acotadas ».

ÍNDICE

Introducción 286
1. Forma lineal en $\mathcal{H}$ 287
2. Dependencia lineal de formas lineales en $\mathcal{H}$:
 1.º Dependencia lineal en $\mathfrak{A}$ 288
 2.º Dependencia lineal en general 291
3. Dependencia lineal entre las líneas de una matriz diagonal acotada 298
4. Determinante de Gram de un número finito de elementos $A^1, A^2, \ldots, A^r$ de $\mathcal{H}$ 295

5. Ortonormalización de un sistema de ecuaciones homogéneas. 297
Reducción de la resolución de un sistema de ecuaciones homogéneas

$$f_i \equiv A_i X = 0 \qquad (f_i \varepsilon \mathfrak{A})_{i=1,2,\dots}$$

no ortogonal a la de un sistema ortogonal equivalente. 297
6. Teorema fundamental del álgebra infinita 303
7. Invariancia de las clases matriciales $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ por supresión o agregación de líneas que constituyen una matriz de la clase $\mathfrak{B}$ 305
8. Paso de una matriz $A = \|A^k\|$ del caso $1 - \mathfrak{B}$ a una matriz del caso $1 - \mathfrak{C}$ por multiplicación de las columnas A^k por λ_k $(k = 1, 2, \dots)$ y viceversa 306
9. Dependencia lineal entre las líneas paralelas de una matriz del caso $1 - \mathfrak{C}$ 307
10. Diferencia algebraica entre las clases $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{B}$ 308
11. Condición necesaria y suficiente de compatibilidad de un sistema de ecuaciones 309
12. DETERMINANTE INFINITO ASOCIADO A UNA SUCESIÓN DE ELEMENTOS $A^1, A^2, \dots, A^k, \dots$ DE $\mathcal{H}$ 315
13. Determinantes infinitos asociados a una matriz acotada 322
14. Regla práctica para calcular Δ 324
Ejemplos 325
Nota final 328
Bibliografía 329

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas han sido objeto de estudio desde hace muchos años, pues aparte de su interés intrínseco son de gran aplicación en el campo de las ecuaciones integrales. Una monografía completa sobre dicho tema es la memoria de Riesz titulada « Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues » (Coll. Borel) y ya dentro del Espacio de Hilbert exclusivamente tenemos el estudio sistemático que hace G. Julia en su « Introduction mathématique aux théories quantiques », 2ième partie, p. 165 - 215.

El presente trabajo estudia principalmente los sistemas de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas en el campo de las sucesiones sumables al cuadrado ($\mathcal{H}$), muchas veces bajo la forma de dependencia lineal. Aplicamos fundamentalmente la clasificación que hacemos de las matrices acotadas en la memoria «Algunas propiedades lineales de las matrices acotadas».

Como resultado interesante hallado hacemos resaltar la condición necesaria y suficiente de compatibilidad de un sistema lineal no homogéneo, que viene a ser la extensión natural de la de los sistemas finitos.

Terminamos el presente trabajo definiendo un determinante infinito cuya anulación es condición necesaria de dependencia lineal de una sucesión de elementos $A^1, \ldots, A^k, \ldots$ de $\mathcal{H}$.

Toda la exposición está limitada al campo real.

1. Forma lineal en $\mathcal{H}$

Se trata de la expresión $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, ha de converger absolutamente para todo $(x_k) \in \mathcal{H}$, luego por el teorema de Landau $(a_i) \in \mathcal{H}$. Recíprocamente, si $(a_i) \in \mathcal{H}$ la forma es en $\mathcal{H}$ pues

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{Vmatrix} \cdot \| x_1\, x_2 \ldots \|.$$

Considerar una forma $\sum a_i x_i$ en $\mathcal{H}$ equivale a considerar las soluciones en $\mathcal{H}$ de la ecuación lineal $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$. Pues

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x_i = 0, \tag{1}$$

por ejemplo $a_1 \neq 0$, dado $(x_2, x_3, \ldots) \in \mathcal{H}$, $x_1 = -\dfrac{1}{a_1} \sum_{i=2}^{\infty} a_i x_i$ y $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathcal{H}$. Y recíprocamente, dada una solución de (1) de $\mathcal{H}$, $(x_2, x_3, \ldots) \in \mathcal{H}$.

La idea de la convergencia de formas lineales en $\mathcal{H}$ es exactamente la convergencia débil. Pues podemos decir que $f^{(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$ si el valor numérico que adopta $f^{(n)}$ para todo $X \varepsilon \mathcal{H}$ converge al de f para X:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(n)} x_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

o sea así

$$A^{(n)} X \longrightarrow A X, \qquad n \longrightarrow \infty$$

para todo $X \varepsilon \mathcal{H}$ y esto no es más que $A^{(n)} \longrightarrow A$.

2. Dependencia lineal de formas lineales en $\mathcal{H}$

1.º Dependencia lineal en $\mathfrak{A}$. Queremos decir con esto que los coeficientes λ_i que aparecen en la combinación lineal constituyen un sistema $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \varepsilon \mathcal{H}$. Se comprende que entonces las formas consideradas

$$f_i \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

sean de matriz

$$\|a_i^k\| \varepsilon \mathfrak{A}.$$

Diremos que las formas f_i son linealmente dependientes (o simplemente dependientes) si existe un sistema de coeficientes $(\lambda_i) \varepsilon \mathcal{H}$ *no todos nulos* para los que se tenga idénticamente para todo $(x_k) \varepsilon \mathcal{H}$:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_i f_i + \ldots = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0. \tag{3}$$

Esta definición equivale a decir que una de ellas f_p (de coeficiente $\lambda_p \neq 0$) es combinación lineal de las restantes, con coeficientes de $\mathcal{H}$. Basta despejarla.

Cuando no tengan lugar las circunstancias anteriores, diremos que las formas consideradas son linealmente independientes (o simplemente independientes).

Diremos que las ecuaciones homogéneas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

son dependientes o independientes según lo sean respectivamente las formas de sus primeros miembros.

Veamos la repercusión que todo esto tiene en los coeficientes a_i^k. Llamaremos idénticamente nula una forma f, y se escribe $f \equiv 0$, si toma el valor cero para todo $(x_k) \varepsilon \mathcal{H}$, y decir que las formas f_i son linealmente dependientes equivale a decir que existe una forma combinación lineal de ellas con coeficientes no todos nulos que es idénticamente nula.

Teorema 1. La condición necesaria y suficiente para que una forma f sea idénticamente nula: $f \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \equiv 0$ es que todos sus coeficientes sean nulos $a_i = 0$ $(i = 1, 2, ...)$.

Pues si así ocurre desde luego f es idénticamente nula. Y si f es idénticamente nula en particular, se anulará para

$$e_1(1, 0, 0, ...),\ e_2(0, 1, 0, ...),\ ...,\ e_i(0, 0, ..., 0, \underset{\widehat{i}}{1}, 0, ...),\ ...$$

o sea sustituyendo:

$$a_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ...) \qquad \text{s. q. d.}$$

(3) se puede poner en la forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k \equiv 0 \tag{5}$$

o también:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k \lambda_i \right) \equiv 0. \tag{6}$$

Por lo anterior, al ser idénticamente nula (6) se habrán de anular todos sus coeficientes:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k \lambda_i = 0 \qquad (k = 1, 2, ...). \tag{7}$$

Luego el sistema lineal homogéneo (7) ha de tener soluciones $\neq 0\ (\lambda_i) \varepsilon \mathcal{H}$. De otra manera:

«Las filas formadas por los coeficientes a_i^k de las formas f_i son linealmente dependientes con los mismos coeficientes que los que multiplican cada forma f_i».

Recíprocamente, si las filas formadas por los coeficientes de las formas $f_i \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k$ son dependientes (o sea si se tiene (7) para $\lambda_i \neq 0$), son dependientes las formas, con los mismos coeficientes.

Pues de (7) se deduce, multiplicando la ecuación k-ésima por

$x_k((x_k) \varepsilon \mathcal{H})$ y sumando (6), que equivale a (5). Y (5) es lo mismo que poner $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i = 0$ que se ha de verificar para todo $(x_k) \varepsilon \mathcal{H}$.

« Al agregar o suprimir de una matriz $\|a_i^k\|$ una línea combinación lineal de las paralelas, la dependencia de las líneas perpendiculares no altera ».

Esta proposición puede enunciarse de otra manera, por lo visto sobre las formas :

« Al agregar o suprimir a un sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k = 0, \qquad \|a_i^k\| \varepsilon \mathfrak{A} \qquad (i = 1, 2, ...) \tag{8}$$

una ecuación combinación lineal de las del sistema, la solución del sistema no ha alterado ». Llamando como en el álgebra corriente sistemas *equivalentes* aquéllos que tienen las mismas soluciones (toda solución del primer sistema lo es del segundo y toda solución del segundo lo es del primero), cabe este otro enunciado : « Si en un sistema lineal homogéneo (8) se agrega o suprime una ecuación combinación lineal de las restantes, el sistema resultante es equivalente al dado ».

Probemos la agregación. Añadamos por ejemplo la fila (b^k), teniéndose

$$b^k = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^k \qquad (k = 1, 2, ...) \tag{9}$$

con λ_i no todas nulas. Hemos de probar la equivalencia de los sistemas

$$\sum a_i^k x_k = 0 \quad \text{(I)} \qquad \begin{matrix} \sum a_i^k x_k = 0 \\ \sum b^k x_k = 0 \end{matrix} \quad \text{(II)} \tag{10}$$

Evidentemente toda solución de (II) es de (I) (al agregar ecuaciones o permanecen las soluciones primitivas o suprimo algunas). Para ver que toda solución de (I) es de (II) basta considerar una cualquiera $\bar{x}_k$ y ver si verifica la ecuación añadida :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b^k \bar{x}_k = 0 \tag{11}$$

Para ello sustituyamos en la ecuación $\sum_{k=1}^{\infty} b^k x_k = 0$ los b^k por sus expresiones (9) y tendremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^k\right) x_k = 0, \quad \sum_i \lambda_i \left(\sum_k a_i^k x_k\right) = 0, \text{ como } \sum_k a_i^k \bar{x}_k = 0 \quad (i = 1, 2, ...)$$

por hipótesis, $\sum_i \lambda_i \left(\sum_k a_i^k \bar{x}_k\right) = 0$ luego (11) se verifica.

Queda demostrado el teorema también para la supresión de una ecuación, pues si al suprimir una ecuación alterara la solución (x) al añadirla, como no altera, tendríamos que en definitiva habría cambiado la solución de un sistema que no se ha modificado lo que es absurdo.

Este teorema puede aplicarse a la agregación o supresión de una infinidad de ecuaciones (de matriz $\varepsilon\, \mathcal{A}$) combinación lineal de las restantes, siempre que las relaciones lineales existentes, reiteradas un número finito de veces, nos conduzcan a expresar cada una de las infinitas ecuaciones agregadas o suprimidas como combinación lineal de las restantes.

2.º Dependencia lineal en general. Sean las formas

$$f_i \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k,$$

en general $\|a_i^k\| \not\varepsilon\, \mathcal{A}$. [1]

Diremos que son dependientes si alguna de ellas es límite de combinaciones lineales finitas de las restantes, así por ejemplo:

$$f_1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{(n)} f_i.$$

Precisando, si el valor numérico que toma f_1 para todo $(x_k)\, \varepsilon\, \mathcal{H}$ es límite de los valores numéricos que toman las formas en $\mathcal{H}$:

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^{(n)} f_i$$

para el mismo elemento (x_k).

Caso contrario serán las f_i independientes.

Observación 1.ª La definición dada comprende la dependencia en $\mathcal{A}$ como caso particular, pues allí si por ejemplo $\lambda_1 \neq 0$,

$$f_1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) f_i.$$

Los coeficientes $\left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) \varepsilon\, \mathcal{H}$ en este caso y *no dependen de n.*

Observación 2.ª La dependencia lineal de un número finito de formas está incluída en la definición anterior.

[1] $\not\varepsilon$ significa «no pertenece a».

Veamos en que se traduce la dependencia lineal que acabamos de definir. Se tiene, si $f \equiv A\,X \equiv \sum a_i x_i$ depende linealmente de las formas $f_i \equiv \sum a_i^k x_k$,

$$f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f_i.$$

Pero $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f_i \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} a_i^k \right) x_k$ es una forma que tiene por coeficientes las coordenadas $\underset{(k=1,2,\dots)}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} a_i^k}$ de un elemento V^n luego por lo dicho en pág. 287. $V^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} A$.

Llegamos a la conclusión de que los coeficientes de la forma límite f constituyen un elemento A de $\mathcal{H}$ límite débil de los elementos V^n cuyas coordenadas son los coeficientes de las formas combinación lineal que convergen a la dada.

Pero vamos a ver que la dependencia lineal que acabamos de ver se traduce en la convergencia débil equivale a la dependencia lineal correspondiente por así decirlo a la convergencia fuerte. Es decir, sea la sucesión $A^1, A^2, \dots, A^k, \dots$ (A^k son los elementos que tienen por coordenadas los coeficientes $\varepsilon\, \mathcal{H}$ de las formas f^k). Sea $A =$ límite débil de combinaciones lineales finitas suyas. Como una m. l. c. es también cerrada en el sentido débil resulta que $A \,\varepsilon$ m. l. c. determinada por $A^1, A^2, \dots, A^k, \dots$ luego A es límite fuerte de combinaciones lineales finitas suyas.

Por consiguiente la convergencia débil no dice nada nuevo en el sentido algebraico lineal. Esta es la causa de que no haya desempeñado ningún papel en la representación analítica del E_∞ proyectivo [1].

En el álgebra finita como toda relación lineal entre elementos es finita:

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n = 0$$

forzosamente se traduce en ser uno de ellos combinación lineal de los demás, por ejemplo, si $\lambda_1 \neq 0$:

$$A_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} A_n.$$

En el álgebra infinita que estamos considerando no siempre ocurre así, y este fenómeno es inherente al paso al límite.

---

(1) V. «Espacio proyectivo con base dada por una infinidad numerable». Estudio Analítico.

Sea la combinación lineal finita convergente a cero:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A_i \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{12}$$

Supongamos que siempre por ejemplo $\bar{\lambda}_1^{(n)} \neq 0$. La condición necesaria y suficiente para que se pueda *resolver* en la forma $A_1 = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=2}^{n} \mu_1^{(n)} A_i$ es que $\lambda_1^{(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda \neq 0$ (en particular $\lambda_1^{(n)} = \lambda$, $n = 1, 2, \ldots$). *Si no, no puede ser.* Y entonces (12) será, o una relación lineal aparente (por ejemplo, como veremos, en una matriz diagonal del caso $1 - \mathfrak{B}$) o una relación lineal propiamente tal, es decir, que no se satisface idénticamente (como en una matriz diagonal del caso $1 - \mathfrak{C}$).

3. Dependencia lineal entre las líneas de una matriz diagonal acotada

Sea una matriz acotada diagonal

$$\| a_i \delta_i^k \| \tag{13}$$

en ella

$$A^i = \begin{array}{c} \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

Una combinación lineal de las n primeras columnas será de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A^i = \left\| \begin{matrix} \lambda_1^{(n)} a_1 \\ \lambda_2^{(n)} a_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^{(n)} a_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \right\|$$

Para que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A^i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ es necesario y suficiente que

$$\lambda_i^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ (i \text{ fijo}) \quad (a)\,; \qquad \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^{(n)})^2 a_i^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (b) \tag{14}$$

Sea $s_i^{(n)} > 0$ un sistema

$$\begin{pmatrix} i \leq n \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} s_1^{(1)} \\ s_1^{(2)}\, s_2^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1^{(n)}\, s_2^{(n)} \ldots s_n^{(n)} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} s_i^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ i \text{ fijo cualquiera} \end{matrix}$$

tal que $\sum_{i=1}^{n} (s_i^{(n)})^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Entonces (14, b) se verificará si

$$|\lambda_i^{(n)} a_i| < s_i^{(n)}, \qquad |\lambda_i^{(n)}| < \frac{s_i^{(n)}}{|a_i|} \tag{15}$$

Si (13) es regular:

$$0 < m \leq |a_i| \leq M < +\infty$$

y *siempre* se puede encontrar $\lambda_i^{(n)}$ verificando (15), luego (14, b) y también (14, a). Por tanto *aparentemente* las líneas de (13) son dependientes, pero no es así. Esta dependencia lineal sólo es aparente. Basta ver que la verifica cualquier $X \in \mathcal{H}$. Pues sean los $s_i^{(n)}$ considerados anteriormente. Tendremos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} s_i^{(n)} x_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (s_i^{(n)})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pues $\qquad \sum_{i=1}^{n} (s_i^{(n)})^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ y $\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|X\|^2 \neq 0.$

Veamos (13) del caso $1 - \mathfrak{C}$. Entonces $\begin{matrix} \text{extremo inf. } |a_i| = 0, \\ \text{extremo sup. } \dfrac{1}{|a_i|} = +\infty \end{matrix}$

y el segundo miembro de (15) toma la forma para $\begin{matrix} n \longrightarrow \infty \\ i \longrightarrow \infty \end{matrix}$ $\quad 0 \cdot \infty.$

Ya se advierte la posibilidad de la existencia de relaciones lineales propiamente tales de la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A^i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Véamoslo en un ejemplo.

Sea la matriz

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{n} \\ & & & & \ddots \end{matrix} \right\|, \quad a_i = \frac{1}{i}.$$

Tomemos $\lambda_i^{(n)} = \frac{i}{n}$. Comprobemos que se verifica (14, a) y (14, b). En efecto

$$\frac{i}{n} \longrightarrow 0 \begin{cases} i \text{ fijo} \\ n \longrightarrow \infty, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

El elemento $V\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{i}, \dots\right) \varepsilon\, \mathcal{H}$ pues $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge, sin embargo no es del dominio de valores de A pues procede únicamente de $(1, 1, 1, \dots) \not\varepsilon\, \mathcal{H}$. Y vamos a comprobar que, en efecto, no verifica la relación $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} x_i \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Pues haciendo $x_i = \frac{1}{i}$ resulta

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \frac{1}{i} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n} = \frac{n}{n} = 1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0.$$

4. Determinante de Gram de un número finito de elementos $A^1, A^2, \dots, A^r$ de $\mathcal{H}$

Como sabemos, es el determinante simétrico (1)

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} A^{1'} A^1 \dots A^{1'} A^r \\ \dots\dots\dots\dots \\ A^{i'} A^1 \dots A^{i'} A^r \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ A^{r'} A^1 \dots A^{r'} A^r \end{vmatrix} \tag{16}$$

(1) V. Julia, G. «Introduction mathématique aux Théories Quantiques», II, p. 31. En adelante indicaremos abreviadamente esta memoria poniendo T. Q. II.

que es mayor o igual a cero según que respectivamente $A^1, A^2, ..., A^r$ sean independientes o dependientes. A continuación vamos a dar una demostración nuestra de que la condición necesaria y suficiente para que $A^1, A^2, ..., A^r$ sean dependientes es que su determinante de Gram sea nulo.

Pues sea

$$A^k = \begin{Vmatrix} a_1^k \\ \vdots \\ a_i^k \\ \vdots \end{Vmatrix}, \quad (i,\ k = 1, 2, ..., r)$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^1)^2 & \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1 a_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} a_i^1 a_i^r \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 a_i^1 & \dots & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 a_i^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^r a_i^1 & \sum_{i=1}^{\infty} a_i^r a_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^r)^2 \end{vmatrix}.$$

La anulación de este determinante equivale a tener

$$\mu_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^1 a_i^k \right) + \mu_2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 a_i^k \right) + ... + \mu_r \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^r a_i^k \right) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., r).$$

para $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ no todos nulos. Pero esto equivale a poner

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\mu_1 a_i^1 + \mu_2 a_i^2 + ... + \mu_r a_i^r) a_i^k = 0, \qquad (k = 1, 2, ..., r)$$

lo que indica que el elemento $\mu_1 A^1 + \mu_2 A^2 + ... + \mu_r A^r$ del espacio determinado por $A^1, ..., A^r$ es ortogonal al mismo tiempo a $A^1, ... A^r$ lo que exige su anulación :

$$\mu_1 A^1 + \mu_2 A^2 + ... + \mu_r A^r = 0$$

para $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$ no todos nulos. Por consiguiente $A^1, A^2, ..., A^r$ son linealmente dependientes.

El recíproco se demuestra invirtiendo el proceso.

5. Ortonormalización de un sistema de ecuaciones homogéneas

Vamos a encontrar el conocido proceso de ortogonalización de Schmidt en forma algebraica.

Un sistema de elementos de $\mathcal{H}$

$$B^1, B^2, \ldots$$

se dice ortonormal si

$$B^{i'} B^j = \delta_i^j,$$

en forma matricial:

$$\| B^1 B^2 \ldots \|' \cdot \| B^1 B^2 \ldots \| = I.$$

« Sea un sistema de ecuaciones homogéneas

$$A_i X = 0, \quad \text{es decir} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Sea $\bar{x}_k$ una solución no nula (supuesta existente), $(\bar{x}_k) \varepsilon \mathcal{H}$.

La ecuación

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k x_k = 0 \tag{18}$$

no es consecuencia del sistema ».

Como en el álgebra corriente una ecuación será consecuencia de otras si se verifica para todas sus soluciones comunes. Si (18) fuera consecuencia de (17) en particular se verificaría para $\bar{x}_k$, o sea $\sum_k (\bar{x}_k)^2 = 0$, $\bar{x}_k = 0$, lo que es absurdo.

Una tal ecuación independiente de las (17) la llamaremos « independiente ortogonal » (¹).

Observemos que esta definición es recíproca, $f_i \equiv \sum_k a_i^k x_k = 0$ (i fijo) es independiente ortogonal de $\sum_k \bar{x}_k x_k = 0$ (pues una solución de esta ecuación es $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^k, \ldots$).

Consideremos el sistema homogéneo

$$f_i \equiv A_i X = 0 \tag{19}$$

(¹) Empleamos estos términos geométricos por comodidad.

Teorema 2. Si se quita o añade al sistema (19) una ecuación

$$f \equiv A\,X = 0 \tag{20}$$

tal que f sea límite de combinaciones lineales finitas de las f_i:

$$f = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f_i , \tag{21}$$

el sistema resultante es equivalente al primitivo.

En particular queda incluída la simple combinación lineal finita

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i .$$

El enunciado del teorema equivale a decir que la ecuación (20) quitada o añadida es consecuencia de las restantes.

Basta ver la agregación. Tenemos los dos sistemas

$$f_i \equiv A_i\,X = 0 \qquad \text{(I)} \qquad \left.\begin{aligned} & f_i \equiv A_i\,X = 0 \\ & f \equiv \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f_i = 0 \end{aligned}\right\} \;\text{(II)} \tag{22}$$

cuya equivalencia se trata de establecer.

Toda solución de (I) lo es de (II) pues satisfará la ecuación añadida $f = 0$. Recíprocamente, toda solución de (II) es de (I) pues en particular satisfará $f_i = 0 \quad (i = 1, 2, ...)$.

Definición. Diremos que el sistema de ecuaciones homogéneas

$$f_i \equiv A_i\,X \equiv \sum_k a_i^k x_k = 0_{(i = 1, 2, ...)}\, f_i \;\varepsilon\; \mathfrak{A} \tag{23}$$

es ortogonal si cada ecuación es independiente ortogonal de las restantes. Esto significa que

$$A_i' A_j = 0 \qquad (i \neq j). \tag{24}$$

O sea que A_i es una base ortogonal de

$$V = [A_1, A_2, ...].$$

Será el sistema (23) ortogonal normalizado u ortonormal si $\{A_i\}$ es ortonormal, o sea abreviadamente

$$A_i' A_j = \delta_i^j \qquad \text{ó} \qquad \| A_i \|' \cdot \| A_j \| = I.$$

Evidentemente el sistema resultante de la normalización

$$\frac{1}{\| A_i \|} A_i X = 0$$

es equivalente al primitivo.

Reducción de la resolución de un sistema de ecuaciones homogéneas

$$f_i \equiv A_i X = 0 \qquad (f_i \varepsilon \mathfrak{A})_{(i=1,2,\ldots)} \tag{25}$$

no ortogonal a la de un sistema ortogonal equivalente.

Los sistemas

$$(\mathrm{I_r})\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ f_r = 0 \ (r_1) \end{cases} \qquad (\mathrm{II_r})\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ f_r + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{r-1} f_{r-1} = 0 \ (r_2) \end{cases}$$

son equivalentes, cualquiera que sea el sistema de valores atribuídos a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-1}$.

Toda solución de $(\mathrm{I_r})$ satisface $(\mathrm{II_r})$ pues anula las $r-1$ primeras y satisface también (r_2) pues anula las formas $f_r, f_1, \ldots, f_{r-1}$. Recíprocamente, toda solución de $(\mathrm{II_r})$ lo es de $(\mathrm{I_r})$ pues satisface desde luego las $r-1$ primeras, y la última también, pues puede obtenerse restando miembro a miembro de (r_2) $\lambda_1 f_1 = 0$, $\lambda_2 f_2 = 0$, ..., $\lambda_{r-1} f_{r-1} = 0$.

Evidentemente el sistema total

$$\begin{array}{c} f_1 = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_r = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}$$

y el

$$\begin{array}{l} f_1 = 0 \\ \cdots\cdots \\ f_r + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{r-1} f_{r-1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

serán equivalentes.

Si la ecuación $f_r = 0$ es combinación lineal de $f_1 = 0, \ldots, f_{r-1} = 0$ lo mismo le sucede a $f_r + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{r-1} f_{r-1} = 0$ para todo sistema de valores atribuídos a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{r-1}$ y recíprocamente, luego (r_1) y (r_2) son simultáneamente dependientes o no de las $f_1 = 0, ..., f_{r-1} = 0$.

Tratemos de fijar los coeficientes $\lambda_1, ..., \lambda_{r-1}$ con la condición de que (r_2) sea independiente ortogonal de $f_1 = 0, ..., f_{r-1} = 0$. Observemos que si $f_r = 0$ depende de $f_1 = 0, ..., f_{r-1} = 0$:

$$f_r \equiv \bar{\lambda}_1 f_1 + ... + \bar{\lambda}_{r-1} f_{r-1} \quad ,, \quad f_r - \bar{\lambda}_1 f_1 - ... - \bar{\lambda}_{r-1} f_{r-1} \equiv 0 \quad (26)$$

(como veremos más adelante), tenía que ser así, puesto que por lo dicho más arriba (26) tiene que depender de $f_1 = 0, ..., f_{r-1} = 0$, y como al mismo tiempo tiene que ser independiente esto se concilia con que sea una forma $\equiv 0$ (todos los coeficientes son nulos).

Escribamos el sistema (I_r) desarrollado:

$$\begin{array}{l}
\sum_k a_1^k \quad x_k \equiv a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \dots + a_1^k \quad x_k + \dots = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_k a_{r-1}^k x_k \equiv a_{r-1}^1 \; x_1 + \dots\dots + a_{r-1}^k x_k + \dots = 0 \\
\sum_k a_r^k \quad x_k \equiv a_r^1 x_1 + \dots\dots\dots + a_r^k \quad x_k + \dots = 0
\end{array}$$

Escribiendo que (r_2) sea independiente ortogonal de las $r - 1$ primeras tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_k a_1^k \quad (a_r^k + \lambda_1 a_1^k + \dots + \lambda_{r-1} a_{r-1}^k) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_k a_{r-1}^k (a_r^k + \lambda_1 a_1^k + \dots + \lambda_{r-1} a_{r-1}^k) = 0
\end{array}\right. \quad (27)$$

o sea

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_1 \sum_k (a_r^k)^2 \quad + \dots + \lambda_{r-1} \sum_k a_1^k a_{r-1}^k = - \sum_k a_1^k \quad a_r^k \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_1 \sum_k a_{r-1}^k a_1^k + \dots + \lambda_{r-1} \sum_k (a_{r-1}^k)^2 = - \sum_k a_{r-1}^k a_r^k
\end{array}\right. \quad (28)$$

Se trata de un sistema de $r - 1$ ecuaciones con $r - 1$ incógnitas: $\lambda_1, ..., \lambda_{r-1}$, no homogéneo, de determinante

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} A_1' A_1 & \dots A_1' & A_{r-1} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ A_{r-1}' A_1 & \dots A_{r-1}' & A_{r-1} \end{vmatrix}$$

no nulo si suponemos $f_1, f_2, \dots, f_{r-1}$ o sea los elementos $A_1(a_1^k), \dots, A_{r-1}(a_{r-1}^k)$ independientes, ya que dicho determinante es su determinante de Gram. Evidentemente suprimiendo la forma f_i combinación lineal de las anteriores, cualquiera que sea r podemos suponer la independencia en cuestión y entonces habrá una solución $\neq 0$ y una sola. Si el determinante de Gram es nulo las formas de los primeros miembros son dependientes. Si $\mu_1, \dots, \mu_{r-1}$ son los coeficientes no todos nulos de una relación lineal entre ellas, se tiene que estos coeficientes lo son de:

$$\mu_1 a_1^k + \mu_2 a_2^k + \dots + \mu_{r-1} a_{r-1}^k = 0 \quad ,,$$
$$\sum_k (\mu_1 a_1^k + \dots + \mu_{r-1} a_{r-1}^k) a_r^k = 0 \quad ,,$$
$$\mu_1 (-\sum_k a_1^k a_r^k) + \dots + \mu_{r-1} (-\sum_k a_{r-1}^k a_r^k) = 0,$$

o sea que los segundos miembros verifican toda relación lineal entre los primeros. Suprimidas las ecuaciones combinación lineal de las restantes, siguiendo el camino clásico tendremos infinitas soluciones $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$. Luego el problema que perseguimos de buscar $f_r + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{r-1} f_{r-1} = 0$ independiente ortogonal de $f_1, \dots, f_{r-1}$ tiene solución única si $f_1, \dots, f_{r-1}$, son independientes, y admite infinitas soluciones si son dependientes.

Puesto que los sistemas (I_r) y (II_r) son equivalentes cualquiera que sea r y cualquiera que sea el número de veces que se sustituya una ecuación (r_1) por (r_2) aplicaremos esta sustitución reiteradamente, con la condición siempre de independencia ortogonal. Por tanto partiremos de $f_1 = 0$ y la dejaremos igual, o sea la sustituiremos por $\bar{f}_1 = 0$, $\bar{f}_1 \equiv f_1$. A continuación sustituímos $f_2 = 0$ por la $\bar{f}_2 \equiv f_2 + \lambda_1^{(2)} \bar{f}_1 = 0$ independiente ortogonal de $\bar{f}_1 = 0$. Tendremos

$$\bar{A}_1 = A_1, \quad \bar{A}_1' \underbrace{(A_2 + \lambda_1^{(2)} \bar{A}_1)}_{\bar{A}_2} = 0, \quad \lambda_1^{(2)} = -\frac{\bar{A}_1' A_2}{\|\bar{A}_1\|^2}, \quad \bar{A}_2 = A_2 - \frac{\bar{A}_1' A_2}{\|\bar{A}_1\|^2} \bar{A}_1.$$

Resulta el sistema equivalente

$$\bar{f}_1 = \bar{A}_1 X = 0$$
$$\bar{f}_2 = \bar{A}_2 X = 0$$
$$f_3 = A_3 X = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

En vez de f_3 pondremos

$$\bar{f}_3 \equiv f_3 + \lambda_1^{(3)} \bar{f}_1 + \lambda_2^{(3)} \bar{f}_2, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_1' \overbrace{(A_3 + \lambda_1^{(3)} \bar{A}_1 + \lambda_2^{(3)} \bar{A}_2)}^{\bar{A}_3} = 0 \\ \bar{A}_2' (A_3 + \lambda_1^{(3)} \bar{A}_1 + \lambda_2^{(3)} \bar{A}_2) = 0 \end{array} \right.$$

pero esto se simplifica :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{A}_1' A_3 + \lambda_1^{(3)} \|\bar{A}_1\|^2 = 0 \\ \bar{A}_2' A_3 + \lambda_2^{(3)} \|\bar{A}_2\|^2 = 0 \end{array} \right\} \quad \lambda_1^{(3)} = -\frac{\bar{A}_1' A_3}{\|\bar{A}_1\|^2}, \qquad \lambda_2^{(3)} = -\frac{\bar{A}_2' A_3}{\|\bar{A}_2\|^2}$$

luego

$$\bar{A}_3 = A_3 - \frac{\bar{A}_1' A_3}{\|\bar{A}_1\|^2} \bar{A}_1 - \frac{\bar{A}_2' A_3}{\|\bar{A}_2\|^2} \bar{A}_2 .$$

Y reiteramos indefinidamente con lo que obtenemos un sistema equivalente :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{f}_1 = \bar{A}_1 X = 0 \\ \bar{f}_2 = \bar{A}_2 X = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{f}_i = \bar{A}_i X = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right\} \tag{29}$$

que por construcción es ortogonal. La ley de formación de los $\bar{A}_i$ viene dada por el sistema recurrente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_1 = A_1 \\ \bar{A}_2 = A_2 - \dfrac{\bar{A}_1' A_2}{\|\bar{A}_1\|^2} \bar{A}_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{A}_i = A_i - \dfrac{\bar{A}_1' A_i}{\|\bar{A}_1\|^2} \bar{A}_1 - \ldots - \dfrac{\bar{A}_{i-1}' A_i}{\|\bar{A}_{i-1}\|^2} \bar{A}_{i-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right. \tag{30}$$

Es el proceso de *ortogonalización de Schmidt* pasando de la base A_i de $V = [A_1, A_2, \ldots]$ a una base ortogonal $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots$, $V = [\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots]$. En efecto, A_i se puede despejar como combinación lineal de $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_i$ y $\bar{A}_i$ es combinación lineal de A_i y $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_{i-1}$ y partiendo de $\bar{A}_1 = A_1$ se ve que $\bar{A}_i$ es combinación lineal de $A_i, A_{i-1}, \ldots, A_1$. Luego una combinación lineal finita de los A_i lo es de los $\bar{A}_i$ y recíprocamente.

El sistema ortogonal equivalente (29) obtenido es fácil de normalizar, obteniéndose

$$f_i'' \equiv A_i'' X = 0, \qquad A_i'' = \frac{\bar{A}_i}{\|\bar{A}_i\|}.$$

« Dada una m. l. c. V y $X \in \mathcal{H}$ siempre de una manera única se puede descomponer X como suma de un elemento $\xi \in V$ y otro $\eta \in \mathcal{H} \ominus V$ (v. Julia, G., T. Q. II. p. 53).

Traducción algebraica: « Dado un sistema $A_i X = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, toda ecuación $A X = 0$ puede expresarse de manera única como suma de una ecuación límite de combinaciones lineales finitas de las ecuaciones $A_i X = 0$ del sistema y de una ecuación independiente ortogonal del sistema ».

6. Teorema fundamental del álgebra infinita

Esta proposición en el fondo consiste en la idea de multiplicidades lineales ortogonales complementarias, pero precisamente la repercusión de este concepto en los sistemas de ecuaciones lineales es lo que destaca el teorema en cuestión.

« La condición necesaria y suficiente para que una ecuación

$$f \equiv A X = 0 \tag{31}$$

sea consecuencia del sistema

$$f_i \equiv A_i X = 0 \tag{32}$$

es que f sea el límite de combinaciones lineales finitas de las f_i o sea que

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A_i.$$

La condición es suficiente. (Teorema 2).

Es necesaria. Sea V la m. l. c. determinada por A_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Decir que $A X = 0$ es consecuencia de $A_1 X = 0_{(i = 1, 2 \ldots)}$ significa que para cualquier $\bar{X}$: $A_i \bar{X} = 0$ se verifica $A \bar{X} = 0$. O sea que A es ortogonal a la m. l. c. ortogonal complementaria de V, luego forzosamente (v. Julia G., T. Q. II, p. 52) $A \in V$ y por tanto

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A_i \qquad \text{s. q. d.}$$

Corolario. Sea el sistema $A_i X = 0$ y supongamos que sea equivalente al obtenido añadiendo ecuaciones $B_j X = 0$:

$$A_i X = 0 \Big\} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} A_i X = 0 \\ B_j X = 0. \end{cases}$$

Cada $B_j X = 0$ es límite de combinaciones lineales finitas de las

$$A_i X = 0.$$

Pues $A_i X = 0$ es equivalente a

$$\begin{cases} A_i \ X = 0 \\ B_{j_0} X = 0. \end{cases}$$

Toda solución de $A_i X = 0$ lo es de $\begin{cases} A_i \ X = 0 \\ B_{j_0} X = 0 \end{cases}$ y como estas últimas son las de $A_i X = 0$ que satisfacen $B_{j_0} X = 0$, resulta que todas las satisface, luego $B_{j_0} X = 0$ es consecuencia de $A_i X = 0$ y aplicando el teorema fundamental queda probado lo que pretendíamos.

Conviene tener en cuenta que si $\sum_i \xi_i^{(l)} y_i = 0 \quad (l = 1, 2, ...)$ son las relaciones lineales en $\mathfrak{A}$ que verifican las filas de

$$A = \| a_i^k \| \, \varepsilon \, \mathfrak{A},$$

la m. l. Δ_A es densa en la m. l. c. dada por estas relaciones. Luego cuando Δ_A es cerrada, coincide con ella.

Observemos que $\| a_i^k \lambda_k^i \|$ tiene la misma $[\Delta_A]$ que A puesto que las relaciones lineales en $\mathcal{H}$ entre las filas no han variado.

Una m. l. que no verifica ninguna relación será densa en $\mathcal{H}$.

« Si A es bicontinua ($A \ \varepsilon \ \mathfrak{B}$) Δ_A es cerrada y recíprocamente ». Luego por lo anterior coincidirá con la m. l. c. dada por las relaciones en $\mathcal{H}$ que verifican las filas de A.

Teorema 3. Sea $B^k (b_i^k)$ un sistema o. n., la matriz $\| B^k \|$ es de la clase $\mathfrak{B}$ (bicontinua). (1)

Pues el dominio de valores viene dado precisamente por las relaciones lineales en $\mathcal{H}$ entre sus filas, ya que si un elemento Y las verifica,

(1) Por consiguiente, al pasar de un sistema lineal homogéneo al equivalente ortonormal pasamos a un sistema equivalente cuya matriz de coeficientes pertenece a la clase $\mathfrak{B}$.

puesto que $\{B^k\}$ es una base ortonormal, vendrá dado como sabemos por la serie $Y = \sum_1^\infty (Y'B^k) B^k$.

Teorema 4. Una matriz $A = \|A^k\|$ del caso 3 — $\mathfrak{B}$ es tal que ninguna sucesión $\lambda_k \,\overline{\varepsilon}\, \mathcal{H}$ puede hacer converger la serie $\sum_1^\infty \lambda_k A^k$.

Pues admitamos que $\sum_1^\infty \lambda_k A^k = Y$. Entonces como por otra parte $Y \varepsilon \Delta_A$ tendremos $Y = \sum_1^\infty \xi_k A^k$, $\xi_k \varepsilon \mathcal{H}$. Pero esto lleva consigo $\sum_1^\infty (\lambda_k - \xi_k) A^k = 0$ lo que indica que los A^k son dependientes, lo cual es absurdo puesto que habíamos admitido implícitamente que los elementos A^k eran independientes al suponer que el sistema $\sum_1^\infty A^k \lambda_k = 0$ no tenía solución $\neq$ o en $\mathcal{H}$.

En particular la matriz anteriormente considerada $\|B^k\|$ por estar en este caso le ocurrirá lo que acabamos de demostrar. Podemos ver esto directamente. Si admitiéramos $\sum_1^\infty \lambda_k B^k$ convergente, sea $Y = \sum_1^\infty \lambda_k B^k = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \lambda_k B^k$, multiplicando por B^{k_0}:

$$B^{k_0\prime} Y = B^{k_0\prime} [\lim_{n\to\infty} \sum_1^n \lambda_k B^k] = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \lambda_k (B^{k_0\prime} B^k) = \lambda^{k_0},$$

por consiguiente haciendo variar $k_0 = 1, 2, \ldots$ tendríamos que

$$(\lambda_k) \varepsilon \mathcal{H}.$$

7. Invariancia de las clases matriciales $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ por supresión o agregación de líneas que constituyen una matriz de la clase $\mathfrak{B}$

La supresión o agregación de un número finito de líneas paralelas a una matriz $\varepsilon\, \mathfrak{A}$ no altera su clase ($\mathfrak{B}$ ó $\mathfrak{C}$).

Más general: Si suprimimos o agregamos a una matriz de $\mathfrak{A}$ una sucesión de líneas (filas o columnas) formando una matriz $\varepsilon\, \mathfrak{B}$, la matriz resultado sigue siendo de la misma clase que la primitiva ($\mathfrak{B}$ ó $\mathfrak{C}$).

Pues si la matriz dada era de $\mathfrak{B}$ al agregar una de $\mathfrak{B}$ resulta una de $\mathfrak{B}$ y lo mismo al suprimir, pues queda un menor suyo [1].

---

[1] V. « Algunas propiedades lineales de las matrices acotadas », § 8. En adelante, este trabajo lo indicaremos abreviadamente con A. P.

Si la matriz dada era de la clase $\mathfrak{C}$, al agregar esas líneas no puede resultar de $\mathfrak{B}$ pues entre los menores de la matriz resultado está la dada. Y al suprimir no puede resultar de $\mathfrak{B}$ pues entonces, por agregación, la matriz dada sería de $\mathfrak{B}$.

8. Paso de una matriz $A = \|A^k\|$ del caso $1 - \mathfrak{B}$ a una matriz del caso $1 - \mathfrak{C}$ por multiplicación de las columnas A^k por λ_k $(k = 1, 2, ...)$ y viceversa.

Lo mismo se puede decir de las filas, puesto que la matriz transpuerta pertenece al mismo caso.

Teorema 5. La condición necesaria y suficiente para que $\|\lambda_k A^k\|$ $\varepsilon\ 1 - \mathfrak{C}$ es que

$$|\lambda_k| < m \quad \text{y} \quad \text{extremo inf. } |\lambda_k| = 0.$$

Observemos que $B = \|\lambda_k A^k\| = A\,\Lambda$

siendo

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_k & \\ & & & & \ddots \end{matrix} \right\|.$$

Veamos primero que Λ ha de ser de $\mathfrak{A}$, o sea que $|\lambda_k|_{(k=1,2,...)}$ está acotada superiormente. En efecto, al ser $B\ \varepsilon\ \mathfrak{A}$ será

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^k \lambda_k)^2 < k, \qquad \lambda_k^2 < \frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i^k)^2}$$

pero por la regularidad de A

$$0 < p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^k)^2 \; (k = 1, 2, ...)$$

luego $\lambda_k^2 < \dfrac{k}{p}$ $(k = 1, 2, ...)$.

Probemos ahora que extremo inf. $|\lambda_k| = 0$. Esto equivale a probar que $\Lambda\ \varepsilon\ 1 - \mathfrak{C}$. En efecto, se tiene $A\,\Lambda = B$,, $\Lambda = A^{-1} B$, como A^{-1} es regular con A resultará que Λ y B serán del mismo caso (v. A. P., § 7, Teorema 7). Luego si $B \varepsilon 1 - \mathfrak{C}$, $\Lambda \varepsilon 1 - \mathfrak{C}$ y recíprocamente. s. q. d.

Corolario. La condición necesaria y suficiente para que por producto por la sucesión σ_k de las columnas B^k de una matriz $B = \| B^k \|$ del caso $1 - \mathfrak{C}$ resulte una matriz regular es que $| \sigma_k |$ no admita cota superior y que $| \sigma_k | > \bar{m} > 0$.

Pues si

$$\| B^k \sigma_k \| = \overline{B} \varepsilon 1 - \mathfrak{B}, \qquad \overline{B} = B \Sigma$$

siendo

$$\Sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \sigma_k \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}, \qquad \Sigma^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_k} & \\ & & & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Luego $B = \overline{B} \Sigma^{-1}$ y la condición necesaria y suficiente para que esto se dé es que

$$\text{extremo inf.} \frac{1}{|\sigma_k|} = 0, \quad \text{equivalente a} \quad | \sigma_k | \text{ no acotada superiormente}$$

y

$$\frac{1}{|\sigma_k|} < m \quad \text{equivalente a} \quad |\sigma_k| > \frac{1}{m} > 0 \qquad \text{s. q. d.}$$

9. Dependencia lineal entre las líneas paralelas de una matriz del caso $1 - \mathfrak{C}$.

Sea $A = \| A^1, ..., A^k, ... \|$ del caso $1 - \mathfrak{C}$. Supongamos que se ha conseguido mediante una cierta sucesión λ_k que

$$B = \| \lambda_1 A^1, ..., \lambda_k A^k, ... \|$$

sea regular. Entonces nunca podrá darse una dependencia del tipo

$$A^1 = \lim_{n \to \infty} \sum_2^n \mu_k^{(n)} A^k$$

entre los A^k, pues se puede poner esto en la forma

$$\lambda_1 A^1 = \lim_{n \to \infty} \sum_2^n \left(\frac{\lambda_1 \mu_k^{(n)}}{\lambda_k} \right) (\lambda_k A^k)$$

lo que es absurdo que ocurra entre las columnas de una matriz regular puesto que implica la existencia de una relación lineal en $\mathfrak{A}$ entre las filas. Luego

Teorema 6. Dada una matriz del caso $1 - \mathfrak{C}$, si se puede conseguir pasar al caso $1 - B$ mediante el producto por columnas por una sucesión numérica, *forzosamente* no puede ser una columna límite de combinaciones lineales finitas de las demás. Por consiguiente únicamente habrá relaciones lineales del tipo $\lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \lambda_k^{(n)} A^k = 0$ en que no se puede despejar ningún A^k fijo.

Ejemplo: matriz diagonal del caso $1 - \mathfrak{C}$.

En contraposición, si *nunca* se puede conseguir así que la matriz resultado sea regular, lo único que podemos asegurar es que puede ser alguna columna límite de combinaciones lineales finitas de las restantes.

Ejemplo: En *A. P.* § 6 se vió esta imposibilidad en la matriz simétrica

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \ \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}.$$

Y efectivamente, en esta matriz se observa que por ejemplo la primera columna es límite de combinaciones lineales finitas de las restantes.

10. Diferencia algebraica entre las clases $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{B}$

Si una matriz

$$A = \| A^1 \, A^2 \ldots A^k \ldots \|$$

es de la clase $\mathfrak{B}$ y

$$X = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} A^k, \tag{33}$$

$X \in \Delta_A$, por consiguiente

$$X = \sum_{1}^{\infty} y_k \, A^k \tag{34}$$

con $y_k \varepsilon \mathcal{H}$. En cambio, si $A \varepsilon \mathcal{C}$, de (33) no se sigue en general la existencia de (34) pues Δ_A no es cerrada, si bien densa en las relaciones lineales en $\mathcal{H}$ entre las filas.

11. Condición necesaria y suficiente de compatibilidad de un sistema de ecuaciones

Sea el sistema

$$f_i \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k = c_i, \qquad (i = 1, 2, ...) \tag{35}$$

las formas lineales f_i de los primeros miembros son en $\mathfrak{A}$ y se trata de hallar las soluciones en $\mathfrak{A}$. Lo podemos expresar en la forma

$$A_i X = c_i \quad ,, \tag{36}$$

$$A_i (a_i^1, a_i^2, ..., a_i^k, ...) \varepsilon \mathcal{H}, \qquad X (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \varepsilon \mathcal{H}.$$

Observemos que decir solución en $\mathfrak{A}$ de (35) [1] es decir solución $\overline{X}$ en $\mathfrak{A}$ del sistema homogéneo auxiliar

$$- c_i x_0 + \sum_{k=i}^{\infty} a_i^k x_k = 0, \qquad (i = 1, 2, ...) \tag{37}$$

$\overline{X} (x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ...)$ con la coordenada

$$x_0 \neq 0. \tag{38}$$

Las filas de la nueva matriz

$$\overline{A}_i (- c_i, a_i^1, ..., a_i^k, ...) \varepsilon \mathcal{H} \qquad (i = 1, 2, ...).$$

Consideremos pues el sistema homogéneo auxiliar

$$\overline{A}_i \overline{X} = 0.$$

Si designamos por $\bar{e}_0$ el elemento

$$(\underset{\frown}{\alpha}_{0}, \underset{\frown}{0}_{1}, \underset{\frown}{0}_{2}, ..., \underset{\frown}{0}_{k}, ...) \qquad \text{con } \alpha \neq 0,$$

la condición (38) puede expresarse en la forma

$$\bar{e}_0 \overline{X} \neq 0. \tag{39}$$

(1) Si $\|a_i^k\| \varepsilon \mathcal{A}$ es interesante observar que admitir solución en $\mathcal{A}$ de (35) exige automáticamente que $(c_i) \varepsilon \mathcal{H}$.

Vemos así que decir solución del sistema (35) se traduce en la verificación simultánea de las relaciones

$$\left.\begin{array}{r}\bar{A}_i\,\bar{X}=0\\ \bar{e}_0\,\bar{X}\neq 0\end{array}\right\}\quad (i=1,2,\ldots) \tag{40}$$

Estas condiciones, por equivaler al sistema planteado (35), serán necesarias y suficientes para la compatibilidad del mismo. El sistema $\bar{A}_i\,\bar{X}=0$ por ser homogéneo siempre es compatible, y *lo que se requiere como condición necesaria y suficiente es que alguna de sus soluciones* $\bar{X}$ *no satisfaga la ecuación*

$$\bar{e}_0\,\bar{X}=0. \tag{41}$$

Pero esto es lo mismo que decir que esta ecuación *no* es consecuencia del sistema $\bar{A}_i\,\bar{X}=0$.

Luego la condición necesaria y suficiente para la compatibilidad del sistema (35), en virtud del teorema fundamental del Algebra infinita, será que

$$\bar{e}_0 \neq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{(n)}\,\bar{A}_i, \tag{42}$$

es decir, que *no* pueda obtenerse como límite de combinaciones lineales finitas de las $\bar{A}_i$. Como no hay más posibilidad que se verifique (42) o que no se verifique y respectivamente que el sistema (35) sea compatible o que no lo sea, resulta que será *condición necesaria y suficiente de incompatibilidad que*

$$\bar{e}_0=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(n)}\,\bar{A}_i. \tag{43}$$

Para ver mejor lo que esto significa formemos la matriz

$$\begin{array}{c} \bar{e}_0\\ \bar{A}_1\\ \vdots\\ \\ \bar{A}_i\\ \vdots \end{array}\left\|\begin{array}{cccccc} \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\\ -c_1 & a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^k & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -c_i & a_i^1 & a_i^2 & \ldots & a_i^k & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\|.$$

(43) equivale a que se verifiquen simultáneamente las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A_i = 0 \qquad &(\mathrm{I}) \\ &\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} c_i \neq 0, \qquad &(\mathrm{II}) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

ya que α *es arbitrario distinto de* 0.

Designemos $\sum_1^n \lambda_i^{(n)} A_i$ por $V^{(n)}$, y por $p_n = \sum_1^n \lambda_i^{(n)} c_i$. En estas fórmulas implícitamente suponemos que si $V^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} V$ (V es nulo), el elemento $\overline{V}^{(n)}$ obtenido añadiendo la coordenada p_n ($\longrightarrow p$) a $V^{(n)}$ converge al elemento $\overline{V}$ obtenido añadiendo la coordenada p a V. Y recíprocamente. La validez de ambas afirmaciones es fácil de deducir.

Las fórmulas (44) expresan precisamente que las relaciones lineales (límites de combinaciones lineales finitas) existentes entre los primeros miembros de (35) *no* son verificadas por los segundos. Y como (44, I) y (44, II) son la traducción de (43) y puesto que (43) es la condición necesaria y suficiente de *incompatibilidad* de (35), resultará que

Teorema 7. La condición necesaria y suficiente para que el sistema propuesto (35) sea *compatible* es que las relaciones lineales existentes entre los primeros miembros sean verificadas por los segundos.

Nótese que la condición hallada es exactamente el paso al límite de la del álgebra finita.

Corolario 1.º Todo sistema lineal homogéneo es compatible. En efecto, posee siempre la solución trivial (0, 0, ..., 0, 0...).

Corolario 2.º Si la matriz de (35):

$$\|a_i^k\| = \left\| \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \end{matrix} \right\| \tag{45}$$

es acotada y de la clase $\mathfrak{B}$, entonces las relaciones lineales son del tipo $\sum \lambda_i A_i = 0$ con $(\lambda_i) \in \mathcal{H}$. El álgebra de la clase $\mathfrak{B}$ es como la finita (v. A. P. al final).

Corolario 3.º En particular si nunca es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A_i = 0$$

significando realmente una relación lineal (o sea no idénticamente satisfecha), o de otra manera, si los primeros miembros de (35) no verifican ninguna relación lineal entonces el sistema (35) es *siempre compatible*. Si $\| a_i^k \| \varepsilon \mathfrak{A}$ previamente ha de ser $(c_i) \varepsilon \mathcal{H}$. La condición hallada es también condición necesaria además de suficiente para que se tenga compatibilidad cualesquiera que sean los segundos miembros. En efecto, supongamos que el sistema (35) sea siempre compatible, es decir, que admite solución en $\mathcal{H}$ cualesquiera que sean los segundos miembros:

$$c_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Entonces los primeros miembros no pueden admitir ninguna relación lineal, pues si así fuese ésta sería idénticamente satisfecha.

Si la matriz (45) del sistema es de la clase $\mathfrak{B}$ bastará que el sistema homogéneo traspuesto

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i y_i = 0$$

no tenga ninguna solución distinta de cero en $\mathcal{H}$. Precisamente sabemos que esto significa que

$$\Delta_A = \mathcal{H}.$$

Si la matriz $A = \|a_i^k\|$ del sistema (35) es acotada de la clase $\mathfrak{C}$ entonces, puesto que Δ_A es una m. l. no cerrada densa en la m. l. c. dada por las relaciones lineales en $\mathcal{H}$ de las A_i, de acuerdo con el criterio establecido, resultará que *necesariamente* existirán relaciones lineales del tipo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} A_i = 0$$

no reducibles a $\sum_{1}^{\infty} \lambda_i A_i = 0$, $(\lambda_i) \varepsilon \mathcal{H}$ y por tanto *Δ_A acaba de estar determinado por estas relaciones*:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} c_i = 0.$$

Paso de un sistema de ecuaciones lineales

$$A_i X \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

a un sistema de matriz acotada.

Nos ocuparemos del sistema general no homogéneo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^k x_k = c_i,$$

quedando incluído el homogéneo para $c_i = 0$. Por otra parte la resolución de este último equivale como sabemos a la consideración de m. l. ortogonales complementarias (v. Julia G., T. Q. II, p. 171 - 172).

Hemos visto anteriormente un criterio necesario y suficiente de resolubilidad. Su resolución efectiva puede verse en la memoria tantas veces citada de G. Julia, T. Q. II, p. 171 a 206.

La matriz del sistema ampliada con los segundos miembros

$$\left\| \begin{matrix} c_1 \, a_1^1 a_1^2 \, \ldots \, a_1^k \, \ldots \\ c_2 \, a_2^1 a_2^2 \, \ldots \, a_2^k \, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_i \, a_i^1 a_i^2 \, \ldots \, a_i^k \, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\|$$

es de filas sumables al cuadrado y aplicando un resultado ya demostrado (v. A. P. § 6) si multiplicamos estas filas por adecuadas sucesiones $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ la matriz resultante

$$\bar{A} = \left\| \begin{matrix} p_1 c_1 \; p_1 a_1^1 \, \ldots \, p_1 a_1^k \, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_i c_i \; p_i a_i^1 \, \ldots \, p_i a_i^k \, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right\|$$

se consigue que sea acotada. Como también lo será cualquier menor suyo tendremos que el sistema obtenido multiplicando la i - ésima ecuación miembro a miembro por p_i $(i = 1, 2, \ldots)$:

$$p_i A_i X = p_i c_i$$

es de matriz

$$\left\| \begin{matrix} \vdots \\ p_i A_i \\ \vdots \end{matrix} \right\| \varepsilon \, \mathfrak{a}$$

La equivalencia con el sistema dado es manifiesta. Obsérvese que los nuevos segundos miembros

$$\left\| \begin{matrix} \vdots \\ p_i \, c_i \\ \vdots \end{matrix} \right\|$$

constituyen un elemento de $\mathcal{H}$.

Resulta por consiguiente que siempre podremos referirnos a un sistema de matriz acotada:

$$A_i X \equiv \sum a_i^k x_k = c_i \qquad (i = 1, 2, ...)$$

$$A = \|a_i^k\| \in \mathfrak{A}, \qquad C(c_i) \in \mathcal{H}.$$

Si el sistema admite una solución $(\bar{x}_k) \in \mathcal{H}$ la hipótesis hecha implica que, además de hacer absolutamente convergentes los primeros miembros a los segundos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_i^k \bar{x}_k \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c_i \qquad (i = 1, 2, ...),$$

se tiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n} a_i^k \bar{x}_k)^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2.$$

Resumimos a continuación las condiciones de compatibilidad ya conocidas distinguiendo los dos casos posibles:

1.º $A \in \mathfrak{B}$. La dependencia lineal es *en* $\mathfrak{A}$. Condición necesaria y suficiente de compatibilidad es que (c_i) verifique las relaciones lineales en $\mathfrak{A}$ existentes entre los primeros miembros. Se trata del caso análogo al del álgebra lineal finita.

2.º $A \in \mathfrak{C}$. La dependencia lineal trasciende de $\mathfrak{A}$. La condición necesaria *(no suficiente)* de compatibilidad es que verifique las relaciones lineales en $\mathfrak{A}$ entre los primeros miembros. La condición *necesaria y suficiente* (que incluye la necesaria anterior como caso particular) de compatibilidad es que los segundos miembros verifiquen las relaciones lineales existentes entre los primeros.

12. DETERMINANTE INFINITO ASOCIADO A UNA SUCESIÓN DE ELEMENTOS $A^1, A^2, \dots, A^k, \dots$ DE $\mathcal{H}$

Sea la sucesión de elementos de $\mathcal{H}$

$$A^1, A^2, \dots, A^k, \dots ; \quad A^k = \left\| \begin{matrix} a_1^k \\ \cdot \\ \cdot \\ a_i^k \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right\| . \tag{46}$$

En lo que sigue entenderemos por dependencia lineal entre ellos la que permite despejar uno como límite de combinaciones lineales finitas de los demás, por ejemplo

$$A^1 = \lim_{n \to \infty} \sum_2^n \lambda_k^{(n)} A^k. \tag{47}$$

Esta dependencia no altera si multiplicamos cada A^k por un número μ_k $(k = 1, 2, \dots)$ pues basta escribir (47) en la forma

$$\mu_1 A^1 = \lim_{n \to \infty} \sum_2^n \mu_1 \frac{\lambda_k^{(n)}}{\mu_k} (\mu_k A^k).$$

Consideremos la matriz

$$\left\| \begin{matrix} A^{1\prime} A^1 \dots\dots A^{1\prime} A^k \dots\dots A^{1\prime} A^n \dots \\ A^{2\prime} A^1 \dots\dots A^{2\prime} A^k \dots\dots A^{2\prime} A^n \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{i\prime} A^1 \dots\dots A^{i\prime} A^k \dots\dots A^{i\prime} A^n \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{n\prime} A^1 \dots\dots A^{i\prime} A^k \dots\dots A^{n\prime} A^n \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{matrix} \right\| \tag{48}$$

y llamaremos reducida n - ésima suya la matriz cuadrada siguiente :

$$\delta_n = \left\| \begin{matrix} A^{1\prime} A^1 \dots A^{1\prime} A^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{n\prime} A^1 \dots A^{n\prime} A^n \end{matrix} \right\| .$$

Su determinante Δ_n es precisamente el determinante de Gram de los n primeros elementos de (46) : $A^1, ..., A^n$.

No hay que confundir la reducida δ_n que acabamos de definir con la matriz $\|B^1, ..., B^n\|$ n-ésima reducida de la $\|B^1, B^2, ..., B^k, ...\|$ como compuesta de sus n primeras columnas.

Δ_n es siempre $\geqslant 0$, siendo > 0 ó $= 0$ según que $A^1, ..., A^n$ sean respectivamente independientes o dependientes. Y para saber esta dependencia o independencia es mucho más sencillo calcular Δ_n que los determinantes de orden n o determinante de orden n general de la matriz de n columnas e infinitas filas $\|A^1 A^2, ..., A^n\|$.

En la sucesión

$$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ... \tag{49}$$

si $\Delta_{\bar{n}}$ es el primero $= 0$ resultará que $A^{\bar{n}}$ será el primer elemento de (46) dependiente de los anteriores. Los sucesivos Δ_n nulos a partir de $\Delta_{\bar{n}}$ indicarán la presencia de A^j dependiente de los anteriores. En definitiva, el simple examen de (49) nos proporciona las combinaciones lineales finitas que puede haber entre los A^k y los A^j que hay que suprimir en (46) a fin de obtener la limpieza de combinaciones lineales finitas. Lo que vamos a conseguir es precisamente un criterio necesario de dependencia lineal infinita mediante el paso al límite de Δ_n para $n \longrightarrow \infty$.

Interpretando los A^k como vectores en el Espacio de Hilbert, Δ_n es el cuadrado del volumen V_n del paralelepípedo de aristas $A^1, ..., A^n$: $\Delta_n = V_n^2$.

Normalicemos los A^k, esto equivale a multiplicar A^k por el escalar $\dfrac{1}{\|A^k\|}$. Sean

$$\bar{A}^k = \frac{A^k}{\|A^k\|}, \qquad \|\bar{A}^k\| = 1, \qquad (k = 1, 2, ...)$$

designando por $\bar{\Delta}_n$ el determinante de Gram de $\bar{A}^1, ..., \bar{A}^n$ tendremos

$$\bar{\Delta}_n = \frac{\Delta_n}{\| A^1 \|^2 .... \| A^n \|^2}. \tag{50}$$

Observemos que el nuevo volumen en valor absoluto $|\bar{V}_n|$ es igual a $|\bar{V}_{n-1}|$ («base») multiplicado por la «altura» correspondiente $\overline{Q_n P_n} = \|\bar{A}_n^*\|$, siendo $\bar{A}_n^*$ la componente de $\bar{A}_n$ ortogonal a la m. l.

$$\mathfrak{M}_{n-1} = [\bar{A}^1, ..., \bar{A}^{n-1}]. \tag{51}$$

Por ser los $\bar{A}^k$ de longitud 1,

$$\|\bar{A}_n^*\| \leqslant 1 \tag{52}$$

luego

$$|\bar{V}_{n-1}| \geqslant |\bar{V}_n| \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{53}$$

y además

$$|\bar{V}_n| < 1.$$

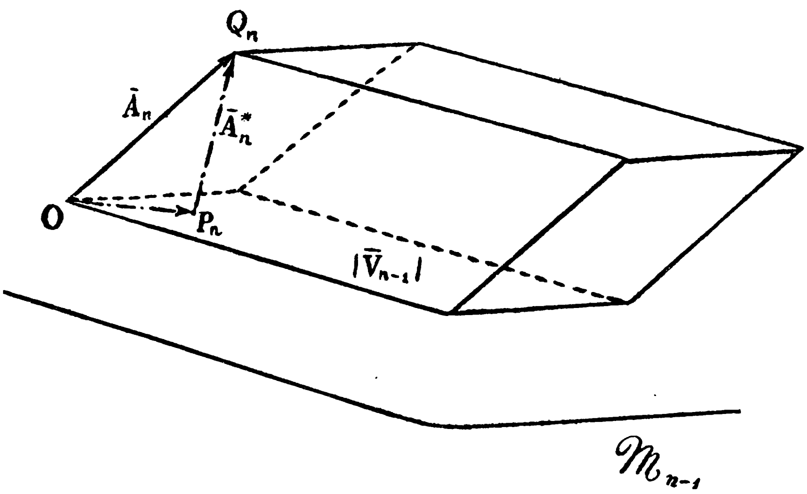

Fig. 1

Elevando al cuadrado $\bar{\Delta}_{n-1} \geqslant \bar{\Delta}_n$, $\bar{\Delta}_n < 1$ y resulta la sucesión monótona decreciente acotada por cero:

$$\bar{\Delta}_1 \geqslant \bar{\Delta}_2 \geqslant \ldots \geqslant \bar{\Delta}_{n-1} \geqslant \bar{\Delta}_n \geqslant \ldots \geqslant 0 \tag{54}$$

En consecuencia

$$\bar{\Delta}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{\Delta} \geqslant 0. \tag{55}$$

La dependencia entre los $\bar{A}^k$ es la misma que entre los elementos dados A^k. Nos conviene referirnos a los normalizados.

Supongamos para fijar ideas que $\bar{A}^1$ sea límite de combinaciones lineales finitas de los demás:

$$\bar{A}^1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=2}^{n} \lambda_k^{(n)} \bar{A}^k.$$

Designemos por $\mathfrak{M}_n^{(2)}$ la m. l. determinada por $\bar{A}^2, \ldots, \bar{A}^n$. Si $\bar{A}^1 = \overrightarrow{OP_1}$, la mínima distancia de P_1 a $\mathfrak{M}_n^{(2)}$ es $\|\bar{A}_n'\|$ si

$$\bar{A}^1 = \bar{A}_n' + \bar{A}_n'' \begin{cases} \bar{A}_n' \text{ ortogonal a } \mathfrak{M}_n^{(2)} \\ \bar{A}_n'' \; \varepsilon \; \mathfrak{M}_n^{(2)} \end{cases}$$

(v. Julia G., T. Q. II p. 40).

$$\bar{A}_n^1 = \sum_2^n \lambda_k^{(n)} \bar{A}^k \; \varepsilon \; \mathfrak{M}_n^{(2)} \quad \text{y como} \quad \|\bar{A}^1 - \bar{A}_n^1\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

con mayor razón

$$\|\bar{A}_n'\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{56}$$

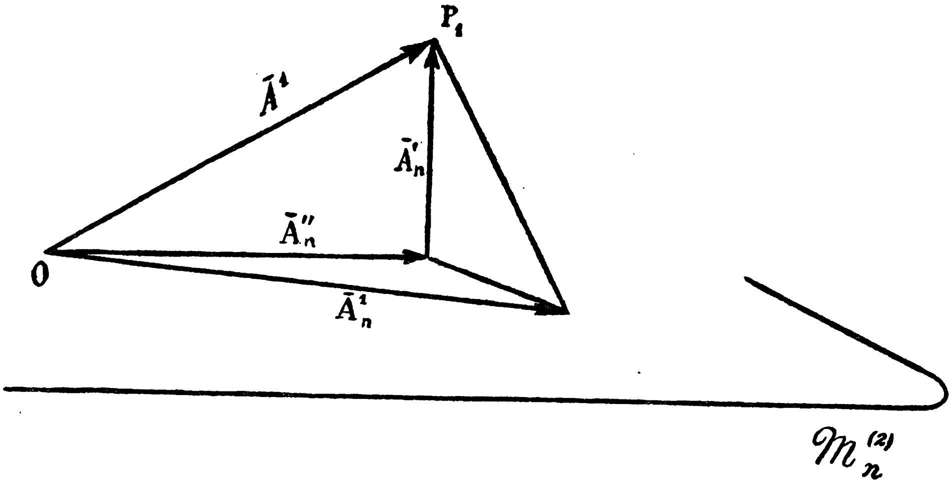

Fig. 2

Si $\bar{A}^1$ no fuera límite de combinaciones lineales finitas de los restantes $\bar{A}^k$ no podría verificarse (56) ya que de lo contrario $\bar{A}_n'' \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{A}^1$ y $\bar{A}_n'' \; \varepsilon \; \mathfrak{M}_n^{(2)}$.

El volumen del paralelepípedo de aristas $\bar{A}^1, \ldots, \bar{A}^n$ considerando como «base» el de aristas $\bar{A}^2, \ldots, \bar{A}^n$ de volumen $\bar{V}_n^{(2)}$ se puede poner en la forma

$$|\bar{V}_n| = \|\bar{A}_n'\| \cdot |\bar{V}_n^{(2)}|,$$

elevando al cuadrado

$$\bar{\Delta}_n = \|\bar{A}_n'\|^2 \cdot \bar{\Delta}_n^{(2)},$$

donde con $\bar{\Delta}_n^{(2)}$ designamos el determinante de Gram de los vectores $\bar{A}^2, \ldots, \bar{A}^n$. En general $\bar{\Delta}_n^{(p)}$ designará el determinante de Gram de $\bar{A}^p, \ldots, \bar{A}^n$. Evidentemente aplicando lo demostrado a la sucesión parcial normalizada

$$\bar{A}^p,\ \bar{A}^{p+1},\ \ldots,\ \bar{A}^n, \ldots \tag{57}$$

tendremos que

$$\bar{\Delta}_n^{(p)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \bar{\Delta}^{(p)} \geqslant 0. \tag{58}$$

En particular

$$\bar{\Delta}_n = \bar{\Delta}_n^{(1)}, \qquad \bar{\Delta} = \bar{\Delta}^{(1)}.$$

Según hemos visto, la condición necesaria y suficiente para que $\bar{A}^1$ sea límite de combinaciones lineales finitas de los siguientes es que $\bar{A}'_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Supongamos que se dé esta dependencia. Tendremos

$$\lim_{n \to \infty} \bar{\Delta}_n^{(1)} = \lim_{n \to \infty} \|\bar{A}'_n\|^2 \cdot \lim_{n \to \infty} \bar{\Delta}_n^{(2)} = 0 \cdot \bar{\Delta}^{(2)} = 0,$$

$$\underline{\bar{\Delta} = \bar{\Delta}^{(1)} = 0.} \tag{59}$$

Si hubiera sido $\bar{A}^\nu$ dependiente de los siguientes $\bar{A}^{\nu+1}, \ldots$ hubiéramos encontrado también $\bar{\Delta} = 0$ por reiteración hasta llegar a $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{\Delta}_n^{(\nu)} = 0$.

Si un $\bar{A}^{(\nu)}$ es límite de combinaciones lineales finitas de los anteriores y posteriores, lo llevamos por ejemplo delante de todos, con lo que pasará a depender linealmente de los siguientes. Con esta permutación no habrán alterado los $\bar{\Delta}_n^{(1)} = \overset{2}{\bar{V}}{}_n^{(1)}$ a partir de $n = \nu$ y el límite $\bar{\Delta}$ tampoco habrá cambiado y tendrá que ser nulo.

En definitiva:

TEOREMA 8. Una condición *necesaria* de dependencia lineal entre los elementos de una sucesión

$$A^1, \ldots, A^k, \ldots$$

es que

$$\bar{\Delta} = 0,$$

siendo $\bar{\Delta}$ el límite para $n \longrightarrow \infty$ del determinante de Gram de los n primeros elementos $\bar{A}^1, \ldots, \bar{A}^n$ de la sucesión normalizada.

Se desprende que $\bar{\Delta} \neq 0$ es una condición *suficiente* para que los A^k sean linealmente independientes.

Vamos a ver a continuación por qué $\bar{\varDelta} = 0$ sólo es condición necesaria de dependencia. Consideraremos únicamente el caso de ser un elemento dependiente linealmente de los siguientes. Si $\bar{A}'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{A}'$, $\bar{A}'$ es la proyección ortogonal a $\mathfrak{M}^{(2)} = [\bar{A}^2 \bar{A}^3, ..., \bar{A}^n, ...]$ de $\bar{A}^1$. En general, sea $\bar{A}'_p$ la proyección ortogonal a $\mathfrak{M}^{(p+1)} = [\bar{A}^{p+1}, ...]$ del elemento A^p, la condición necesaria y suficiente para que $\bar{A}^p$ dependa de los siguientes es que $\bar{A}'_p = 0$ ó sea

$$\|\bar{A}'_p\| = 0 \tag{60}$$

(En particular $\bar{A}'_1 = \bar{A}'$).

Por reiteración fácil se tiene

$$\bar{\varDelta} = \|\bar{A}'_1\|^2 \cdot \|\bar{A}'_2\|^2 \ldots \|\bar{A}'_p\|^2 \cdot \bar{\varDelta}^{(p+1)} \tag{61}$$

Como

$$\|\bar{A}'_i\|^2 \leq 1, \quad \bar{\varDelta}^{(i)} \leq \bar{\varDelta}^{(i+1)} \leq 1 \qquad (i = 1, 2, ...)$$

luego tendremos

$$0 \leq \bar{\varDelta}^{(1)} \leq \bar{\varDelta}^{(2)} \leq \ldots \leq \bar{\varDelta}^{(i)} \leq \bar{\varDelta}^{(i+1)} \leq \ldots \leq 1.$$

Por tanto

$$\bar{\varDelta}^{(i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \bar{\varDelta}^* \leq 1.$$

Se verificará

$$\bar{\varDelta} = \lim_{p\to\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \|\bar{A}'_i\|^2 \cdot \lim_{p\to\infty} \bar{\varDelta}^{(p+1)},$$

$$\bar{\varDelta} = \prod_{i=1}^{\infty} \|\bar{A}'_i\|^2 \cdot \bar{\varDelta}^*.$$

Puede ocurrir que $\prod_{i=1}^{\infty} \|\bar{A}'_i\|^2 = 0$, con lo que $\bar{\varDelta} = 0$, sin ser nulo ninguno de los factores $\|\bar{A}'_i\|^2$, lo que implica la independencia de cada $\bar{A}^p$ de los siguientes.

Condición necesaria para que $\bar{\varDelta} \neq 0$ es que $\prod_1^{\infty} \|\bar{A}'_i\|^2 \neq 0$. Y la condición necesaria y suficiente para que $\bar{\varDelta} \neq 0$ es que $\prod_1^{\infty} \|\bar{A}'_i\|^2 \neq 0$ y $\bar{\varDelta}^* \neq 0$, esto último equivalente a ser algún $\bar{\varDelta}^{(i)} \neq 0$.

Excluído el caso $\bar{\varDelta}^* = 0$, $\bar{\varDelta}$ y $\prod_1^{\infty} \|\bar{A}'_i\|^2$ son simultáneamente nulos o no.

Si $\bar{\Delta}^* = 0$ todos los $\bar{\Delta}^{(i)}$ son nulos, en particular $\bar{\Delta}$. $\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2$ es nulo o no.

Si todos los $\| \bar{A}_i' \|^2$ son distintos de cero ($\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2$ nulo o no) y $\bar{\Delta} = 0$, por $(\bar{61})$ $\Delta^{(p+1)} = 0$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ y

$$\bar{\Delta}^* = 0.$$

Observaciones. Se tiene $\bar{\Delta}^{(p)} = \| \bar{A}_p' \|^2 \cdot \bar{\Delta}^{(p+1)}$, $\| \bar{A}_p' \|^2 = \dfrac{\bar{\Delta}^{(p)}}{\bar{\Delta}^{(p+1)}}$

$$\bar{\Delta}^{(p)} = \lim_{n \to \infty} \bar{\Delta}_n^{(p)}, \qquad \bar{\Delta}^{(p+1)} = \lim_{(n \to \infty)} \bar{\Delta}_n^{(p+1)}$$

luego

$$\| \bar{A}_p' \|^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{\bar{\Delta}_n^{(p)}}{\bar{\Delta}_n^{(p+1)}}.$$

$\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2$ no cambia por una permutación finita de los $\bar{A}^k$, pues $\bar{\Delta}$ no altera y $\bar{\Delta}^*$ tampoco ya que a partir de un cierto índice los $\bar{A}^k$ son los mismos. Esta propiedad se verificará al menos cuando $\bar{\Delta}^*$ sea distinto de cero.

De lo visto hasta ahora se deduce que conviene distinguir el caso $\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2 = 0$ con todos los $\| \bar{A}_i' \|^2 \neq 0$ (independencia de cada $\bar{A}^p$ de los siguientes) del $\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2 = 0$ con algún $\| \bar{A}_\nu' \|^2 = 0$ ($\bar{A}^\nu$ dependiente de los siguientes). En este segundo caso si hacemos $\overset{n}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2 = p_n$, $p_\nu = = p_{\nu+1} = \ldots = 0$ y esto seguirá ocurriendo si multiplicamos cada $\| \bar{A}_i' \|^2$ por un cierto número a_i^2, con lo que pasamos a $\| a_i \bar{A}_i' \|^2$. Por el contrario, en el primer caso de $\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2 = 0$ (con todos los $\| \bar{A}_i' \|^2 \neq 0$) podrá conseguirse que $\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} \| \bar{A}_i' \|^2$ resulte distinto de cero. Basta que

$$a_i^2 \| \bar{A}_i' \|^2 = b_i^2, \qquad \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}} b_i^2 = B \neq 0. \qquad a_i^2 = \frac{b_i^2}{\| \bar{A}_i' \|^2}.$$

Aunque los $\bar{A}_i'$ no los conocemos, por lo indicado en la figura 3 se observa que la operación equivale a multiplicar $\bar{A}^i$ por a_i.

13. Determinantes infinitos asociados a una matriz acotada

Si
$$A = \| A^1 A^2 \ldots A^k \ldots \| \in \mathfrak{A}, \tag{62}$$

se obtiene un determinante límite $\bar{\Delta}$ como el hallado más arriba sin más que multiplicar A^k por $\frac{1}{M}$ siendo M la cota de A. Pues como $\|A^k\| \leqslant M$, $\left\|\frac{A^k}{M}\right\| \leqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Tenemos la ventaja de que la matriz

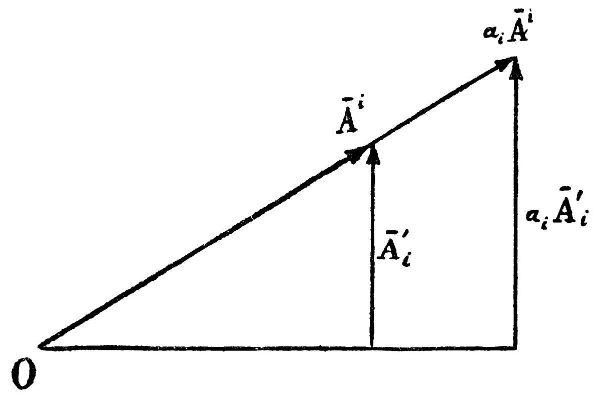

Fig. 3

resultante sigue siendo acotada y además sigue perteneciendo al mismo caso, ya que lo hecho equivale a multiplicar A por la matriz diagonal regular $\left\|\frac{1}{M}\,\delta_i^k\right\|$.

Si normalizamos los A^k ya no sucede lo mismo en general. Sin embargo, damos a continuación un teorema del que se desprende que la normalización de las columnas de una matriz del caso $1 - \mathfrak{B}$ ó $3 - \mathfrak{B}$ da como resultado una matriz del mismo caso.

Teorema 9. Sea la matriz

$$A = \|A^1 A^2 \ldots A^k \ldots\|$$

de la clase $\mathfrak{B}$ y de columnas independientes (o sea perteneciente al caso $1 - \mathfrak{B}$ o al $3 - \mathfrak{B}$). Como en toda matriz de $\mathfrak{A}$

$$\|A^k\| < M$$

si M es la cota de A. Pero ahora este teorema afirma

$$0 < m \leq \|A^k\| \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{63}$$

En efecto, lo contrario sería

$$\text{extremo inf. } \|A^k\| = 0$$

lo que equivale a la existencia de una sucesión parcial A^{k_l} tal que

$$\|A^{k_l}\| \underset{k_l \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pero $A^{k_l} = A\, e_{k_l}$, $e_{k_l}\ (0, 0, \ldots, 0, \underset{\widehat{k_l}}{1}, 0, \ldots)$ y como $e_k \longrightarrow 0$, $e_{k_l} \longrightarrow 0$. Como hay biunivocidad la sucesión A^{k_e} sólo procede de la e_{k_l}, y como $A \in \mathfrak{B}$ debería converger (en el sentido fuerte, se entiende) y no converge.

Corolario. Si normalizamos las columnas de una matriz A del caso $1 - \mathfrak{B}$ ó $3 - \mathfrak{B}$, sigue perteneciendo al misma caso.

Pues esto equivale a multiplicar A a la derecha por la matriz diagonal

$$\left\| \frac{1}{\|A^k\|}\, \delta_i^k \right\|,$$

y

$$+\infty > \frac{1}{m} \geq \frac{1}{\|A^k\|} \geq \frac{1}{M} > 0$$

indica que es regular.

Como en la clase $\mathfrak{C}$ el ser, por ejemplo,

$$A^1 = \lim_{n \to \infty} \sum_2^n \lambda_k^{(n)} A^k$$

no lleva consigo que sea $A^1 = \sum_2^\infty \lambda_k A^k$ con $(\lambda_k) \in \mathfrak{H}$, así como en la clase $\mathfrak{B}$ *sí*, tendremos que $\bar{\Delta} = 0$ será condición *necesaria* de dependencia lineal *en* $\mathfrak{A}$ cuando la matriz sea de la clase $\mathfrak{B}$. Si pertenece a la clase $\mathfrak{C}$, lo será de existir ciertas columnas límites de combinaciones lineales finitas cualesquiera de las demás.

Si una matriz es simplemente de filas y columnas sumables al cuadrado (matriz «Q», v. Julia, G., T. Q. II, p. 131) se podrá hablar del determinante $\overline{\Delta}'$ de sus columnas y del determinante $\overline{\Delta}''$ de sus filas, relacionados respectivamente con la dependencia de columnas y filas. Puesto que estas matrices comprenden las acotadas, éstas tendrán ambos determinantes. Como $\overline{\Delta} = \overline{\Delta}' \geqslant 0$ puede considerarse como determinante de la matriz (48) que es precisamente $A'A$ ($\overline{\Delta}''$ lo será de AA'), se podría convenir en asignar como determinantes a A sus raíces cuadradas:

$$\sqrt{\overline{\Delta}'} \quad \text{y} \quad \sqrt{\overline{\Delta}''},$$

correspondiendo a sus columnas y filas respectivamente.

14. Regla práctica para calcular Δ

Sea

$$A = \| A^1 \, A^2 \ldots A^k \ldots \|.$$

Designaremos por A_λ la matriz

$$A_\lambda = \| A_\lambda^1 \ldots A_\lambda^k \ldots \|, \qquad A_\lambda^k = \lambda_k \; A^k$$

obtenida multiplicando la k - ésima columna A^k de A por λ_k ($k = 1, 2, \ldots$). Formando la matriz (48) es fácil observar que el determinante de Gram Δ_n de $A^1, \ldots, A^n$ pasa a ser

$$(\Delta_n)_\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^2 \, \Delta_n.$$

Si las columnas A^k son tales que los números $A^{i'} A^k$ ($i, k = 1, 2, \ldots$) resultan sencillos, en lo posible se considera directamente A. Si no, se pasa a A_λ eligiendo la sucesión λ_k de forma que $A_\lambda^{i'} A_\lambda^k$ resulten lo más simples posible.

Si al mismo tiempo se consigue $\| A_\lambda^k \|^2 < 1$ se tiene asegurada la convergencia de los $\underset{n \to \infty}{(\Delta_n)_\lambda}$. De lo contrario quizá resulte más práctico normalizar, pasando de A^k a $\overline{A}^k = \dfrac{1}{\| A^k \|} A^k$, y calcular $\overline{\Delta} = \lim\limits_{n \to \infty} \overline{\Delta}_n$.

Puede ocurrir que ya, sin la condición $\| A_\lambda^k \|^2 < 1$ se consiga la convergencia de los $(\Delta_n)_{\lambda \atop n \to \infty}$. Existe la posibilidad que su límite sea > 0 pero que sea obtenido como límite de la forma simbólica $0 \cdot \infty$, por ejemplo, si $\|A'_{1\lambda}\| = 0$ y $\Delta_\lambda^{(2)} = \infty$. Sin embargo muchas veces por advertirse una ley de formación es fácil calcular los $(\Delta^{(i)})_\lambda$. Entonces, según lo visto en pág. 321 :

$$\| A'_{p\lambda} \|^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{(\Delta_n^{(p)})_\lambda}{(\Delta_n^{(p+1)})_\lambda} .$$

Ejemplo 1.º Se trata de una matriz de $\Delta = 0$ y $\| A_i' \|^2 \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (por tanto tendrá que ser $\Delta^{(i)} = 0$, $\delta = 0$). Dicha matriz es

$$A = A' = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{i} & \\ & & & \ddots \end{matrix} \right\| , \quad AA' = A'A = A^2 = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2^2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{i^2} & \\ & & & \ddots \end{matrix} \right\|$$

$$\Delta = \prod_1^\infty \frac{1}{i^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n\,!)^2} = 0 \qquad \frac{1}{i^2} \leqq 1$$

$$\frac{1}{i^2} = \| A_i' \|^2 \neq 0 \ (A_i' = A^i)$$

$$\Delta^{(i)} = \prod_{i=p}^\infty \frac{1}{i^2} = 0.$$

Ejemplo 2.º Sea la matriz del caso $2 - \mathfrak{B}$:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

con $(a_i) \in \mathcal{H}$. La dependencia entre sus líneas cae dentro de $\mathfrak{A}$. Veamos

1.º Dependencia entre las columnas. Formemos la matriz

$$A'A = \left\| \begin{array}{ccccc} \sum\limits_1^{\infty} a_i^2 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|$$

Calculando los Δ_n resulta

$$\Delta_1 = \sum_1^{\infty} a_i^2$$

$$\Delta_2 = \sum_1^{\infty} a_i^2 - a_1^2 = \sum_2^{\infty} a_i^2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta_n = \sum_n^{\infty} a_i^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Por cumplirse la condición necesaria de dependencia podrán ser las columnas de A dependientes. Y en efecto, la primera columna depende linealmente de las demás.

2.º Dependencia entre las filas. Interesa la matriz

$$A\,A' = \left\| \begin{array}{cccc} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \dots \\ a_2 a_1 & a_2^2 + 1 & a_2 a_3 & \dots \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 + 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|, \quad \begin{array}{l} \Delta_1 = 1 + a_1^2 \\ \Delta_2 = 1 + a_1^2 + a_2^2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta_n = 1 + \sum\limits_1^n a_i^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \\ \quad 1 + \sum\limits_1^{\infty} a_i^2 > 0 \end{array}$$

Las filas de A son de módulo $\geqslant 1$ pero es fácil cerciorarnos de que que no estamos en ningún caso dudoso. Pues se advierte que $\Delta_n^{(p)} =$ $= 1 + \sum\limits_p^n a_i^2$ con lo que $\|A_p'\|^2 = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \sum\limits_p^n a_i^2}{1 + \sum\limits_{p+1}^n a_i^2} = \dfrac{1 + \sum\limits_p^{\infty} a_i^2}{1 + \sum\limits_{p+1}^{\infty} a_i^2} \neq 0.$

Las filas son así independientes aún cuando $(a_i) = 0$, $a_i = 0$. Y efectivamente, al plantear su dependencia con los coeficientes λ_i se obtiene $\lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$.

Ejemplo 3.º Sea la matriz del caso $1 - \mathcal{C}$:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & \ldots \end{array} \\
A = A' = \left\| \begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill}
\end{array} \right\| . \\
\|A^k\| \quad 1 \ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ \ldots
\end{array}
\tag{64}
$$

Es hermítica, la dependencia de sus filas es la misma que la de sus columnas. Como pertenece a la clase $\mathcal{C}$, dicha dependencia se sale de $\mathfrak{A}$.

Como siempre, hay que considerar la matriz

$$
A'A = \left\| \begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \ldots \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill}
\end{array} \right\| .
$$

Por la simetría de A, $A'A = AA' = A^2$.

Se halla

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\Delta_1^{(1)} = 1 & & \Delta_1^{(2)} = 2 \\
\Delta_2^{(1)} = 2 & \Delta_{2i}^{(1)} \ \ = i + 1 & \Delta_2^{(2)} = 4 \\
\Delta_3^{(1)} = 2 & \Delta_{2i+1}^{(1)} = i + 1 & \Delta_3^{(2)} = 6 \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
& \Delta_n^{(1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} + \infty & \Delta_n^{(2)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} + \infty
\end{array}
\right\}
\quad \frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_{n-1}^{(2)}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0
$$

luego $A_1' = 0$ y la primera columna es límite de combinaciones lineales finitas de las restantes sin que sea $A^1 = \sum_2^\infty \lambda_i A^i$ con (λ_i) sumable al cuadrado. Tenía que ser así pues

$$\| A^2 A^3, \ldots, A^k \ldots \|$$

es también del caso $1 - \mathfrak{C}$.

En cambio $\dfrac{\Delta_n^{(p)}}{\Delta_{n-1}^{(p+1)}}$ converge para $n \longrightarrow \infty$ a un número $\neq 0$. Esto dice que A^i $(i \geqslant 2)$ no está en la m. l. c. $[A^{i+1}, A^{i+2}, \ldots]$. En efecto, A^2 por ejemplo no verifica la relación lineal en $\mathcal{H}$ $y_1 = 0$ que verifican $A^3, A^4, \ldots$

$\Delta_1 = +\infty$ aparece como límite de la forma

$$0 \cdot \infty \begin{cases} A_1' = 0 \\ \Delta^{(2)} = +\infty. \end{cases}$$

Si normalizáramos las columnas de la matriz dada (64) tendríamos

$$\bar{\Delta}_{2i}^{(1)} = \frac{i+1}{(\sqrt{2^{2i}})^2} = \frac{i+1}{4^i} \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo que indica la posibilidad de que haya dependencia lineal y realmente la hay.

Nota final. A lo largo del presente trabajo se advierte una vez más la analogía entre las matrices de la clase $\mathfrak{B}$ y las matrices finitas. La clase $\mathfrak{B}$ viene a ser como la prolongación natural del campo de las matrices finitas a las infinitas en su aspecto algebraico lineal.

BIBLIOGRAFÍA

CARLEMAN, T. « Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symmétrique ». Uppsala, 1923.

JULIA, G. « Sur une décomposition canonique des opérateurs linéaires bornés de l'espace hilbertien et sur leur classification. »
Comp. Rend. Acad. Sc. Paris, T. 213, p. 5 - 9, 1941.

JULIA, G. Conferencias sobre los operadores lineales en el Espacio de Hilbert. Seminario Matemático de Barcelona, 1949.

JULIA, G. « Sur une définition d'opérateurs linéaires dans l'espace de hilbertien ».
C. R. Acad. Sc. Paris, T. 212, 1941, p. 733 - 736.

JULIA, G. « Introduction mathématique aux théories Quantiques ».
« Cahiers scientifiques », 2.ª parte, 1938.

PLANS, A. « Espacio Proyectivo con base dada por una infinidad numerable ». Estudio analítico.
(Premio « Leonardo Torres Quevedo » del Consejo Superior de Investigaciones científicas correspondiente al año 1950).

PLANS, A. « Algunas propiedades lineales de las matrices acotadas ». Rev. Acad. Ciencias de Madrid, T. XLVI, 1952, p. 273 - 302.

RIESZ. « Systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues ».
Collection Borel.

SCHMIDT.« Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich rielen Unbekannten ».
Rendiconti Circolo Matematico di Palermo T. 25, 1908, p. 53 - 77.