

# ALGUNOS TEOREMAS SOBRE DERIVACIÓN DE SERIES ASINTÓTICAS POTENCIALES

POR

RICARDO SAN JUAN

Es sabido desde Poincaré (III, 301) <sup>(1)</sup> que la derivación de series asintóticas potenciales no es legítima cuando el campo es solamente un intervalo finito o infinito del eje real. Vale, sin embargo, cuando la aproximación asintótica se verifica en ciertos campos del plano complejo donde la función es holomorfa (IV, a y b), (II, 7 - 9), (VII, 646), (VI, 3 - 18): Aquí vamos a estudiar sistemáticamente esta propiedad determinando cuidadosamente las cotas del desarrollo derivado mediante las del dado, las cuales desempeñan según es bien sabido un importante papel fundamental en la determinación de la función por su desarrollo asintótico <sup>(2)</sup>.

I. Si una función  $f(z)$  de  $z = \rho e^{i\varphi}$  holomorfa en un sector circular abierto  $\delta_1 < \varphi < \delta_2$ ,  $0 < \rho < r$ , admite en éste un desarrollo asintótico

$$f(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

con cotas  $m_n$ , esto es:

$$\left| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu} z^{\nu} \right| |z|^{-n} < m_n$$

para todo  $z$  del sector, entonces su derivada  $f'(z)$  tiene como desarrollo asintótico la serie derivada  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_{\nu} z^{\nu-1}$ :

$$f'(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_{\nu} z^{\nu-1}$$

---

<sup>(1)</sup> Véase la bibliografía recopilada al final. El primer número romano indica el autor, la letra si figura la memoria del mismo, y el último o los últimos números árabes las páginas.

<sup>(2)</sup> La conservación de las cotas  $k^n n!$  fué estudiada con método específico del caso en nota al pie por F. Nevanlinna.

en cualquier sector cerrado  $\delta_1 < \delta_1' \leq \varphi \leq \delta_2' < \delta_2$ ,  $0 < \rho \leq r' < r$  interior a aquél, con las cotas

$$m_n' = \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} + \frac{r}{r-r'} \right) 2^n m_{n+1}$$

siendo  $\delta$  el menor de los dos ángulos  $\delta_1 - \delta_1'$  y  $\delta_2 - \delta_2'$  (Teorema de Ritt precisado).

Puesto que el n.º resto :

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$$

de la serie dada, tiene por derivada,

$$R_n'(z) = f'(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu a_\nu z^{\nu-1},$$

el resto  $(n-1)^0$  de la derivada, podemos expresar éste mediante aquél, utilizando la integral de Cauchy :

$$R_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z)} \frac{R_n(t)}{(t-z)^2} dt$$

Sobre una circunferencia  $C(z)$  de centro  $z$  y radio  $r(z)$  suficientemente pequeño para que quede dentro del sector; y tendremos :

$$\begin{aligned} |R_n'(z)| &< \frac{m_n}{2\pi r(z)} \int_0^{2\pi} |t|^n d\varphi < \frac{m_n}{r(z)} [|z| + r(z)]^n = \\ &= m_n |z|^{n-1} \left(1 + \frac{r(z)}{|z|}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{|z|}{r(z)}\right) \end{aligned}$$

Pero si  $z$  pertenece al sector cerrado interior, podemos tomar  $r(z)$  igual al menor de los tres números

$$|z| \operatorname{sen} (\delta_1' - \delta_1), \quad |z| \operatorname{sen} (\delta_2 - \delta_2') \quad \text{y} \quad r - r',$$

es decir :

$$\frac{|z|}{r(z)} = \frac{1}{\operatorname{sen} (\delta_1' - \delta_1)} \quad \text{o bien} \quad \frac{|z|}{r(z)} = \frac{1}{\operatorname{sen} (\delta_2 - \delta_2')} \quad \text{o bien} \quad \frac{|z|}{r(z)} = \frac{|z|}{r-r'}$$

de donde seguramente

$$\frac{|z|}{r(z)} < \frac{1}{\operatorname{sen} \delta} + \frac{r}{r-r'};$$

y como por otra parte es siempre :

$$\frac{r(z)}{|z|} \leq \text{sen } (\delta_1' - \delta_1) \leq 1 \quad \text{ó} \quad \frac{r(z)}{|z|} \leq \text{sen } (\delta_2 - \delta_2') \leq 1,$$

resulta :

$$\left| \frac{R_n'(z)}{z^{n-1}} \right| < m_n 2^{n-1} \left( \frac{1}{\text{sen } \delta} + \frac{r}{r-r'} \right)$$

para todo  $z$  del sector interior.

NOTA. Eligiendo el sector interior convenientemente se logra que incluya cualquier punto del sector dado, pero esto no permite asegurar que sea válido el desarrollo en todo este sector, pues cada cota crece infinitamente para  $r \rightarrow r'$  y  $\delta \rightarrow 0$ . Es, pues, esencial la reducción simultánea del radio y de amplitud. La primera no constituye inconveniente para la conservación de las condiciones de unicidad, que son independientes de aquél, según es bien sabido; pero si, la segunda <sup>(1)</sup>. La ingeniosa fórmula de Carleman (I, 26) :

$$f(z) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\varrho^{-\sigma}}{2\pi i} \int_{AB} \frac{f(\sigma) \exp \left\{ \sigma \left( \frac{t-t_0}{z-z_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}}{t-z} dt,$$

que permite expresar el valor en un punto  $z$  de la bisectriz de un sector CAB de vértice  $t_0$  y amplitud  $\pi\alpha$  mediante los valores sobre el arco de Jordan rectificable  $AB$  (arco de circunferencia en nuestro caso) de una función  $f(z)$  holomorfa en  $OAB$ , sin intervención de los valores sobre los lados rectilíneos  $OA$  y  $OB$ , parece que podría permitir la conservación de la amplitud por la no intervención de dichos lados  $OA$  y  $OB$ . Esta da, en efecto, para la derivada

$$f'(z) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\varrho^{-\sigma}}{2\pi i} \int_{AB} \frac{f(t)}{t-z} \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{\sigma}{\alpha} \frac{1}{z} \right] \exp \left\{ \sigma \left( \frac{t-t_0}{z-z_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} dt;$$

pero desgraciadamente la exponencial del integrando tiene parámetro superior a la otra, por ser  $|t-t_0| > |z-z_0|$  o sea  $r > \varrho$ ; y si tomásemos  $r = r(\sigma) \rightarrow \varrho$  para  $\sigma \rightarrow \infty$ , de modo que resultase finito el límite de las exponenciales, entonces tenderían a cero los denomina-

<sup>(1)</sup> El mismo inconveniente se presenta en los recintos estudiados en la amplísima teoría de H. Schmidt (VII).

dores  $1 - \left(\frac{r}{\rho}\right)^2$  que aparecen al calcular las integrales mediante el teorema de los residuos aplicados al sector.

Renunciaremos, pues, a conservar la amplitud del sector circular y vamos a estudiar en cambio, la derivación de los desarrollos definidos en otros campos, que desempeñan análogo papel en la conservación de las condiciones de unicidad, porque en los campos resultantes para los desarrollos derivados valen las mismas condiciones que en aquellos para la determinación de la función por su desarrollo asintótico. Conviene emplear para esto los desarrollos en  $1/z$ , porque en los campos más amplios de éstos, se acota mejor la integral de Cauchy que en los recintos recíprocos más estrechos. Daremos además los resultados para las cotas de órdenes sucesivos  $m_n^{(p)}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ), que fueron introducidas (VI, b y c) precisamente con este objeto y como generalización natural de las cotas de orden cero de Poincaré  $m_n = m_n^{(0)}$ .

II. Si en la región  $R\left(\frac{1}{z^\alpha}\right) > a > 0$  de una o más hojas, que limita una curva  $C(a)$  representada por la ecuación  $\rho^{\frac{1}{\alpha}} \cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) > a$  para  $-\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2}$  y  $\alpha > 0$  (fig. 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup>), la función holomorfa  $f(z)$  tiene el desarrollo asintótico

$$f(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}$$

con cotas  $m_n$  ó  $m_n^{(p)}$ , su derivada  $f'(z)$  tiene el desarrollo

$$f'(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} -\nu \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$$

en cualquier región cerrada interior del mismo tipo;

$$R\left(\frac{1}{z^\alpha}\right) \geq a' > a$$

con cotas de orden  $p = \left[1 + \frac{1}{\alpha}\right]$  (parte entera de  $1 + \frac{1}{\alpha}$ ):

$$m'_{n+1}^{(p)} = C k^n m_n \text{ para } n = p - 1, p, p + 1, p + 2, \dots,$$

y en general

$$m_{n+1}^{(p+p')} = C k^{n-p'} m_n^{(p')} \text{ para } n = p + p' - 1, p + p', p + p' + 1, \dots$$

cualquiera que sea  $p' > 0$ , siendo  $C$  y  $k$  independientes de  $n$  y  $p'$

El n.º resto

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{a_\nu}{z^\nu}$$

de la serie dada tiene ahora como derivada

$$R'_n(z) = f'(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} -\nu \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}},$$

el resto  $(n + 1)^\circ$  de la serie derivada; el cual expresaremos en función de aquél mediante la integral de Cauchy:

$$R'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{R_n(t)}{(t-z)^2} dt,$$

sobre la consabida circunferencia  $C(z)$  de centro  $z$  contenido en  $R\left(\frac{1}{z^\alpha}\right) \geq a'$  y radio  $r(z) < |z|$  suficientemente pequeño para que toda la circunferencia resulte interior a la región  $R\left(\frac{1}{z^\alpha}\right) > a$ . Así resulta:

$$|R'_n(z)| < \frac{m_n}{2\pi r(z)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|z + e^{i\varphi} r(z)|^n} < \frac{m_n}{r(z)} \left(\frac{1}{|z| - r(z)}\right)^n.$$

Estudiemos ahora los valores que podemos tomar para  $r(z)$  acotando inferiormente la distancia al contorno  $C(a)$  de los puntos  $z$  de  $R\left(\frac{1}{z^\alpha}\right) \geq a'$ .

La ecuación de la tangente a  $C(a)$  en el punto  $A(\varrho_0, \varphi_0)$  es:

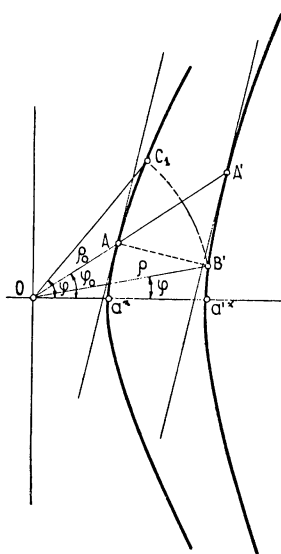
$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{\varrho_0} \cos(\varphi - \varphi_0) + \left(\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = \\ &= a^{-\alpha} \cos^{\alpha-1} \frac{\varphi_0}{\alpha} \cos\left(\varphi - \varphi_0 + \frac{\varphi_0}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

cuya distancia al origen o sea el valor mínimo del módulo alcanzado para  $\varphi = \varphi_0 - \frac{\varphi_0}{\alpha}$  es :

$$t(\varphi_0, a) = \frac{a^\alpha}{\cos^{\alpha-1} \frac{\varphi_0}{\alpha}}$$

La tangente a  $C(a')$  en el punto  $A'(\varphi_0)$ , homólogo del  $A$  en la homotecia de razón  $\frac{a'^\alpha}{a^\alpha}$  que liga ambas curvas, es paralela a la anterior, y la distancia entre ambas vale exactamente :

$$t(\varphi_0, a') - t(\varphi_0, a) = \frac{a'^\alpha - a^\alpha}{\cos^{\alpha-1} \frac{\varphi_0}{\alpha}}$$

Fig. 1.<sup>a</sup>

Esta no es, naturalmente, la distancia a la curva  $C(a)$  de un punto variable de la curva  $C(a')$ , pero, sí una cota inferior. En efecto, para  $0 < \alpha < 1$ , estas dos curvas son convexas respecto del polo; luego la tangente a  $C(a')$  en  $A'(\varphi_0)$  deja toda esta curva a distinto lado del polo; mientras que el punto  $A(\varphi_0)$  queda al mismo lado que éste, por tener menor módulo que el  $A'$  (fig. 1.<sup>a</sup>). La semi-normal a  $C(a)$  en  $A(\varphi_0)$  dirigida hacia  $C(a')$  corta, pues, a dicha tangente antes que a la curva  $C(a)$ ; y, por consiguiente, la distancia entre ambas tangentes paralelas en  $A$  y  $A'$  es

menor que el segmento  $AB'$  de normal en  $A$  a  $C(a)$  comprendido entre las dos curvas; el cual mide la distancia  $d(B')$  a  $C(a)$  del punto  $B'$  de  $C(a')$  en que corta a esta curva dicha normal en  $A$  a la  $C(a)$ ; es decir :

$$d(B') \geq \frac{a'^\alpha - a^\alpha}{\cos^{\alpha-1} \frac{\varphi_0}{\alpha}} = \frac{a'^\alpha - a^\alpha}{a^{\alpha-1}} \varrho_0^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

Pero aquí aparece el módulo  $\varrho_0$  del pie de la normal en  $A(\varphi_0)$  y no el módulo  $\varrho$  del punto  $B'(\varphi, \varrho)$  de  $C(a')$  cuya distancia  $d(B')$  a  $C(a)$  hemos acotado. Sin embargo, como esta distancia no supera a la cuerda

del arco  $B' C_1$  de la circunferencia de radio  $\varrho$  interceptada entre las dos curvas, será :

$$d < B' C_1 = \sqrt{\varrho^2 + \varrho^2 - 2 \cos(\varphi_1 - \varphi)} = 2 \frac{a^\alpha}{\cos^\alpha \varphi} \operatorname{sen} \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \rightarrow 0$$

para  $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ ; pues el argumento  $\varphi_1$  del punto  $C_1$  de  $C(a)$  tiene también  $|\varphi_1| \rightarrow \alpha \frac{\pi}{2}$  por ser  $|\varphi| < |\varphi_1| < \alpha \frac{\pi}{2}$ . Es pues  $\varrho_0 - \varepsilon < \varrho_0 - \delta < \varrho < \varrho_0 + \delta < \varrho_0 + \varepsilon$  para  $|\varphi| > \alpha \frac{\pi}{2} - \delta$  o sea para  $\delta > H(\varepsilon)$ ; es decir,  $\varrho \sim \varrho_0$  para  $\varrho \rightarrow \infty$ ; y resulta, por tanto, para cada punto  $B'$  de  $C(a')$  con módulo  $\varrho$  una distancia a  $C(a)$ :

$$d(\varrho) \geq k \varrho^{1 - \frac{1}{\alpha}},$$

siendo  $k$  independiente de  $\varrho$ .

Siendo esta cota infinitésima para  $\varrho \rightarrow \infty$ , no podemos tomar un radio constante  $r(z)$  para todos los puntos  $z$  de la región, como acontece en el caso  $\alpha > 1$ , según veremos. Pero sí para todos los puntos del arco  $B' \bar{B}'$  de circunferencia de radio  $\varrho$  y centro  $O$  contenidos en la región (fig. 2.<sup>a</sup>); pues cualquiera de éstos dista seguramente de  $C(a)$  más que los extremos  $B'$  y  $\bar{B}'$ . Esto resulta fácilmente de la convexidad del recinto limitado por dicho arco  $B' \bar{B}'$  de circunferencia, el  $\overline{AA}$  de  $C(a)$  comprendido entre  $A(\varphi_0)$  y  $\bar{A}(-\varphi_0)$  y las dos normales extremas  $\overline{AB'}$  y  $\overline{A\bar{B}'}$ ; pues la distancia  $P'P$  de un punto  $P'$  de  $B' \bar{B}'$  al arco  $\overline{AA}$  supera, por dicha convexidad al  $B' A_1$  (ó  $\bar{B}' \bar{A}_1$ ) interceptado por el recinto sobre la paralela a  $PP'$  por  $B'$  (ó  $\bar{B}'$ ); y éste a su vez al  $B' A$  (ó  $\bar{B}' \bar{A}$ ) que mide la distancia de  $B'$  (ó  $\bar{B}'$ ) a  $C(a)$ .

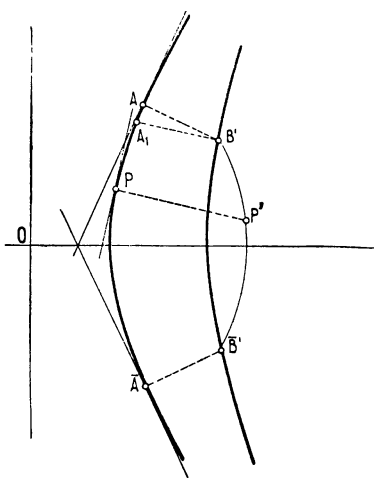


Fig. 2.<sup>a</sup>

Podemos, pues, tomar  $r(z) = K \varrho^{1 - \frac{1}{\alpha}}$  para todos los puntos de  $Rz^{\frac{1}{\alpha}} \geq a'$  con módulo  $|z| = \varrho$ ; y si además disminuimos esta constante, eligiéndola  $K < a'$  para que al ser  $\varrho^{\frac{1}{\alpha}} \geq Rz^{\frac{1}{\alpha}} \geq a' > K$ , exista

seguramente el  $\max \frac{e^{\frac{1}{z}}}{e^z - K} = \frac{a'}{a' - K} = k_1$  en la región, tendremos

$$|R'_n(z)| < \frac{m_n}{K e^{1-\frac{1}{z}}} \left( \frac{1}{e - K e^{1-\frac{1}{z}}} \right)^n = \frac{m_n e^{\frac{1}{z}}}{K e^{n+1}} \left( \frac{e^{\frac{1}{z}}}{e^z - K} \right)^n < \frac{m_n}{K} k_1^n \frac{e^{\frac{1}{z}}}{e^{n+1}}$$

para  $e \geq 1$ ; luego sirve como cota  $(n+1)^\alpha$  de orden  $p = \left[ \frac{1}{\alpha} + 1 \right]$

en toda la región  $R z^{\frac{1}{\alpha}} \geq a'$ , la

$$m_{n+1}^{(p)} = C_1 k_1^n m_n \quad \text{para } 0 < \alpha < 1$$

Para  $1 < \alpha \leq 2$ , las curvas son convexas respecto al origen; y quedando, por tanto, la  $C(a)$  al mismo lado que éste de su tangente en

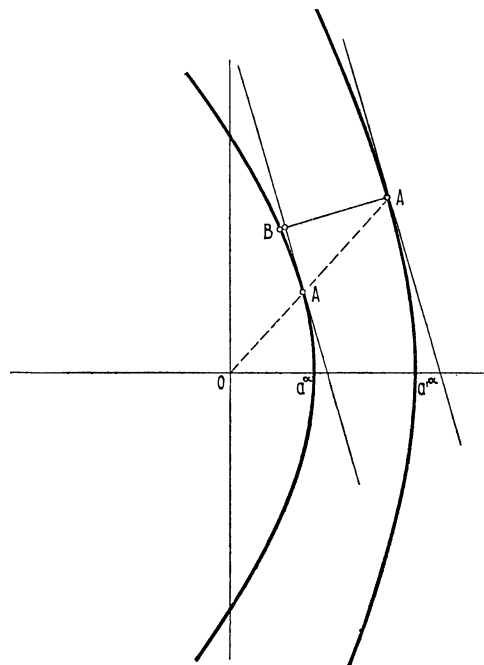


Fig. 3.<sup>a</sup>

$A(\varphi_0)$ , mientras que el homólogo  $A'(\varphi_0)$  de  $C(a')$  queda al otro (por tener mayor módulo), resulta que la seminormal en este punto  $A'(\varphi_0)$  de  $C(a')$  dirigida hacia  $C(a)$  corta antes que a esta curva  $C(a)$  a su tangente en  $\varphi_0$ ; es, pues, también el segmento  $A'B$  de normal en  $A'$  a  $C(a')$  comprendido entre el pie  $A'$  y la intersección  $B$  con la otra curva  $C(a)$ , superior a la distancia de ambas tangentes paralelas (figura 3.<sup>a</sup>); el cual mide la distancia  $d(B)$  del punto  $B$  de  $C(a)$  a la curva  $C(a')$ ; y resulta:

$$d(B) \geq \frac{a'^\alpha - a^\alpha}{\cos^{\alpha-1} \frac{\varphi_0}{\alpha}}$$

Pero la distancia buscada es la de cada punto de  $C(a')$  a la curva  $C(a)$ . Ahora bien, siendo en este caso:

$$d(B) \geq a'^\alpha - a^\alpha,$$



la distancia  $d$  entre dos puntos arbitrarios de  $C(a)$  y  $C(a')$  es seguramente  $d \geq a'^\alpha - a^\alpha$ , incluso para  $\alpha = 1$  en que resulta la igualdad.

Podemos, por tanto, para  $1 \leq \alpha \leq 2$ , tomar un radio constante  $r(z) = r < a'^\alpha - a^\alpha$ . Pero siendo  $\varrho^{\frac{1}{\alpha}} \geq R z^{\frac{1}{\alpha}} \geq a'$ , luego  $\varrho \geq a'^\alpha \geq a'^\alpha - a^\alpha > r$ , existe seguramente en la región  $R z^{\frac{1}{\alpha}} \geq a'$  el  $\max \frac{\varrho}{\varrho - r} = \frac{a'^\alpha}{a'^\alpha - r} = k_2$ ; y resulta :

$$|R'_n(z)| < \frac{m_n}{r} \left( \frac{\varrho}{\varrho - r} \right)^n \frac{1}{\varrho^n} < \frac{k_2^n}{r} m_n \frac{1}{\varrho^n} \quad \text{en } R z^{\frac{1}{\alpha}} \geq a'.$$

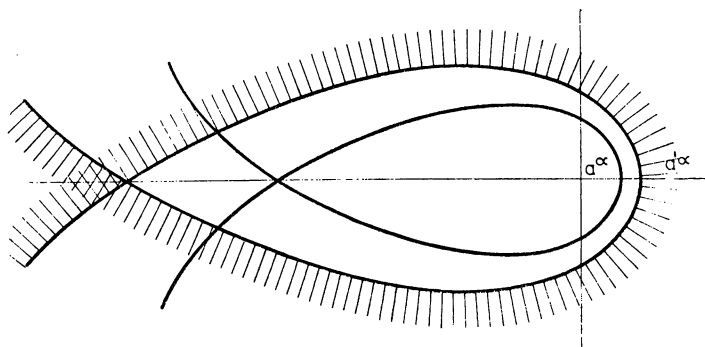


Fig. 4.<sup>a</sup>

Vale, pues, como cota  $(n + 1)^\alpha$  de primer orden :

$$m_{n+1}^{(1)} = C_2 k_2^n m_n \quad \text{para } 1 \leq \alpha \leq 2$$

Esta cota sirve también para  $\alpha > 2$ . Entonces la región  $R z^{\frac{1}{\alpha}} > a$  tiene más de una hoja, exactamente  $\frac{[\alpha]}{2}$  hojas, limitadas por otras tantas ramas de la curva  $\varrho^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi}{\alpha} = a$  definida en  $-\alpha \frac{\pi}{2} < \varphi < \alpha \frac{\pi}{2}$ , las cuales corresponden a los pares de intervalos  $[-\pi, 0]$  y  $[0, \pi]$ ;  $[-2\pi, -\pi]$  y  $[\pi, 2\pi] \dots$ ;  $\left[-\frac{[\alpha]}{2}\pi, -\left(\frac{[\alpha]}{2}-1\right)\pi\right]$  y  $\left[\left(\frac{[\alpha]}{2}-1\right)\pi, \frac{[\alpha]}{2}\pi\right]$ ;  $\left[-\frac{\alpha}{2}\pi, -\left[\frac{\pi}{2}\right]\pi\right]$  y  $\left[\left[\frac{\pi}{2}\right]\pi, \alpha \frac{\pi}{2}\right]$ .

Estas son todas cerradas en puntos del eje real, por la paridad de la función coseno, excepto las últimas que son parabólicas y también cóncavas respecto de 0 (fig. 4.<sup>a</sup>). Se conservarán pues, a distancias po-

sitivas de las correspondientes ramas de la otra curva  $C(a')$ , que limitan la parte de la región  $Rz^{\frac{1}{\alpha}} \geq \alpha'$  situada en cada hoja de la superficie de Riemann; y para la última vale el mismo razonamiento que para el caso parabólico  $1 < \alpha \leq 2$ , estudiado con todo detalle.

Análogamente, se tiene:

$$|R'_n(z)| < \frac{m_n^{(p')}}{2\pi r(z)} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|z + r(z)e^{i\varphi}|^{n-p'}} < \frac{m_n^{(p')}}{r(z)} \left( \frac{1}{\varrho - r(z)} \right)^{n-p'},$$

y resulta, para  $0 < \alpha < 1$ :

$$\begin{aligned} |R'_n(z)| &< \frac{m_n^{(p')}}{K \varrho^{1-\frac{1}{\alpha}}} \left( \frac{1}{\varrho - K \varrho^{1-\frac{1}{\alpha}}} \right)^{n-p'} = \frac{m_n^{(p')}}{K} \left( \frac{\varrho^{\frac{1}{\alpha}}}{\varrho^{\frac{1}{\alpha}} - K} \right)^{n-p'} \frac{\varrho^{\frac{1}{\alpha}}}{\varrho^{n+1-p'}} < \\ &< \frac{m_n^{(p')}}{K} k_1^{n-p'} \frac{\varrho^{\frac{1}{\alpha}}}{\varrho^{n+1-p'}}, \text{ es decir: } m_n^{(p+p')} < C_1 k_1^{n-p'} m_n^{(p')} \\ &\text{con } p = \left[ \frac{1}{\alpha} + 1 \right] \end{aligned}$$

Para  $\alpha \leq 1$  es:

$$|R'_n(z)| < \frac{m_n^{(p')}}{r(z)} \left( \frac{\varrho}{\varrho - r(z)} \right)^{n-p'} \frac{1}{\varrho^{n-p'}} < \frac{m_n^{(p')}}{r(z)} k_2^{n-p'} \frac{\varrho^{p'+1}}{\varrho^{n+1}},$$

o sea

$$m_n^{(p'+1)} = C_2 k_2^{n-p'} m_n^{(p')},$$

es decir, con  $p = 1$ .

**COROLARIO.** *La conclusión del teorema anterior subsiste sin modificación para las regiones deducidas mediante un giro.*

Volvamos ahora a los desarrollos en el origen. El campo  $Rz^{-\frac{1}{\alpha}} > a > 0$ , recíproco de la región  $Rz^{\frac{1}{\alpha}} > a$ , se compone de uno o más recintos finitos limitados por las ramas de la curva cerrada y simétrica  $\cos \frac{\varphi}{\alpha} = a \varrho^{\frac{1}{\alpha}}$ , cóncava respecto al origen y con un punto anguloso de amplitud  $\pi\alpha$  en éste. Pero siendo el círculo  $|z-a| < a$  de centro y radio  $a > 0$  recíproco del semiplano  $Rz > a^{-1}$ , y éste a su vez transformado de la región  $Rz^{-\frac{1}{\alpha}} > a^{-1}$  por  $z^{\frac{1}{\alpha}}$ , nuestros recintos serán transformados de dicho círculo por esta función, es decir,  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - a| < a$ . Esta trans-

formación explica que desempeñan en la determinación de la función por su desarrollo asintótico análogo papel a los sectores circulares de amplitud  $\pi\alpha$  (V, 204); y lo mismo acontece a los recintos más generales

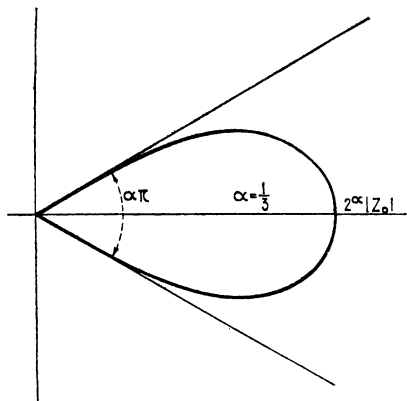


Fig. 5.a

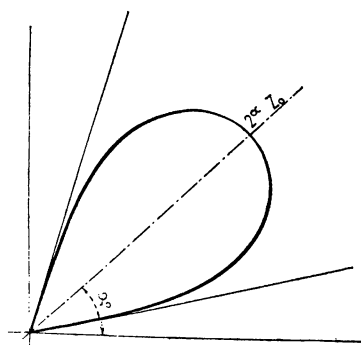


Fig. 6.a

$|z^{\frac{1}{\alpha}} - z_0^{\frac{1}{\alpha}}| < |z_0|^{\frac{1}{\alpha}}$  con  $z_0$  complejo de argumento  $\varphi_0$ , los cuales se deducen de los  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - z^{\frac{1}{\alpha}}| < |z_0|^{\frac{1}{\alpha}}$  (fig. 5.a) por el giro de amplitud  $\varphi_0$  que

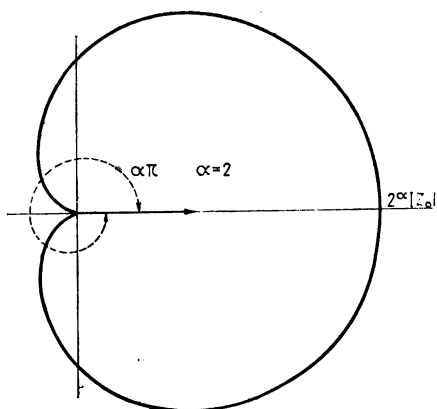


Fig. 7.a

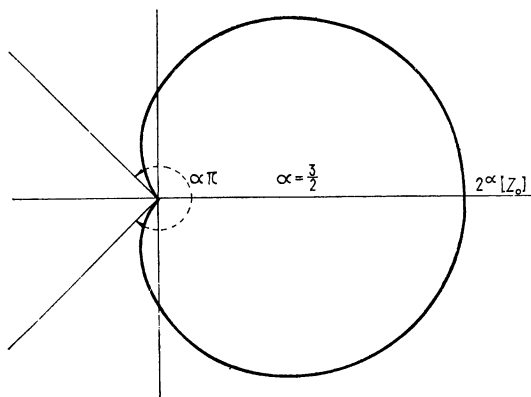


Fig. 8.a

transforma el eje de simetría o bisectriz  $0 - 2^\alpha |z_0|$  de éstos en el  $0 - 2^\alpha z_0$  de aquéllos.

Por tal analogía llamaremos *sectores curvos*  $S(\alpha, 2^\alpha, z_0)$  de amplitud  $\alpha$  y bisectriz  $0 - 2^\alpha z_0$  a estos recintos  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - z_0^{\frac{1}{\alpha}}| < |z_0|^{\frac{1}{\alpha}}$ , de una o más

hojas (figs. 6.<sup>a</sup> - 10.<sup>a</sup>) con diámetro o cuerda máxima  $2^\alpha |z_0|$ , transformadas del círculo  $|z - z_0^{\frac{1}{\alpha}}| < |z_0|^{\frac{1}{\alpha}}$  de centro  $z_0^{\frac{1}{\alpha}}$  y radio  $|z_0|^{\frac{1}{\alpha}}$  median-

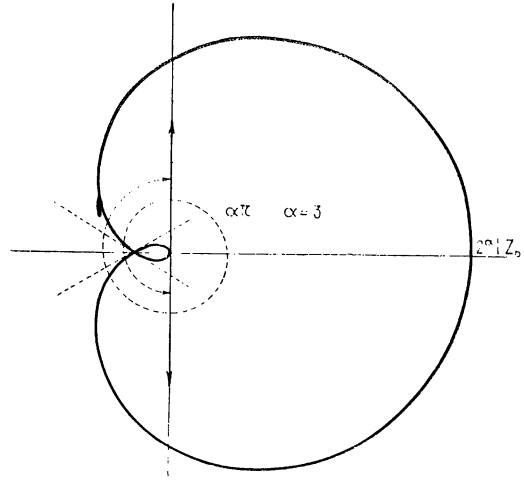


Fig. 9.º

te una cualquiera de las ramas de la función  $z^{\frac{1}{\alpha}}$ . Cada uno de estos queda efectivamente determinado salvo un giro, por la amplitud  $\alpha$  del ángulo de las semitangentes en 0 a su contorno más el vector  $0 - 2^\alpha z_0$  situado sobre la bisectriz de este ángulo.

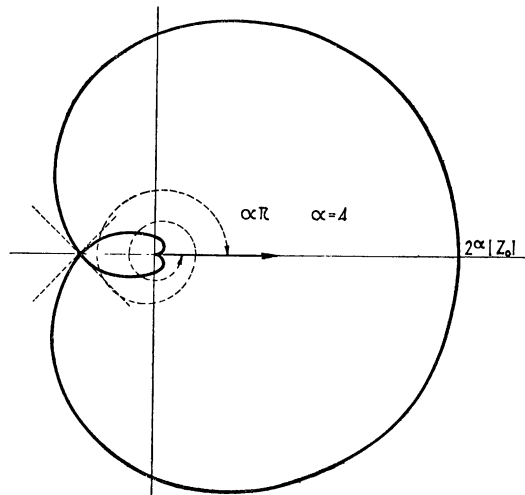


Fig. 10.ª

III. Si en un sector curvo  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - a| < a$  de amplitud  $\alpha$ , admite la función holomorfa  $f(z)$  un desarrollo asintótico  $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  con cotas de Poincaré  $m_n$ , su derivada  $f'(z)$  tiene el desarrollo  $f'(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  en cualquier sector homotético interior  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - a'| < a' < a$  de igual amplitud  $\alpha$  con cotas de orden  $p = \left[ \frac{1}{\alpha} + 1 \right]$

$$m_n^{(p)} = C a'^{2\alpha} k^{n+1} m_{n+1} \text{ para } n = p, p + 1, \dots;$$

y en general de orden  $p + p'$ , cualquiera que sea  $p'$ :

$$m_n^{(p+p')} = C a'^{2\alpha} k^{n+1-p'} m_{n+1}^{(p')} \text{ para } n = p + p', p + p' + 1, \dots$$

siendo  $C$  y  $k$  independientes de  $n$ .

En efecto, cambiando  $z$  por  $\frac{1}{z}$ , resulta

$$f\left(\frac{1}{z}\right) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{z^{\nu}} \text{ en } R z^{\frac{1}{\alpha}} > a^{-1}$$

con las mismas cotas  $m_n$  y  $m_n^{(p')}$ ; luego es:

$$f'\left(\frac{1}{z}\right) \left(-\frac{1}{z^2}\right) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} -\nu \frac{a_{\nu}}{z^{\nu+1}} \text{ en } R z^{\frac{1}{\alpha}} > a'^{-1} > a^{-1}$$

con cotas

$$\begin{aligned} M_{n+1}^{(p)} &= C k^n m_n \\ M_{n+1}^{(p+p')} &= C k^{n-p'} m_n^{(p')}; \end{aligned}$$

y como es  $|z|^{\frac{1}{\alpha}} > R z^{\frac{1}{\alpha}} < a'^{-1}$  o sea  $|z|^{-1} \leq a'^{\alpha}$ , resulta:

$$f'\left(\frac{1}{z}\right) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \frac{a_{\nu}}{z^{\nu+1}} \text{ en } R z^{\frac{1}{\alpha}} \geq a'^{-1},$$

con cotas

$$\begin{aligned} m_n^{(p)} &= M_{n+2}^{(p)} a'^{2\alpha} = C k^{n+1} a'^{2\alpha} m_{n+1} \\ m_n^{(p+p')} &= M_{n+1}^{(p+p')} a'^{2\alpha} = C k^{n+1-p'} a'^{2\alpha} m_{n+1}^{(p')} \end{aligned}$$

o sea

$$f'(z) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_{\nu} z^{\nu-1}$$

con cotas

$$m_n^{(p)} = C a'^{2\alpha} k^{n+1} m_{n+1}$$

$$m_n^{(p+p')} = C a'^{2\alpha} k^{n+1-p'} m_{n+1}^{(p')}$$

El teorema subsiste para cualquier sector  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - z_0^{\frac{1}{\alpha}}| < |z_0^{\frac{1}{\alpha}}|$  con bisectriz  $0 - 2^\alpha z_0$  deducido del anterior por el giro  $\varphi_0$ ; y podemos enunciarle así:

IV. Si en un sector curvo  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - z_0^{\frac{1}{\alpha}}| < |z_0^{\frac{1}{\alpha}}|$  de amplitud  $\alpha$  y bisectriz  $0 - 2^\alpha z_0$  admite la función holomorfa  $f(z)$  un desarrollo asintótico  $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  con cotas de Poincaré  $m_n$ , su derivada tiene el desarrollo  $f'(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  en cualquier sector homotético interior  $|z^{\frac{1}{\alpha}} - z_0^{\frac{1}{\alpha}}| < |z_0^{\frac{1}{\alpha}}|$  de la misma amplitud  $\alpha$  y bisectriz  $0 - 2^\alpha z_0'$  contenida en  $0 - 2^\alpha z_0$ ,  $|z_0'| < |z_0|$ , con cotas de orden  $p = \left[\frac{1}{\alpha} + 1\right]$ :

$$m_n^{(p)} = C |z_0'|^{2\alpha} k^{n+1} m_{n+1} \text{ para } n = p, p+1, \dots$$

y en general de orden  $p + p'$ , cualquiera que sea  $p'$ :

$$m_n^{(p+p')} = C |z_0'|^{2\alpha} k^{n+1-p'} m_{n+1}^{(p')} \text{ para } n = p+p', p+p'+1, \dots$$

siendo  $C$  y  $k$  independientes de  $n$  y  $p'$ .

En particular, si la sucesión  $m_n$  es monótona creciente, resulta

$$m_n' \leq m_{n+p}^{(p)} + (n+1) |a_{n+1}| + (n+2) |z_0'| + \dots + (n+p) |a_{n+p}| |z_0'|^{p-1} <$$

$$< (n+1) m_{n+1} + (n+2) |z_0'| m_{n+2} + \dots + (n+p) |z_0'|^{p-1} m_{n+p} +$$

$$+ C |z_0'|^{2\alpha} k^{n+p+1} m_{n+p+1} < k^n m_{n+p-1}$$

El mismo resultado sirve naturalmente para otros recintos; por ejemplo, para la región  $R(z-b)^{\frac{1}{\alpha}} \geq a' > a > 0$  con  $b > 0$ , resultan cotas de primer orden  $m_{n+1}^{(1)} = C k^n m_n$ ; y para el campo recíproco las  $m_{n+1}^{(1)} = C a'^{2\alpha} k^n m_n$ .

Prescindimos, sin embargo, de la aplicación a recintos de forma cualquiera, iniciada en (VI, a), porque el campo de validez del desarrollo derivado viene caracterizado por condiciones relativas al con-

torno del recinto dado que sólo se consiguen con probar cuando este recinto contiene alguno de los tipos aquí estudiados y entonces resulta más sencillo aplicar el teorema correspondiente a éste. Así, por ejemplo, la conservación de las cotas de Poincaré en la derivación, que nos propusimos en dicho artículo (VI, a), conduce a la condición  $|z| = O [d(z)]$  siendo  $d(z)$  la distancia de  $z$  al contorno, y ésta sólo es fácil comprobar cuando el recinto contiene un sector circular de vértice  $O$ ; tal acontece, en particular, según demostramos allí detalladamente, cuando en un entorno de  $O$  el contorno es una curva de Jordan con el punto  $O$  ordinario o anguloso con semitangentes que formen un ángulo no nulo; y si todo el contorno es una curva de Jordan con semirayos tangentes en  $O$ , la condición necesaria y suficiente para que el recinto contenga dicho sector circular, es que el argumento del vector  $Oz$  proyectante desde  $O$  de un punto  $z$  variable sobre la curva, experimente un incremento positivo al recorrer  $z$  toda ella a partir de  $O$ .

La conservación de las cotas de órdenes sucesivos  $m_n^{(p)}$ , que no habían sido estudiadas hasta ahora y son fundamentales para la derivación de la aproximación óptima en recintos curvos (VI, b), conducirían en los recintos generales a condiciones del tipo  $|z|^p = O [d(z)]$ , que se verifican en particular si el recinto contiene un sector curvo limitado por una curva del tipo  $\rho^{\frac{1}{\alpha}} a = \cos \frac{\varphi}{\alpha} = \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \alpha \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right]$ , pero no vamos a insistir ahora. En otra ocasión estudiaremos la derivación en recintos cuyo contorno tenga en el origen *un ángulo conforme de amplitud  $\pi \alpha$* , con la denominación de Ostrowski (V, 234) esto es, que resultan por representación conforme del círculo  $|z - 1| < 1$  mediante una función holomorfa  $h(z)$  cuyo cociente por  $z^\alpha$  se conserve comprendido en valor absoluto entre dos constantes en un entorno del origen. Puede aplicarse el método a los resultados generales de H. Schmidt (VII, 644 - 650).

Instituto «Jorge Juan» - Madrid, noviembre de 1952

## BIBLIOGRAFÍA

- I. CARLEMANN (T.). Les fonctions quasianalytiques. Colección Borel. Paris 1926.
- II. NEVANLINNA (F.). Zur theorie der Asymptotischen. Potenzreihen. Annales Academiae Scientiarum fennicae Ser A. XII (1919).
- III. POINCARÉ (H.). Sur les integrales singulières des équations differentielles. Acta Mathematica VIII (1886).
- IV. RITT (J. F.). *a)* On differentiability of an asymptotic series. Bull A. Math. Soc. 24 (1918).  
*b)* On certain points in the theory of Dirichlet's series. Am. Mathe. Journal 50 (1928).
- V. OSTROWSKI (A.). Uber quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen. Acta Mathematica Vol. 53 (1928).
- VI. SAN JUAN (R.) *a)* Derivación e integración de series asintóticas. Revista de la Universidad de Madrid, II (1942).  
*b)* Les fondements d'une théorie générale des séries divergentes. Revista da Faculdade de Ciencias de Lisboa. 2.ª serie - A - Vol. II. Fasc. 1.º. (55 - 76).  
*c)* Algunos desarrollos asintóticos notables. Revista Matemática Hispanoamericana, 4.ª serie, T. XI, núms. 1 y 2 (1950) 65 a 110.
- VII. SCHMIDT (H.). Allgemeine asymptotische Darstellungen. Mathematische Annalen 113 (1937).