MATRIZENDARSTELLUNGEN IN DER LINIENGEOMETRIE DES P_3

VON HORST HERRMANN IN BRAUNSCHWEIG

Eine von W. BLASCHKE stammende Matrizen - Identität ermöglicht das Herleiten einer Fülle weiterer Matrizen - Identitäten, welche in ihrer Gesamtheit zu einer formal und inhaltlich besonders übersichtlichen Darstellung der Liniengeometrie führen. Dies wird an einigen Beispielen gezeigt (1).

1. ALGEBRAISCHE DEFINITIONEN UND IDENTITÄTEN

Für Sechservektoren $A = (a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{23}, a_{31}, a_{12})$ ist das PLÜCKER-Produkt (AoB) — gelesen A Kreis B — erklärt durch

$$(1) \qquad (AoB) = \begin{matrix} a_{01}\,b_{23} + a_{02}\,b_{31} + a_{03}\,b_{12} + \\ + b_{01}\,a_{23} + b_{02}\,a_{31} + b_{03}\,a_{12} \end{matrix} = (BoA).$$

Dem Sechservektor A werden die beiden schiefen Matrizen A, $\bar{A}$ zugeordnet, letztere gelesen A quer,

$$(2) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & a_{31} & a_{12} \\ a_{32} & 0 & a_{03} & a_{20} \\ a_{13} & a_{30} & 0 & a_{01} \\ a_{21} & a_{02} & a_{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Wegen der Voraussetzung für die Transponierte $A' = -A$ ist nach (2)

$$(3) \qquad \bar{A}' = -\bar{A}, \quad \bar{\bar{A}} = A,$$

(1) Die Matrizen - Identität findet sich in W. BLASCHKE, Projektive Geometrie, Wolfenbüttel 1948, S. 93, weitere Anwendungen in «Übungen zur projektiven Geometrie», Basel, 1952.

ferner folgen aus (2)

$$2\,A\,\bar{A} = -(AoA)\cdot E = 2\,\bar{A}\,A, \quad 4\det A = (AoA)^2 \tag{4}$$

sowie

$$2\,\tilde{A} = (AoA)\,\bar{A}, \quad \det \bar{A} = \det A, \tag{5}$$

wenn mit $\tilde{A}$ die zu A gehörige Adjunktenmatrix bezeichnet wird, mit deren Transponierter im Falle $\det A \neq 0$ die Beziehung $\tilde{A}' = \det A \cdot A^{-1}$ besteht.

Für eine beliebige, nicht notwendig schiefe Matrix K, $\det K \neq 0$, werde $\bar{\bar{K}}$ definiert durch

$$\tilde{\bar{K}} = \pm \sqrt{|\det K|}\,\bar{K}, \tag{6}$$

wobei das Vorzeichen für schiefe Matrizen durch (5), für nicht schiefe Matrizen durch $\operatorname{sgn} \det K$ festgelegt werde. Dann gilt für die (normierte) Duale $\bar{\bar{K}}$

$$\det \bar{\bar{K}} = \det K. \tag{7}$$

Sind A und B zwei schiefe vierreihige Matrizen, so folgt aus (4) durch Anwenden auf $A + B$ mit $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$ die *Identität von* Blaschke

$$A\bar{B} + B\bar{A} = -(AoB)\cdot E = \bar{A}B + \bar{B}A. \tag{8}$$

Diese Identität gestattet zunächst unmittelbar, dem Paar schiefer Matrizen A, B weitere Matrizen mit bemerkenswerten Eigenschaften zuzuordnen; insbesondere

$$C = A\bar{B} - \bar{A}B = \bar{B}A - B\bar{A} = C', \tag{9}$$

$$D = A\bar{B} - \bar{B}A = \bar{A}B - B\bar{A} = -D', \tag{10}$$

$$F = A\bar{B} + B\bar{A} = F', \quad G = \bar{A}B + B\bar{A} = G', \tag{11}$$

$$H = A\bar{\bar{B}} - B\bar{A},\ K = \bar{A}B - \bar{\bar{B}}A,\ H' = -K,\ K' = -H,\ H^2 = K^2 = hE. \tag{12}$$

Aus (8) ergeben sich zahlreiche weitere Identitäten, von denen mit Abkürzungen wie $(AoA) = \lambda_{11}$, $(AoB) = \lambda_{12} = \lambda_{21}$ für zugeordnete Matrizempaare die folgenden hervorgehoben seien:

$$(13)\quad (\alpha A\overline{B}+\beta B\overline{A})(\gamma A\overline{B}+\delta B\overline{A}) = -\lambda_{12}(\alpha\gamma A\overline{B}+\beta\delta B\overline{A}) - \\ -\lambda_{11}\lambda_{22}\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{4}\cdot E'$$

insbesondere für $\delta=\alpha$ und $\gamma=\beta$ also

$$(14)\quad (\alpha A\overline{B}+\beta B\overline{A})(\beta A\overline{B}+\alpha B\overline{A}) = \left(\lambda_{12}^2\alpha\beta+\lambda_{11}\lambda_{22}\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right)\cdot E$$

und hieraus mit $\alpha=1$, $\beta=-1$

$$(15)\quad (A\overline{B}-B\overline{A})(A\overline{B}-B\overline{A}) = (\lambda_{12}^2-\lambda_{11}\lambda_{22})\cdot E.$$

Zum Nachweis solcher Identitäten liefert (8) vier Relationen der Art

$$(16)\quad \overline{B}A = -\lambda_{12}E-\overline{A}B,$$

und hieraus folgend beispielsweise

$$(17)\quad A(\overline{B}A)\overline{B} = -\lambda_{12}A\overline{B}-A\overline{A}B\overline{B}.$$

Zum Beweis für (15) erhält man so zunächst (mit (4))

$$A\overline{B}A\overline{B}+B\overline{A}B\overline{A}-B\overline{A}A\overline{B}-A\overline{B}B\overline{A} = -\lambda_{12}(A\overline{B}+B\overline{A})-4A\overline{A}B\overline{B},$$

und mit (8), (4) folgt (15). Die anderen Identitäten erfordern nur etwas mehr Schreibarbeit. Mit (15) ist die in (12) offen gelassene Zahl h gegeben.

Sind A, B, C drei schiefe vierreihige Matrizen, so erhält man aus (und mit) ihnen 40 zugeordnete Matrizen, die sich nach vier Matrizen-Konfigurationen auf DESARGUES-Figuren zusammenfassen lassen. Von diesen sind die dreifach darstellbaren symmetrischen Matrizen besonders bemerkenswert:

$$(18)\quad K = A\overline{B}C-C\overline{B}A = B\overline{C}A-A\overline{C}B = C\overline{A}B-B\overline{A}C = K',$$

$$(19)\quad \overline{K} = \overline{A}B\overline{C}-\overline{C}B\overline{A} = \overline{B}C\overline{A}-\overline{A}C\overline{B} = \overline{C}A\overline{B}-\overline{B}A\overline{C} = \overline{K}'.$$

Die Symmetrie der hierdurch definierten Matrizen $\overline{K}$, K ergibt sich aus dem Beispiel

$$K' = C'\overline{B}'A'-A'\overline{B}'C' = -C\overline{B}A+A\overline{B}C = A\overline{B}C-C\overline{B}A = K,$$

die Gleichheit der verschiedenen Darstellungen folgt mit (8), (16), denn danach ist

$$A\overline{B}C = -\lambda_{12}C-B\overline{A}C, \quad C\overline{B}A = -\lambda_{12}C-C\overline{A}B,$$

also $A\bar{B}C - C\bar{B}A = C\bar{A}B - B\bar{A}C$. Reihumtausch für A, B, C ergibt die übrigen Behauptungen (18), entsprechend (19).

Für diese Matrizen K, $\bar{K}$ gelten Vertauschungsrelationen wie

$$K\bar{A} = A\bar{K},\ K\bar{A}B = A\bar{B}K,\ K\bar{A}B\bar{C} = A\bar{B}C\bar{K}, \tag{20}$$

sowie die durch Reihumtausch von A, B, C oder durch Queren zu erhaltenden Relationen. Der Beweis für die erste Beziehung ergibt sich unter Verwenden der Vertauschbarkeit von $A\bar{A}$ mit anderen Faktoren und der Kenntnis mehrerer Darstellungen für $\bar{K}$ und K aus der Rechnung

$(A\bar{B}C - C\bar{B}A)\,\bar{A} = A\,(\bar{B}C\bar{A} - \bar{A}C\bar{B})$, also mit (18), (19) $K\bar{A} = A\bar{K}$.

Hieraus folgen nahezu unmittelbar die anderen Beziehungen (20). Mehrfaches Verwenden der Identität von Blaschke (8), (16) ergibt für das Produkt $K\bar{K} = k\ E$ mit k gemäss

$$-2\,K\bar{K} = (\lambda_{12}^2\,\lambda_{33} + \lambda_{23}^2\,\lambda_{11} + \lambda_{31}^2\,\lambda_{22} - 2\,\lambda_{12}\,\lambda_{23}\,\lambda_{31} - \lambda_{11}\,\lambda_{22}\,\lambda_{33})\,E. \tag{21}$$

Hiermit erhält man

$$\det \bar{K} = \det K = \pm\, k^2,\quad \tilde{K} = \operatorname{sgn} k \cdot \operatorname{sgn} \det K \sqrt{|\det K|}\,\bar{K}, \tag{22}$$

womit die in (19) vorweggenommene Bezeichnungeweise $\bar{K}$ in Einklang mit der Definition (6) gerechtfertigt ist.

Ist D eine vierte schiefe Matrix und sind $(DoA) = \mu_{41}$, $(DoB) = \mu_{42}$, $(DoC) = \mu_{43}$, so gilt die Identität

$$K\bar{D} + D\bar{K} = -\,\mu_{41}\,(B\bar{C} - C\bar{B}) - \mu_{42}\,(C\bar{A} - A\bar{C}) - \mu_{43}\,(A\bar{B} - B\bar{A}), \tag{23}$$

in der rechts Matrizen von der Art (12), (15) auftreten.

Ist insbesondere D eine Matrix des durch A, B, C erzeugten Bündels von schiefen Matrizen, also $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$, so gilt mit

$$a' = (\alpha, \beta, \gamma),\quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix},\quad a = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

die Beziehung

$$-2\,D\bar{D} = (a' \wedge a)\cdot E,\quad D\bar{D} = \delta\,E, \tag{24}$$

und mit (18), (19), 20) folgen

$$K\bar{D} = D\bar{K},\ \bar{D}K = \bar{K}D,\ \bar{D}K\bar{D} = \delta\bar{K},\quad K\bar{D}K = k\cdot D, \tag{25}$$

sowie für D_1, D_2 aus dem Bündel D

$$D_2\bar{D}_1 K\quad \bar{D}_1 D_2 = \delta_1\delta_2 K. \tag{26}$$

Die Beweise für diese und zahlreiche weitere Matrizenrelationen für Abkömmlinge von schiefen vierreihigen Matrizen ergeben sich mit Hilfe der Identität von BLASCHKE (8), (16). Dabei erweist sich als angenehm, dass man in (18), (19) über mehrere Darstellungen für die gleiche Matrix verfügt.

Ist A eine schiefe Matrix, T eine beliebige Matrix, so heisst die Matrix C mit den Eigenschaften

$$C = T\,A\,T',\ \tilde{C} = \tilde{T}\,\tilde{A}\,\tilde{T}',\ C' = -C \tag{27}$$

ihre mit T Transformierte, und mit (5) folgt

$$(CoC) = \pm\,(AoA)\cdot\det K\ (^2). \tag{28}$$

Daher ist für ein Paar A, B von schiefen Matrizen

$$J = \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}\,\lambda_{22}} \tag{29}$$

eine absolute Invariante, die sich bereits in (15) angekündigt hat. Mit (2) für A, C und (6) für T ergibt sich aus (27) die Darstellung der Transformierten

$$\bar{C} = \pm\,\bar{T}\,\bar{A}\,\bar{T}'. \tag{30}$$

Dabei ist das Vorzeichen so zu wählen, dass $\bar{C}$ und C in der durch (2) gegebenen Beziehung stehen.

Der an kennzeichnenden Beispielen dargestellte Formalismus für Folgerungen aus der Identität von BLASCHKE gestattet zahlreiche Anwendungen in allen Zusammenhängen, in denen schiefe Matrizen auftreten. Übertragungen auf andere Reihenzahlen werden durch die mehr-

(2) R. SAUER, Projektive Liniengeometrie, Leipzig 1937, lässt (dort S. 26 f.) die Konstante in der relativen Invariante (29) unbestimmt, was zum Gewinnen der absoluten Invariante (29) — bei SAUER S. 51 — ausreicht.

dimensionale Geometrie nahegelegt und erfordern in Hinblick auf die Eigenschaft der Determinante schiefer Matrizen unterschiedliche Behandlungsweisen für gerade und ungerade Reihenzahlen entsprechend ungeraden und geraden Dimensionen der Bezugsräume.

2. Vereinigte Lage im projektiven Raum P_3

Die projektiven Koordinaten für den Punkt x und für die Ebene u werden zu einspaltigen Matrizen zusammengestellt. Mehrspaltige vierreihige Matrizen werden, soweit dies zweckmässig ist, als Anordnungen von Punkten oder Ebenen geschrieben oder gedeutet:

$$(1) \qquad x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A = (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad a_i = \begin{bmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix}.$$

Bei harmonischer Festlegung der Grundfiguren $E = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ für die Punkte und $H = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ für die Ebenen ist die *Bedingung für vereinigte Lage* (Inzidenz) von Punkt x und Ebene u

$$(2) \qquad x'u = u'x = 0.$$

Der durch zwei Punkte a, b bestimmten Geraden g wird die *Geradenmatrix*

$$(3) \qquad g = (g_0, g_1, g_2, g_3), \quad g_i = b_i\, a - a_i\, b, \quad g' = -g$$

zugeordnet, dual entsprechend der durch zwei Ebenen u, v bestimmten Geraden h die Matrix

$$(4) \qquad \overline{h} = (\overline{h}_0, \overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3), \quad \overline{h}_i = v_i\, u - u_i\, v, \quad \overline{h}' = -\overline{h}.$$

Eine schiefe Matrix g ist dann und nur dann eine Geradenmatrix, wenn sie die *Geradenbedingung*

$$(5) \qquad g\,\overline{g} = \overline{g}\,g = 0, \quad (gog) = 0, \quad g \neq 0$$

erfüllt. Dabei sind g und $\overline{g}$ zueinander duale Darstellungen der gleichen Geraden, vorzugsweise g in Punktkoordinaten, $\overline{g}$ in Ebenenkoordinaten, so dass g_i den Durchstosspunkt der Geraden durch die Ebene η_i von

H und $\bar{g}_i$ die Verbindungsebene der gleichen Geraden mit dem Punkt e_i von E darstellt. Dann vertritt g die Punktreihe, $\bar{g}$ das Ebenenbüschel mit der gleichen Trägergeraden. Zum Beweis vergleicht man die Elemente $g_i' \bar{g}_k$ der Produktmatrix in (5) mit (2).

Die Bedingungen für *vereinigte Lage der Geraden g mit der Ebene u* bzw. *dem Punkt p* sind

$$gu = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{g}p = 0, \tag{6}$$

denn $gu = 0$ bedeutet $g_i' u = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, also vereinigte Lage der Punktreihe g mit u, entsprechend dual.

Liegt keine vereinigte Lage vor, so sind *Durchstosspunkt p* der Geraden g durch die Ebene u bzw. *Verbindungsebene u* der Geraden g mit dem Punkt p

$$p = g\,u \quad \text{bzw.} \quad u = \bar{g}\,p, \tag{7}$$

denn wegen $\bar{g}p = \bar{g}\,g\,u = 0$ ist $p = gu$ nach (6) auf g, wegen $u'p = u'gu = 0$, weil g schief ist, liegt p nach (2) in u, entsprechend dual.

Die PLÜCKERSCHE *Schnittbedingung für zwei Geraden g, h* ist $(goh) = 0$, in Matrizenschreibweise wegen der Identität von BLASCHKE (1.8) in zweifacher Darstellung

$$g\,\overline{h} + h\,\bar{g} = 0, \quad \bar{g}\,h + \overline{h}\,g = 0. \tag{8}$$

Zwei einander schneidende Geraden g, h erzeugen einen *Schnittpunkt p und* eine *Verbindungsebene u*, die — je viermal angeschrieben — die nach (8) naheliegenden Darstellungen gestatten:

$$p = g\,\overline{h} = -\,h\,\bar{g}, \quad u = \bar{g}\,h = -\,\overline{h}\,g, \tag{9}$$

denn wegen $\bar{g}p = \bar{g}g\overline{h} = 0$, $\overline{h}p = -\,\overline{h}h\bar{g} = 0$ liegt p nach (6) auf den Punktreihen g, h, entsprechend dual (3).

Sind die Geraden g, h windschief und liegt der Punkt p zu ihnen allgemein, so gibt es eine durch p gehende Gerade, die g im Punkt a, h im Punkt b trifft. Die *Treffpunkte* sind

$$a = g\,\overline{h}\,p, \quad b = h\,\bar{g}\,p, \tag{10}$$

(3) Dabei kommt es vor, dass eine oder mehrere, nicht alle Spalten der Produktmatrix $g\overline{h}$ bzw. $\bar{g}h$ unbestimmt ausfallen, d. h. Nullspalten werden.

denn wegen $\bar{g}a = \bar{g}\, g\, \overline{hp} = 0$ und (6) liegt a auf g, wegen (7) ist a der Durchstosspunkt der Geraden g durch die Ebene $u = \overline{hp}$, die durch p und h erzeugt wird, entsprechend für b.

Mit (10) ergibt sich nahezu unmittelbar: Die *an dem windschiefen Geradenpaar g, h gescharte Kollineation* $Kx = y$ mit dem Doppelverhältnis $\{x, y, a, b\} = \frac{\beta}{\alpha}$ kann durch

$$K = \alpha\, g\, \overline{h} + \beta\, h\, \bar{g}, \quad K^2 = k\, E, \tag{11}$$

dargestellt werden, wobei k in (1.14) gegeben ist, für die harmonische Spiegelung an g, h mit dem Doppelverhältnis -1 in (1.15).

Die folgenden Abschnitte geben einige Beispiele für die Zweckmässigkeit dieser Darstellungsweise, in der die Natur der Geraden als Punktreihe oder Ebenenbüschel stets klargestellt erscheint.

3. Kollineationen, Korrelationen, Regulusse, Komplexe

Die *Kollineation* K, die den Übergang von x, g, u in y, h, v bewirkt, wird dargestellt durch

$$Kx = y,\ K\, g\, K' = h,\ \overline{K}\, \bar{g}\, \overline{K'} = \pm\, \bar{h},\ \overline{K} u = v, \tag{1}$$

wenn die Bedeutung des Querstrichs für schiefe Matrizen durch (1.2), allgemein durch (1.6) festgelegt und das Vorzeichen sgn det K gewählt wird. Mit unwesentlicher Beschränkung kann det $K = +1$ angesetzt werden (Hauptprojektivitäten). Man erkennt sogleich, dass h nach (1) wirklich die Bildgerade von g ist, denn mit (2.6) folgt aus

$$\overline{hy} = \overline{K}\, \bar{g}\, \overline{K'}\, K x = \overline{K}\, \bar{g}\, x,\ h\, v = K\, g\, K'\, \overline{K}\, u = K\, g\, u,$$

dass auf h alle Bildpunkte von g liegen und $\overline{h}$ die Achse des Büschels ist, in welches das zu $\bar{g}$ gehörige Büschel übergeht.

Korrelationen K dualisieren die Grundgebilde. Wird das Erzeugen von Punkten bevorzugt, so ist für den Übergang von u, g, x in y, h, v anzusetzen (mit det $K > 0$)

$$K u = y,\ K\, \bar{g}\, K' = h,\ \overline{K}\, g\, \overline{K'} = \overline{h},\ \overline{K} x = v. \tag{2}$$

Dabei ist y der *Pol* der Ebene u, v die *Polarebene* des Punktes x, h die Polargerade oder *Polare* zu g, und zwar h als Bild von $\bar{g}$, $\bar{h}$ als Bild

von g dualisiert, Nachweis sinngemäss wie zu (1). Für die *Polarenbeziehung* in der Korrelation K sind gleichwertig kennzeichnend

$$\overline{h}\,K\,\overline{g}=0,\ h\,\overline{K}\,g=0,\ \overline{g}\,K'\,\overline{h}=0,\ g\,\overline{K'}\,h=0. \tag{3}$$

Konjugiert zur Ebene u sind alle Ebenen v, die durch den Pol der Ebene u gehen: $v'\,Ku=0$, $u'\,K'\,v=0$, konjugiert zum Punkt x sind alle Punkte y der Polarebene von x: $y'\,\overline{K}x=0$, $x'\,\overline{K'}\,y=0$. Eine Gerade f heisst zur Geraden g konjugiert, wenn sie die Polare h von g trifft. Mit (2) und (2.8) — (f statt g) — wird hiernach die *Bedingung für Konjugiertsein*

$$f\,\overline{K}\,g\,\overline{K'}+K\,\overline{g}\,K'\,\overline{f}=\overline{f}\,K\,\overline{g}\,K'+\overline{K}\,g\,\overline{K'}\,f=0, \tag{4}$$

gleichwertig kennzeichnend sind auch

$$\overline{f}\,K\,\overline{g}\,K'\,\overline{f}=0,\quad f\,\overline{K}\,g\,\overline{K'}\,f=0, \tag{5}$$

und mit (4) folgt: Ist f zu g konjugiert in der Korrelation K, so ist g zu f konjugiert in der Korrelation K'. Konjugiertsein ist nur für $K'=\pm K$ allgemein, d. h. von involutorischen Elementen abgesehen, wechselseitig. Nach (3) sind Selbstpolaren $h=g$ in K zugleich Selbstpolaren in K', nach (5) gilt entsprechendes für selbstkonjugierte Geraden $f=g$.

Für *symmetrische* Korrelationen $A'=A$, $\det A>0$ gelten als Sonderfall von (2) die Grundbeziehungen

$$A\,u=x,\quad A\,\overline{g}\,A=h,\quad \overline{A}\,g\,\overline{A}=\overline{h},\quad \overline{A}\,x=u. \tag{6}$$

Polarität und Konjugiertsein sind wechselseitig. Pol und Polarebene sind in vereinigter Lage für das selbstpolare *Inzidenzgebilde*, eine *Quadrik*

$$u'\,A\,u=0.\qquad x'\,\overline{A}\,x=0. \tag{7}$$

Selbstpolaren sind Erzeugende dieser Quadrik, ihre Gleichung in Erzeugenden lautet daher

$$\overline{g}\,A\,\overline{g}=0,\qquad g\,\overline{A}\,g=0, \tag{8}$$

denn (8) besagt $\overline{g}_i'\,A\,\overline{g}_k=0$, $g_i'\,A\,g_k=0$, $i,\ k=0,1,2,3$, also gehören vier Ebenen des Büschels $\overline{g}$ bzw. vier Punkte der Reihe g zur Quadrik

(7), daher alle Ebenen bzw. Punkte. Polaren g, h in der Korrelation A, die einander schneiden, sind *selbstkonjugiert* und *Tangenten* der Quadrik (7). Zum Beweis hat man aus (6), (2.8) und (2.9) die Beziehungen

$$h = A\,\bar{g}\,A, \quad h\,\bar{g} + g\,\bar{h} = 0, \quad p = h\,\bar{g} = -\,g\,\bar{h}, \quad u = \bar{h}\,g = -\,\bar{g}\,h$$

sowie $A\,\bar{A} = \sqrt{\det A}\,E$ zur Verfügung. Damit folgt sofort

$$u'\,A\,u = g\,\bar{h}\,A\,\bar{h}\,g = g\,\bar{A}\,g\,\bar{A}\,A\,\bar{g}\,h = 0,$$
$$p'\,\bar{A}\,p = \bar{g}\,h\,\bar{A}\,g\,\bar{h} = \bar{g}\,A\,\bar{g}\,A\,\bar{A}\,g\,\bar{h} = 0,$$

also gehören Verbindungsebene u und Schnittpunkt p von g und h zur Quadrik (7). Die Schnittbedingung liefert zugleich die *Gleichung der Quadrik in Tangenten*

$$\bar{g}\,A\,\bar{g}\,A + \bar{A}\,g\,\bar{A}\,g = 0. \tag{9}$$

Gleichwertig hiermit ist kennzeichnend für Tangenten

$$\bar{g}\,A\,\bar{g}\,A\,\bar{g} = 0, \qquad g\,\bar{A}\,g\,\bar{A}\,g = 0. \tag{10}$$

Drei allgemein liegende Geraden g^1, g^2, g^3, bestimmen eine symmetrische Korrelation (6) *mit der Matrix*

$$\begin{aligned} A &= g^1\,\bar{g}^2\,g^3 - g^3\,\bar{g}^2\,g^1 = g^2\,\bar{g}^3\,g^1 - g^1\,\bar{g}^3\,g^2 = g^3\,\bar{g}^1\,g^2 - g^2\,\bar{g}^1\,g^3 = A', \\ \bar{A} &= \bar{g}^1\,g^2\,\bar{g}^3 - \bar{g}^3\,g^2\,\bar{g}^1 = \bar{g}^2\,g^3\,\bar{g}^1 - \bar{g}^1\,g^3\,\bar{g}^2 = \bar{g}^3\,g^1\,\bar{g}^2 - \bar{g}^2\,g^1\,\bar{g}^3 = \bar{A}', \end{aligned} \tag{11}$$

und mit $(g^i\,o\,g^k) = \lambda_{ik}$ *ist dabei*

$$A\,\bar{A} = \bar{A}\,A = \lambda_{12}\,\lambda_{23}\,\lambda_{31}\,E. \tag{12}$$

Die Eigenschaften (11) sind durch (1.18) gegeben, und (12) folgt aus (1.21) wegen $\lambda_{ii} = (g^i\,o\,g^i) = 0$. Die Geraden g^i sind Erzeugende der zugehörigen Quadrik (8), denn für g^1 ist

$$\bar{g}^1\,A\,\bar{g}^1 = \bar{g}^1\,(g^1\,\bar{g}^2\,g^3 - g^3\,\bar{g}^2\,g^1)\,\bar{g}^1 = \bar{g}^1\,g^1\,\bar{g}^2\,g^3\,\bar{g}^1 - \bar{g}^1\,g^3\,\bar{g}^2\,g^1\,\bar{g}^1 = 0$$

und für g^2, g^3 sind entsprechend die anderen beiden Darstellungen von A in (11) verfügbar. *Die in der Linearschar $g = \alpha\,g^1 + \beta\,g^2 + \gamma\,g^3$ enthaltenen Geraden $g\,\bar{g} = 0$ bilden den einen Regulus, die Treffgeraden von g^1, g^2, g^3 den anderen Regulus der Quadrik mit der Matrix* (11). Die einfache Ergänzung des Beweises werde übergangen.

Für *schiefe* Korrelationen $A' = -A$, $\det A > 0$, gelten als Sonderfall von (2) die Grundbeziehungen

$$A\,u = x,\ A\,\bar{g}\,A = -h,\ \bar{A}\,g\,\bar{A} = -\bar{h},\ \bar{A}\,x = u, \tag{13}$$

wobei das Vorzeichen bei h und $\bar{h}$ (zugleich) geändert werden darf. Solche Korrelationen heissen Nullsysteme, weil Pol und Polarebene stets inzident sind: $u'\,A\,u = 0$, $x'\,\bar{A}\,x = 0$. Die *Selbstpolaren* des Nullsystems sind zugleich *selbstkonjugiert* und bilden den zur Matrix A gehörigen *linearen Komplex*. Dessen Geraden sind gleichwertig gekennzeichnet durch die Beziehungen

$$\bar{g}\,A\,\bar{g} = 0, \quad g\,\bar{A}\,g = 0, \tag{14}$$

$$A\,\bar{g}\,A\,\bar{g} + g\,\bar{A}\,g\,\bar{A} = 0,\ \bar{g}\,A\,\bar{g}\,A\,\bar{g} = 0,\ g\,\bar{A}\,g\,\bar{A}\,g = 0 \tag{15}$$

$$A\,\bar{g} + g\,\bar{A} = 0,\ \bar{g}\,A + \bar{A}\,g = 0,\ (Aog) = 0. \tag{16}$$

Zum Nachweis der Gleichwertigkeit sei $A\bar{g} + g\bar{A} = \bar{A}g + \bar{g}A = -\lambda\,E$ entsprechend der Identität von BLASCHKE (1.8) mit $(Aog) = \lambda$. Dann wird $\bar{g}A\bar{g} + \bar{g}\,g\,\bar{A} = \bar{g}A\bar{g} = -\lambda\,\bar{g}$, also sind (16) und (14) gleichwertig. Ferner wird $\bar{g}A\bar{g}A + \bar{A}g\bar{A}g = -\lambda\,(\bar{g}A + \bar{A}g) = \lambda^2 E$, also ist (15) gleichwertig mit (16).

Für den Zusammenhang zwischen Nullsystem A und Komplex A folgt mit (16) und (13)

$$A\,\bar{g}\,x + g\,\bar{A}\,x = 0, \quad A\,\bar{g}\,x + g\,u = 0,$$

daher gilt wegen (2.6): Liegt x auf einer Komplexgeraden g, so gehört die Nullebene von x zum Büschel $\bar{g}$ von g — und dual.

Ähnlich einfache Darstellungen und Beweisstrukturen ergeben sich für die Geometrie der Komplex-Büschel $\lambda\,A + \mu\,B$, insbesondere auch für die Imaginärgeometrie der Geraden.

4. KOMPLEX-BÜNDEL

Mit drei schiefen Matrizen A, B, C sind drei Nullsysteme (3.13) und drei zugehörige lineare Komplexe (3.16) gegeben. Zugleich bestimmen sie ein Bündel $D = \alpha\,A + \beta\,B + \gamma\,C$ von Nullsystemen und Komplexen. Die in Abschnitt 1 bereitgestellten Identitäten (1.18) bis (1.26) für Bündel schiefer Matrizen führen auf zahlreiche Sätze, beispielsweise die vier folgenden Erzeugungen von Regulussen auf Quadriken.

SATZ 1. *Die in allen Komplexen des Bündels* $D = \alpha A + \beta B + \gamma C$ *gemeinsam enthaltenen Geraden und die Träger der speziellen Komplexe dieses Bündels bilden die beiden Regulusse der Quadrik*

$$u' Ku = 0, \quad x' \bar{K} x = 0, \quad \bar{g} K \bar{g} = 0, \quad g \bar{K} g = 0$$

mit der Matrix

$$(1) \quad K = A\bar{B}C - C\bar{B}A = B\bar{C}A - A\bar{C}B = C\bar{A}B - B\bar{A}C = K'.$$

Zum Beweis sei g eine Gerade, $(Aog) = \mu_{41}$, $(Bog) = \mu_{42}$, $(Cog) = \mu_{43}$, dann ist g dann und nur dann in allen Komplexen des Bündels enthalten, venn $\mu_{41} = \mu_{42} = \mu_{43} = 0$ ist. Mit (1.23) folgt also $K\bar{g} + g\bar{K} = 0$, hieraus $\bar{g} K \bar{g} + \bar{g} g \bar{K} = 0$, also wegen $\bar{g} g = 0$ die erste Behauptung. Für alle Komplexe D des Bündels ist nach (1.24), (1.25) $\bar{D} K \bar{D} = \bar{D} D K$, also für die speziellen Komplexe $\bar{D} K \bar{D} = 0$ wegen $\bar{D} D = 0$. Die beiden Regulusse erkennt man leicht als verschieden voneinander.

SATZ 2. *Sind* A *und* B *zwei Nullsysteme und ist* g *eine zu diesen allgemeine Gerade, so sind die Polaren von* g *an dem Büschel* $\alpha A + \beta B$ *Erzeugende der Quadrik* K *mit der Matrix*

$$(2) \quad K = A \bar{g} B - B \bar{g} A = g \bar{B} A - A \bar{B} g = B \bar{A} g - g \bar{A} B = K'.$$

Zum Nachweis erhält man mit einigen auf (1.8) beruhenden Umformungen

$$g (\alpha \bar{A} + \beta \bar{B}) \ (A \bar{g} B - B \bar{g} A) (\alpha \bar{A} + \beta \bar{B}) \ g = 0,$$

also $\bar{h} K \bar{h} = 0$ für $\bar{h} = (\alpha \bar{A} + \beta \bar{B}) \ g (\alpha \bar{A} + \beta \bar{B})$, was zu zeigen ist. Statt dessen kann man h in der Form $D = \lambda A + \mu B + \nu g$ darstellen und sich auf Satz 1 berufen. Der zweite Regulus dieser Quadrik besteht aus den Treffgeraden von g und den Trägern der speziellen Komplexe im Büschel $\alpha A + \beta B$.

Ein Beispiel für eine Quadrik (2) ist die Schmiegquadrik $K = g \dot{\bar{g}} \ddot{g} - \ddot{g} \dot{\bar{g}} g$ einer Regelfläche $g(l)$. Die den Komplexen g, $\dot{g}$, $\ddot{g}$ gemeinsamen Geraden im Tangentensystem der Fläche $g(l)$ sind Haupttangenten. (Vgl. hierzu R. SAUER, 1. c. S. 67).

SATZ 3. *Ist* A *ein Komplex und sind* g, h *zwei zu diesem sowie zueinander allgemeine Geraden, so sind alle Geraden, des Komplexes* A, *die sowohl* g *wie* h *treffen, Erzeugende eines Regulus der Quadrik* K

$$(3) \quad K = g \bar{A} h - h \bar{A} g = A \bar{h} g - g \bar{h} A = h \bar{g} A - A \bar{g} h = K'.$$

Der zweite Regulus besteht aus den Trägern der speziellen Komplexe im Bündel $D = \alpha A + \beta g + \gamma h$.

Zum Nachweis sei

$$\overline{f} A + \overline{A} f = 0, \quad \overline{f} g + \overline{g} f = 0, \quad \overline{f} h + \overline{h} f = 0, \quad f \overline{f} = 0,$$

dann folgt durch « Schiebung »

$$\overline{f}\, g\, \overline{A}\, h \overline{f} = -\, \overline{g} f\, \overline{A}\, h \overline{f} = \overline{g}\, A\, \overline{f} h \overline{f} = -\, \overline{g}\, A\, \overline{h} f \overline{f} = 0,$$

entsprechend für die anderen Dreier-Produkte in (3). Statt dessen kann man Satz 1 heranziehen, da f gemeinsame Gerade der drei Komplexe A, g, h ist. So folgt auch die zweite Behauptung.

Satz 4. *Sind f, g, h drei zueinander allgemeine Geraden, so bilden ihre Treffgeraden und die in dem Bündel* $D = \alpha f + \beta g + \gamma h$ *enthaltenen Geraden die beiden Regulusse der Quadrik* K

$$K = f \overline{g} h - h \overline{g} f = g \overline{h} f - f \overline{h} g = h \overline{f} g - g \overline{f} h = K'. \tag{4}$$

Der Beweis ist mit anderer Bezeichnungsweise in Anschluss an (3.11) vorweggenommen und folgt auch sofort aus Satz 1.

Hierzu gehört das Anwendungsbeispiel: Sei f eine Gerade und R eine Kollineation $Rx = y$, $RfR' = g$, $\det R = 1$. Dann erfüllen die Bilder von f in den Kollineationen $\lambda E + \mu R$ einen Regulus der Quadrik mit der Matrix

$$K = f \overline{R} \overline{f} \overline{R'} f R' - R f \overline{R} \overline{f} \overline{R'} f = K'. \tag{5}$$

Zum Beweis zeigt man durch einfache Umformungen, dass je drei Geraden f, g, h der genannten Auswahl für $f\overline{g}h - h\overline{g}f$ Ausdrücke ergeben, die sich von (5) nur durch einen Zahlfaktor unterscheiden.

Die ausgewählten Sätze gehören zum klassischen Bestand der Geometrie der Komplexe in synthetischer Behandlungsweise; die mit Hilfe der Identität von Blaschke erhaltenen analytischen Darstellungen ermöglichen Anwendungen, in denen es wie in der Mechanik darauf ankommt, Darstellungen in Koordinaten zu erhalten. Die Übergänge zu inhomogenen Koordinaten im euklidischen Raum bedürfen keiner besonderen Erörterung.