

# LA GEOMETRIA ASOCIADA CON LA TERCERA DERIVADA DE UNA FUNCION POLIGENA

POR

LUIS ESTEBAN CARRASCO

## INDICE DE MATERIAS

	<u>Páginas</u>
1. Reseña histórica .....	122
2. Sumario de resultados .....	125
3. Funciones polígenas y transformaciones .....	128
4. Los operadores lineales $D$ y $P$ .....	129
5. La primera derivada de una función polígena .....	130
6. La circunferencia de Kasner .....	131
7. La derivada segunda de una función polígena .....	132
8. La transformación inducida entre el plano del centro de curvatura y el plano de la derivada segunda .....	134
 <i>La derivada tercera de una función polígena.</i>	
9. Diversas expresiones de la tercera derivada de una función polígena .....	136
 <i>La derivada tercera rectilínea.</i>	
10. Orden y clase de la curva $\tau_1$ .....	142
11. Puntos dobles de la curva $\tau_1$ .....	146
12. El punto triple de la curva $\tau_1$ .....	149
13. Los puntos de retroceso de $\tau_1$ .....	154
14. Focos de la curva $\tau_1$ .....	157
15. Sobre la posibilidad de describir la curva $\tau_1$ mediante el movimiento uniforme de giro de un radio vector .....	158
16. Manera de construir mecánicamente la curva $\tau_1$ .....	160
17. Distribución de puntos sobre la curva $\tau_1$ .....	162
18. Tipos especiales de funciones polígenas .....	163

	Páginas
<i>La derivada tercera circular.</i>	
19. Derivada tercera circular de una función polígena . . . . .	173
20. La curva $\tau_2(\theta, \kappa)$ correspondiente a un valor fijo de $\theta$ . . . . .	173
21. La transformación asociada con la derivada tercera circular de una función polígena . . . . .	176
<i>La derivada tercera parabólica.</i>	
22. La derivada tercera parabólica de una función polígena . . . . .	182
23. Estudio del vector $\tau_3(\theta, \epsilon)$ . . . . .	182
24. Estudio del vector $\tau$ . . . . .	183
25. La correspondencia asociada con la derivada parabólica . . . . .	185
<i>Apéndice.</i>	
26. La derivada $n$ -sima de una función polígena . . . . .	192
27. La derivada $n$ -sima rectilínea de una función polígena . . . . .	193

## 1. RESEÑA HISTÓRICA

En su famosa disertación inaugural, Riemann escribió la derivada « direccional » de una función compleja  $w$ , de la variable compleja  $z$ , esencialmente así :

$$\frac{dw}{dz} = D[f(z)] + P[f(z)] e^{-2i\theta}, \quad \text{tg} \cdot \theta = m$$

donde, 
$$D[f(z)] = \frac{1}{2}[u_x + v_y + i(v_x - u_y)]$$

$$P[f(z)] = \frac{1}{2}[u_x - v_y + i(v_x - u_y)]$$

y  $m$  la pendiente, en el punto considerado, de la curva de aproximación al punto fijo, del punto variable  $z$ .

Desde entonces se han hecho específicos intentos para estudiar funciones que no son analíticas, así como para generalizar las clásicas condiciones de Cauchy - Riemann. En este último sentido podemos mencionar un artículo de Picard, publicado en el « Jour-

nal de Mathematiques » en 1.892. Algunos otros trabajos pueden encontrarse en la bibliografía que insertamos al final de este trabajo.

A Pompeiu corresponde el mérito de haber abordado por vez primera, en 1912 (Rendiconti di Palermo) y de una manera directa el estudio de las funciones continuas de una variable compleja, renunciando a las condiciones de Cauchy - Riemann. En sus trabajos define la derivada « areolar » de una función compleja de variable compleja considerando el límite :

$$\lim_{C \rightarrow 0} \frac{\int_C f(z) dz}{\frac{1}{2} \int_C xdy - ydx}$$

donde  $C$  es un contorno que rodea al punto  $z$  considerado y el límite está considerado cuando este contorno tiende al punto mediante una deformación continua.

Cuando este límite existe y está bien determinado en el punto, la función se llama *monógena* ( $\alpha$ ) en dicho punto. Una función monógena areolarmente o, monógena ( $\alpha$ ) en todos los puntos interiores a una región, se llama holomorfa ( $\alpha$ ) en dicha región.

Hayashi ha demostrado varios teoremas notables referentes a esta clase de funciones y ha construido los fundamentos para desarrollar una teoría general de las mismas.

Once años más tarde, en 1923, Hedrick en colaboración con Ingold y Westfall escribe la primera teoría general de estas funciones no-analíticas (« Theory of non-analytic functions of a complex variable », Journal de Mathématiques, vol. 2). A él corresponde el mérito de haber sido el primero en ver la riqueza del campo que se presenta. Las dos principales propiedades de las funciones analíticas, que conducen a las ecuaciones de Cauchy - Riemann, la propiedad conforme y la equivalente de poseer derivada única en cada punto desaparecen en estas nuevas funciones. En lugar de las transformaciones conformes aparecen transformaciones mucho más generales. El retraso en el estudio de estas nuevas funciones sólo puede deberse al fructífero campo que ofrecen las funciones analíticas. En aquel primer artículo Hedrick estudia las líneas características, el significado geométrico de las cantidades  $E$ ,  $F$  y  $G$ , definidas precisamente como las cantidades fundamentales de la geometría diferencial; introduce el concepto de elipticidad de una

función y estudia otras muy interesantes propiedades. En posteriores artículos ha dado la generalización de los clásicos teoremas de Morera y Liouville y ha considerado la integral de Stieltjes en el plano complejo. Considerando el cociente incremental  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  para una función  $w = f(z)$  como una nueva función de  $z$ , prueba que el jacobiano de la transformación que pasa del plano  $z$  al plano de la nueva función se anula precisamente en los puntos de la circunferencia de Kasner. La superficie de Riemann correspondiente a la función tiene, en general dos hojas, que se unen a lo largo de la circunferencia de Kasner. Esta curva puede denominarse arista de retroceso de la superficie debido a su similitud con la de las superficies desarrollables.

En otros artículos, en colaboración con Ingold, Hedrick ha estudiado estas funciones no-analíticas, así como las ecuaciones de Beltrami para tres dimensiones y define las funciones conjugadas en espacios de esta misma dimensión. Una referencia detallada de sus trabajos se encontrará en la bibliografía que damos al final.

Las definiciones de la segunda y siguientes derivadas de una función polígena dadas por diferentes autores, no están de acuerdo.

Al considerar la segunda derivada, si la pendiente de la curva según la cual  $\Delta z$  se aproxima a cero es designada por  $m'$ , mientras se designa por  $m$  la pendiente análoga para la primera derivada se pueden considerar estos tres casos :

- (1)...  $m = m' = \text{constante}$ , independiente de  $z$ .
- (2)...  $m = m' = \mu(x, y)$
- (3)...  $m'$  y la curva de aproximación, independientes de  $m$ .

En su tesis, Nicolesco considera las distintas posibilidades y prueba que el orden de diferenciación es indiferente: esto es, que  $m$  y  $m'$  pueden intercambiarse sin afectar a la segunda derivada. Extiende este resultado a la derivada  $n$ -ésima. Generalmente él utiliza la asunción (1).

Calugaréano hace siempre la hipótesis (2) en sus trabajos sobre las derivadas de funciones polígenas. Discute su diferente actitud con la adoptada por Kasner — que supone siempre la (3) — en las *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 32 (1930).

Calugaréano, considerando las derivadas sucesivas de una función polígena, ataca el problema de resolución de ecuaciones dife-

renciales en que intervienen estas derivadas. Demuestra que toda integral polígena analítica (\*) de una ecuación diferencial de este tipo conduce al conocimiento de una integral monógena. Las ecuaciones diferenciales que admiten integrales polígenas forman una clase particular y Calugaréano da la caracterización de esta clase, que es: Su integral monógena contiene dos constantes arbitrarias de una manera especial.

Muy interesante es también un trabajo de Vincent C. Poor en que generaliza para las funciones polígenas los conceptos de polo y cero así como da la manera de calcular residuos.

Otros muchos trabajos en este, relativamente nuevo, campo de las funciones polígenas, pueden encontrarse en la bibliografía.

## 2. SUMARIO DE RESULTADOS

Indicamos a continuación los principales resultados originales a que llegamos en nuestro estudio.

La derivada tercera de una función polígena, depende no sólo del punto del plano  $z$ , en el cual está formada, sino también del elemento diferencial de tercer orden de la curva de aproximación; es decir, de las tres primeras derivadas en el punto considerado, de la función que representa la curva. Solamente cuando la función es monógena, la derivada tercera es única.

Cuando se consideran como curvas de aproximación al punto  $z$ , el haz de rectas que pasan por él — derivada tercera rectilínea — los valores complejos de la tercera derivada determinan en el plano complejo una curva  $\tau_1$ .

La curva  $\tau_1$  es de sexto orden y de sexta clase. Tiene dos puntos triples imaginarios en los puntos cíclicos del plano y se puede considerar en cierto modo como una generalización en la línea de la circunferencia y del caracol de Pascal. Su número máximo de puntos dobles reales es cuatro, pudiendo tres de ellos ser sustituidos por un punto triple cuando:  $|w_{z\bar{z}}| = |w_{z\bar{z}}|$ . Puede también tener uno o dos puntos de retroceso, siendo necesario en este último caso que:  $|w_{z\bar{z}}| = 3 |w_{z\bar{z}}|$  y  $\arg \cdot w_{z\bar{z}} = 2 \arg \cdot w_{z\bar{z}}$ . Los dos puntos de retroceso pueden coincidir obteniéndose un punto triple.

---

(\*) Se llaman así las funciones polígenas de  $z$ , que admiten en todo punto regular de su dominio de existencia un desarrollo en serie doble de potencias de  $z$  y  $\bar{z}$ .

La curva  $\tau_1$  tiene dos focos que coinciden cuando:  $(w_{zz})^2 = 3 w_{z\bar{z}} \overline{w_{z\bar{z}}}$ .

Puede ser descrita mediante el movimiento uniforme de giro del radio vector cuando la curva posee un punto triple, distinto de los cíclicos.

Si la función es monógena, la curva  $\tau_1$  se reduce a un punto. Si es monógena inversa a una circunferencia. También se reduce a una circunferencia si la función es armónica.

El valor medio de  $\tau_1$  respecto de  $\theta$  es  $w_{zz}$  que coincide con el valor único que tendría la derivada tercera en el caso de ser la función monógena. Si suponemos la circunferencia unidad cubierta uniformemente de masa, la densidad lineal sobre la curva  $\tau_1$  varía como la inversa de la distancia del origen a un cierto caracol de Pascal.

El punto imagen de la derivada tercera cuando las curvas de aproximación son circunferencias tangentes en el punto considerado del plano  $z$ , describe una parábola. El diámetro de la parábola que pasa por el punto correspondiente en la curva  $\tau_1$  a aquel valor de  $\theta$ , envuelve, cuando este punto se mueve sobre la curva  $\tau_1$  una curva del mismo tipo que aquella, pero con centro de simetría.

La correspondencia  $T_c$ , asociada con la derivada tercera circular de una función polígena, entre el plano de los centros de curvatura y los puntos del plano complejo  $\tau_2$ , es degenerada siempre y cuando la función sea monógena, y además se verifique que:  $w_{z\bar{z}} = \overline{w_{z\bar{z}}} = 0$ , es decir, sea también monógenas  $w_z$  y  $\overline{w_z}$ .

En esta correspondencia  $T_c$ , a cada punto del plano  $Z$  (plano de los centros de curvatura) corresponde un punto en el plano  $\tau_2$  en que representamos la derivada tercera circular. Recíprocamente, a cada punto del plano  $\tau_2$  corresponden en virtud de la correspondencia  $T_c^{-1}$ , inversa de la  $T_c$ , dieciséis puntos (reales o imaginarios) en el plano  $Z$ . A una recta que pasa por el punto  $z$ , corresponde en virtud de esta correspondencia, una parábola en el plano  $\tau_2$ , y a una recta que no pase por el punto  $z$ , una curva del tipo de la  $\tau_1$ , algebraica de sexto orden y de sexta clase.

Cuando las curvas de aproximación son parábolas que tienen el mismo círculo osculador en el punto  $z$ , el punto imagen de la derivada tercera describe una recta. Cuando  $\theta$  varía, esta recta gira en sentido contrario al de  $z$  y a una velocidad cuatro veces mayor. Existen cinco posiciones en que esta recta es paralela a la correspondiente del plano  $z$ , de inclinación  $\theta$ . La envolvente del haz de rectas que se obtiene al suponer la curvatura constante y  $\theta$  variable, es una curva algebraica de orden doce.

La derivada tercera de una función polígena establece una correspondencia  $T_p$ , entre los puntos de un espacio tridimensional de coordenadas  $y', y'', y'''$  o mejor  $\theta, \varkappa$  y  $\varepsilon$ , y los puntos del plano complejo  $\tau$  en que suponemos representada la derivada tercera.

En esta correspondencia  $T_p$ , a una recta paralela al eje  $\theta$ , corresponde en el plano  $\tau$  una curva algebraica de orden doce. Si la recta está en el plano  $\theta\varepsilon$  le corresponde una curva algebraica doble de orden seis. En particular, al eje  $\theta$  le corresponde la curva  $\tau_1$  — derivada rectilínea — considerada dos veces. A una recta paralela al eje  $\varkappa$  corresponde una parábola y a otra paralela al eje  $\varepsilon$  una línea recta, en el plano  $\tau$ .

Entre un plano paralelo al  $\theta\varkappa$  y el  $\tau$  se establece una correspondencia puntual que es degenerada cuando las funciones  $w, w_x$  y  $w_z$  son monógenas, en cuyo caso a todos los puntos del primer plano les corresponde en el plano  $\tau$  los puntos de una curva algebraica de sexto orden. Si la correspondencia no es degenerada, en la inversa corresponden, a cada punto del plano  $\tau$ , dieciséis puntos (reales, imaginarios o confundidos) en el plano considerado.

La correspondencia entre los puntos de un plano paralelo al  $\theta\varepsilon$  y el  $\tau$  es degenerada cuando la función es monógena y hace corresponder a todos los puntos del plano los de una curva algebraica de orden doce. En la correspondencia inversa, a un punto del plano  $\tau$  le corresponden ocho (reales, imaginarios o confundidos) del primer plano. La correspondencia entre los puntos de un plano paralelo al  $\varkappa\varepsilon$  y el plano  $\tau$  es degenerada cuando la función es monógena. Y hace corresponder a todos los puntos del primer plano los puntos de una recta en el plano  $\tau$ . En la correspondencia inversa a un punto del plano  $\tau$  le corresponden en el primer plano dos puntos (reales, imaginarios o confundidos).

La curva  $\eta_1$  que representa la derivada  $n$  — sima rectilínea de una función polígena, es algebraica de orden  $2n$  y de la misma clase, y debe considerarse como doble. Pasa por los puntos cíclicos del plano y tiene en cada uno de ellos un punto múltiple de orden  $n$ . Su número máximo de puntos dobles reales — o de múltiples equivalentes — es  $(n - 1)^2$ . Puede poseer un punto múltiple de orden  $n$  — además de los cíclicos — si sus coeficientes cumplen la condición :

$$\frac{a_1}{\bar{a}_{n-1}} = \frac{a_2}{\bar{a}_{n-2}} = \frac{a_3}{\bar{a}_{n-3}} = \dots = \frac{a_{n-3}}{\bar{a}_3} = \frac{a_{n-2}}{\bar{a}_2} = \frac{a_{n-1}}{\bar{a}_1}$$

La suma del número de focos y del de puntos de retroceso de la curva que estamos considerando es, en general,  $n - 1$ .

Cuando la curva posee un punto múltiple de orden  $n$  — distinto de los cíclicos — y la tangente a la curva de aproximación gira en el plano  $z$  en un sentido determinado, el vector que tiene su origen en el punto múltiple de orden  $n$  (real o imaginario) y su extremo sobre la curva, gira en sentido contrario y a una velocidad  $n$  - veces la de aquella. Si no existe este punto múltiple no hay ningún punto que cumpla aquellas condiciones.

Si la función es monógena la curva se reduce a un punto. Si es monógena inversa a una circunferencia considerada  $n$  veces.

El valor medio de  $\eta_1$  respecto de  $\theta$  es  $w_{z, \dots, z}$ , que coincide con el valor de la derivada  $n$  — sima, en el caso de ser la función monógena.

### 3. FUNCIONES POLÍGENAS Y TRANSFORMACIONES

Cuando una variable compleja  $w = u + iv$  está relacionada con otra variable compleja  $z = x + iy$  de tal manera que a cada valor de  $z$  corresponde un valor de  $w$  se dice que  $w$  es una función de  $z$ .

Esta correspondencia funcional puede ser expresada por la ecuación :

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde  $u$  y  $v$  son funciones reales de las dos variables reales  $x$  e  $y$ .

Supondremos que las funciones  $u$  y  $v$  son continuas y que poseen derivadas parciales continuas hasta el tercer orden, en una región del plano  $z$ . Por lo demás, la función es completamente general y las derivadas parciales de primer orden no tienen necesariamente que satisfacer las condiciones de Cauchy - Riemann. Diremos que una tal función  $w$  es una *función polígena de  $z$* . La denominación de función polígena fué introducida por E. Kasner en 1.927 (« A new theory of polygenic — or non-monogenic — functions. Science, vol. 66). Hedrick llama a estas funciones, no-analíticas.

Si, en particular, las funciones  $u$  y  $v$  satisfacen las condiciones de Cauchy - Riemann :

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

entonces la función polígena  $w$  se llama monógena de  $z$ . Por otra parte, si  $u$  y  $v$  satisfacen las condiciones opuestas de Cauchy - Riemann :

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x,$$

entonces, la función polígena  $w$  se llama, monógena inversa de  $z$  (o función monógena de  $\bar{z} = x - iy$ )

Si  $w$  es una función polígena de  $z$ , la relación entre  $z$  y  $w$  puede ser interpretada geoméricamente como una correspondencia entre los puntos del plano  $z$  y los puntos del plano  $w$ , la cual para una conveniente región del plano  $z$ , es biunívoca. Esta correspondencia es completamente general. En particular, la representación que establece el plano  $z$  sobre el plano  $w$  es conforme, o conforme inversa, según que la función polígena  $w$  sea monógena o monógena inversa.

En la teoría de funciones de variable compleja se prueba el teorema de que una función monógena de  $z$  puede ser desarrollada en serie de Taylor de la variable  $z$ . Y análogamente, una función monógena inversa de  $z$  puede ser desarrollada en serie de Taylor de la variable  $\bar{z}$ . Sin embargo, este no es, en general, el caso de una función polígena. Diremos que  $w$  es una función polígena analítica de la variable  $z$  si ambas componentes de  $w$ ,  $u$  y  $v$  pueden ser desarrolladas en serie de Taylor de  $x$  e  $y$ .

Se hace notar que una función polígena analítica puede ser desarrollada en serie de Taylor de  $z$  y  $\bar{z}$ . Las coordenadas mínimas  $z$  y  $\bar{z}$  están definidas por las relaciones:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy; \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

El desarrollo en serie de Taylor de una función polígena analítica  $w$ , contendrá solamente  $z$ , o solamente  $\bar{z}$  según que  $w$  sea monógena, o monógena inversa.

#### 4. LOS OPERADORES LINEALES D Y P

En el estudio de las derivadas de una función polígena — especialmente en el estudio de la derivada primera — desempeñan un importante papel dos operadores diferenciales lineales que definimos a continuación.

Para una función polígena  $w$  sea

$$w_{\bar{z}} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = D(w) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) w = \frac{1}{2} (w_x - iw_y)$$

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial z} = P(w) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w = \frac{1}{2} (w_x + iw_y)$$

De aquí se deduce,

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = (D + P)w = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)w = w_z + w_{\bar{z}}$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = (D - P)w = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)w = i(w_z - w_{\bar{z}}).$$

Hay que hacer constar que  $w_z$  (o  $w_{\bar{z}}$ ) no significa derivación parcial de  $w$  con respecto a  $z$  (o  $\bar{z}$ ) mientras se mantiene constante  $\bar{z}$  (o  $z$ ), sino simplemente la aplicación de los operadores lineales  $D$  (o  $P$ ) a  $w$ . Desde luego, si  $w$  es una función polígena analítica, entonces  $w_z = D(w)$  (o  $w_{\bar{z}} = P(w)$ ) es la derivada parcial de  $w$  respecto de  $z$  (o  $\bar{z}$ ).

El operador lineal  $P(w)$  coincide — salvo un factor constante — con la derivada « aerolar » considerada por Pompeiu (« Rendiconti di Palermo », vol. 33 ; 1912 y vol. 35, 1913).

Ambos operadores lineales son conmutativos. En esencia se obtiene el laplaciano,

$$PD(w) = DP(w) = w_{z\bar{z}} = w_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(w_{xx} + w_{yy}).$$

##### 5. LA PRIMERA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA $w$ , RESPECTO DE $z$

La expresión de la primera derivada de una función polígena  $w$  respecto de la variable  $z$  es la siguiente :

$$\gamma = \frac{dw}{dz} = \frac{w_x dx + w_y dy}{dx + idy} = \frac{w_x \cos \theta + w_y \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}$$

donde  $\theta$  es la inclinación de la tangente a la curva de aproximación, en el punto  $z$  considerado

Se observa que esta derivada (límite del cociente incremental  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ ) depende, en general, no solamente del punto  $z$  considerado, sino también de la dirección — determinada por la pendiente  $y'$ , o la inclinación — de la curva de aproximación. Es decir, la derivada  $\gamma$  de una función polígena es una función de  $z$  y  $\theta$ . Por tanto, esta primera derivada, tendrá en general, infinitos valores en cada

punto  $z$ . Solamente en el caso de la función monógena, esto es, cuando la función satisface las condiciones de Cauchy - Riemann, la derivada es única en cada punto.

A la expresión hallada de la primera derivada se le puede dar otra forma más sencilla introduciendo los dos operadores anteriormente definidos y teniendo en cuenta las fórmulas de Euler para las funciones circulares. Se obtiene así para ella la siguiente expresión :

$$\gamma = \frac{dw}{dz} = w_x + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta}$$

que es, con algunas diferencias en la notación, la forma en que aparece en la ya citada famosa disertación inaugural de RIEMANN.

Se puede llegar de una manera muy elegante a esta fórmula, según A. PROCA ha señalado, introduciendo como nuevas variables  $z$  y  $\bar{z}$ .

Toda función polígona es, (después del cambio), una función de  $z$ , por intermedio de  $z$  y  $\bar{z}$ , y se tiene,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta}$$

Otras formas también interesantes de la derivada primera son :

$$\gamma = \frac{w_x + y' w_y}{1 + i y'}; \quad \gamma = \frac{u_x + i v_x + y' (u_y + i v_y)}{1 + i y'}$$

$$\gamma = \left[ \frac{1}{2} (u_x + v_y) + \frac{i}{2} (-u_y + v_x) \right] + \left[ \frac{1}{2} (u_x - v_y) + \frac{i}{2} (u_y + v_x) \right] e^{-2i\theta}$$

esta última obtenida expresando los operadores lineales introducidos, en función de las derivadas parciales de las funciones reales  $u$  y  $v$ , con respecto a las variables  $x$  e  $y$

## 6. LA CIRCUNFERENCIA DE KASNER

Podemos considerar  $\frac{dw}{dz}$  como un punto de un plano complejo, que llamaremos plano  $\gamma$ .

La primera derivada  $\gamma$  de una función polígona posee las tres propiedades siguientes :

*Propiedad I.* La derivada  $\gamma$  de una función polígona  $w$  con respecto a  $z$ , en un punto general  $z$ , posee  $\infty^1$  valores, correspondientes a las distintas direcciones de las curvas de aproximación a  $z$ , valores que pueden ser considerados como puntos del plano  $\gamma$ . El lugar geométrico de estos puntos es una circunferencia. Esta circunferencia ha sido denominada por HEDRICK, *circunferencia de Kasner*.

*Propiedad II.* Para una función polígona (no monógena) cuando la tangente a la curva de aproximación en el punto  $z$ , gira alrededor de este punto, el punto correspondiente en la circunferencia de KASNER se mueve sobre ella con velocidad angular doble que la de aquella, y en opuesto sentido.

KASNER ha introducido la palabra « clock » para representar una circunferencia y un punto sobre la misma que llamaremos *punto fase principal* del clock y corresponde a la dirección del plano  $z$  paralela al eje  $x$ . Un « clock » está determinado por dos vectores, el *vector centro*, que determina el centro de la circunferencia, y el *vector radio fase*, cuyo módulo determina el radio de la misma. El punto fase principal está determinado por estos dos vectores.

La representación gráfica de la primera derivada de una función polígona es pues, más que una congruencia de circunferencias, una congruencia de « clocks ». Cuando el punto  $z$  varía, sobre el plano  $z$ , el centro de la circunferencia de KASNER, así como el punto fase principal, determinan sendas funciones de  $z$ .

*Propiedad III.* El punto fase principal del « clock » que representa la derivada de la función centro, coincide con el centro del « clock » que representa la derivada de la función punto fase principal.

Estas tres propiedades son características de la primera derivada de una función polígona como KASNER ha demostrado en 1.936 (« A complete characterization of the derivative of a polygenic function », Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 22).

## 7. LA DERIVADA SEGUNDA DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA

La segunda derivada  $\sigma = \frac{d^2w}{dz^2}$  de la función polígona  $w$  con respecto a  $z$ , en un punto fijo  $z = x + iy$ , cuando la variable  $z$  se aproxima a él según una curva arbitraria, está dada por la expresión siguiente :

$$\sigma = \frac{d^2 w}{dz^2} = w_{zz} + 2w_{z\bar{z}} w e^{-2i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} - 2i w_{\bar{z}} e^{-3i\theta} \kappa.$$

donde  $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$  y

$$w_{zz} = D^2(w) = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w = \frac{1}{4} (w_{xx} - w_{yy} - 2i w_{xy}),$$

$$w_{z\bar{z}} = DP(w) = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w = \frac{1}{4} (w_{xx} + w_{yy}),$$

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = P^2(w) = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w = \frac{1}{4} (w_{xx} - w_{yy} + 2i w_{xy}).$$

Obsérvese que la segunda derivada de una función polígena depende del punto  $z$  en el cual está formada, de la dirección  $\theta$  de la curva de aproximación en aquel punto, y de la curvatura de la misma en el punto considerado.

Para obtener la expresión de la segunda derivada en función de las derivadas parciales de  $w$  respecto de  $x$  e  $y$ , basta sustituir en la expresión antes obtenida para la segunda derivada, los valores en función de aquéllas, de  $w_{zz}$ ,  $w_{z\bar{z}}$  y  $w_{\bar{z}\bar{z}}$ .

Se obtiene la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{d^2 w}{dz^2} = & \frac{1}{4} (w_{xx} - w_{yy} - 2i w_{xy}) + \\ & + \frac{1}{2} (w_{xx} + w_{yy}) e^{-2i\theta} + \frac{1}{4} (w_{xx} - w_{yy} + 2i w_{xy}) e^{-4i\theta} - i (w_x + i w_y) e^{-3i\theta} \kappa. \end{aligned}$$

Finalmente, colocando  $w = u + iv$  en esta fórmula, encontramos la expresión,

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{d^2 w}{dz^2} = & \frac{1}{4} [(u_{xx} - u_{yy} + 2v_{xy}) + i (v_{xx} - v_{yy} - 2u_{xy})] + \frac{1}{2} [(u_{xx} + u_{yy}) + \\ & + i (v_{xx} + v_{yy})] e^{-2i\theta} + \frac{1}{4} [(u_{xx} - u_{yy} - 2v_{xy}) + i (v_{xx} - v_{yy} + 2u_{xy})] [e^{-4i\theta} - \\ & - i [(u_x - v_y) + i (v_x + u_y)] e^{-3i\theta} \kappa. \end{aligned}$$

Los tres primeros términos de la primera expresión encontrada para la derivada segunda pueden reunirse en la expresión simbólica,

$$w_{zz} + 2w_{z\bar{z}} e^{-2i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} = (w_z + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta})^2$$

donde los exponentes de  $w_x$  y de  $w_z$  deben ser substituidos por índices de derivación. Esta es la derivada segunda rectilínea, correspondiente a las rectas que pasan por el punto  $z$  considerado; es decir, si representamos el número complejo  $\sigma$  en un plano, los puntos que representan la derivada segunda de una función polígona cuando se consideran como curvas de aproximación todas las rectas del plano  $z$  que pasan por el punto considerado, forman una curva, que resulta ser un caracol de PASCAL.

Esta derivada segunda rectilínea de una función polígona ha sido estudiada por CALUGARÉANO (« Sur les fonctions polygenes d'une variable complexe », Tesis, Paris 1928. Comptes Rendus, vol. 186 (1928) Bulletin de la Société des Sciences de Cluj, vol. 14 (1928). Transactions of the American Mathematical Society, vol. 31 (1929); vol.32 (1930).

Por otra parte, Nicolesco ha estudiado la derivada segunda de una función polígona para dos diferentes curvas de aproximación rectilíneas (« Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace ». Tesis, Paris 1928).

Todavía vamos a obtener una expresión más para la derivada segunda, substituyendo en la segunda expresión obtenida los valores de,

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad z = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se llega a la siguiente fórmula :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} &= \frac{(1 + iy')(w_{xx} + 2w_{xy}y' + w_{yy}y'^2 + w_y y'') - (w_x + w_y y')iy''}{(1 + iy')^3} = \\ &= \frac{w_{xx} + 2w_{xy}y' + w_{yy}y'^2}{(1 + iy')^2} + \frac{w_y - iw_x}{(1 + iy')^3} y'' \end{aligned}$$

#### 8. LA TRANSFORMACIÓN INDUCIDA ENTRE EL PLANO DEL CENTRO DE CURVATURA Y EL PLANO DE LA DERIVADA SEGUNDA

Hemos visto que la derivada segunda de una función polígona  $w$  es una función del punto  $z$ , en el cual se estudia, y del elemento diferencial de segundo orden  $(y', y'')$  en aquel punto, de la curva de aproximación. Pero un elemento diferencial de segundo orden en el punto  $z = x + iy$  queda también determinado cuando se da el centro de curvatura  $Z = X + iY$  de la curva de aproximación.

Para un punto fijo  $z = x + iy$ , existen  $\infty^2$  centros de curvatura  $Z = X + iY$  incluyendo el punto fijo y los  $\infty^1$  de la recta del infinito. Definiremos como plano de los centros de curvatura al que contiene todos los centros de curvatura  $Z$  finitos e infinitos, excepto el punto fijo  $z$ . Todo punto de este plano viene determinado por valores finitos de  $\theta$  y  $\varkappa$ . Por tanto, se pueden considerar en las cantidades finitas  $\theta$  y  $\varkappa$  como coordenadas de un punto  $Z$  de este plano. La segunda derivada  $\sigma = \frac{d^2w}{dz^2}$  evaluada en un elemento diferencial de segundo orden es un número complejo. Después de eliminado el punto  $z$  como centro de curvatura, se observa que  $\sigma$  será siempre un número complejo finito. Definimos el plano de la segunda derivada como consistente de todos los números complejos finitos  $\sigma$ .

La segunda derivada  $\sigma = \frac{d^2w}{dz^2}$  define una transformación elemento-curvatura a punto, que transforma los elementos de curvatura  $(z, Z)$ , con  $Z \neq 0$  del plano  $z$  en los puntos del plano  $\sigma$ . Esta transformación está asociada con la segunda derivada. Si se fija el punto  $z$ , la transformación considerada induce otra puntual entre el plano del centro de curvatura y el plano  $\sigma$  de la derivada segunda, y que llamaremos  $\Sigma$ . Esta transformación es función de la función polígona  $w$  y del punto  $z$ . A continuación damos algunas propiedades de esta transformación.

*Teorema 1.* La transformación puntual  $\Sigma$ , asociada a una función polígona y a un punto  $z$ , es degenerada, cuando, y solamente cuando, la función es monógena en el punto.

*Teorema 2.* En la transformación  $\Sigma$  existe una cardioide  $E$ , en el plano  $\sigma$  la cual corresponde en el plano  $Z$  a una sección cónica  $Q$ , y a una línea recta tangente a  $Q$ . El punto común de las mismas corresponde al polo de  $E$  y recíprocamente.

*Teorema 3.* Consideremos la cardioide  $E$ , la cónica  $Q$  y la línea recta  $L$  del teorema anterior. Mediante la transformación  $\Sigma$  a todo punto  $\sigma$  en el exterior de  $E$ , corresponden tres puntos distintos (reales) en el plano  $Z$ . Un punto  $\sigma$  en el interior de  $E$ , tiene como correspondiente un único punto real. A un punto en  $E$  corresponde un único punto (doble) en  $L$  y un punto simple en  $Q$ .

*Teorema 4.* Bajo la transformación  $\Sigma$ , a una línea recta del plano  $Z$  que pasa por el punto fijo  $z$ , le corresponde en el plano  $\sigma$  una línea recta, tangente a la cardioide  $E$ . Recíprocamente, si  $E$

no es un punto, a una recta tangente corresponde una única recta en el plano  $Z$  que pasa por el punto fijo  $z$ . Si  $E$  es el punto  $A$ , entonces a una recta del plano  $\sigma$  que pase por  $A$ , le corresponden en el plano  $Z$ , tres líneas rectas a través del punto fijo  $z$  que forman entre ellas ángulos de  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ .

Para el estudio de la geometría de la segunda derivada de una función polígona se puede consultar el artículo de KASNER: « The second derivative of a polygenic function », Transactions of the American Mathematical Society, vol. 30 (1928).

### LA DERIVADA TERCERA DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA

#### 9. DIVERSAS EXPRESIONES DE LA TERCERA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA $w$ DE LA VARIABLE $z$

Consideremos una función polígona  $w = u + iv$  de la variable compleja  $z = x + iy$ . Suponemos que la función es continua y posee derivadas parciales continuas hasta el tercer orden.

La expresión de la segunda derivada de esta función, respecto de  $z$  es como hemos visto,

$$\frac{d^2w}{dz^2} = w_{zz} + 2w_{z\bar{z}} e^{-2i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} - 2iw_{z\bar{z}} e^{-3i\theta} \kappa$$

Deseamos hallar ahora la expresión de la tercera derivada  $\tau = \frac{d^3w}{dz^3}$  de la función polígona  $w$ , respecto de  $z$ , en un punto fijo  $z = x + iy$ , cuando el punto variable  $z$  se aproxima a él siguiendo una curva arbitraria.

Para obtenerla, basta derivar respecto de  $z$ , la expresión citada de la derivada segunda.

Se obtiene :

$$\begin{aligned} \tau = \frac{d^3w}{dz^3} = & \frac{dw_{zz}}{dz} + 2 \frac{dw_{z\bar{z}}}{dz} e^{-2i\theta} - 4iw_{z\bar{z}} e^{-2i\theta} \frac{d\theta}{dz} + \\ & + \frac{dw_{\bar{z}\bar{z}}}{dz} e^{-4i\theta} - 4iw_{z\bar{z}} e^{-4i\theta} \frac{d\theta}{dz} - 2i \frac{dw_{z\bar{z}}}{dz} e^{-3i\theta} \kappa - 6w_{z\bar{z}} e^{-3i\theta} \frac{d\theta}{dz} \kappa - 2iw_{z\bar{z}} e^{-3i\theta} \frac{d\kappa}{dz} \end{aligned}$$

Pero,

$$\frac{dw_{zz}}{dz} = w_{zzz} + w_{zz\bar{z}} e^{-2i\theta}; \quad \frac{dw_{z\bar{z}}}{dz} = w_{zz\bar{z}} + w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}$$

$$\frac{dw_{z\bar{z}}}{dz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} + w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}; \quad \frac{dw_{\bar{z}\bar{z}}}{dz} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}$$

y

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{ds} : \frac{dz}{ds} = \frac{d\theta}{ds} : \left( \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} \right) = \kappa : (\cos \theta + i \sin \theta) = \kappa e^{-i\theta}$$

$$\frac{d\kappa}{dz} = \frac{d\kappa}{ds} : \frac{dz}{ds} \quad \text{y haciendo } \frac{d\kappa}{ds} = \varepsilon, \quad \frac{d\kappa}{dz} = \varepsilon e^{-i\theta}, \text{ donde } \theta$$

es la inclinación de la curva de aproximación,  $\kappa$  la curvatura de la misma y  $\varepsilon = -\frac{3y'y''^2}{(1+y'^2)^3} + \frac{y'''}{(1+y'^2)^2}$ , siendo  $y', y'', y'''$ , las derivadas referidas a la curva de aproximación:  $y = f(x)$ .

Tenemos así para expresión de la tercera derivada de una función polígona, la siguiente:

$$\tau = \frac{d^3 w}{dz^3} = w_{zzz} + 3 w_{zz\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta} - 6 i e^{-3i\theta} \kappa (w_{z\bar{z}} + w_{z\bar{z}} e^{-2i\theta}) - 6 w_{\bar{z}} e^{-i\theta} \kappa^2 - 2 i w_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \varepsilon. \quad (1)$$

que se puede escribir en forma más breve teniendo en cuenta que,  $w_{zzz} + 3 w_{zz\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}$ , puede considerarse como el desarrollo simbólico de  $(w_z + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta})^{(3)}$  y que  $w_{z\bar{z}} + w_{z\bar{z}} e^{-2i\theta} = \frac{dw_z}{dz}$ , en la forma:

$$\tau = \frac{d^3 w}{dz^3} = (w_z + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta})^{(3)} - 6 i e^{-3i\theta} \kappa \frac{dw_z}{dz} - 6 w_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \kappa^2 - 2 i w_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \varepsilon. \quad (1')$$

Obsérvese que la derivada tercera de una función polígona  $w$ , respecto de  $z$ , depende del punto fijo  $z = x + iy$  en el cual se considera y de las derivadas  $y', y'', y'''$  de la curva de aproximación, pero no de las derivadas de orden superior.

La expresión (1) representa la tercera derivada  $\tau = \frac{d^3 w}{dz^3}$  de una función polígona  $w$  con respecto a la variable  $z$ . Esta derivada depende del punto  $z$  y del elemento diferencial de tercer orden de la curva de aproximación.

Vamos a obtener ahora la expresión de la tercera derivada

$\tau = \frac{d^3 w}{dz^3}$  en función de las derivadas parciales de  $w = u + iv$  con respecto a  $x$  e  $y$ . Para ello calculemos  $w_{zzz}$ ,  $w_{z\bar{z}\bar{z}}$ ,  $w_{z\bar{z}z}$  y  $w_{\bar{z}\bar{z}z}$ .

$$\begin{aligned} w_{zzz} &= D^3(w) = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 w = \frac{1}{8} [(w_{xxx} - 3w_{xyy}) - i(3w_{xxy} - w_{yyy})] \\ w_{z\bar{z}\bar{z}} &= D^2 P(w) = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w = \frac{1}{8} [(w_{xxx} + w_{xyy}) - i(w_{xxy} + w_{yyy})] \\ w_{z\bar{z}z} &= DP^2(w) = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w = \frac{1}{8} [(w_{xxx} + w_{xyy}) + i(w_{xxy} + w_{yyy})] \\ w_{\bar{z}\bar{z}z} &= P^3(w) = \frac{1}{8} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 w = \frac{1}{8} [(w_{xxx} - 3w_{xyy}) + i(3w_{xxy} - w_{yyy})] \end{aligned}$$

Se obtiene así para expresión de la derivada tercera,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d^3 w}{dz^3} = \frac{1}{8} [(w_{xxx} - 3w_{xyy}) - i(w_{xxy} - w_{yyy})] + \\ &\quad + \frac{3}{8} [(w_{xxx} + w_{xyy}) - i(w_{xxy} + w_{yyy})] e^{-2i\theta} + \\ &\quad + \frac{3}{8} (w_{xxx} + w_{xyy}) + i(w_{xxy} + w_{yyy}) e^{-4i\theta} + \\ &\quad + [(w_{xxx} - 3w_{xyy}) + i(3w_{xxy} - w_{yyy})] e^{-6i\theta} - 6i e^{-3i\theta} \kappa \left[ \frac{1}{4} (w_{xx} + w_{yy}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (w_{xx} - w_{yy} + 2iw_{xy}) e^{-2i\theta} \right] - 3(w_x + iw_y) e^{-4i\theta} \kappa^2 - i(w_x + iw_y) e^{-4i\theta} \epsilon. \quad (2) \end{aligned}$$

Obtenemos a continuación la expresión de la derivada tercera en función de las derivadas parciales de las funciones reales  $u$  y  $v$  respecto de  $x$  e  $y$ .

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d^3 w}{dz^3} = \frac{1}{8} [(u_{xxx} - 3u_{xyy} + v_{xxy} - v_{yyy}) + i(v_{xxx} - 3v_{xyy} - u_{xxv} + u_{yyy})] + \\ &\quad + \frac{3}{8} [(u_{xxx} + u_{xyy} + v_{xxy} + v_{yyy}) + i(v_{xxx} + v_{xyy} - u_{xxy} - u_{yyy})] e^{-2i\theta} + \\ &\quad + \frac{3}{8} [(u_{xxx} + u_{xyy} - v_{xxy} - v_{yyy}) + i(v_{xxx} + v_{xyy} + u_{xxy} + u_{yyy})] e^{-4i\theta} + \\ &\quad + [(u_{xxx} - 3u_{xyy} - v_{xxy} + v_{yyy}) + i(v_{xxx} - 3v_{xyy} + u_{xxy} - u_{yyy})] e^{-6i\theta} - \\ &\quad - 6i e^{-3i\theta} \kappa \left\{ \frac{1}{4} [(u_{xx} + u_{yy}) + i(v_{xx} + v_{yy})] + \frac{1}{4} [(u_{xx} - u_{yy} - 2v_{xy}) + \right. \\ &\quad \left. + i(v_{xx} - v_{yy} + 2u_{xy})] e^{-2i\theta} \right\} - 3[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)] e^{-4i\theta} \kappa^2 + \\ &\quad + [(v_x + u_y) - i(u_x - v_y)] e^{-4i\theta} \epsilon. \quad (3) \end{aligned}$$

De la fórmula (2) y mediante el cambio de variables :

$$\theta = \text{arc} \cdot \text{tg} \cdot y'; \quad \varkappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \varepsilon = \frac{y'''}{(1+y'^2)^2} - \frac{3y'y''^2}{(1+y'^2)^3}$$

obtenemos finalmente, la siguiente fórmula para la derivada tercera — en función de las tres primeras derivadas de la curva de aproximación  $y = f(x)$  :

$$\begin{aligned} \tau = \frac{d^3w}{dz^3} = & \frac{w_{xxx} + 3w_{xxy}y' + 3w_{xyy}y'^2 + w_{yyy}y'^3}{(1+iy')^3} + 2y'' \frac{w_{xy} - w_{yy}y'}{(1+iy')^3} - \\ & - 2iy'' \frac{w_{xx} + 2w_{xy}y' + w_{yy}y'^2}{(1+iy')^4} + \frac{(w_{xy} + w_{yy}y') - i(w_{xx} + w_{xy}y')}{(1+iy')^4} y'' - \\ & - 3i \frac{w_y - iw_x}{(1+iy')^5} y''^2 + \frac{w_y - iw_x}{(1+iy')^4} y''' \end{aligned} \quad (4)$$

Análogamente, se pasa de esta fórmula a la (2) mediante el siguiente cambio de variables :

$$y' = \text{tg} \cdot \theta; \quad y'' = \frac{\varkappa}{\cos^3 \theta}; \quad y''' = \frac{\varepsilon + 3\varkappa \text{sen} \theta \cos^2 \theta}{\cos^4 \theta}$$

Como comprobación de la fórmula (4) puede esta obtenerse directamente derivando con respecto a  $z$ , la siguiente expresión de la derivada segunda,

$$\sigma = \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{w_{xx} + 2w_{xy}y' + w_{yy}y'^2}{(1+iy')^2} + \frac{w_y - iw_x}{(1+iy')^3} y''$$

En relación con las fórmulas (1) y (1') hay que hacer constar que  $w_{zzz}$ ,  $w_{z\bar{z}\bar{z}}$ ,  $w_{z\bar{z}z}$ , y  $w_{z\bar{z}z}$  no son las derivadas parciales de  $w$  respecto de  $z$  y  $\bar{z}$ , sino que simplemente expresan la aplicación reiterada de los operadores lineales  $D$  y  $P$ . Desde luego, si  $w$  es una función polígena analítica, entonces aquellas expresiones son las derivadas parciales de tercer orden de la función  $w$  respecto de las variables  $z$  y  $\bar{z}$ .

*Ejemplos.* 1. Hallar la derivada tercera de la función polígena,

$$w = z^3 + 3z\bar{z} + 7\bar{z}^2$$

Sustituyendo en la fórmula (1) los valores de

$$w_{\bar{z}} = 3z + 14\bar{z}; w_{z\bar{z}} = 3; w_{z\bar{z}} = 14; w_{zzz} = 6; w_{zz\bar{z}} = w_{z\bar{z}z} = w_{\bar{z}zz} = 0$$

obtenemos para valor de la derivada tercera el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^3w}{dz^3} &= 6 - 6ie^{-3i\theta}\kappa(3 + 14e^{-2i\theta}) - 6(3z + 14\bar{z})e^{-4i\theta}\kappa^2 - \\ &\quad - 2i(3z + 14z)e^{-4i\theta}\varepsilon. \end{aligned}$$

2. Hallar el valor de la derivada tercera de la función del ejemplo anterior, para el elemento diferencial de tercer orden, ( $y' = 1$ ,  $y'' = 2$ ,  $y''' = 5$ ) de la curva de aproximación.

Sustituyendo en la fórmula obtenida en el ejercicio anterior los valores de

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \varepsilon = \frac{5\sqrt{2}-6}{4}, e^{-2i\theta} = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i, e^{-3i\theta} = e^{-\frac{3\pi}{4}i} = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \text{ y } e^{-4i\theta} = e^{-\pi i} = -1, \text{ tenemos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3w}{dz^3} &= 6 - 6i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(3 - 14i) - (18z - 84\bar{z})\frac{1}{2} + \\ &+ 2i(3z - 14\bar{z})\frac{5\sqrt{2}-6}{4} = 51 - 33i + (9z - 42\bar{z})\frac{5\sqrt{2}-6}{4} (3z + \\ &+ 14\bar{z})i = 51 - 33i + \frac{5\sqrt{2}-6}{2}(27z^2 - 84\bar{z}^2)i, \end{aligned}$$

función solamente del punto  $z$ . En el origen del plano  $z$ , es  $z = \bar{z} = 0$  y el valor de la derivada tercera es entonces

$$\frac{d^3w}{dz^3} = 51 - 33i$$

3. En el mismo ejemplo de los casos anteriores hallar la derivada tercera en el origen del plano  $z$ , cuando la curva de aproximación es la  $y = x^3$ .

En este caso es  $y'_0 = y''_0 = 0$ ,  $y'''_0 = 6$  y la derivada tercera se reduce al valor real

$$\frac{d^3w}{dz^3} = 6$$

En lo que sigue haremos más extensivo uso de la expresión (1) encontrada para la derivada tercera que de las otras fórmulas.

Hemos visto que la tercera derivada de una función polígena depende, en general, de  $y'''$  así como de  $y'$  e  $y''$ . Será independiente de  $y'''$  cuando la función  $w$  es monógena. Además, como siendo  $w_z = 0$  son:  $w_{zz} = w_{z\bar{z}} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{z\bar{z}z} = w_{\bar{z}zz} = 0$  la derivada será también independiente de  $y'$  e  $y''$ . La derivada tercera tiene entonces por valor único en cada punto:

$$\frac{d^3w}{dz^3} = w_{zzz}$$

*Solamente cuando la función es monógena, la derivada tercera es única.*

De lo que llevamos dicho se deduce que la derivada tercera de una función polígena, en un punto, es la misma cuando se consideran curvas de aproximación que tengan un contacto de tercer orden en el punto considerado. Esta derivada es la misma a lo largo de la parábola osculatriz de aquellas curvas, en el punto. Y por tanto tendremos hallados todos los posibles valores de la derivada tercera con sólo considerar como curvas de aproximación parábolas de segundo orden.

La expresión (1) de la derivada tercera obtenida anteriormente puede descomponerse en tres términos de la manera siguiente:

$$(5) \quad \tau = \frac{d^3w}{dz^3} = \tau_1(\theta) + \tau_2(\theta, \kappa) + \tau_3(\theta, \varepsilon) \quad \text{en que}$$

$$\tau_1(\theta) = (w_z + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta})^{(3)} = w_{zzz} + 3w_{z\bar{z}z} e^{-2i\theta} + 3w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}.$$

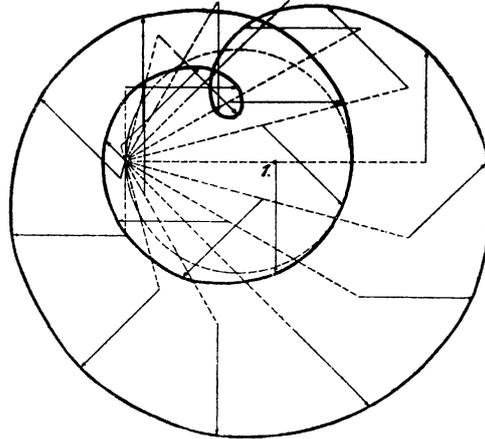
$$\tau_2(\theta, \kappa) = -6i e^{-3i\theta} \kappa (w_{z\bar{z}} + w_{\bar{z}z} e^{-2i\theta}) - 6w_{\bar{z}z} e^{-4i\theta} \kappa^2.$$

$$\tau_3(\theta, \varepsilon) = -2i w_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \varepsilon.$$

Supondremos representados los valores de la derivada tercera en el plano complejo  $\tau$ . A cada valor de aquella derivada corresponde en este plano un punto, o bien un vector. Este vector puede ser obtenido como suma de los tres vectores  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ .

El primer término de la expresión (5)  $\tau_1(\theta)$  representa la *derivada tercera rectilínea*. Corresponde al caso en que las líneas de aproximación al punto  $z$  sean líneas rectas.

La suma  $\tau_1 + \tau_2$  de los dos primeros términos representa la *derivada tercera circular* cuando las curvas de aproximación al punto  $z$  son circunferencias que pasan por dicho punto.



Derivada tercera de la función polígona:  $W = \frac{2z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + 3i\bar{z}^3}{6}$  para  $z = 1$   
 $\tau_1(t) = 2t + 3t^2 + 3it^3$ ;  $\tau_2(\theta, \kappa) = (18 - 16i)\kappa - (8 + 9i)\kappa^2$ ;  $\tau_3(\theta, \varepsilon) = \frac{9 - 8i}{3}\varepsilon$

FIGURA 1

Por último, el valor  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$  representa la derivada tercera general de la función polígona o *derivada tercera parabólica*, pues se pueden considerar simplemente como curvas de aproximación parábolas pasando por el punto dado (ver figura 1).

### LA DERIVADA TERCERA RECTILÍNEA

#### 10. ORDEN Y CLASE DE LA CURVA $\tau_1(\theta)$

Cuando se consideran como curvas de aproximación al punto  $z$ , líneas rectas que pasan por este punto, el valor de la derivada tercera  $\tau$  queda reducido al primer término de la expresión (5), denominado derivada tercera rectilínea. Al haz de rectas con vértice en el punto  $z$ , corresponde en el plano complejo una curva  $\tau_1(\theta)$ . El estudio de esta constituirá el primer objetivo de nuestro trabajo.

Para comenzar hagamos un cambio de variable,  $e^{-2i\theta} = t$ , en la expresión de la curva

$$\tau_1(\theta) = w_{zzz} + 3w_{zz} e^{-2i\theta} + 3w_{z\bar{z}} e^{-4i\theta} \times w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}.$$

que toma la siguiente forma,

$$\tau_1(t) = w_{zzz} + 3w_{zz} t + 3w_{z\bar{z}} t^2 + w_{\bar{z}\bar{z}} t^3.$$

Supongamos ahora que,

$$a = w_{zzz}; \quad b = 3w_{zz}; \quad c = 3w_{z\bar{z}}; \quad \text{y} \quad d = w_{\bar{z}\bar{z}}.$$

Si suponemos que el punto  $z$  del plano  $z$  es fijo, las cantidades  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números complejos constantes.

Nos proponemos estudiar la curva  $\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3$  cuando la variable compleja  $t$  describe la circunferencia de radio unidad y centro en el origen.

Observamos primeramente que es muy fácil obtener una representación geométrica de esta curva a partir de la del caracol de PASCAL de ecuación  $z = a + bt + ct^2$ , donde  $a$  es el centro del círculo base,  $|c|$  el radio de este círculo y  $|b|$  la longitud característica del caracol de PASCAL. El polo del mismo es el punto  $\sigma = a - \frac{\bar{c}b}{b}$ .

Cuando el radio del círculo que tiene su extremo en  $t$ , gira en el plano  $z$ , el vector que tiene su origen en el polo del caracol y su extremo en el punto variable  $z$ , gira en el mismo sentido con la misma velocidad angular.

Para obtener la curva  $\tau_1$  bastará añadir en el extremo del vector  $z$  el vector  $dt^3$  de módulo  $|d|$  que gira con velocidad angular triple que la de  $t$ . El caracol de PASCAL se convierte en una cardioide cuando  $|c| = \frac{|b|}{2}$ . Las funciones polígenas que tienen una cardioide en vez de caracol base, son aquellas que cumplen la condición  $|w_{z\bar{z}}| = \frac{|w_{\bar{z}\bar{z}}|}{2}$ .

Vamos a demostrar a continuación que la curva  $\tau_1$  es de sexto orden.

Para probarlo consideremos la ecuación paramétrica de la curva y su conjugada,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= a + bt + ct^2 + dt^3 \\ \bar{\tau}_1 &= \frac{\bar{a}t^3 + \bar{b}t^2 + \bar{c}t + \bar{d}}{t^3} \quad \text{o} \quad t^3 \bar{\tau}_1 = \bar{a}t^3 + \bar{b}t^2 + \bar{c}t + \bar{d} \end{aligned}$$

Basta ahora eliminar  $t$  entre estas dos ecuaciones para lo cual multiplicamos ambas por 1,  $t$  y  $t^2$ , obteniendo el sistema :

$$\begin{aligned} a - \tau_1 + bt + ct^2 + dt^3 &= 0 \\ (a - \tau_1)t + bt^2 + ct^3 + dt^4 &= 0 \\ (a - \tau_1)t^2 + bt^3 + ct^4 + dt^5 &= 0 \\ \bar{d} + \bar{c}t + \bar{b}t^2 + (\bar{a} - \bar{\tau}_1)t^3 &= 0 \\ \bar{d}t + \bar{c}t^2 + \bar{b}t^3 + (\bar{a} - \bar{\tau}_1)t^4 &= 0 \\ \bar{d}t^2 + \bar{c}t^3 + \bar{b}t^4 + (\bar{a} - \bar{\tau}_1)t^5 &= 0 \end{aligned}$$

de las que por eliminación de  $t, t^2, t^3, t^4$  y  $t^5$  se obtiene para la ecuación de la curva  $\tau_1$  en coordenadas mínimas, la siguiente :

$$\begin{vmatrix} a - \tau_1 & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a - \tau_1 & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a - \tau_1 & b & c & d \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{b} & \bar{a} - \bar{\tau}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d} & \bar{c} & \bar{b} & \bar{a} - \bar{\tau}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d} & \bar{c} & \bar{b} & \bar{a} - \bar{\tau}_1 \end{vmatrix} = 0$$

ecuación de sexto grado en  $\tau_1, \bar{\tau}_1$  ya que el término de mayor grado es

$$(a - \tau_1)^3 (\bar{a} - \bar{\tau}_1)^3 = \bar{\tau}_1^3 \tau_1^3 + \dots$$

Para obtener la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas bastará poner  $\tau_1 = x + iy, \bar{\tau}_1 = x - iy$ , obteniendo para término de mayor grado,

$$(x^2 + y^2)^3$$

Damos a continuación otra prueba de que la curva  $\tau_1$  es de sexto orden. En la expresión de la curva :

$$\tau_1(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$$

reemplacemos  $t$  por  $x + iy$  y  $\tau_1$  por  $X + iY$  y supongamos por un momento que  $x$  e  $y$  son variables independientes, en lugar de hacerlas cumplir la relación:  $x^2 + y^2 = 1$ , que hace  $t = e^{-i\theta}$ . Entonces  $\tau_1 = X + iY$  toma  $\infty^2$  valores cuando  $x$  e  $y$  varían, y tenemos una transformación puntual entre el plano  $(x, y)$  y el plano  $(X, Y)$ . Descomponiendo en parte real e imaginaria, vemos que  $X$  e  $Y$  son fun-

ciones enteras de tercer grado en  $x$  e  $y$ , de tal manera que a cada recta del plano  $(X, Y)$  corresponde una cierta curva de tercer grado en el plano  $(x, y)$ . La curva descrita por  $\tau_1 = X + iY$  es la curva del plano transformada mediante la transformación descrita, de la circunferencia:  $x^2 + y^2 = 1$ , del plano  $(x, y)$ . Esta circunferencia es cortada por una de las curvas de tercer orden correspondientes a las rectas del plano  $(X, Y)$  a lo sumo en seis puntos que varían con la curva elegida. Por lo tanto, en virtud de la correspondencia establecida, la curva descrita por  $\tau_1 = X + iY$  es cortada por una recta de su plano en seis puntos como máximo. Teniendo la expresión de  $\tau_1(t)$  como caso límite — por variación continua de los coeficientes — la curva

$$\tau_1^* = d t^3$$

en la que el punto  $\tau_1^*$  describe la circunferencia de radio  $|d|$  tres veces, cuando  $\theta$  varía de 0 a  $2\pi$ , la curva debe ser considerada como una curva de sexto orden. El mínimo orden de la curva, es pues, el sexto; y como ha sido probado que esta es también su orden máximo, queda probado que el orden de la curva  $\tau_1(t)$  es seis.

Hacemos constar, que aunque la curva es de sexto orden, como la expresión que aparece en la curva  $\tau_1(t)$  es realmente  $t = e^{-i\theta}$  en lugar de  $t = e^{-i\theta}$ , esta curva es recorrida dos veces cuando el ángulo  $\theta$  de inclinación, en el plano  $z$ , varía de una manera continua de 0 a  $2\pi$ .

*Los valores de la derivada tercera rectilínea de una función polígona  $w$  correspondientes a las diferentes pendientes de las rectas que pasan por el punto  $z$ , están representados en el plano complejo  $\tau$  por los puntos de una curva algebraica de sexto orden, sin ramas asintóticas.*

Vamos a hallar a continuación la ecuación tagencial de la curva  $\tau_1$ . Sea la ecuación de la curva,

$$\tau_1 = a + b t + c t^2 + d t^3$$

Para dos puntos  $t$  y  $t_1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= a + b t + c t^2 + d t^3 \\ \tau_1^* &= a + b t_1 + c t_1^2 + d t_1^3 \end{aligned}$$

El vector  $\tau_1 \tau_1^*$  es entonces,

$$\begin{aligned} \tau_1^* - \tau_1 &= b(t - t_1) + c(t^2 - t_1^2) + d(t^3 - t_1^3) \\ \tau_1^* - \tau_1 &= (t - t_1)[b + c(t + t_1) + d(t^2 + t t_1 + t_1^2)]. \end{aligned}$$

Cuando  $t_1$  se aproxima a  $t$  a lo largo de la circunferencia de radio unidad,  $t_1 - t$  tiende a la dirección límite  $\pm it$ , donde el signo depende de la posición de  $t_1$  respecto de  $t$ . Así, cuando  $\tau_1^*$  se aproxima a  $\tau_1$ ,  $\tau_1^* - \tau_1$  tiende a la dirección límite,  $\pm it (b + 2ct + 3dt^2) = \pm it \frac{d\tau_1}{dt}$ .

La tangente de la curva  $\tau_1$  en el punto correspondiente al valor  $t$  del parámetro será:

$$\begin{aligned} \tau_1 - a - bt - ct^2 - dt^3 &= \\ &= \frac{it(b + 2ct + 3dt^2)}{i \frac{1}{t} \left( \bar{b} + 2\bar{c} \frac{1}{t} + 3\bar{d} \frac{1}{t^2} \right)} \left( \bar{\tau}_1 - \bar{a} - \bar{b} \frac{1}{t} - \bar{c} \frac{1}{t^2} - \bar{d} \frac{1}{t^3} \right) = \\ &= \frac{t(b + 2ct + 3dt^2)}{\bar{b}t^2 + 2\bar{c}t + 3\bar{d}} (t^3 \bar{\tau}_1 - \bar{a}t^3 - \bar{b}t^2 - \bar{c}t - \bar{d}): \end{aligned}$$

y quitando denominadores obtenemos para ecuación de la tangente a la curva  $\tau_1$  en el punto correspondiente al valor  $t$  del parámetro:

$$\begin{aligned} (\bar{b}t^2 + 2\bar{c}t + 3\bar{d})\tau_1 - (bt^4 + 2ct^5 + 3dt^6)\bar{\tau}_1 - (a + bt + ct^2 + dt^3)(\bar{b}t^2 + 2\bar{c}t + 3\bar{d}) + \\ + (bt + 2ct^2 + 3dt^3)(\bar{a}t^3 + \bar{b}t^2 + \bar{c}t + \bar{d}) = 0 \end{aligned}$$

Para un valor de  $\tau_1$  esta ecuación es de sexto grado en  $t$ . Cuando las raíces están todas en la circunferencia de radio unidad habrá seis tangentes a la curva que pasan por el punto  $\tau_1$ . La curva  $\tau_1$  es pues de sexta clase.

*La curva  $\tau_1$  que representa la derivada tercera rectilínea de una función polígona es de sexta clase.*

## 11. PUNTOS DOBLES DE LA CURVA $\tau_1$

La ecuación de la curva  $\tau_1$  es, después de desarrollada de la siguiente forma:

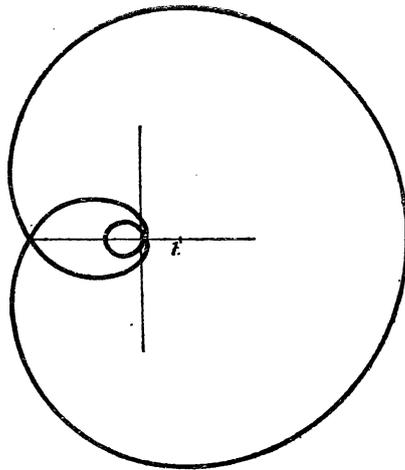
$$(a - \tau_1)^3 (\bar{a} - \bar{\tau}_1)^3 + (a - \tau_1)^2 (\bar{a} - \bar{\tau}_1)^2 ( ) + (a - \tau_1) (\bar{a} - \bar{\tau}_1) + ( ) = 0$$

o, en coordenadas cartesianas,

$$(x^2 + y^2)^3 + (x^2 + y^2)^2 ( ) + (x^2 + y^2) ( ) + ( ) = 0$$

Se puede observar que esta curva pasa por los puntos circulares del plano y que tiene en cada uno de ellos un punto triple.

Siendo diez el número máximo de puntos dobles que puede tener una curva algebraica de sexto orden sin que degenera y teniendo la que estamos estudiando dos puntos triples en los puntos circulares del plano, podrá poseer además cuatro puntos dobles reales como máximo, o bien, un punto triple y uno doble.



Curva  $\tau_1(t) = 2t + 3t^2 + 2t^3$  derivada rectilínea de la función

$$W = \frac{2z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + 2\bar{z}^3}{6}$$

FIGURA 2

Para un valor dado de  $\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^2$ , existen tres valores de  $t$  correspondientes, valores que, en general, no estarán sobre la circunferencia de radio unidad. Para que existan puntos dobles sobre la curva  $\tau_1$  es necesario buscar los valores ( $|t_1| = |t_2| = 1$ ) que satisfacen a la ecuación:

$$a + bt_1 + ct_1^2 + dt_1^3 = a + bt_2 + ct_2^2 + dt_2^3$$

o, su equivalente

$$b(t_1 - t_2) + c(t_1^2 - t_2^2) + d(t_1^3 - t_2^3) = 0$$

Esta ecuación es, a su vez, equivalente a la siguiente,

$$b + c(t_1 + t_2) + d(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 0 \tag{6}$$

si suponemos que  $t_1 \neq t_2$ , con lo cual excluimos el caso de los puntos de retroceso, que estudiaremos en párrafo aparte.

Ha de verificarse asimismo, la ecuación conjugada :

$$\bar{b} + \bar{c} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) + \bar{d} \left( \frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_1 t_2} + \frac{1}{t_2^2} \right) = 0 \quad (7)$$

En este punto introducimos, para simplificar, las siguientes funciones simétricas :

$$s_1 = t_1 + t_2 \quad \text{y} \quad s_2 = t_1 t_2$$

cuyas conjugadas son, respectivamente,

$$\bar{s}_1 = \frac{s_1}{s_2} \quad \text{y} \quad \bar{s}_2 = \frac{1}{s_2}$$

con las cuales las dos ecuaciones (6) y (7) se convierten en :

$$b + c s_1 + d (s_1^2 - s_2) = 0 \quad (6')$$

$$\bar{b} s_2^2 + \bar{c} s_1 s_2 + \bar{d} (s_1^2 - s_2) = 0 \quad (7')$$

Multiplicando la primera por  $\bar{d}$ , la segunda por  $d$  y restando, obtenemos

$$b \bar{d} + c \bar{d} s_1 - d \bar{b} s_2^2 - d \bar{c} s_1 s_2 = 0$$

de donde

$$s_1 = \frac{d \bar{b} s_2^2 - b \bar{d}}{c \bar{d} - d \bar{c} s_2}$$

que sustituida en (6') conduce a

$$b + c \frac{d \bar{b} s_2^2 - b \bar{d}}{c \bar{d} - d \bar{c} s_2} + d \left[ \left( \frac{d \bar{b} s_2^2 - b \bar{d}}{c \bar{d} - d \bar{c} s_2} \right)^2 - s_2 \right] = 0$$

que, quitando denominadores,

$$b (c \bar{d} - d \bar{c} s_2)^2 + c (d \bar{b} s_2^2 - b \bar{d}) (c \bar{d} - d \bar{c} s_2) + d (d \bar{b} s_2^2 - b \bar{d})^2 - d s_2 (c \bar{d} - d \bar{c} s_2)^2 = 0$$

y que ordenada conduce a la siguiente :

$$d^2 \bar{b}^2 s_2^4 - (\bar{b} c \bar{c} d + \bar{c}^2 d^2) s_2^3 + (b \bar{c}^2 d + \bar{b} c^2 \bar{d} - 2 b \bar{b} d \bar{d} + 2 c \bar{c} d \bar{d}) s_2^2 - (b c \bar{c} \bar{d} + c^2 \bar{d}^2) s_2 + b^2 \bar{d}^2 = 0. \quad (8)$$

Esta ecuación cumple idénticamente la condición para que sus raíces estén en la circunferencia de radio unidad o bien sean, a pares, puntos inversos respecto de la misma, ya que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{b}^2}{\bar{d}^2 \bar{b}^2} &= \frac{\bar{b} c \bar{c} d + \bar{c}^2 d^2}{\bar{b} c \bar{c} d + \bar{c}^2 d^2} = \frac{b \bar{c}^2 d + \bar{b} c^2 \bar{d} - 2 b \bar{b} d \bar{d} + 2 c \bar{c} d \bar{d}}{\bar{b} c^2 \bar{d} + b \bar{c}^2 d - 2 b \bar{b} d \bar{d} + 2 c \bar{c} d \bar{d}} = \\ &= \frac{b c \bar{c} \bar{d} + c^2 \bar{d}^2}{b c \bar{c} \bar{d} + c^2 \bar{d}^2} = \frac{b^2 \bar{d}^2}{b^2 \bar{d}^2} = 1. \end{aligned}$$

La ecuación obtenida (8) de cuarto grado en  $s_2$  tiene cuatro raíces que pueden estar, o bien las cuatro en la circunferencia de radio unidad, o dos raíces en esta circunferencia y dos ser puntos inversos respecto de la misma, o sólo dos pares. También puede ocurrir que coincidan dos o más raíces situadas sobre la circunferencia.

Desde luego hay que desechar las raíces que no cumplen la condición  $|s_2| = 1$  ya que a ella han de satisfacer tanto los puntos  $t_1$  y  $t_2$  que están sobre la circunferencia de radio unidad, como aquellos que sean puntos inversos respecto de la misma.

Hallados los valores de  $s_2$  y mediante la ecuación

$$s_1 = \frac{d \bar{b} s_2^2 - \bar{d} b}{c \bar{d} - \bar{c} d s_2}$$

se obtienen los valores de  $s_1$ . La condición de realidad del punto doble es que  $|s_1| < 2$ . (El caso de igualdad dará origen, como veremos, a un punto de retroceso).

Siendo  $s_1 = t_1 + t_2$ ;  $s_2 = t_1 t_2$ , los valores de  $t_1$  y  $t_2$  son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$t^2 - s_1 t + s_2 = 0$$

La curva puede tener 0, 1, 2, 3 ó 4 puntos dobles reales. Puede también tener un punto triple — caso que estudiamos en el siguiente párrafo — pero no uno cuádruple.

## 12. EL PUNTO TRIPLE DE LA CURVA $\tau_1$

Vamos a estudiar en esta párrafo las condiciones que una función polígona ha de cumplir para que la curva  $\tau_1$  que representa su derivada tercera rectilínea tenga un punto triple real. Ya hemos visto que la

curva  $\tau_1$  tiene como puntos triples imaginarios los puntos circulares del plano. De los cuatro puntos dobles reales que puede tener, tres de ellos pueden ser substituídos por un punto triple.

Para ello deberá ser :

$$\tau_1 = a + b t_1 + c t_1^2 + d t_1^3 = a + b t_2 + c t_2^2 + d t_2^3 = a + b t_3 + c t_3^2 + d t_3^3.$$

Esto es lo mismo que decir que  $t_1, t_2$  y  $t_3$  han de ser raíces de la siguiente ecuación de tercer grado :

$$a - \tau_1 + b t + c t^2 + d t^3 = 0 \quad (9)$$

Será necesario para que exista el punto triple real, que esta ecuación tenga sus tres raíces en la circunferencia de radio unidad. Para ello exigimos que tengan las mismas raíces las ecuaciones que tienen por raíces las conjugadas y las recíprocas de las de la ecuación anterior.

La ecuación que tiene por raíces las conjugadas de las de la (9) es :

$$\bar{a} - \bar{\tau}_1 + \bar{b} t + \bar{c} t^2 + \bar{d} t^3 = 0 \quad (10)$$

La que tiene por raíces las recíprocas de las de (9) :

$$d + c t + b t^2 + (a - \tau_1) t^3 = 0 \quad (11)$$

Expresando la equivalencia de estas dos ecuaciones tendremos las condiciones necesarias para la existencia del punto triple.

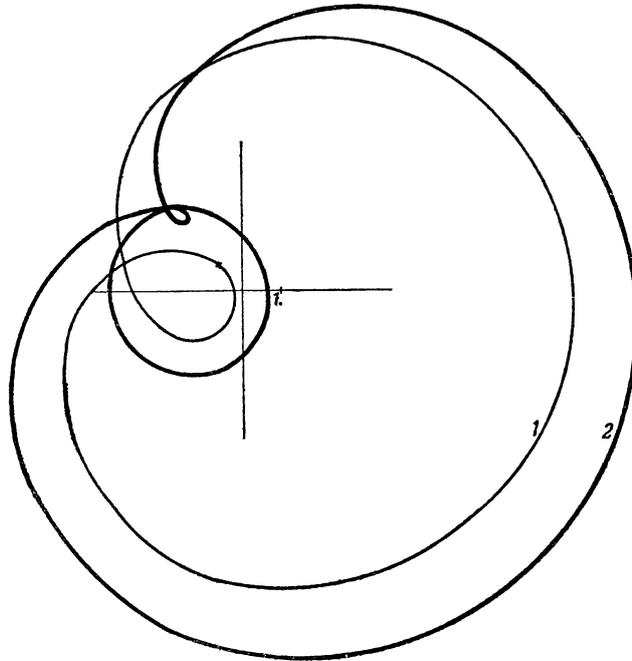
$$\frac{\bar{a} - \bar{\tau}_1}{d} = \frac{\bar{b}}{c} = \frac{\bar{c}}{b} = \frac{\bar{d}}{a - \tau_1} \quad (12)$$

Estas condiciones son equivalentes a las tres siguientes :

1.  $|b| = |c|$
2.  $|a - \tau_1| = |d|$
3.  $\arg \cdot (a - \tau_1) = \arg \cdot c + \arg \cdot b - \arg \cdot d.$

Las dos últimas condiciones sirven para determinar unívocamente la posición del punto triple. La 2 indica que el punto triple — si existe — ha de estar sobre la circunferencia de centro en el punto  $a$  y de radio  $|d|$ . La 3 fija la dirección del vector  $a - \tau_1$ . La 1 es la condición que deberán cumplir los coeficientes.

La condición necesaria para que la curva  $\tau_1$  que representa la derivada rectilínea de una función polígona, posea un punto triple es que  $|b| = |c|$ , es decir,  $|w_{z\bar{z}}| = |w_{z\bar{z}}|$ .



$$\text{Curvas } \tau_1(t) = 4t + 4t^2 + \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)t^3 \quad (1)$$

$$\tau_1(t) = 4t + 4t^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)t^3 \quad (2)$$

derivadas rectilíneas respectivas de las funciones:

$$W = \frac{4z^2\bar{z} + 4z\bar{z}^2 + \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\bar{z}^3}{6} \quad \text{y} \quad W = \frac{4z^2z + 4z\bar{z}^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\bar{z}^3}{6} \quad (2')$$

$$\text{Punto triple de (1): } \tau_1^* = -\left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right); \quad \text{ídem de (2): } \tau_1^* = -3\left(\frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)$$

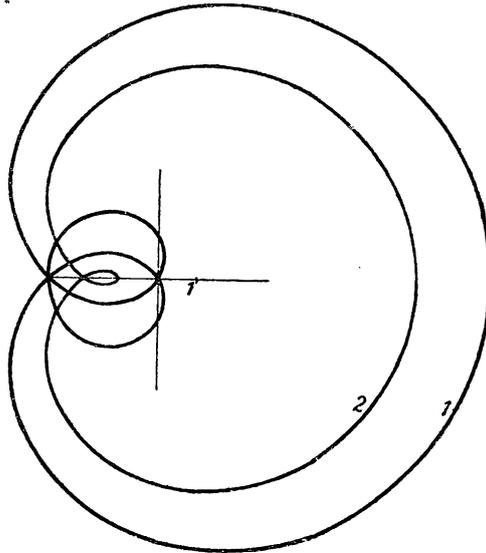
FIGURA 3

Cumplida esta condición, el punto triple  $\tau_1^*$  se obtiene mediante la fórmula:

$$a - \tau_1^* = \frac{b\bar{d}}{c} = \frac{c\bar{d}}{b}$$

Su valor es: 
$$\tau_1^* = a - \frac{b\bar{d}}{c} \quad (13)$$

Hemos hallado la condición necesaria para que la curva  $\tau_1$  posea un punto triple. Este será real o imaginario según que los tres valores correspondientes del parámetro  $t$ , estén los tres en la circunferencia unidad, o bien, haya uno solo sobre ella, siendo el otro par puntos inversos respecto de la misma. En todo caso será el punto hallado un punto de la curva.



$$\text{Curvas } \tau_1(t) = 3t + 3t^2 + 3t^3 \quad (1)$$

$$\tau_1(t) = 3t + 3t^2 + t^3 \quad (2)$$

derivadas rectilíneas respectivas de

$$W = \frac{z^2 \bar{z} + z \bar{z}^2 + \bar{z}^3}{2} \quad (1') \quad \text{y} \quad W = \frac{3z^2 \bar{z} + 3z \bar{z}^2 + \bar{z}^3}{6} \quad (2')$$

$$\text{Punto triple de (1); } \tau_1^1 = -3; \quad \text{idem de (2); } \tau_1^1 = -1$$

FIGURA 4

Nos proponemos hallar a continuación las condiciones para que el punto triple sea real, así como estudiar la distribución de los tres valores de  $t$  sobre la circunferencia unidad, según los valores de los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

Para ello es necesario considerar el hessiano de la ecuación cúbica anterior, cuyas raíces son los puntos isodinámicos — o puntos de HESSE — del triángulo formado por las raíces de la ecuación cúbica. Los puntos de Hesse del triángulo de las raíces de (9) están sobre las circunferencias de Apolonio del triángulo. Por tanto, para que las tres raíces de (9)

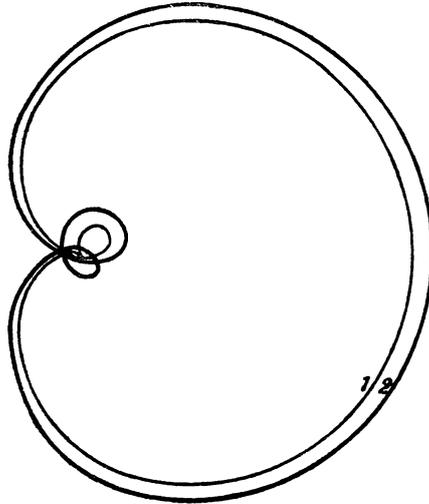
estén en la circunferencia unidad, es necesario que los puntos de HESSE sean inversos con respecto a la misma.

Haciendo :

$$\frac{c}{d} = r e^{i\varphi_1}; \quad \frac{b}{d} = r e^{i\varphi_2}$$

donde  $r$  es un número real, el hessiano de la ecuación cúbica (9) será :

$$H = r (3 e^{i\varphi_2} - r e^{2i\varphi_1}) z^2 + (9 - r^2) e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i} z + r e^{i\varphi_2} (3 e^{2i\varphi_1} - r e^{i\varphi_2}) \quad (14)$$



$$\text{Curvas } \tau_1(t) = 3t + 3t^2 + \left(\frac{183 - \sqrt{3375}i}{128}\right) t^3 \quad (1)$$

$$\tau_2(t) = 3t + 3t^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{183 - \sqrt{3375}i}{128}\right) t^3 \quad (2)$$

derivadas rectilíneas de

$$W = \frac{3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \left(\frac{183 - \sqrt{3375}i}{128}\right) \bar{z}^3}{6} \quad (1') \quad \text{y} \quad W = \frac{3z^3\bar{z} + 3z\bar{z}^3 + \frac{4}{3} \left(\frac{183 - \sqrt{3375}i}{128}\right) \bar{z}^3}{6}$$

$$\text{Punto triple de (1): } \tau_1^2 = -\left(\frac{183 + \sqrt{3375}i}{128}\right); \quad \text{ídem de (2): } \tau_2^2 = -\frac{4}{3} \left(\frac{183 + \sqrt{3375}i}{128}\right)$$

FIGURA 5

y de aquí deducimos como condiciones para que las tres raíces de la ecuación (9) estén en la circunferencia unidad :

$$2. \quad r \leq 3$$

$$3. \quad |p| = \frac{|9 - r^2|}{r |3 e^{i\varphi_2} - r e^{2i\varphi_1}|} \geq 2$$

Estas dos condiciones 2 y 3, unidas a la condición: 1.  $|b| = |c|$ , que hallamos anteriormente, dan las condiciones necesarias y suficientes para que la curva  $\tau_1$  tenga un punto triple real.

La distribución de los tres valores de  $t$  en la circunferencia de radio unidad es la siguiente:

Forman un triángulo si:  $r < 3$  y  $|p| > 2$ .

En particular,

- a) un triángulo equilátero si:  $r = 0, p = \infty$
- b) » » acutángulo si:  $r < 1, |p| > 2$
- c) » » isósceles rectángulo si:  $r = 1, |p| = 4$
- d) » » escaleno » » :  $r = 1, 2 < |p| < 4$
- e) » » obtusángulo si:  $1 < r < 3, |p| > 2$ .

Si  $r = 1$  y  $|p| = 2$ , dos raíces coinciden y la otra se encuentra diametralmente opuesta en la circunferencia unidad. Si  $1 < r < 3$  y  $|p| = 2$ , dos raíces coinciden y la otra está sobre la circunferencia unidad.

Por último, si  $r = 3, p = 0$  y  $e^{i\varphi_2} = e^{2i\varphi_1}$ , las tres raíces son coincidentes en un punto de la circunferencia unidad.

Por el punto triple (13) pasan tres ramas lineales — en el caso que las tres raíces sean distintas — una rama lineal y otra de segundo orden, cuando dos de ellas coinciden, y una rama de tercer orden cuando las tres coinciden.

(Pueden verse varios ejemplos de punto triple en las figuras 3, 4 y 5).

### 13. LOS PUNTOS DE RETROCESO DE $\tau_1$

Si dos de los valores  $t_1$  y  $t_2$ , que dan un punto doble, coinciden, entonces tendremos un punto de retroceso. Para obtener los de la curva  $\tau_1$  derivemos con relación al parámetro  $t$ . Obtenemos:

$$\frac{d\tau_1}{dt} = b + 2ct + 3dt^2$$

Los valores de  $t$  que dan puntos de retroceso están entre los que anulan esta derivada. Se tiene así la condición:

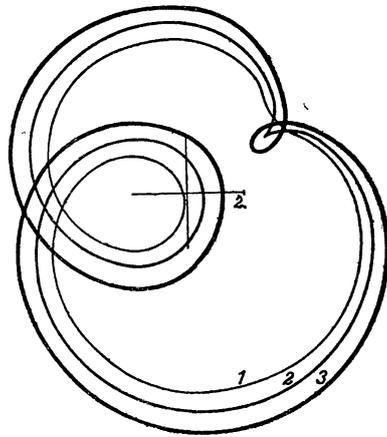
$$b + 2ct + 3dt^2 = 0 \quad (15)$$

Para que existan puntos de retroceso es necesario además que alguna de las raíces de esta ecuación esté en la circunferencia de radio unidad,

condición necesaria para que el punto correspondiente esté en la curva que estamos considerando.

Expresando que las raíces de (15) estén sobre la circunferencia unidad tenemos como condiciones para que la curva  $\tau_1$  tenga dos puntos de retroceso las :

- 1) El «clinant»\* de  $\frac{2c}{3b}$  ha de ser igual a  $\frac{b}{3d}$ .
- 2)  $\left| \frac{2c}{3d} \right| \leq 2$ .



$$\text{Curvas: } \tau_1(t) = 6, 2t + 3, 1t^2 + 3 \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right) t^3 \quad (1)$$

$$\tau_1(t) = 6, 2t + 3, 1t^2 + 4 \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right) t^3 \quad (2)$$

$$\tau_1(t) = 6, 2t + 3, 1t^2 + 5 \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right) t^3 \quad (3)$$

derivadas rectilíneas de

$$W = 6, 2z^2\bar{z} + 3, 1z\bar{z}^2 + 3 \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{6} \right) \bar{z}^3 \quad (1')$$

$$W = 6, 2z^2\bar{z} + 3, 1z\bar{z}^2 + 3 \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right) \bar{z}^3 \quad (2')$$

$$W = 6, 2z^2\bar{z} + 3, 1z\bar{z}^2 + 5 \left( \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \right) \bar{z}^3 \quad (3')$$

FIGURA 6

(\*) Se llama «clinant» de un vector  $r$ , al cociente  $\frac{r}{\bar{r}}$ .

La condición 1) se puede desdoblar en las dos siguientes:

$$1') \quad |b| = 3|d|.$$

$$1'') \quad \arg \cdot b = 2 \arg \cdot c - \arg \cdot d.$$

En cuanto a la condición 2) — que es la que impone la realidad de las raíces — en el caso de verificarse la igualdad, las dos raíces coinciden, por reducirse la ecuación a un cuadrado perfecto. En este caso:  $|c| = 3|d|$  y por lo tanto  $|b| = |c|$ , obteniéndose un punto triple.

La condición para que existan puntos de retroceso se obtiene eliminando  $t$  entre la ecuación:  $b + 2ct + 3dt^2 = 0$  (15) y su conjugada

$$3\bar{d} + 2\bar{c}t + \bar{b}t^2 = 0 \quad (16) \quad \left(\text{ya que } \bar{t} = \frac{1}{t}\right)$$

Si eliminamos, primeramente, entre ambas,  $t^2$ , se obtiene:

$$b\bar{b} - 9d\bar{d} - 2(c\bar{b} - 3d\bar{c})t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{9d\bar{d} - b\bar{b}}{2(c\bar{b} - 3d\bar{c})}$$

y la condición buscada es:

$$b + c \frac{9d\bar{d} - b\bar{b}}{c\bar{b} - 3d\bar{c}} + 3d \left[ \frac{9d\bar{d} - b\bar{b}}{2(c\bar{b} - 3d\bar{c})} \right]^2 = 0 \quad (17)$$

De lo que llevamos expuesto en este párrafo se deduce de una manera muy simple el lugar geométrico siguiente de los puntos de retroceso de la curva  $\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3$ , cuando se mantienen fijos los coeficientes  $a$ ,  $c$  y  $d$ , y  $b$  variable en el plano complejo.

De (15) se deduce que en todos los puntos del caracol de Pascal

$$b = -2ct - 3dt^2$$

es nula esta expresión: y por tanto el lugar geométrico de los puntos de retroceso pedido se obtiene sustituyendo en la ecuación:

$$\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3$$

el valor de  $b$  por  $-2ct - 3dt^2$ . Se obtiene de nuevo una curva del tipo de  $\tau_1$ :

$$\lambda = a - ct^2 - 2dt^3, \text{ como lugar geométrico.}$$

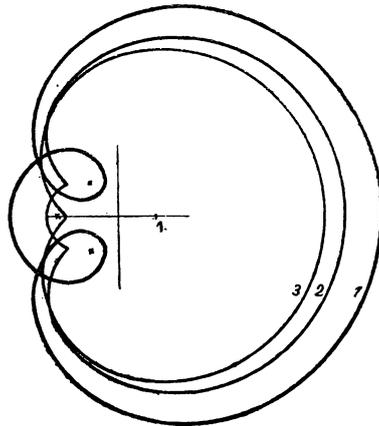
(Pueden verse algunos ejemplos de puntos de retroceso en las curvas de las figuras 5, 6, 7, 8 y 10).

14. FOCOS DE LA CURVA  $\tau_1$

Si consideramos la ecuación :

$$\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3$$

como una transformación que pasa del valor complejo  $t$ , al  $\tau_1$  a cada valor de  $t$  corresponde un único de valor de  $\tau_1$ . Recíprocamente, a un valor de  $\tau_1$  corresponden tres valores de  $t$ , en general distintos. Cuando dos de estos valores coinciden tenemos un foco.



Curvas:  $\tau_1(t) = 3t + 2t^2 + 2t^3$  (1)  
 $\tau_1(t) = 3t + 2t^2 + 2t^3$  (2)  
 $\tau_1(t) = 3t + 2t^2 + \frac{4}{9}t^3$  (3)

derivadas rectilíneas de

$$W = \frac{3z^2\bar{z} + 2z\bar{z}^2 + 2z^3}{6} (1'); \quad W = \frac{3z^2\bar{z} + 2z\bar{z}^2 + \bar{z}^3}{6} (2'); \quad W = \frac{3z^2\bar{z} + 2z\bar{z} + \frac{4}{9}\bar{z}^3}{6}$$

Focos de (1):  $\tau_1 = \frac{-23 \pm 7\sqrt{14}i}{27}$ ; Puntos de retroceso de (2):  $\tau_1 = \frac{-38 \pm 10\sqrt{5}i}{27}$

Focos de (3): los dos confundidos en  $\tau_1 = -\frac{3}{2}$

FIGURA 7

Para obtener los focos de la curva  $\tau_1$  bastará igualar a cero su derivada respecto de  $t$ .

$$\frac{d\tau_1}{dt} = b + 2ct + 3dt^2 = 0 \text{ y resolver esta ecuación resultante.}$$

Los valores de  $t$  que dan los focos son pues :

$$t = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d}$$

Se obtienen así los dos focos :

$$\tau_1 = a + b \left( \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d} \right) + c \left( \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d} \right)^2 + \left. \begin{array}{l} \\ + d \left( \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d} \right)^3 \end{array} \right\} \quad (18)$$

Estos focos se convierten en puntos de retroceso cuando el valor absoluto de  $t$  es igual a la unidad. Un punto de retroceso está en la curva  $\tau_1$ ; un foco no estará, en general. Pero no es correcto decir que un punto de retroceso es un foco que está en la curva, pues puede suceder que esté en la curva sin ser punto de retroceso cuando el tercer valor de  $t$  correspondiente a este del foco esté en la circunferencia unidad. (Este es el caso de la figura 6. Otros ejemplos de focos pueden verse en la figura 7). Los dos focos pueden coincidir en uno solo cuando

$$c^2 = 3bd \quad (\text{fig. 7})$$

*La suma del número de focos y puntos de retroceso de la curva  $\tau_1$  es dos.*

#### 15. SOBRE LA POSIBILIDAD DE DESCRIBIR LA CURVA $\tau_1$ MEDIANTE EL MOVIMIENTO UNIFORME DE GIRO DE UN RADIO VECTOR

Estudiamos a continuación la posibilidad de describir la curva  $\tau_1$  mediante el movimiento uniforme de giro de un radio vector que tenga su origen en un punto del plano, convenientemente elegido.

Sea la curva:  $\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3$ , y consideremos un punto  $\pi$  del plano  $\tau$ . Designemos por  $x$  el vector diferencia  $a - \pi$ . El radio vector determinado por el punto  $\pi$  y un punto de la curva  $\tau_1$  es:

$$a + bt + ct^2 + dt^3 - \pi = x + bt + ct^2 + dt^3 = r(t). \quad (19)$$

Siendo  $t = e^{-2i\theta}$ , para que el movimiento de este radio vector — supuesto fijo el punto  $\pi$  — sea un movimiento uniforme de giro, cuando lo es el de  $\theta$ , es necesario que el «clinant»  $\frac{r}{t}$  del vector  $r$ , sea de la forma:  $A t^p$ , siendo  $A$  un número complejo constante. Se reconoce in-

mediatamente que en este caso deberá ser :  $p = 3$ . Además deberá ser :

$$\frac{x + bt + ct^2 + dt^3}{\bar{d} + \bar{c}t + \bar{b}t^2 + \bar{x}t^3} = A = \text{constante}$$

para lo cual es necesario que:

$$\frac{x}{\bar{d}} = \frac{b}{\bar{c}} = \frac{c}{\bar{b}} = \frac{d}{\bar{x}}$$

o lo que es lo mismo, se han de cumplir las condiciones siguientes :

- 1)  $|b| = |c|$
- 2)  $|x| = |d|$ .
- 3)  $x = \frac{b\bar{d}}{\bar{c}}$

La condición 2) es consecuencia de 1) y 3) y por tanto las condiciones para que la curva pueda ser descrita con el movimiento uniforme de giro de un radio vector, tomando como origen un punto convenientemente elegido, quedan reducidas a las condiciones 1) y 3).

La condición 1) coincide con la anteriormente hallada como necesaria para la existencia de un punto triple, distinto de los circulares. A su vez, la 3) que fija la posición del origen del vector coincide con la expresión que daba la coordenada del punto triple.

La posibilidad estudiada queda reducida a la existencia de un punto triple, real o imaginario. Si este punto existe, el radio vector que le tiene como origen y tiene su extremo sobre la curva  $\tau_1$  gira con una velocidad que es  $\frac{3}{2}$  la de giro del radio correspondiente en la circunferencia unidad. Más teniendo en cuenta que :  $t = e^{-2i\theta}$ , cuando la inclinación  $\theta$  en el punto  $z$  varía, aquel radio vector gira en sentido contrario y con una velocidad triple la de  $\theta$ .

Resumiendo : *Si la curva  $\tau_1$  posee un punto triple, real o imaginario (es decir, si  $|b| = |c|$ ), y la tangente a la curva de aproximación al punto  $z$  gira en un sentido determinado, el radio vector que tiene por origen el punto triple y su extremo sobre la curva  $\tau_1$  gira en sentido contrario y con una velocidad triple la de aquella tangente. En el caso en que no exista punto triple, real o imaginario (es decir, si  $|b| \neq |c|$ ) no existe ningún punto que cumpla las condiciones impuestas.*

16. MANERA DE CONSTRUIR MECÁNICAMENTE LA CURVA  $\tau_1$ 

La curva

$$\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3.$$

es igual a la

$$\tau_1^* = bt + ct^2 + dt^3 \quad (19)$$

que se obtiene de aquélla mediante la traslación:

$$\tau_1 = a + \tau_1^*$$

Vemos a continuación la manera de construir la curva  $\tau_1^*$ .

Reemplazando en la ecuación (19),  $d$  por  $x$  obtenemos la ecuación:

$$\tau_1^* = bt + ct^2 + xt^3 \quad (20)$$

Suponemos que existen dos planos; el plano de los puntos  $x$  y el de los puntos  $\tau_1^*$  y que sobre ellos la unidad de longitud es la misma. La ecuación (20) expresa que el punto  $\tau_1^*$  está sobre el punto  $x$ . Cuando el punto  $t$  varía sobre la circunferencia unidad cada punto  $x$  del plano  $x$ , describe sobre el plano  $\tau_1^*$  una curva, cuya ecuación paramétrica se obtiene reemplazando el valor correspondiente de  $x$  en la ecuación (20). Recíprocamente, un punto fijo del plano  $\tau_1^*$  describe sobre el plano  $x$  una curva cuya ecuación paramétrica se obtiene reemplazando en (20) el valor dado a  $\tau_1^*$ . La ecuación (20) es pues la ecuación de un movimiento. Para el valor  $x = 0$ , obtenemos un caracol de Pascal:

$$\tau_1^* = bt + ct^2 \quad (21)$$

con el centro en el origen  $\tau_1^* = 0$ , y longitud característica  $|b|$ .

Para  $\tau_1^* = 0$ , obtenemos el correspondiente caracol de Pascal en el plano  $x$ :

$$x = -\frac{b}{t^2} - \frac{c}{t}$$

Si hacemos una ranura en cada plano a lo largo de estas curvas y se obliga a recorrer cada una de ellas el origen del otro plano (por ejemplo, mediante dos alfileres colocada cada una en un origen), el punto  $x = d$ , del plano  $x$ , describirá sobre el otro plano la curva de ecuación:

$$\tau_1^* = bt + ct^2 + dt^3.$$

Otra manera de construcción mecánica es la siguiente :  
Consideremos la curva :

$$\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3$$

y reemplacemos  $b$  por la variable  $x$ , con lo cual se obtiene la ecuación de un movimiento,

$$\tau_1 = a + xt + ct^2 + dt^3 \quad (22)$$

Tratamos de hallar los puntos que en este movimiento tienen velocidad nula. Para un valor  $x_0$  de  $x$  tenemos una curva en el plano  $\tau_1$  y para la cual,

$$d\tau_1 = x_0 dt + (2ct + 3dt^2) dt.$$

Cuando el punto  $x_0$  sea uno de los puntos del caracol de Pascal,

$$x_0 = -2ct - 3dt^2 \quad (23)$$

este punto  $x_0$  tiene velocidad nula sobre el plano  $\tau_1$ . La curva correspondiente tiene un punto de retroceso. Hay pues en el plano  $x$  una curva (23) que es un caracol de Pascal y cuyos puntos tienen velocidad nula sobre el plano  $\tau_1$ .

Análogamente, despejando  $x$  en (22) y diferenciando podemos obtener igualmente la curva de los puntos de velocidad nula respecto del plano  $x$ . Esta curva es :

$$\tau_1^0 = a - ct^2 - 2dt^3 \quad (24)$$

Como,  $\tau_1^0 = a + x_0 t + ct^2 + dt^3$ , los puntos de velocidad nula sobre ambos planos están — en cada instante — superpuestos.

Las curvas (23) y (24) son en cada instante del movimiento, tangentes. En efecto : Para un valor constante de  $x$  :

$$d\tau_1 = (x - x_0) dt$$

y para un valor constante de  $\tau_1$  :

$$dx = - \frac{(\tau_1 - \tau_1^0) dt}{t}$$

Para valores de  $x$  y  $\tau_1$  superpuestos,  $\tau_1 - \tau_1^0 = t(x - x_0)$  y por tanto

$$\frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau_1^0} = - \frac{dt}{t} = - \frac{dx}{x - x_0}$$

Como  $\frac{dt}{t}$  es un número imaginario puro,  $i d\theta$ ,  $d\tau_1$  es perpendicular a  $\tau_1 - \tau_1^0$  y  $dx$  a  $x - x_0$ .

Finalmente probamos que las diferenciales de arco sobre ambas curvas (23) y (24), son iguales. En efecto, diferenciando en las ecuaciones correspondientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} dx_0 &= (-2c - 6dt) dt \\ d\tau_1^0 &= (-2ct - 6dt^2) dt = t(-2c - 6dt) dt. \end{aligned}$$

El movimiento puede ser descrito como la rodadura de la curva (23) sobre la (24) o, recíprocamente. En este movimiento, el punto  $x = b$  del plano  $x$ , describe sobre el plano  $\tau_1$  la curva:

$$\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3.$$

#### 17. DISTRIBUCIÓN DE PUNTOS SOBRE LA CURVA $\tau_1$

Estudiamos a continuación una sencilla cuestión de Física.

Mediante la transformación:  $\tau_1 = a + bt + ct^2 + dt^3$ , la circunferencia de radio unidad se convierte en la curva  $\tau_1$  que venimos estudiando.

Supuesta cubierta aquella circunferencia uniformemente de masa ocurre preguntar cuál será la distribución de masa sobre la curva  $\tau_1$ .

Para obtener una idea general de esta distribución podemos formar el valor medio de  $\tau_1$  respecto a  $\theta$ .

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (a + b e^{-2i\theta} + c e^{-4i\theta} + d e^{-6i\theta}) d\theta$$

El valor de esta integral es:  $a = w_{zzz}$ , esto es, los puntos están distribuidos sobre la curva de tal manera que tienen como punto medio o «centroide» el punto  $a$ . Señalamos la coincidencia de ser este punto  $a$ , precisamente el valor que tendría la derivada de la función  $w$  con respecto a  $z$ , en el caso que aquella función fuese monógena.

Una vez obtenida esta idea general sobre la distribución de puntos sobre  $\tau_1$  y para obtener una información más precisa sobre la misma se puede estudiar la densidad lineal sobre la curva  $\tau_1$  definiéndola por el cociente  $\frac{|d\theta|}{|d\tau_1|}$ . Pues si suponemos la circunferencia unidad cubierta

uniformemente de masa de tal manera que la masa en  $d\theta$  esté medida por  $|d\theta|$ , entonces mediante la transformación considerada que cambia  $d\theta$  en  $d\tau_1$ , la masa puede considerarse constante, y la densidad con la cual estará distribuída en  $d\tau_1$  será tal que :

$$|d\tau_1| D = |d\theta|$$

Diferenciando en la ecuación de la transformación se tiene :

$$d\tau_1 = b + 2ct + 3dt^2,$$

con lo cual, y teniendo en cuenta que  $t = e^{-2i\theta}$ , se tiene para la densidad lineal sobre la curva  $\tau_1$  la siguiente :

$$\frac{|d\theta|}{|d\tau_1|} = \frac{1}{2|b + 2ct + 3dt^2|}.$$

Esta densidad varía esencialmente como los inversos de los módulos de un cierto caracol de Pascal.

#### 18. TIPOS ESPECIALES DE FUNCIONES POLÍGENAS

Estudiamos a continuación algunos tipos especiales de funciones polígenas que dan lugar a casos particulares de la curva  $\tau_1$ , que representa la derivada tercera rectilínea.

1. Si la función es monógena,  $w = f(z)$ , y  $w_z = 0$ .

Entonces,  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  queda reducida a  $\tau_1 = a = w_{zzz}$ , es decir, al punto  $a$ .

2. Si la función es monógena inversa,  $w = f(\bar{z})$ , y  $w_z = 0$ .

Además,  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  se reduce a:  $\tau_1 = d t^3 = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}$ , que representa una circunferencia de centro en el origen y radio  $|d|$ . Cuando la tangente a la curva de aproximación en el punto  $z$ , gira alrededor de este punto en un sentido constante el punto  $\tau_1$  se mueve sobre aquella circunferencia en sentido contrario y con una velocidad seis veces mayor.

3. Si la función es polígona armónica,  $w = f(z) + f(\bar{z})$ , y  $w_{z\bar{z}} = 0$ .

Se tiene además,  $w_{zzz} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  queda reducida a:  $\tau_1 = w_{zzz} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta} = a + dt^3$ , que representa una circunferencia de

centro  $a$  y radio  $|d|$ . Cuando el ángulo de inclinación varía, en el plano  $z$ , el punto que representa la derivada tercera rectilínea se mueve sobre esta circunferencia en sentido contrario y con una velocidad seis veces mayor.

4. Sea la función del tipo  $w = z^2 f_1(\bar{z}) + z f_2(\bar{z}) + f_3(\bar{z})$ .  
En este caso,  $w_{zzz} = 0$ , y la curva  $\tau_1$  es de la forma:

$$\tau_1 = bt + ct^2 + dt^3 = 3w_{z\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3w_{z\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{z\bar{z}} e^{-6i\theta},$$

que no presenta características especiales sobre el caso general, salvo que tiene por valor medio al origen.

5. Si la función es del tipo:  $w = \bar{z}^2 f_1(z) + \bar{z} f_2(z) + f_3(z)$ .  
Se tiene entonces,  $w_{zzz} = 0$ , y la curva  $\tau_1$  es entonces:

$$\tau_1 = a + bt + ct^2 = w_{z\bar{z}} + 3w_{z\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3w_{z\bar{z}} e^{-4i\theta},$$

que representa un caracol de Pascal cuyo círculo base es:  $a + ct^2$  y la longitud característica  $|b|$ .

6. Si la función es:  $w = f_1(z) + z f_2(\bar{z}) + f_3(\bar{z})$ .  
Se tiene,  $w_{z\bar{z}\bar{z}} = 0$ , y la curva  $\tau_1$  es entonces:

$$\tau_1 = a + ct^2 + dt^3 = w_{z\bar{z}\bar{z}} + 3w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta};$$

en cuyo caso la curva  $\tau_1$  tiene dos puntos dobles reales, o bien, uno real y otro imaginario. Diversas formas de esta curva pueden verse en la figura 8. Uno de los puntos dobles es siempre real. El otro, cuando  $|d| \rightarrow 0$  llega un momento en que pasa a ser imaginario y el anillo interior tiende a confundirse con el exterior en una circunferencia, cosa que ocurre cuando  $d = 0$ , en que la curva degenera en una circunferencia doble. Cuando  $|c| \rightarrow 0$ , manteniéndose constantes los otros coeficientes, el anillo más interior se ensancha y los tres anillos tienden a confundirse en una circunferencia triple, cosa que ocurre cuando  $c = 0$ .

La curva tiene en todo caso como eje de simetría la recta que pasa por el punto  $a$  y cuyo argumento corresponde al siguiente de  $t$ :

$$\arg \cdot t = \theta = \arg \cdot c - \arg \cdot d.$$

Los puntos dobles están sobre el eje de simetría y nos proponemos hallarlos analíticamente. Para ello pongamos,

$$a + ct_1^2 + dt_1^3 = a + ct_2^2 + dt_2^3.$$

De aquí se deduce :

$$\begin{aligned} c(t_1^2 - t_2^2) + d(t_1^3 - t_2^3) &= 0 \\ c(t_1 + t_2) + d(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Y haciendo,  $t_1 + t_2 = s_1$ ;  $t_1 t_2 = s_2$ , resulta

$$c s_1 + d(s_1^2 - s_2) = 0 \quad \bar{c} \bar{s}_1 + \bar{d}(\bar{s}_1^2 - \bar{s}_2) = 0$$

o las equivalentes :

$$c s_1 + d(s_1^2 - s_2) = 0 \quad \bar{c} s_1 s_2 + \bar{d}(s_1^2 - s_2) = 0.$$

Eliminando el paréntesis,  $(s_1^2 - s_2)$  obtenemos,

$$c \bar{d} s_1 - \bar{c} d s_1 s_2 = 0$$

y que dividiendo por  $s_1$ , que no puede anularse, conduce a :

$$c \bar{d} - \bar{c} d s_2 = 0.$$

De aquí,

$$s_2 = \frac{c \bar{d}}{\bar{c} d},$$

valor que llevado a la ecuación,

$$c s_1 + d s_1^2 - d s_2 = 0$$

nos da :

$$d s_1^2 + c s_1 - \frac{c \bar{d}}{\bar{c}} = 0, \quad \text{o bien,} \quad s_1^2 + \frac{c}{d} s_1 - \frac{c \bar{d}}{\bar{c} d} = 0. \quad (25)$$

Las raíces de esta ecuación son :

$$s_1 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\frac{c^2}{4d^2} + \frac{c \bar{d}}{\bar{c} d}} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}} \quad (26)$$

$$s_1^* = -\frac{c}{2d} - \sqrt{\frac{c^2}{4d^2} + \frac{c \bar{d}}{\bar{c} d}} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}} \quad (27)$$

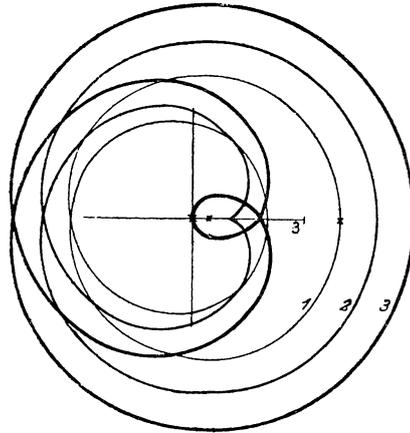
en las que se ha hecho :  $\alpha = -\frac{c}{2d}$ .

Los vectores  $\alpha^2$  y  $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$  son paralelos y del mismo sentido. El módulo del primero es  $|\alpha|^2$  y el del segundo la unidad. El módulo de la suma es pues la suma de los módulos. Su argumento, doble del de  $\alpha$ . Al extraer la raíz cuadrada obtenemos dos vectores opuestos de argumentos,

el de  $\alpha$  y el de  $\alpha + \pi$ ; y de módulos igual a  $\sqrt{m^2 + 1}$ , siendo  $m = |\alpha|$ .  
 Por lo tanto los módulos de  $s_1$  y de  $s_1^*$  son:

$$|s_1| = m + \sqrt{m^2 + 1} \quad \text{y} \quad |s_1^*| = -m + \sqrt{m^2 + 1}.$$

Uno de estos módulos, el  $|s_1^*|$  es siempre menor que dos, y da un punto doble real. El otro es imaginario cuando  $m > \frac{3}{4}$ . El valor de  $\frac{3}{4}$  corresponde a un punto de retroceso y tiene lugar cuando  $|d| = \frac{2}{3}|c|$ .



Curvas:  $\tau_1(t) = 3t^3 + t^3$  (1)  
 $\tau_1(t) = 3t^3 + 2t^3$  (2)  
 $\tau_1(t) = 3t^3 + 3t^3$  (3)

derivadas rectilíneas de

$$W = \frac{3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3}{6} \quad (1'); \quad W = \frac{3z\bar{z}^2 + 2\bar{z}^3}{6} \quad (2') \quad \text{y} \quad W = \frac{z\bar{z}^2 + \bar{z}^3}{2}$$

Focos de (1):  $\begin{cases} \tau_1 = 0 \\ \tau_1 = 4 \end{cases}$ ; Foco de (2):  $\tau_1 = 0$ ; Foco de (3):  $\begin{cases} \tau_1 = 0 \\ \tau_1 = \frac{4}{9} \end{cases}$

Punto de retroceso de (2):  $\tau_1 = 1$

FIGURA 8

Este resultado se puede también obtener derivando en la ecuación  $\tau_1 = a + ct^2 + cd^3$ , e igualando a cero.

$$\frac{d\tau_1}{dt} = 2ct + 3d^3 = 0, \quad \text{que conduce a: } t = -\frac{2c}{3d}.$$

Este valor de  $t$  (unido al  $t = 0$ ) da los focos de la curva.

Un foco es el:  $\tau_1 = a$ , y el otro el:

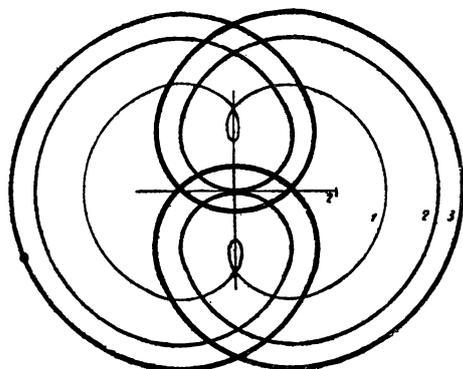
$$\tau_1 = a + \frac{4c^3}{9d^2} - \frac{8c^3}{27d^2}.$$

Este último es un punto de retroceso, cuando:  $|d| = \frac{2}{3}|c|$ .

Los valores  $t_1$  y  $t_2$  correspondientes a los puntos dobles se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$t^2 - s_1 t + s_2 = 0.$$

que da dos pares, correspondientes a los dos valores de  $s_1$  y  $s_1^*$ .



Curvas $\tau_1 = 4t + 2t^3$ (1)	Focos de (1): $\tau_1 = \pm \frac{8\sqrt{6}i}{9}$
$\tau_1 = 4t + 4t^3$ (2)	» » (2): $\tau_1 = \pm \frac{8\sqrt{3}i}{9}$
$\tau_1 = 4t + 5t^3$ (3)	» » (3): $\tau_1 = \pm \frac{112i}{15\sqrt{15}}$

derivadas rectilíneas de

$$W = \frac{4z^2\bar{z} + 2\bar{z}^3}{6} \text{ (1')}; \quad W = \frac{2z^2\bar{z} + 2\bar{z}^3}{3} \text{ (2')} \quad \text{y} \quad W = \frac{4z^2\bar{z} + 5\bar{z}^3}{6}$$

FIGURA 9

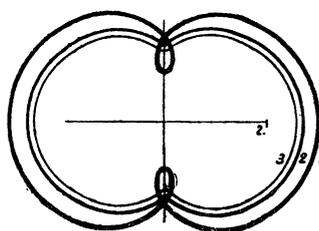
7. Si la función es:  $w = f_1(\bar{z}) + \bar{z}f_2(z) + f_3(z)$ , se tiene,  $w_{z\bar{z}z} = 0$  y la curva  $\tau_1$  queda reducida a:

$$\tau_1 = a + bt + dt^3 = w_{zzz} + 3w_{z\bar{z}z} e^{-2i\theta} + w_{\bar{z}z\bar{z}} e^{-6i\theta}.$$

Esta curva puede tener cuatro, tres, dos o ningún punto doble real.

Pueden verse diferentes formas de la misma en la figura 9 y en la 10. Cuando  $|d| \rightarrow 0$ , permaneciendo constantes los demás coeficientes, y

partiendo de la posición en que existen dos dobles reales, estos puntos dobles pasan a ser imaginarios después de una posición intermedia en que ambos son de retroceso. La curva tiende a convertirse en la circunferencia:  $a + bt$ , cosa que sucede cuando  $d = 0$ . En cambio cuando es el coeficiente  $b$  el que tiende a cero, permaneciendo constantes los demás, y partiendo de la posición antes indicada de los dos puntos dobles, los dos anillos interiores se van agrandando, llegan a una posición en que son tangentes y después aparecen dos nuevos puntos dobles y los tres anillos tienden a convertirse en la circunferencia:  $a + dt^3$ , cosa que sucede cuando  $b = 0$ .



Curvas:  $\tau_1 = 4t + 2t^3$  (1)

$$\tau_1 = 4t + \frac{4}{3}t^3$$
 (2)

$$\tau_1 = 4t + t^3$$
 (3)

Puntos de retroceso de (2):  $\tau_1 = \pm \frac{8i}{3}$

focos de (3):  $\pm \frac{16i}{3\sqrt{3}}$

derivadas rectilíneas de

$$W = \frac{2z^2\bar{z} + \bar{z}^3}{3} \text{ (1')}; \quad W = \frac{4z^2\bar{z} + \frac{4}{3}\bar{z}^3}{6} \text{ (2')} \quad \text{y} \quad W = \frac{4z^2\bar{z} + \bar{z}^3}{6}$$

FIGURA 10

La curva tiene dos ejes de simetría perpendiculares, uno de ellos el correspondiente al valor de  $t$  tal que:

$$\arg \cdot t = \theta = \frac{\arg \cdot b - \arg \cdot d}{2}$$

y el otro el perpendicular a este por el punto  $a$ . La curva tiene por lo tanto al punto  $a$  como centro de simetría.

Para comprobar este estudio intuitivo de los puntos dobles hacemos a continuación un estudio analítico de los mismos.

Para hallarlos, pongamos :

$$a + b t_1 + d t_1^3 = a + b t_2 + d t_2^3,$$

de donde

$$b (t_1 - t_2) + d (t_1^3 - t_2^3) = 0$$

Como suponemos,  $t_1 \neq t_2$ , dividiendo por  $t_1 - t_2$ , se obtiene :

$$b + d (t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = 0.$$

Haciendo ahora,  $t_1 + t_2 = s_1$ ,  $t_1 t_2 = s_2$  resulta

$$b + d (s_1^2 - s_2) = 0,$$

y

$$\bar{b} s_2^2 + \bar{d} (s_1^2 - s_2) = 0$$

de las que por eliminación del paréntesis  $(s_1^2 - s_2)$ , se tiene

$$b \bar{d} - \bar{b} d s_2^2 = 0 \quad s_2 = \pm \sqrt{\frac{b \bar{d}}{\bar{b} d}} \quad (28)$$

Si ponemos  $\beta = \frac{b}{\bar{d}}$  queda  $s_2 = \pm \sqrt{\frac{\beta}{\bar{\beta}}}$ .

Los dos valores obtenidos para  $s_2$  son opuestos, de módulo 1 y de argumentos el de  $\beta$  y el de  $\beta + \pi$ .

Los valores correspondientes de  $s_1$  son :

$$s_1^2 = s_2 - \frac{b}{d} = s_2 - \beta \quad (29)$$

obtenidos de la ecuación:  $d s_1^2 - d s_2 + b = 0$ .

Se obtienen dos valores opuestos de  $s_1$  para cada valor de  $s_2$ .

Los módulos de las raíces son:  $\pm \sqrt{n \pm 1}$ , siendo  $n = |\beta|$ .

Para obtener los puntos dobles reales hay que escoger aquellos que hacen  $|s_1| \leq 2$ . Se tienen los siguientes casos :

7.1. Para  $0 < n < 1$ ,  $|b| < |d|$ ,  $1 - n < 2$ ,  $1 + n < 2$   
cuatro puntos dobles reales.

7.2. Para  $n = 1$ ,  $|b| = |d|$ ,  $1 - n = 0$ ,  $1 + n = 2$   
tres puntos dobles reales.

7.3. Para  $1 < n < 3$ ,  $|b| < 3|d|$ ,  $n - 1 < 2$ ,  $n + 1 > 2$   
dos dobles reales.

7.4. Para  $n = 3$ ,  $|b| = |3d|$ ,  $n - 1 = 2$ ,  $n + 1 = 4$   
dos puntos de retroceso.

7.5. Para  $n > 3$ ,  $|b| > 3|d|$ ,  $n - 1 > 2$ ,  $n + 1 > 2$   
ningún punto doble.

Para hallar los focos y puntos de retroceso de esta curva anulémos la derivada de  $\tau_1$  respecto de  $t$ ,

$$\frac{d\tau_1}{dt} = b + 3dt^2 = 0 \quad \text{de donde se obtiene: } t^2 = -\frac{b}{3d}$$

que da dos valores de  $t$  opuestos para los focos, o puntos de retroceso. Las coordenadas de éstos son:

$$\tau_1 = a \pm b \sqrt{-\frac{b}{3d}} \pm d \sqrt{-\left(\frac{b}{3d}\right)^3}$$

Serán puntos de retroceso cuando:  $3|d| = |b|$ .

8. Si la función es:

$$w = Az^2 + zf_1(\bar{z}) + f_2(\bar{z}),$$

se tiene,  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  queda reducida a:

$$\tau_1 = ct^2 + dt^3 = 3w_{z\bar{z}\bar{z}}e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}e^{-6i\theta}.$$

Esta curva es del mismo tipo que la estudiada en el apartado 6) pero tiene por valor medio el origen.

9. Si la función es:

$$w = Az^2 + Bz\bar{z} + Cz + f_1(\bar{z}) + Dz^2\bar{z},$$

entonces,  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  se reduce a:

$$\tau_1 = bt + dt^3 = 3w_{z\bar{z}\bar{z}}e^{-2i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}e^{-6i\theta}.$$

Esta curva es análoga a la estudiada en el apartado 7) teniendo por valor medio el origen.

10. Si la función es:

$$w = A + Bz + C\bar{z} + Dz\bar{z} + Ez^2 + F\bar{z}^2 + Cz\bar{z}^2 + Hz^2\bar{z},$$

se tiene,  $w_{zzz} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$ . La curva  $\tau_1$  se reduce a :

$$\tau_1 = bt + ct^2 = 3w_{zz\bar{z}}e^{-2i\theta} + 3w_{z\bar{z}\bar{z}}e^{-4i\theta}.$$

Esta curva es un caracol de Pascal con círculo base de centro en el origen y radio  $|c|$  y que tiene a  $|b|$  como longitud característica.

11. Si la función es :

$$w = Az\bar{z} + f_1(z) + f_2(\bar{z}),$$

entonces,  $w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  es en este caso de la forma :

$$\tau_1 = a + dt^3 = w_{zzz} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}e^{-6i\theta}.$$

Esta curva es una circunferencia de centro en el punto  $a$  y radio  $|d|$ . Cuando la tangente a la curva de aproximación al punto  $z$ , gira en un sentido determinado, el punto  $\tau_1$  correspondiente se mueve en sentido contrario y a una velocidad seis veces mayor.

12. Si la función es :

$$w = f_1(z) + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z} + Dz\bar{z}^2,$$

se tiene,  $w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$ . La curva  $\tau_1$  es entonces :

$$\tau_1 = a + ct^2 = w_{zzz} + 3w_{z\bar{z}\bar{z}}e^{-4i\theta}.$$

Circunferencia de centro en el punto  $a$  y de radio  $|c|$ . Cuando la pendiente en el punto  $z$  varía, el punto  $\tau_1$  se mueve sobre ella en un sentido opuesto al de giro de aquella tangente y a una velocidad cuatro veces mayor.

13. Si la función es :

$$w = f_1(z) + \bar{z}f_2(z) + A\bar{z}^2,$$

entonces:  $w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  se reduce a :

$$\tau_1 = a + bt = w_{zzz} + 3w_{z\bar{z}\bar{z}}e^{-2i\theta}.$$

Circunferencia de centro en  $a$  y radio  $|b|$ . La velocidad con que el punto  $\tau_1$  recorre esta circunferencia es doble que la correspondiente en el plazo  $z$  y el giro es de sentido contrario.

14. Si la función es de la forma :

$$w = A z^2 + B z \bar{z} + C z + f_1(\bar{z}),$$

se tiene :  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$  y la curva  $\tau_1$  adopta la forma siguiente :

$$\tau_1 = d t^3 = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}.$$

Circunferencia de centro en el origen y radio  $|d|$ . El punto  $\tau_1$  la recorre en sentido contrario y velocidad angular seis veces mayor que la de la tangente a la curva de aproximación en el plano  $z$ .

15. Si la función es :

$$w = A + B z + C \bar{z} + D z \bar{z} + E z^2 + F \bar{z}^2 + G z \bar{z}^2,$$

entonces,  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$ . La curva  $\tau_1$  se reduce a :

$$\tau_1 = c t^2 = 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta}.$$

Circunferencia de centro en el origen y radio  $|c|$ . El punto  $\tau_1$  la recorre en sentido opuesto y velocidad angular cuádruple que la de giro de una recta correspondiente que pase por  $z$ .

16. Si la función es :

$$w = A + B z + C \bar{z} + D z \bar{z} + E z^2 + F \bar{z}^2 + H z^2 \bar{z},$$

se tiene :  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$ . La curva  $\tau_1$  es en este caso :

$$\tau_1 = b t = 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}.$$

Circunferencia de centro en el origen y radio  $|b|$ . Cuando la recta a través de  $z$  varía, el punto correspondiente sobre la circunferencia se mueve en sentido contrario y con velocidad angular doble la de aquella recta.

17. Si la función es :

$$w = f_1(z) + A \bar{z}^2 + B z \bar{z} + C \bar{z},$$

serán :  $w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$ . La curva  $\tau_1$  queda reducida a :

$$\tau_1 = a = w_{zzz}.$$

Es decir, la derivada tercera rectilínea se reduce a un punto  $a$ .

18. Por último, si la función polígena es de la forma :

$$w = A + Bz + C\bar{z} + Dz\bar{z} + Ez^2 + F\bar{z}^2,$$

son :  $w_{zzz} = w_{z\bar{z}\bar{z}} = w_{\bar{z}\bar{z}z} = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$ . La curva  $\tau_1$  queda reducida al origen :  $\tau_1 = 0$ , del plano  $\tau$ .

### LA DERIVADA TERCERA CIRCULAR

#### 19. DERIVADA TERCERA CIRCULAR DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA

Estudiamos a continuación los valores de la derivada tercera de una función polígena cuando se consideran como curvas de aproximación al punto  $z$  la red de circunferencias que pasan por el mismo.

El valor de la derivada tercera es en este caso :

$$\tau^* = \tau_1 + \tau_2 = (w_z + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta})^{(3)} - 6ie^{-3i\theta} \kappa (w_{z\bar{z}} + w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}) - 6w_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \kappa^2,$$

El vector  $\tau^*$  puede obtenerse como suma del vector  $\tau_1$  correspondiente al valor de  $\theta$ , con el vector  $\tau_2$  cuyo extremo se mueve sobre una parábola — cuando se fija un valor de  $\theta$  — como probaremos a continuación. El estudio de esta curva constituirá la primera parte de este apartado de la derivada tercera circular.

La derivada tercera circular establece una correspondencia entre los centros de las circunferencias que pasan por el punto considerado en el plano  $z$  y los puntos del plano  $\tau$  en que representamos la derivada tercera circular. El estudio de esta correspondencia — que llamaremos correspondencia asociada con la derivada tercera circular — constituirá la segunda parte de este apartado.

#### 20. LA CURVA $\tau_2(\theta, \kappa)$ CORRESPONDIENTE A UN VALOR FIJO DE $\theta$

La expresión de  $\tau_2(\theta, \kappa)$  es la siguiente :

$$\tau_2(\theta, \kappa) = -6ie^{-3i\theta} \kappa (w_{z\bar{z}} + w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}) - 6w_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \kappa^2. \quad (30)$$

Cuando se fija un valor de  $\theta$ , es decir, cuando se consideran como curvas de aproximación un haz de circunferencias tangentes en el punto considerado el lugar geométrico de  $\tau_2$  es una curva de la forma :

$$\tau_2 = A\kappa + B\kappa^2 \quad (31)$$

donde,  $A = -6i e^{-3i\theta} z (w_{z\bar{z}} + w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta})$  y  $B = -6w_{\bar{z}} e^{-4i\theta}$ , son números complejos fijos una vez fijados el punto  $z$  y el valor de  $\theta$ .

Se reconoce inmediatamente que la ecuación (31) representa una cónica, cuya ecuación en coordenadas cartesianas tomando como ejes las rectas que contienen los vectores  $A$  y  $B$  y poniendo:  $x = |A|z$  e  $y = |B|z^2$  es:

$$|B|x^2 - |A|^2 y = 0. \quad (32)$$

Esta ecuación representa una parábola ya que el discriminante de la forma cuadrática es nulo.

*El punto que representa en el plano  $\tau$  la derivada tercera de una función polígona cuando se consideran como curvas de aproximación circunferencias tangentes en el punto  $z$ , describe, cuando la curvatura de la circunferencia varía de una manera continua, una parábola.*

Del análisis de la ecuación (31) se deduce que las direcciones de los vectores  $A$  y  $B$  son conjugadas respecto de la parábola y que el vector  $B$  es un diámetro de la misma.

Nos proponemos hallar a continuación los elementos fundamentales de esta parábola, a saber: eje, vértice, foco y directriz.

Si hacemos:  $\frac{|A|^2}{|B|} = 2p$  la ecuación de la parábola se convierte en  $x^2 = 2py$  (33), referida al diámetro que pasa por el punto correspondiente en la curva  $\tau_1$  considerado como eje  $y$ , y a la tangente en este punto considerada como eje  $x$ .

Teniendo en cuenta que la subnormal de una parábola es igual al parámetro, cuando se toman como ejes precisamente la tangente en el vértice de la parábola y el eje de la misma, se obtiene para la ecuación de este eje la siguiente:

$$x + p \cos \alpha = 0, \quad (34)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo formado por los vectores  $A$  y  $B$  es decir:

$$\alpha = |\arg \cdot B - \arg \cdot A|$$

Otras expresiones para el eje de la parábola son:

$$2|B|x + |A|^2 \cos \alpha = 0 \quad (35)$$

$$12|w_{\bar{z}}|x + 36|w_{z\bar{z}} + w_{\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}|^2 \cos \alpha = 0 \quad (36)$$

El vértice de la parábola es la intersección con la misma de este eje, es decir, el punto :

$$\left( x = -p \cos \cdot \alpha ; \quad y = \frac{p \cos^2 \cdot \alpha}{2} \right) \quad (37)$$

Las coordenadas del foco resultan inmediatamente del hecho de que este punto es medio de los pies de la tangente y normal de un punto de la parábola respecto del eje de la misma.

Se tiene así para coordenadas del foco :

$$\left( x = -p \cos \cdot \alpha ; \quad y = \frac{p \operatorname{sen}^2 \cdot \alpha}{2} \right) \quad (38)$$

La directriz resulta a continuación como polar del foco respecto de la parábola. Su ecuación es :

$$2x \cos \cdot \alpha + 2y + p \operatorname{sen}^2 \cdot \alpha = 0. \quad (39)$$

Hemos hecho un estudio del vector  $\tau_2(\theta, \kappa)$  cuando  $\theta$  es fijo y  $\kappa$  variable. Añadiendo a este vector el  $\tau_1$  anteriormente considerado se tiene el vector  $\tau^*$  que representa en el plano  $\tau$  la derivada tercera circular.

Muchos y muy interesantes problemas geométricos se presentan en relación con esta derivada tercera circular cuya imagen completa es una familia de parábolas, dependiente del parámetro  $\theta$ . Vamos a resolver alguno de ellos.

A cada valor de  $\theta$  corresponde una parábola de la familia. El diámetro de la misma que pasa por el punto correspondiente en la curva tiene por ecuación :

$$\lambda = a + bt + ct^2 + dt^3 + ft^2x \quad (40)$$

con  $x$  variable real.

Cuando el eje radical del haz de circunferencias considerado gira alrededor del punto  $z$ , este diámetro que tiene la misma dirección del vector  $ft^2 = -6w_2 e^{-4i\theta}$ , gira en sentido contrario y con una velocidad cuatro veces mayor. Nos proponemos hallar su envolvente.

Para ello obtengamos la ecuación de este diámetro en coordenadas mínimas, eliminando el parámetro  $x$  entre la ecuación (40) y su conjugada :

$$\bar{\lambda} = \bar{a} + \bar{b}t^{-1} + \bar{c}t^{-2} + \bar{d}t^{-3} + \bar{f}t^{-2}x \quad (40')$$

Se obtiene :

$$(\lambda - a)\bar{f}t^{-2} - (\bar{\lambda} - \bar{a})ft^2 - (b\bar{f}t^{-1} - \bar{b}ft) - (c\bar{f} - \bar{c}f) - (d\bar{f}t - \bar{d}ft^{-1}) = 0$$

o, multiplicando por  $t^2$

$$(\lambda - a)\bar{f} - (\bar{\lambda} - \bar{a})ft^4 - (b\bar{f}t - \bar{b}ft^3) - (c\bar{f}t^2 - \bar{c}ft^2) - (d\bar{f}t^3 - \bar{d}ft) = 0. \quad (41)$$

Derivando respecto de  $t$  y eliminando entre ambas ecuaciones el parámetro  $t$  se tiene :

$$4f(\bar{\lambda} - a)t + (b\bar{f} - 3\bar{b}ft^2) + (2c\bar{f} - 2\bar{c}f) + (3d\bar{f}t^2 - \bar{d}f) = 0.$$

de donde

$$\bar{\lambda} - \bar{a} = \frac{3\bar{b}}{4}t^{-1} - \frac{b\bar{f}}{4f}t^{-3} + \frac{2c\bar{f} - 2\bar{c}f}{4f}t^{-3} + \frac{\bar{d}}{4}t^{-3} - \frac{3d\bar{f}}{4f}t^{-1},$$

o, pasando a su conjugada :

$$\lambda = a + \frac{3b}{4}t - \frac{b\bar{f}}{4f}t^3 + \frac{2c\bar{f} - 2\bar{c}f}{4f}t^3 + \frac{d}{4}t^3 - \frac{3d\bar{f}}{4f}t. \quad (42)$$

que es una curva del tipo:  $\lambda = a + b't + d't^2$ , es decir, del tipo 7) de la pág. 167.

## 21. LA TRANSFORMACIÓN ASOCIADA CON LA DERIVADA CIRCULAR DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA

La derivada tercera circular de una función polígona es la misma a lo largo de una curva de aproximación cualquiera que a lo largo del círculo osculador en el punto considerado, a aquella curva.

Fijado un punto en el plano  $z$ , establezcamos una correspondencia  $T_c$  entre los puntos de este plano y los del plano  $\tau_2^*$ , haciendo corresponder a cada punto del plano  $z$  el punto correspondiente en el plano  $\tau_2^*$  al valor de la derivada tercera circular a lo largo de la circunferencia del plano  $z$  que tiene por centro el punto considerado y pasa por el punto fijo. Cada punto de este plano viene determinado por los valores de  $\theta$  y  $\kappa$ . La transformación  $T_c$  estará, pues, definida por las ecuaciones siguientes :

$$\tau_2^* = a + bt^2 + ct^4 + dt^6 + ht^3\kappa + ft^5\kappa + gt^4\kappa^2 \quad (43)$$

$$\bar{\tau}_2^* = \bar{a} + \bar{b}\bar{t}^2 + \bar{c}\bar{t}^4 + \bar{d}\bar{t}^6 + \bar{h}\bar{t}^3\kappa + \bar{f}\bar{t}^5\kappa + \bar{g}\bar{t}^4\kappa^2 \quad (43')$$

en que :

$$a = w_{zzz}, \quad b = 3w_{z\bar{z}\bar{z}}, \quad c = 3w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}, \quad d = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}, \quad h = -6iw_{z\bar{z}}, \quad f = -6iw_{\bar{z}\bar{z}}, \\ g = -6iw_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad t = e^{-i\theta}.$$

El Jacobiano de esta transformación es :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_2^*}{\partial t} & \frac{\partial \tau_2^*}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{\tau}_2^*}{\partial t} & \frac{\partial \bar{\tau}_2^*}{\partial z} \end{vmatrix}$$

que desarrollado da :

$$J = (2b\bar{h} + 4c\bar{f} + 4h\bar{c} + 6f\bar{d})\bar{t}^2 + (2b\bar{f} + 6h\bar{d})\bar{t}^4 + (4c\bar{h} + 6d\bar{f} + 2h\bar{b} + 4f\bar{c}) + (6d\bar{h} + 2f\bar{b})\bar{t}^2 + (4b\bar{g} + 3h\bar{f} + 12g\bar{d} + 5h\bar{f})\bar{t}^3 z + (8c\bar{g} + 6h\bar{h} + 10f\bar{f} + 8g\bar{c})\bar{t}^1 z + (12d\bar{g} + 8f\bar{h} + 4g\bar{b})\bar{t} z + (6h\bar{g} + 14g\bar{f} + 4h\bar{g})\bar{t}^2 z^2 + (14f\bar{g} + 10g\bar{h})z^2 + 16g\bar{g}\bar{t}^1 z^3. \quad (44)$$

Para que la transformación que estamos considerando sea degenerada es necesario y suficiente que este Jacobiano sea idénticamente nulo. Esto conduce a las condiciones siguientes.

- (1)  $2b\bar{h} + 4c\bar{f} + 4h\bar{c} + 6f\bar{d} = 0.$
- (2)  $2b\bar{f} + 6h\bar{d} = 0.$
- (3)  $4c\bar{h} + 6d\bar{f} + 2h\bar{b} + 4f\bar{c} = 0.$
- (4)  $6d\bar{h} + 2f\bar{b} = 0.$
- (5)  $4b\bar{g} + 3h\bar{f} + 12g\bar{d} + 5h\bar{f} = 0.$
- (6)  $8c\bar{g} + 6h\bar{h} + 10f\bar{f} + 8g\bar{c} = 0.$
- (7)  $12d\bar{g} + 8f\bar{h} + 4g\bar{b} = 0.$
- (8)  $6h\bar{g} + 14g\bar{f} + 4h\bar{g} = 0.$
- (9)  $14f\bar{g} + 10g\bar{h} = 0.$
- (10)  $16g\bar{g} = 0.$

Las condiciones (1) y (3) son conjugadas así como (2) y (4), (5) y (7), (8) y (9) y por tanto equivalen a una condición única. El sistema anterior de condiciones puede pues reducirse al formado por : (1), (2), (5), (6), (8) y (10).

De (10) resulta :  $g = 0.$

De (10) y (6) :  $h = f = 0.$

Estas condiciones satisfacen también a las otras ecuaciones.

La condición necesaria y suficiente para que la transformación que estamos estudiando sea degenerada, es que se anulen simultáneamente  $f$ ,  $g$  y  $h$ . O, lo que es lo mismo, que sean nulas -  $w_z$ ,  $w_{z\bar{z}}$  y  $w_{z\bar{z}}$ .

No basta pues que la función sea monógena en el punto considerado: es necesario además que sean monógenas en ese punto las funciones  $w_z$  y  $w_{\bar{z}}$ . Si la función dada es monógena en una región que comprenda al punto considerado entonces no sólo se verifica que:  $f = g = h = 0$ , sino que serán también:  $b = c = d = 0$ . En este caso mediante la transformación considerada todos los puntos del plano  $z$  se convierten en el punto único  $\tau_2^* = a = w_{zzz}$ .

Estudiamos a continuación la transformación  $T_c$  en el caso en que la función no es monógena en un entorno del punto considerado, pero se verifica en él:  $f = g = h = 0$ . Entonces,  $b$ ,  $c$  y  $d$  no tienen necesariamente que ser nulas y pueden presentarse los siguientes casos:

21.1. En el punto considerado es:  $b = c = d = f = g = h = 0$ .

La transformación convierte todos los puntos del plano  $z$  en el punto único:  $\tau_2^* = a = w_{zzz}$  y recíprocamente.

21.2. En el punto es:  $c = d = f = g = h = 0$ , pero  $b \neq 0$ . La transformación se reduce a:

$$\tau_2^* = a + b t^2 = w_{zzz} + 3 w_{z\bar{z}} e^{-2i\theta},$$

que transforma todos los  $\infty^2$  puntos del plano  $z$  en los  $\infty^1$  puntos de la circunferencia de centro en el punto  $a$  y de radio  $|b|$ . Inversamente, a un punto  $\tau_2^*$  de esta circunferencia le corresponden en el plano  $z$  los  $\infty^1$  puntos de una línea recta que pasa por el punto  $z$  considerado.

21.3. En el punto es:  $b = d = f = g = h = 0$ , pero  $c \neq 0$ . La transformación es entonces:

$$\tau_2^* = a + c t^4 = w_{zzz} + 3 w_{z\bar{z}} e^{-4i\theta},$$

que transforma todos los puntos del plano  $z$  en los  $\infty^1$  puntos de la circunferencia de centro en  $a$  y radio  $|c|$ . Inversamente, a un punto  $\tau_2^*$  de esta circunferencia le corresponden en el plano  $z$  los 2  $\infty^1$  puntos de dos distintas rectas que pasan por el punto considerado formando entre ellas un ángulo recto.

21.4. Si en el punto es:  $b = c = f = g = h = 0$ , pero  $d \neq 0$ . En este caso la transformación es:

$$\tau_2^* = a + d t^6 = w_{zzz} + w_{z\bar{z}} e^{-6i\theta},$$

que convierte los  $\infty^2$  puntos del plano  $z$  en los  $\infty^1$  puntos de la circunferencia de centro en el punto  $a$  y radio  $|d|$ . Recíprocamente, a un punto de esta circunferencia le corresponden en el plano  $z$  los  $3 \infty^1$  puntos de tres rectas que pasan por el punto  $z$  considerando formando entre ellas ángulos de  $60^\circ$ .

En cada uno de los tres casos últimamente considerados — casos 21.2, 21.3 y 21.4 — a una recta del plano  $z$  que pasa por el punto considerado le corresponde un punto de una circunferencia en el plano  $\tau_2^*$  y este punto gira en sentido inverso al de aquella recta y con una velocidad angular que es doble, cuádruple o séxtuple la de aquella, respectivamente.

21.5. Si en el punto es:  $d = f = g = h = 0$ . La transformación es entonces:

$$\tau_2^* = a + b t^2 + c t^4 = w_{zzz} + 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3 w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta}.$$

Los  $\infty^2$  puntos del plano  $z$  se convierten en los  $\infty^1$  de un caracol de Pascal, cuyo círculo base es:  $a + c t^4$  y la longitud característica  $|b|$ .

Recíprocamente, a un punto de este caracol de Pascal, que no sea su punto doble, le corresponden en el plano  $z$  los  $\infty^1$  de una recta que pasa por el punto  $z$  considerado. Al punto doble, si es crunodal, le corresponden los puntos de dos rectas que pasan por el punto  $z$ ; si es acnodal, ningún punto; y si es de retroceso los puntos de una única recta a través del punto considerado.

21.6. Si es en el punto:  $c = f = g = h = 0$ . La transformación queda reducida a:

$$\tau_2^* = a + b t^2 + d t^6 = w_{zzz} + 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}.$$

Los puntos del plano  $z$  se convierten en los de una curva del tipo de  $\tau_1$  considerado en el apartado 7) de la pág. 167. A un punto de esta curva, que no sea doble, corresponden en el plano  $z$  los puntos de una recta que pasa por el punto considerado. A un punto doble corresponden tantas rectas del plano  $z$  como ramas de la curva pasen por el punto múltiple, teniendo en cuenta que por cada rama de orden superior se obtiene una sola recta en el plano  $z$ .

21.7. Si en el punto es:  $b = f = g = h = 0$ , la transformación se reduce a:

$$\tau_2^* = a + c t^4 + d t^6 = w_{zzz} + 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}.$$

En esta correspondencia, a cada punto del plano  $z$  corresponde un punto de una curva del tipo de  $\tau_1$  considerado en el apartado 6) de la página 164. Recíprocamente, a todo punto de esta curva corresponden en el plano  $z$  los puntos de una recta que pasa por el punto considerado. Se exceptúan los puntos dobles a los cuales corresponden dos rectas distintas si son crunodales y una recta si son de retroceso.

21.8. Si en el punto  $z$  es:  $f = g = h = 0$ , la transformación es de la forma:

$$\tau_2^* = a + b t^2 + c t^4 + d t^6 = w_{zzz} + 3 w_{zz\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}.$$

A los puntos del plano  $z$  les corresponden los puntos de la curva  $\tau_1$  representativa de la derivada tercera rectilínea de la función considerada. A un punto de esta curva corresponden, inversamente, los puntos de una recta del plano  $z$  que pasa por el punto considerado. Se exceptúan los dobles a los que corresponden dos rectas si son crunodales. Y el punto triple, si existe, al que corresponden tres rectas distintas si pasan por él tres ramas lineales; dos rectas si pasa una rama lineal y una de segundo orden; y una recta si pasa una sola rama lineal o una de tercer orden.

Volvamos ahora al caso general de la correspondencia no degenerada. Hemos visto que mediante la correspondencia:

$$\tau_2^* = \tau_2^*(\theta, \kappa), \quad (43)$$

a un punto del plano  $z$  le corresponde un punto del plano  $\tau_2^*$ . Vamos a considerar ahora la cuestión inversa, a saber, el número de puntos del plano  $z$  que corresponden a un determinado punto del plano  $\tau_2^*$ .

Para responder a esta cuestión, bastaría resolver las ecuaciones (43) y (43') despejando en ellas  $\theta$  y  $\kappa$ . Eliminando entre estas dos ecuaciones  $\kappa$ , para lo cual multiplicamos ambas por 1 y  $\kappa$ , obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{vmatrix} \tau_2^* - \tau_1 & l & m & 0 \\ 0 & \tau_2^* - \tau_1 & l & m \\ \bar{\tau}_2^* - \bar{\tau}_1 & \bar{l} & \bar{m} & 0 \\ 0 & \bar{\tau}_2^* - \bar{\tau}_1 & \bar{l} & \bar{m} \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

en que

$$\begin{aligned} \tau_1 &= w_{zzz} + 3 w_{zz\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta}, \\ l &= -6 i e^{-3i\theta} (w_{z\bar{z}\bar{z}} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta}) \quad \text{y} \quad m = -6 w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta}. \end{aligned}$$

Desarrollando el determinante (45) obtenemos una ecuación en  $\theta$  de la forma siguiente :

$$re^{-8i\theta} + se^{-6i\theta} + ke^{-4i\theta} + pe^{-2i\theta} + q + \bar{p}e^{2i\theta} + \bar{k}e^{4i\theta} + \bar{s}e^{6i\theta} + \bar{r}e^{8i\theta} = 0 \quad (46)$$

Esta ecuación de octavo grado en  $e^{2i\theta}$  tiene sus raíces en la circunferencia unidad, o bien son pares de puntos inversos respecto de la misma algunos de ellos, después de :

$$\frac{r}{r} = \frac{s}{s} = \frac{k}{k} = \frac{p}{p} = \frac{q}{q} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}} = \frac{\bar{k}}{\bar{k}} = \frac{\bar{s}}{\bar{s}} = \frac{\bar{r}}{\bar{r}} = 1 \quad (47)$$

La ecuación tiene a lo sumo ocho soluciones para  $\theta$ . Llevados estos valores a la ecuación :

$$\tau_2^* = a + be^{-2i\theta} + ce^{-4i\theta} + de^{-6i\theta} + he^{-3i\theta}\kappa + fe^{-5i\theta}\kappa + ge^{-4i\theta}\kappa^2,$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en  $\kappa$  que determina dos valores para la curvatura, por cada valor de  $\theta$ . Combinando los valores de  $\theta$  y  $\kappa$  se obtienen a lo sumo dieciséis puntos.

*Hemos probado que a cada punto del plano  $\tau_2^*$  corresponden en virtud de la correspondencia (43) asociada con la derivada tercera circular dieciséis puntos (reales o imaginarios) en el plano  $z$ .*

A continuación vamos a estudiar en qué se transforman las  $\infty^2$  rectas del plano  $z$  mediante la transformación (43) que estamos estudiando.

Comenzamos estudiando las rectas que pasan por el punto fijo  $z$ . Una línea recta del plano  $z$  que pasa por el punto considerado tiene por ecuación :  $\theta = \text{constante}$ . La transformada de esta recta viene dada por la siguiente ecuación paramétrica (siendo el parámetro la variable real  $\kappa$ ) :

$$\tau_2^* = a + be^{-2i\theta} + ce^{-4i\theta} + de^{-6i\theta} + he^{-3i\theta}\kappa + fe^{-5i\theta}\kappa + ge^{-4i\theta}\kappa^2.$$

Obtenemos así la familia de parábolas ya estudiada en el párrafo 20.

Veamos ahora en qué se transforman las rectas del plano  $z$  que no pasan por el punto fijo. La ecuación de una de estas rectas puede ponerse en la forma :

$$\kappa = je^{i\theta} + \bar{j}e^{-i\theta} \quad (48)$$

donde  $j$  y  $\bar{j}$  son números complejos conjugados que determinan la posición de la recta. Sustituyendo este valor de  $x$  en la ecuación (43) se obtiene:

$$\tau_2^* = a + b e^{-2i\theta} + c e^{-4i\theta} + d e^{-6i\theta} + \left. \begin{aligned} & (hj + gj^2) e^{-2i\theta} + \\ & + (h\bar{j} + f\bar{j} + 2gj\bar{j}) e^{-4i\theta} + (f\bar{j} + g\bar{j}^2) e^{-6i\theta} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

que es una curva del tipo de la  $\tau_1$  estudiada y que representa la derivada tercera rectilínea de la función polígona.

### LA DERIVADA TERCERA PARABÓLICA

#### 22. LA DERIVADA TERCERA PARABÓLICA DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA

Hemos visto que la derivada tercera general de una función polígona es la misma si se sustituye la curva de aproximación al punto  $z$  por la parábola osculatriz es este punto a aquella curva. De aquí la denominación de parabólica. El vector que representa esta derivada en el plano  $\tau$  es la suma de los tres vectores  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ .

Hecho ya, anteriormente el estudio de los vectores  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , vamos a dedicar el primer párrafo de este apartado al estudio del vector  $\tau_3(\theta, \varepsilon)$ . El segundo párrafo lo dedicamos al estudio del vector  $\tau$  que representa la derivada tercera parabólica. Por último estudiamos la correspondencia  $T_p$  asociada con la derivada tercera de una función polígona cuando se consideran las tres primeras derivadas de la curva de aproximación como coordenadas de un espacio cartesiano tridimensional y de las transformaciones puntuales a que da lugar.

#### 23. ESTUDIO DEL VECTOR $\tau_3(\theta, \varepsilon)$

Cuando se fija el valor de  $\theta$  esta expresión representa una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. El punto  $\tau_3$  se mueve sobre ella a una velocidad proporcional a la de  $\varepsilon$ .

Si se consideran las dos rectas correspondientes a los valores  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , ambas rectas forman entre sí el ángulo:  $-4(\theta_2 - \theta_1)$  que es cuatro veces mayor que el correspondiente ángulo  $\theta_2 - \theta_1$  en el plano  $z$  y además de sentido opuesto. Cuando  $\theta$  varía la recta que estamos considerando gira a una velocidad cuatro veces mayor y en opuesto sentido que

la de la tangente a la curva de aproximación en el punto  $z$  considerado.

Vamos a hallar a continuación las rectas que son paralelas a las correspondientes tangentes — de inclinación  $\theta$  — del plano  $z$ .

Bastará para ello resolver la ecuación :

$$\operatorname{tg} \cdot (\alpha + \theta) = -\operatorname{tg} \cdot (\beta + 4\theta) \quad (50)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes. El grado en  $\operatorname{tg} \cdot \theta$  de esta ecuación será el número de soluciones.

Poniendo :  $\operatorname{tg} \cdot \alpha = r$ ,  $\operatorname{tg} \cdot \beta = s$ ,  $\operatorname{tg} \cdot \theta = p$ , tenemos :

$$\operatorname{tg} \cdot (\alpha + \theta) = \frac{\operatorname{tg} \cdot \alpha + \operatorname{tg} \cdot \theta}{1 - \operatorname{tg} \cdot \theta \operatorname{tg} \cdot \alpha} = \frac{r + p}{1 - rp}$$

$$\operatorname{tg} \cdot (\beta + 4\theta) = \frac{\operatorname{tg} \cdot \beta + \operatorname{tg} \cdot 4\theta}{1 - \operatorname{tg} \cdot \beta \operatorname{tg} \cdot 4\theta} \quad \text{pero} \quad \operatorname{tg} \cdot 4\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \cdot 2\theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \cdot 2\theta}$$

y

$$\operatorname{tg} \cdot 2\theta = \frac{2 \operatorname{tg} \cdot \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \cdot \theta}$$

$$\operatorname{tg} \cdot 4\theta = \frac{4 \operatorname{tg} \cdot \theta / (1 - \operatorname{tg}^2 \cdot \theta)}{1 - (4 \operatorname{tg}^2 \cdot \theta / (1 - \operatorname{tg}^2 \cdot \theta))^2} = \frac{4p(1 - p^2)}{1 + p^4 - 6p^2}$$

$$\operatorname{tg} \cdot (\beta + 4\theta) = \frac{s + \frac{4p(1 - p^2)}{1 + p^4 - 6p^2}}{1 - \frac{4sp(1 - p^2)}{1 + p^4 - 6p^2}} = \frac{s + sp^4 - 6sp^2 + 4p - 4p^3}{1 + p^4 - 6p^2 - 6sp + 4sp^3}$$

$$\frac{r + p}{1 - rp} = \frac{sp^4 - 4p^3 + s - 6sp^2 + 4p}{p^4 + 4sp^3 - 6p^2 - 4sp + 1}$$

y de aquí

$$rp^4 + p^5 + 4rsp^3 + 4sp^4 - 6rp^2 - 6p^3 - 4rsp - 4sp^2 + r + p = -sp^4 + 4p^3 - s + 6sp^2 - 4p + rsp^5 - 4rp^4 + rsp - 6rsp^3 + 4rp^2. \quad (51)$$

ecuación de quinto grado en  $p = \operatorname{tg} \cdot \theta$ , que da cinco valores, en general, para la cuestión propuesta.

#### 24. ESTUDIO DEL VECTOR $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$

Empezamos este estudio del vector  $\tau$  que representa la derivada tercera de una función polígona considerando curvas de aproximación que tienen el mismo círculo osculador en el punto considerado. En realidad basta considerar todas las parábolas que pasan por aquel punto

y tienen en él el mismo círculo osculador. La expresión de  $\tau$  es la siguiente :

$$\tau = w_{zzz} + 3w_{z\bar{z}\bar{z}} e^{-2i\theta} + 3w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} e^{-6i\theta} - 6ie^{-3i\theta} \kappa (w_{z\bar{z}} + w_{\bar{z}z} e^{-2i\theta}) - 6iw_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \kappa^2 - 2iw_{\bar{z}} e^{-4i\theta} \varepsilon$$

en que suponemos constantes  $\theta$  y  $\kappa$  y como única variable, la real  $\varepsilon$ .

Como la expresión de la derecha es lineal en  $\varepsilon$  se deduce que cuando  $\varepsilon$  varía el lugar geométrico de  $\tau$  es una línea recta. Esta línea recta es paralela al vector  $\tau_3$  estudiado en el párrafo anterior y por tanto cuando  $\theta$  varía permaneciendo  $\kappa$  constante (es decir, el círculo osculador constante gira alrededor del punto  $z$ ) la recta gira en sentido contrario al de giro de la tangente en  $z$  a la curva de aproximación y a una velocidad cuádruple la de esta. Supuesto  $\kappa$  fijo se tiene una familia de rectas dependiente del parámetro  $\theta$  de la que nos proponemos hallar su envolvente.

Escribamos las ecuaciones de la recta y su conjugada :

$$\tau = a + be^{-2i\theta} + ce^{-4i\theta} + de^{-6i\theta} + he^{-3i\theta} \kappa + fe^{-5i\theta} \kappa + ge^{-4i\theta} \kappa^2 + je^{-4i\theta} \varepsilon \quad (52)$$

$$\bar{\tau} = \bar{a} + \bar{b}e^{2i\theta} + \bar{c}e^{4i\theta} + \bar{d}e^{6i\theta} + \bar{h}e^{3i\theta} \kappa + \bar{f}e^{5i\theta} \kappa + \bar{g}e^{4i\theta} \kappa^2 + \bar{j}e^{4i\theta} \varepsilon \quad (52')$$

en que :

$$a = w_{zzz}, \quad b = 3w_{z\bar{z}\bar{z}}, \quad c = 3w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}, \quad d = w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}, \quad h = -6iw_{z\bar{z}}, \\ f = -6iw_{\bar{z}}, \quad g = -6w_{\bar{z}} \quad \text{y} \quad j = -2iw_{\bar{z}} = \frac{1}{3}ig.$$

Eliminando  $\varepsilon$  entre ambas se obtiene para la ecuación de la recta en coordenadas mínimas.

$$(\tau - a)\bar{j}e^{4i\theta} - (\bar{\tau} - \bar{a})je^{-4i\theta} - \bar{b}je^{2i\theta} + b\bar{j}e^{-2i\theta} - c\bar{j} + \bar{c}j - \bar{d}je^{-2i\theta} + d\bar{j}e^{2i\theta} - h\bar{j}e^{i\theta} \kappa + hje^{-i\theta} \kappa - f\bar{j}e^{-2i\theta} \kappa + fje^{2i\theta} \kappa - g\bar{j} \kappa^2 + g\bar{j} \kappa^2 = 0 \quad (53)$$

que, después de multiplicada por  $e^{4i\theta}$  se convierte en una expresión de la forma :

$$(\tau - a)\bar{j}t^8 - (b\bar{j} - dj - f\bar{j})t^6 - (h\bar{j}\kappa)t^5 - (c\bar{j} - \bar{c}j + g\bar{j}\kappa^2 - g\bar{j}\kappa^2)t^4 - (h\bar{j}\kappa)t^3 - (d\bar{j} + \bar{b}j - f\bar{j}\kappa)t^2 - (\bar{\tau} - \bar{a})j = 0 \quad (54)$$

con  $t = e^{i\theta}$  ecuación de octavo grado en  $t$ .

La envolvente de este haz de rectas se obtiene eliminando el parámetro  $t$  entre esta ecuación y la que se obtiene derivando respecto

a  $t$ . La ecuación que se obtiene al derivar es, después de suprimido un factor  $t$  común, de sexto grado en  $t$  y despejando el valor de  $\tau$  se obtiene para ecuación de la envolvente en forma paramétrica :

$$\tau = a + 6(\bar{d}j + \bar{f}j - \bar{b}j)t^4 - 5h\bar{j}\kappa t^3 - 4(c\bar{j} - \bar{c}j + g\bar{j}\kappa^2 - \bar{g}j\kappa^2)t^2 + 3h\bar{j}\kappa t - 2(\bar{d}j - \bar{b}j + \bar{f}j\kappa)/8jt^6. \quad (55)$$

ecuación de la forma :

$$\tau = a' + b't + c't^2 + d't^3 + f't^4 + g't^5 + h't^6,$$

que es, en general, una curva algebraica de orden doce.

Resumiendo : *Cuando se consideran como curvas de aproximación al punto  $z$ , parábolas que tienen el mismo círculo osculador en aquel punto, el lugar geométrico del punto  $\tau$  que representa en el plano  $\tau$  el valor de la derivada tercera de una función polígona es una línea recta. Cuando aquel círculo osculador gira alrededor del punto fijo esta recta en el plano  $\tau$  gira también en sentido contrario y con una velocidad angular cuatro veces la de aquél. Su envolvente es una curva algebraica de orden doce.*

## 25. LA CORRESPONDENCIA ASOCIADA CON LA DERIVADA PARABÓLICA

Como hemos visto, la derivada tercera de una función polígona depende no sólo del punto en el cual se considera sino también del elemento diferencial de tercer orden de la curva de aproximación. Correspondiendo con los  $\infty^3$  valores reales del elemento diferencial en cada punto  $z$ , la derivada tercera toma  $\infty^3$  valores para cada uno de  $z$ . Si representamos estos valores de  $\tau$  en el plano complejo  $\tau = \mu + i\nu$ , los puntos llenarán una región del plano. De lo que llevamos dicho se deduce fácilmente que esta región consiste en todo el plano complejo  $\tau$ , de tal manera que a cada punto del plano  $\tau$  corresponden  $\infty^1$  elementos de tercer orden en el punto considerado.

La derivada tercera de una función polígona establece así una correspondencia entre los puntos de un espacio cartesiano tridimensional, cuyas coordenadas son las tres derivadas  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$  de la curva de aproximación, consideradas en el punto fijo  $z$ , o mejor las tres cantidades  $y' = \text{tg} \cdot \theta$ ,  $\kappa$  y  $\varepsilon$ , relacionadas con las anteriores por las fórmulas de la pág. 24, y los puntos del plano complejo  $\tau$ , correspondencia que es unívoca; pero no biunívoca, pues a cada punto del plano  $\tau$  corresponderán en el primer espacio los puntos de una o varias líneas.

Llamaremos a esta correspondencia, correspondencia  $T_p$ , o bien, la correspondencia asociada con la derivada tercera de una función polígona.

Queremos hallar en esta correspondencia, las transformadas de las rectas paralelas a los ejes coordenados.

A una recta paralela al eje  $y'$  o eje  $\theta$ , corresponde en el plano  $\tau$  una curva de la forma :

$$\tau = A + B e^{-2i\theta} + C e^{-3i\theta} + D e^{-4i\theta} + E e^{-5i\theta} + F e^{-6i\theta} \quad (56)$$

curva algebraica de orden doce, en general.

Este sería el caso en que se considerasen como curvas de aproximación parábolas iguales pasando por el punto fijo  $z$ .

Si la recta considerada está en el plano de los ejes  $\theta$  y  $\varepsilon$  le corresponde una curva algebraica de orden seis de la forma :

$$\tau = A + B e^{-2i\theta} + D e^{-4i\theta} + F e^{-6i\theta} \quad (57)$$

en que :

$$A = a, \quad S = b, \quad F = d \quad \text{y} \quad D = c - 2i w_{\bar{z}} \varepsilon$$

Si la recta coincide con el eje  $\theta$  la curva correspondiente en el plano  $\tau$  es :

$$\tau = a + b e^{-2i\theta} + c e^{-4i\theta} + d e^{-6i\theta}$$

que representa la derivada tercera rectilínea

A una recta del primer espacio paralela al eje  $x$  corresponde en el plano  $\tau$  una curva de la forma :

$$\tau = G + H x + I x^2 \quad (58)$$

que es una parábola, salvo si  $H$  o  $I$  sean nulas, en cuyo caso se convierte en una recta, o que ambas sean nulas simultáneamente, en cuyo caso se convierte en un punto

$$H = -6i e^{-3i\theta} (w_{\bar{z}} + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta}) \quad \text{será nula cuando: } w_{\bar{z}} + w_{\bar{z}} e^{-2i\theta} = 0.$$

Esta ecuación representa la circunferencia derivada correspondiente a la función polígona  $w_{\bar{z}}$ , cuando se supone variable  $\theta$ . A cada valor de  $\theta$  corresponde un punto de la circunferencia. Para que  $H$  se anule es necesario que el punto que en esta circunferencia corresponde al valor señalado para  $\theta$  coincida con el origen. Para que  $I$  se anule es necesario que  $w_{\bar{z}} = 0$ , es decir, que la función sea monógena en el punto.

Si la función es monógena en un entorno serán también  $w_{z\bar{z}}$  y  $w_{\bar{z}z}$  nulas y se anulará por tanto  $H$  reduciéndose la curva (58) a un punto.

Cuando la recta considerada está en uno de los planos  $\theta x$  o  $x \varepsilon$ , la curva que se obtiene es del mismo tipo que la (58). La familia de parábolas correspondientes a las rectas del plano  $\theta x$  paralelas al eje  $x$  coincide con la estudiada en el párrafo 19.

Por último, a una recta del primer espacio paralela al eje  $\varepsilon$  corresponde en el plano  $\tau$  una curva de la forma :

$$\tau = J + K \varepsilon \tag{59}$$

que representa una recta. Esta recta se reduce a un punto cuando  $K = 0$ . Siendo  $K = -2i w_{z\bar{z}} e^{-4i\theta}$  será nula solamente en aquellos puntos en que  $w_{z\bar{z}} = 0$ , es decir, en los puntos en que la función  $w$  sea monógena.

Estudiamos a continuación las correspondencias que surgen cuando se consideran planos paralelos a los coordenados en el primer espacio.

Si se considera un plano del primer espacio paralelo al coordenado  $\theta x$  se obtiene una correspondencia entre los puntos de este plano y los puntos del plano  $\tau$  que podemos expresar mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tau &= a + b t^2 + c' t^4 + d t^6 + h t^3 x + f t^5 x + g t^4 x^2. & (60) \\ \bar{\tau} &= \bar{a} + \bar{b} t^{-2} + \bar{c}' t^{-4} + \bar{d} t^{-6} + \bar{h} t^{-3} x + \bar{f} t^{-5} x + \bar{g} t^{-4} x^2 & (60') \end{aligned}$$

en que  $a, b$  y  $d$  tienen los mismos valores que los coeficientes designados por las mismas letras al estudiar la derivada tercera rectilínea ;  $h, f$  y  $g$  los valores que tenían estas letras al estudiar la derivada circular y es :  $c' = c - 2i w_{z\bar{z}} \varepsilon$ .

Esta correspondencia puntual es degenerada cuando el jacobiano de la transformación es nulo. Se obtiene el mismo jacobiano (44) obtenido en la pág. 57, salvo la sustitución de  $c$  por  $c'$ . Por lo tanto, se obtienen como condiciones que ha de satisfacer la función para que la correspondencia sea degenerada las mismas que allí, a saber, que la función  $w$  y las  $w_z$  y  $w_{\bar{z}}$  han de ser monógenas en el punto.

En este caso, todos los puntos del plano paralelo al  $\theta x$  se transforman en los de la curva :

$$\tau = a + b t^2 + c' t^4 + d t^6 \tag{61}$$

algebraica de orden seis y que coincide con la  $\tau_1$  que representa la derivada tercera rectilínea cuando el plano se confunde con el coordenado

$\theta x$ . Así, cuando aquel plano se desplaza paralelamente a sí mismo aquella curva se deforma de una manera continua. (En realidad el único coeficiente que cambia es el  $c'$ ).

A los puntos de una recta paralela al eje  $\theta$  le corresponden unívocamente los de la curva (61). En cambio a los puntos de una recta paralela al eje  $x$  corresponde un único punto sobre aquella curva.

Si la correspondencia no es degenerada a los puntos del plano situados en una recta paralela al eje  $\theta$  corresponden unívocamente los puntos de una curva algebraica de orden doce, la que se obtiene poniendo en (60):  $x = \text{constante}$ . Los puntos de una recta paralela al eje  $x$  se convierten en los puntos de una parábola. La correspondencia que es unívoca en un sentido, no es biunívoca. A un punto del segundo plano corresponden en el primero contando entre reales e imaginarios, dieciséis puntos.

Consideramos a continuación un plano paralelo al coordenado  $\theta \varepsilon$ .

Entre los puntos de este plano y los del plano  $\tau$  queda establecida una correspondencia que viene dada por las fórmulas:

$$\tau = a + bt^2 + ct^4 + dt^6 + h't^3 + f't^5 + lt^4 \varepsilon. \quad (62)$$

$$\bar{\tau} = \bar{a} + \bar{b}t^{-2} + \bar{c}t^{-4} + \bar{d}t^{-6} + \bar{h}'t^{-3} + \bar{f}'t^{-5} + \bar{l}t^{-4} \varepsilon \quad (62')$$

en la que los valores de  $a, b, c$  y  $d$  coinciden con los valores dados a estas letras al considerar la derivada rectilínea y los  $h'$  y  $f'$  son, en relación con los  $h$  y  $f$  considerados en el estudio de la derivada circular,  $h' = hx$ ,  $f' = fx$ , siendo además:  $l = -2iw_1$ .

El Jacobiano de esta transformación es:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial l} & \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial l} \\ \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varepsilon} \end{vmatrix}$$

que desarrollado es:

$$J = (2b\bar{l} + 6\bar{d}l)t^{-3} + (3h'\bar{l} + 5\bar{f}'l)t^{-2} + 4(c\bar{l} + \bar{c}l)t^{-1} + (5f'\bar{l} + 3\bar{h}'l) + (6d\bar{l} + 2\bar{b}l)t + 8l\bar{l}t^{-1} \varepsilon \quad (63)$$

La transformación será degenerada cuando este Jacobiano se anule lo que conduce a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2b\bar{l} + 6\bar{d}l = 0 \\
 (2) \quad & 3h\bar{l} + 5\bar{f}l = 0 \\
 (3) \quad & 4c\bar{l} + 4\bar{c}l = 0 \\
 (4) \quad & 5f\bar{l} + 3\bar{h}l = 0 \\
 (5) \quad & 6d\bar{l} + 2\bar{b}l = 0 \\
 (6) \quad & 8l\bar{l} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{64}$$

Las condiciones (1) y (5) así como (2) y (4) son conjugadas y equivalen a una condición única. Las (3) y (6) son conjugadas de sí mismas.

De la (6) se deduce:  $l = 0$ , que satisface también a las (1), (2) y (3) que con la (6) forman un sistema equivalente al (64).

Siendo  $l = -2i w_z$ , la correspondencia será degenerada cuando se anule  $w_z$ , es decir, cuando la función sea monógena en el punto considerado.

En esta correspondencia degenerada todos los puntos del primer plano se transforman en los puntos de una curva algebraica de orden doce cuya ecuación:

$$\tau = a + bt^2 + ct^4 + dt^6 + h't^8 + f't^5 = 0 \tag{65}$$

se obtiene haciendo  $l = 0$  en la ecuación (62) de la transformación.

Cuando el plano se confunde con el coordenado  $\theta \varepsilon$  la curva (65) se convierte en la  $\tau_1$  que representa la derivada tercera rectilínea.

Cuando el plano se desplaza paralelamente a sí mismo de una manera continua la curva se deforma (en realidad solamente varían los coeficientes  $h'$  y  $f'$ ) y tiende a convertirse en la  $\tau_1$  — considerada como doble — cuando aquel plano tiende a confundirse con el coordenado  $\theta \varepsilon$ .

Para un plano fijo, a los puntos de una recta paralela al eje  $\theta$ , le corresponden unívocamente los puntos de la curva (65) mientras que a los puntos de una recta paralela al eje  $\varepsilon$  le corresponde un único punto sobre aquella curva.

Si la transformación no es degenerada a los puntos de una recta paralela al eje  $\theta$ , corresponden en virtud de la transformación (62) los de una curva algebraica de orden doce y a los de una recta paralela al eje  $\varepsilon$  los puntos de una recta.

A cada punto del primer plano corresponde en el plano  $\tau$  un único punto. La correspondencia no es, sin embargo biunívoca. Para ver el número de puntos del primer plano que corresponden a un punto del segundo bastaría resolver las ecuaciones (62) y (62') despejando en

ellas los valores de  $\theta$  y  $\varepsilon$ . Eliminemos entre ambas  $\varepsilon$ , obteniéndose la siguiente ecuación de octavo grado en  $t = e^{-i\theta}$ .

$$(\tau - a)\bar{l} - (\bar{\tau} - \bar{a})lt^8 + \bar{b}lt^6 - b\bar{l}t^2 - (c\bar{l} - \bar{c}l)t^4 + \bar{d}lt^2 - d\bar{l}t^6 + \bar{h}l t^5 - h\bar{l}t^3 + \bar{f}l t^3 - f\bar{l}t^5 = 0 \quad (66)$$

que da ocho valores reales o imaginarios para  $t$ , ya que sus coeficientes cumplen la condición para que las raíces de esta ecuación estén en la circunferencia unidad, o bien, sean puntos inversos respecto de la misma, condiciones análogas a las (47) consideradas en la pág. 61. Cada valor real de  $\theta$  llevado a la ecuación (62) nos da un valor para  $\varepsilon$  obteniéndose pues a lo sumo ocho puntos reales como homólogos de un punto del plano  $\tau$ .

Por último, consideremos un plano paralelo al coordenado  $\varkappa\varepsilon$ . La correspondencia que se establece entre los puntos del primer plano y los del plano  $\tau$  viene dada por las fórmulas siguientes :

$$\tau = A + h''\varkappa + g''\varkappa^2 + l''\varepsilon \quad (67)$$

$$\bar{\tau} = \bar{A} + \bar{h}''\varkappa + \bar{g}''\varkappa^2 + \bar{l}''\varepsilon \quad (67')$$

en que :

$$A = w_{zzz} + 3w_{z\bar{z}\bar{z}}e^{-2i\theta} + 3w_{\bar{z}z\bar{z}}e^{-4i\theta} + w_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}e^{-6i\theta}, \quad h'' = -6ie^{-3i\theta}(w_{z\bar{z}} + w_{\bar{z}\bar{z}}e^{-2i\theta}), \quad g'' = -6w_{\bar{z}}e^{-4i\theta} \quad \text{y} \quad l'' = -2iw_{\bar{z}}e^{-4i\theta}$$

$A$ , es un punto de la curva  $\tau_1$  que representa la derivada tercera rectilínea:  $h'' = h + f$ ;  $g'' = ge^{-4i\theta}$  y  $l'' = le^{-4i\theta}$ .

El Jacobiano de esta transformación es :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial \varkappa} & \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varkappa} \\ \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varepsilon} \end{vmatrix} =$$

$$= (h''\bar{l}'' - \bar{h}''l'') + (2\bar{g}''\bar{l}'' - 2g''l'') \quad (68)$$

La transformación será degenerada cuando se anule este Jacobiano, lo cual conduce a las condiciones siguientes :

$$(1) \quad h''\bar{l}'' - \bar{h}''l'' = 0.$$

$$(2) \quad g''\bar{l}'' - \bar{g}''l'' = 0.$$

que son equivalentes a :

$$(1') \quad \frac{h''}{\bar{h}''} = \frac{g''}{\bar{g}''} = \frac{l''}{\bar{l}''} \quad \text{si } h'', g'' \text{ y } l'' \text{ son } \neq 0$$

Estas condiciones expresan que para que la correspondencia sea degenerada es necesario que los vectores  $h''$ ,  $g''$  y  $l''$  sean paralelos.

Siendo los vectores  $g''$  y  $l''$  siempre perpendiculares, esta condición es imposible. No pudiendo ser distintos de cero simultáneamente los coeficientes  $h''$ ,  $g''$  y  $l''$ . Del análisis directo de las condiciones (1) y (2) se deduce que :  $l'' = 0$ , satisface idénticamente ambas.

Esta condición conduce a :  $w_{\bar{z}} = 0$ , es decir, que la función sea monógena, en el punto. Entonces, es también :  $g'' = 0$ , y la transformación queda reducida a :

$$\tau = A + h''z \tag{69}$$

$$\bar{\tau} = \bar{A} + \bar{h}''\bar{z} \tag{69'}$$

En ella, todos los puntos de un plano paralelo al  $z \varepsilon$ , se convierten en los puntos de una recta. Los de una recta, paralela al eje  $z$  se transforman unívocamente en los de la recta pero a los de una paralela al eje  $\varepsilon$  les corresponde un único punto de la misma.

Hemos considerado el caso en que la función es monógena en el punto sin serlo en un entorno del mismo. Si la función es monógena en un entorno del punto considerado, entonces, es también :  $h'' = 0$ , y todos los puntos del plano considerado se transforman en un único punto  $A$  que coincide en este caso con  $a$ .

Si la correspondencia no es degenerada, a los puntos de una recta paralela al eje  $z$ , corresponden unívocamente los de una parábola, mientras que a los de una paralela al eje  $\varepsilon$ , les corresponden los puntos de una recta.

A cada punto del primer plano corresponde en virtud de la correspondencia (67) un punto único en el plano  $\tau$ . Veamos cuántos puntos corresponden en el primer plano a un punto del plano  $\tau$ . Para ello eliminamos  $\varepsilon$  entre las ecuaciones (67) y (67') obteniendo la ecuación :

$$(\tau - A)\bar{l}'' - (\bar{\tau} - \bar{A})l'' + (l''\bar{h}'' - h''\bar{l}'')z + (l''\bar{g}'' - g''\bar{l}'')z^2 = 0 \tag{70}$$

ecuación de segundo grado con coeficientes reales y que da dos valores para la variable real  $z$ . Reales, imaginarios o confundidos. Llevados a la ecuación (67) se obtiene un valor de  $\varepsilon$  por cada valor de  $z$ . Así, en

general, a cada punto del plano  $\tau$  corresponden dos puntos en el primer plano.

Para obtener una información más completa sobre la correspondencia que estamos estudiando formemos el discriminante de la ecuación cuadrática (70):

$$\Delta = 4(l''\bar{g}'' - g''\bar{l}'')[(\tau - A)\bar{l}'' - (\bar{\tau} - \bar{A})l''] - (l''\bar{h}'' - h''\bar{l}'')^2 \quad (71)$$

Igualando este discriminante a cero obtenemos la ecuación de una línea recta en el plano  $\tau$ . A los puntos de esta recta corresponde en el primer plano un punto doble. Esta recta divide al plano  $\tau$  en dos regiones. Los puntos de una de ellas tienen dos homólogos en el primer plano. Los de la otra no tienen ningún correspondiente real.

Cuando el primer plano se desplaza de una manera continua paralelamente a sí mismo, el punto o puntos homólogos de un punto del plano  $\tau$  describe una o varias curvas, correspondientes en el primer espacio a un punto del plano  $\tau$ .

Estas propiedades estudiadas desde el punto de vista de las transformaciones a que da lugar esta correspondencia  $T_p$  establecida, tienen su traducción en el lenguaje de la tercera derivada y corresponden a propiedades de la misma.

## APENDICE

### 26. LA DERIVADA $n$ — SIMA DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA

Mediante derivaciones sucesivas respecto de la variable compleja  $z$  podemos obtener la expresión de la derivada  $n$  — sima de una función polígona. En el estudio de esta derivada suponemos que la función  $w$  de la variable  $z$  es continua y posee derivadas parciales continuas (\*) hasta el orden  $n$  inclusive, pero las derivadas primeras no deben satisfacer necesariamente las condiciones de Cauchy - Riemann.

La derivada  $n$  — sima de una función polígona depende no sólo del punto  $z$  en el cual está formada sino también de las  $n$  primeras derivadas (y no de orden superior) en aquel punto, de la curva de aproximación, es decir, del elemento diferencial de orden  $n$ .

---

(\*) Si la función  $w$  de la variable compleja  $z = x + iy$ , tiene por componentes  $u$  y  $v$ , es decir:  $w = u + iv$ , suponemos que  $u$  y  $v$  son funciones continuas de las variables reales  $x$  e  $y$ , y poseen derivadas parciales continuas hasta el orden  $n$  inclusive.

Esta derivada es independiente de la derivada  $n$  —sima de la cuova de aproximación cuando — y solamente — la función es monógena. Entonces la derivada  $n$  —sima es también independiente de las otras derivadas de la curva de aproximación y tiene un valor único independiente de aquella curva.

27. LA DERIVADA  $n$  —SIMA RECTILÍNEA DE UNA FUNCIÓN POLÍGENA

Vamos a generalizar para la derivada  $n$  —sima rectilínea de una función polígena algunos de los resultados obtenidos en el estudio de la derivada rectilínea.

Algunas de las propiedades de las dos primeras derivadas de una función polígena, se conservan en la derivada tercera y es muy sencillo generalizarlas a la derivada  $n$  —sima. Otras, sin embargo, han sido obtenidas directamente al generalizar el estudio hecho de la derivada tercera, propiedades estas últimas que no se presentan en el estudio de las dos derivadas primeras.

Como en el caso de la tercera derivada se toman como curvas de aproximación al punto fijo  $z$ , las rectas que pasan por él.

Por derivación reiterada de la expresión que representa la derivada tercera se obtiene para la derivada  $n$  —sima rectilínea la expresión siguiente :

$$\eta_1 = a_0 + a_1 e^{-2i\theta} + a_2 e^{-4i\theta} + a_3 e^{-6i\theta} + \dots + a_n e^{-2ni\theta} \quad (72)$$

en que :

$$a_0 = w_{zz} \dots z, a_1 = \binom{n}{1} w_{zz} \dots z\bar{z}, a_2 = \binom{n}{2} w_{zz} \dots z\bar{z}\bar{z}, a_n = \binom{n}{n} w_{\bar{z}\bar{z}} \dots \bar{z},$$

y donde las expresiones  $w_{zz} \dots \bar{z}$ , no significan derivación parcial respecto de  $z$  y  $\bar{z}$ , sino la aplicación reiterada de los operadores  $D$  y  $P$  a la función  $w$ . Si la función polígena es analítica entonces estos símbolos se convierten en las derivadas parciales de  $w$  respecto a  $z$  y  $\bar{z}$ . Si hacemos :  $e^{-2i\theta} = t$  la ecuación (72) toma la forma :

$$\eta_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad (73)$$

Para obtener la ecuación de esta curva en coordenadas mínimas bastará eliminar  $t$  entre ella y su conjugada :

$$\bar{\eta}_1 = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 t^{-1} + \bar{a}_2 t^{-2} + \dots + \bar{a}_n t^{-n} \quad (73')$$

obteniéndose :

$$\begin{vmatrix} a_0 - \eta_{i1} & a_1 & a_2 & a_3 \dots a_n & 0 \dots 0 \\ 0 & a_0 - \eta_1 & a_1 & a_2 \dots a_{n-1} & a_n \dots 0 \\ 0 & 0 & a_0 - \eta_1 & a_1 \dots a_{n-2} & a_{n-1} \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_2 \quad \bar{a}_1 \bar{a}_0 - \bar{\eta}_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (74)$$

ecuación que desarrollada es de grado  $2n$  en  $\eta_1, \bar{\eta}_1$ . Se obtiene así una curva algebraica de orden  $2n$ .

Los valores  $\eta_1$  de la derivada  $n$  — sima rectilínea de una función polígona  $w$  correspondientes a las diferentes pendientes de las rectas que pasan por el punto fijo  $z$  están representados en el plano complejo por los puntos de una curva algebraica de orden  $2n$ .

Desarrollando el determinante (74) se observa también que esta curva contiene los puntos circulares del plano y que tiene en cada uno de ellos un punto múltiple de orden  $n$ , ya que su expresión contiene los términos  $(x^2 + y^2)^n, (x^2 + y^2)^{n-1}, \dots, (x^2 + y^2)$  cuando se pasa a coordenadas cartesianas.

La tangente de la curva  $\eta_1$  en el punto correspondiente al valor  $t$  del parámetro es la siguiente :

$$\eta_1 - a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \dots - a_n t^n = \frac{it(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + na_n t^{n-1})}{i(\bar{a}_1 t^{n-1} + 2\bar{a}_2 t^{n-2} + 3\bar{a}_3 t^{n-3} + \dots + n\bar{a}_n)} \times \\ \times (t^n \bar{\eta}_1 - \bar{a}_0 t^n - \bar{a}_1 t^{n-1} - \dots - \bar{a}_n). \quad (75)$$

Quitando denominadores se obtiene una ecuación de grado  $2n$  en  $t$ . Para cada valor de  $\eta_1$  se obtienen pues  $2n$  tangentes si todos aquellos valores de  $t$  están en la circunferencia unidad.

La curva que representa la derivada  $n$  — sima rectilínea es de clase  $2n$ . Pasa por los puntos circulares del plano y tiene en ellos un punto múltiple de orden  $n$ .

Estos resultados son una generalización de los obtenidos en los casos de las tres primeras derivadas. Así, la curva que representa la primera derivada de una función polígona — circunferencia de Kasner — es de orden y clase dos y contiene como puntos simples los circulares.

La curva que representa la segunda derivada rectilínea de una función polígona es un caracol de Pascal, curva de cuarto orden y de cuarta clase, que tiene como puntos dobles a los circulares.

En cuanto a la derivada tercera rectilínea, estudiada en la primera parte de este trabajo, ya hemos visto es una curva de orden y clase seis que tiene un punto triple en cada uno de los circulares del plano.

El número máximo de puntos dobles que puede contener una curva de orden  $2n$ , sin que degenera es:

$$(n - 1) (2n - 1).$$

La curva que estamos considerando tiene dos puntos múltiples de orden  $n$  (los circulares) que equivalen a:  $n(n - 1)$  puntos dobles.

Esta curva podrá pues tener además:  $(n - 1)^2$  puntos dobles, o múltiples equivalentes a ellos. Por lo tanto sólo podrá contener a lo sumo otro punto múltiple de orden  $n$ , que sea real, o imaginario. Las condiciones que han de verificar los coeficientes de (72) para que exista este punto múltiple de orden  $n$ , real o imaginario, son las siguientes:

$$\frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \frac{a_3}{a_{n-3}} = \dots = \frac{a_{n-3}}{a_3} = \frac{a_{n-2}}{a_2} = \frac{a_{n-1}}{a_1} \quad (76)$$

Cumplidas estas condiciones, el punto múltiple de orden  $n$  es:

$$\eta_1^* = a_0 - \frac{a_1 \bar{a}_n}{\bar{a}_{n-1}} \quad (77)$$

que está en la circunferencia de centro en el punto  $a_0$ , y radio  $|a_n|$ .

Veamos lo que sucede en el caso de las tres primeras derivadas.

Si consideramos el caso de la derivada primera, vemos que no puede existir ningún punto doble. En la derivada segunda, la curva que representa la derivada rectilínea puede tener un punto doble, además de los circulares. La condición es cumplida idénticamente y existe siempre un punto doble real o imaginario (caso del caracol de Pascal). En cuanto a la derivada tercera, sus coeficientes han de cumplir la condición:  $|b| = |c|$ , que es a lo que queda reducida la (76).

Desde la tercera derivada en adelante, no existirá, en general, un punto múltiple de orden  $n$ , distinto de los cíclicos; solamente cuando sus coeficientes cumplan la condición (76) existirá un punto múltiple de orden  $n$ , real o imaginario. Si  $n$  es impar por el punto pasa al menos una rama de la curva; si  $n$  es par, puede suceder que por aquel punto no pase ninguna rama de la curva.

Los focos y puntos de retroceso de la curva  $r_1$  se obtienen derivando su ecuación (73) respecto del parámetro  $t$ , e igualando la derivada

a cero. Se obtiene un punto de retroceso cuando el valor de  $t$  que satisface a la ecuación obtenida está sobre la circunferencia unidad. En caso contrario se obtiene un foco. Siendo la derivada de orden  $n - 1$  en general, la suma del número de focos y del de puntos de retroceso de la curva es  $n - 1$ . La condición que deben cumplir los coeficientes de la curva para que existan puntos de retroceso se obtiene eliminando el parámetro  $t$  entre la ecuación de la derivada igualada a cero y su conjugada.

Estudiamos ahora la posibilidad de dibujar la curva mediante un movimiento uniforme de giro de un radio vector que tenga su centro en un punto del plano convenientemente elegido.

Sea la curva:  $\eta_1 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$ , y consideremos un punto  $\pi$  del plano  $\eta$ . Designamos por  $x$  al vector  $a_0 - \pi$ . El vector determinado por el punto  $\pi$  y un punto de la curva  $\eta_1$  es:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n - \pi = x + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n = r(t).$$

Para que el movimiento de giro de este vector — cuando el vector  $t$  gira de una manera uniforme — sea uniforme, es necesario que el «climant»  $\frac{r}{r}$  del vector  $r$  sea de la forma  $Kt^p$ , siendo  $K$  un número complejo constante. Se ve que debe ser:  $p = n$ . Además:

$$\frac{x + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n}{\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} t + \bar{a}_{n-2} t^2 + \dots + \bar{x} t^n} = K.$$

Se obtienen de nuevo las condiciones (76) necesarias para la existencia del punto múltiple de orden  $n$ , unidas a la condición de que el origen del vector,  $\pi$ , debe de coincidir precisamente con aquel punto múltiple.

*Si la curva  $\eta_1$  posee un punto múltiple de orden  $n$  — real o imaginario — el vector que tiene por origen este punto y su extremo sobre la curva, gira con una velocidad  $n$  veces mayor que la del giro de la tangente a la curva de aproximación en el plano  $z$ .*

Así, cuando esta tangente ha girado un ángulo de  $180^\circ$ , el extremo del vector ha descrito la curva  $\eta_1$ . Cuando gira un ángulo de  $360^\circ$ , el extremo del vector describe la curva dos veces.

Este resultado es, en cierto modo, una generalización de los obtenidos en el estudio de las tres primeras derivadas. En la circunferencia que representa la derivada primera rectilínea cualquier punto de la misma (punto simple) puede considerarse como origen del vector; la ve-

locidad de recorrido es la misma que en el plano  $z$ . En el caracol que representa la segunda derivada el origen del vector debe de ser el punto doble, y la velocidad de recorrido es doble la del plano  $z$ . En cuanto a la derivada tercera, ya hemos visto que cuando existe un punto triple, distinto de los cíclicos, tomando este punto como origen y el extremo sobre  $\tau_1$ , este vector gira con una velocidad triple la del plano  $z$ .

Si suponemos la circunferencia unidad:  $|t| = 1$ , uniformemente cubierta de masa y queremos formarnos una idea aproximada de la distribución de masa sobre la curva  $\eta_1$  podemos formar el valor medio de  $\eta_1$  con respecto a  $\theta$ :

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (a_0 + a_1 e^{-2i\theta} + a_2 e^{-4i\theta} + \dots + a_n e^{-2ni\theta}) d\theta,$$

obteniendo el valor  $a_0 = w_{zz} \dots z$ , que coincide con el valor único de la derivada, caso de ser la función monógena.



## BIBLIOGRAFÍA

(Las referencias aparecen en orden cronológico)

- D. POMPEIU. «Sur la continuité des fonctions d'une variable complexe», Tesis; Paris, 1905.
- P. MONTEL. *Annales de l'Ecole Normale*, (3), vol. 14 (1907), págs. 283 - 295.
- L. LICHTENSTEIN. *Sitzungsberichte, Berliner Mathematische Gesellschaft*, 1910, págs. 84 - 100.
- D. POMPEIU. «Sur une classe de fonctions d'une variable complexe», *Rendiconti di Palermo*, vol. 33 (1912), págs. 108 - 113.
- T. HAYASHI. «On arcolar Holomorphic Functions», *Rendiconti di Palermo*, vol. 34 (1912), págs. 220 - 224.
- T. MONTEL. *Comptes Rendus*, vol. 156 (1913), págs. 1820 - 1822.
- D. POMPEIU. «Sur une classe de fonctions d'une variable complexe», *Rendiconti di Palermo*, vol. 35 (1913), pág. 277.
- H. RADEMACHER. «Bemerkungen zu den Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen und zum Moreraschen Satz», *Mathematische Zeitschrift*, vol. 3 (1919).
- E. R. HEDRICK, L. INGOLD y W. D. A. WESTFALL. «Theory of non-analytic functions of a complex variable», *Journal de Mathematiques*, (9), vol. 2 (1923), págs. 327 - 342.
- H. LOOMAN. «Ueber eine Erweiterung des Cauchy - Goursatschen Integralsatzes», *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vol. 14 (1924), págs. 234 - 239.
- J. WOLFF. «On the sufficient conditions for analyticity of functions of a complex variable», *Report of Toronto Congress*, págs. 457 - 459. También, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vol. 14 (1925).
- E. R. HEDRICK y L. INGOLD. «Analytic functions in three dimensions», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 27 (1925), págs. 551 - 555.
- E. R. HEDRICK y L. INGOLD. «The Beltrami equations in three dimensions *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 27 (1925), págs. 556 - 562.
- M. NICOLESKO. *Comptes Rendus*, vol. 185 (1927), pág. 442.
- G. E. RAYNOR. «Generalization of the Beltrami equations to curved space», *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 33 (1927), págs. 435 - 439.
- E. KASNER. «A New Theory of Polygenic (or Non - Monogenic) Functions», *Science*, vol. 66 (1927), págs. 581 - 582.
- M. NICOLESKO. «Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace», Tesis; Paris, 1928.
- C. CALUGAREANO. «Sur les fonctions polygenes d'une variable complexe», Tesis; Paris, 1928.
- G. CALUGAREANO. *Comptes Rendus*, vol. 186 (1928), pág. 930; vol. 186 (1928) pág. 1406.
- G. CALUGAREANO. *Bulletin de la Société des Sciences de Cluj*, vol. 14 (1928), páginas 357 - 361.
- E. R. HEDRICK. «On the derivatives of non-analytic functions», *Proceedings of the National Academy*, vol. 14 (1928), págs. 649 - 654.
- E. R. HEDRICK. «On certain properties of non-analytic functions of a complex variable», *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, vol. 20 (1928), págs. 109 - 124. También, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 34 (1928), págs. 150, 435 - 436, 703.
- E. KASNER. «General Theory of Polygenic or Non - Monogenic Functions. The Derivative Congruence of Circles», *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 14 (1928), págs. 75 - 82.

- E. KASNER. «Geometrie des fonctions polygenes», Atti del Congresso Internazionale del Matematici, vol. 6 (1928), págs. 255 - 260.
- E. KASNER. «The Second Derivative of a Polygenic Function», Transactions of the American Mathematical Society, vol. 30 (1928), págs. 803 - 818.
- E. KASNER. «Note on the Derivative Circular Congruence of a Polygenic Function», Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 34 (1928), págs. 561 - 565.
- L. HOFMANN y E. KASNER. «Homographic Circles or Clocks», Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 34 (1928), págs. 495 - 503.
- E. R. HEDRICK y L. INGOLD. «Conjugate functions in three dimensions», Journal de Mathematiques, ser. 9 (1928).
- P. W. KETCHUM. «Analytic functions of hypercomplex variables», Transactions of the American Mathematical Society, vol. 30 (1928), págs. 641 - 667.
- G. CALUGAREANO. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 31 (1929), pág. 372.
- E. R. HEDRICK. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 35 (1929), págs. 176, 599.
- J. RIDDER. «Ueber den Cauchyschen Integralsatz für reelle und complexe Funktionen», Mathematische Annalen, vol. 102 (1929), págs. 132 - 156.
- J. RIDDER. «Ein Satz über iterierte Integrale und seine Anwendung zur Untersuchung der Analyticität komplexer Funktionen», Mathematische Zeitschrift, vol. 31 (1929), págs. 141 - 148.
- J. RIDDER. «Ueber Analyticität komplexer Funktionen», Nieuw Archiv voor Wetkunde, (2), vol. 16 (1929), págs. 17 - 19.
- G. CALUGAREANO. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 32 (1930), pág. 110.
- J. E. DONAHUE. «Concerning the geometry of the second derivative of a polygenic function», Columbia University Tesis; Hamburg, 1930.
- E. R. HEDRICK. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 36 (1930), págs. 59, 368, 801.
- E. E. KRAMER. «Polygenic functions of the dual variable  $w + u = jv$ », Columbia University, Tesis, (1930).  
También, American Journal of Mathematics, vol. 52 (1930), págs. 370 - 376.
- V. C. POOR. «Residues of Polygenic functions», Transactions of the American Mathematical Society, vol. 32 (1930), págs. 216 - 222.
- P. W. KETCHUM y TED MARTIN. «Polygenic functions of hypercomplex variables», Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 38 (1932), páginas 66 - 72.
- E. R. HEDRICK. «Non - Analytic Functions of a Complex Variable», Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 39 (1933), págs. 75 - 96.
- E. KASNER. «A Complete Characterization of the Derivative of a Polygenic Function», Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 22 (1936), págs. 172 - 177.
- E. KASNER. «Polygenic Functions Whose associated element-to-point transformation converts unions into points», Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 44 (1938), págs. 726 - 732.
- E. KASNER y J. DE CICCO. «The derivative circular congruence-representation of a Polygenic Function», American Journal of Mathematics, vol. 61 (1939), págs. 995 - 1003.
- P. CAPELLI. «Sur le nombre complexe binaire», Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 47 (1941), págs. 585 - 595.
- E. KASNER y J. DE CICCO. «The Geometry of Polygenic Functions», Revista de la Universidad de Tucumán, (1946).

