

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE ANILLOS DE WALLMAN

por

JOSÉ L. BLASCO (*)

ABSTRACT. Given a Wallman ring A of bounded functions on a Tychonoff space X , we consider the Wallman-Frink compactification $\omega(X, Z(A))$ of X . By embedding X into a product of compact intervals (homeomorphic to $[0, 1]^A$), another Hausdorff compactification $\sigma(X, A)$ of X is obtained. In this paper we study order relationships (in the usual sense among compactifications of X) between the above compactifications.

La palabra espacio designará un espacio topológico de Hausdorff completamente regular. Sea A un subanillo del anillo $C(X)$ de las funciones reales continuas sobre un espacio X . Siguiendo a Biles [3], se dice que A es un anillo de Wallman sobre X cuando la familia $Z(A)$, de todos los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) = 0\}$, $f \in A$, es una base normal en el sentido de Frink [4].

Si A es un anillo de Wallman sobre X cuyas funciones están acotadas, mediante la inmersión de X en un producto de intervalos compactos (homeomorfo a $[0, 1]^A$), se obtiene una compactación Hausdorff $\sigma(X, A)$ de X . Esa compactación se caracteriza por la siguiente propiedad: *La familia $\{f|_X : f \in C(\sigma(X, A))\}$ es el mínimo subanillo uniformemente cerrado de $C(X)$ que contiene a A y a las funciones reales constantes.*

Por otra parte, aplicando el método de Wallman-Frink [4] a X con la base de conjuntos cerrados $Z(A)$, se obtiene otra compactación Hausdorff $\omega(X, Z(A))$ de X , que se caracteriza por las siguientes propiedades ([7], IV.2.B): (a) *La familia $\{cl_\omega Z : Z \in Z(A)\}$ es una*

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valencia, que dirige el Profesor D. Manuel Valdivia.

base de conjuntos cerrados en $\omega(X, Z(A))$. (b) Si $Z_1, Z_2 \in Z(A)$ entonces $cl_\omega(Z_1 \cap Z_2) = cl_\omega Z_1 \cap cl_\omega Z_2$ (siendo cl_ω el operador clausura en $\omega(X, Z(A))$).

Considerando el orden usual en la familia de las compactaciones de X , en general no existen relaciones de orden entre las compactaciones $\sigma(X, A)$ y $\omega(X, Z(A))$. Sin embargo la igualdad $\sigma(X, A) = \omega(X, Z(A))$ ⁽¹⁾ tiene consecuencias interesantes [6].

En este artículo estudiaremos condiciones que se deben exigir al anillo de Wallman de partida, para que las dos compactaciones consideradas sean comparables.

Escribiremos R^Y para el anillo de todas las funciones reales definidas sobre un conjunto Y . Únicamente consideraremos subanillos de R^Y que separen los puntos de Y . Si B es un subconjunto de R^Y escribiremos B^* para la colección de las funciones de B que están acotadas. Un conjunto cero en Y es un conjunto de la forma $Z(f) = \{x \in Y: f(x) = 0\}$, $f \in R^Y$.

Sea X un conjunto, A un subanillo de R^X y consideremos el anillo $A_0 = \{f/g \in (R^X)^*: f, g \in A, Z(g) = \emptyset\}$. Se dice que A es cerrado para inversión acotada si $A_0 \subset A$. En general, $Z(A_0) \subset Z(A)$. Es fácil ver que, si A contiene una función h que no se anula, entonces A_0 contiene todas las funciones racionales constantes y $A^* \subset A_0$. En ese caso se tiene además que $Z(A_0) = Z(A)$. En efecto, dada $f \in A$ se tiene que $Z(h) \cap Z(f) = \emptyset$. La función $g = f^2/(f^2 + h^2)$ está en A_0 y $Z(g) = Z(f)$, luego $Z(A) \subset Z(A_0)$. Como todo anillo de Wallman contiene una función que no se anula ⁽²⁾, se sigue que si A es un anillo de Wallman sobre X , entonces A_0 también lo es.

1. *Lema.* Sea X un espacio y A un subanillo de $C(X)$. Supongamos que A es un subretículo de $C(X)$ que separa puntos y cerrados de X y contiene una función que no se anula. Entonces A y A_0 son anillos de Wallman sobre X .

Demostración. Por hipótesis A_0 es un subanillo de $C(X)$ que contiene las funciones racionales constantes y $Z(A_0)$ es una base de conjuntos cerrados en X . De ([3], Teorema 4.2) se sigue que A_0 es

(1) Dos extensiones T_1 y T_2 de X se dice que son equivalentes si existe un homeomorfismo de T_1 sobre T_2 cuya restricción a X es la identidad. En ese caso escribiremos $T_1 = T_2$.

(2) Sea A un anillo de Wallman sobre X . Si $x, y \in X$, $x \neq y$, existen $f_1, f_2 \in A$ tales que $x \in Z(f_1)$, $y \in Z(f_2)$ y $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$. Entonces $g = f_1^2 + f_2^2 \in A$ y $Z(g) = \emptyset$.

un anillo de Wallman sobre X , y puesto que $Z(A) = Z(A_0)$, A también lo es.

El siguiente Teorema sobre extensión de funciones continuas es fundamental en la demostración de los principales resultados de este artículo.

2. *Teorema (Taimanov).* Sea X un subespacio denso de un espacio T . Sea K un espacio compacto y $\mathcal{D}$ una base de conjuntos cerrados en K , cerrada para intersecciones finitas. Una función continua $\varphi: X \rightarrow K$ se puede extender continuamente a $\hat{\varphi}: T \rightarrow K$ si y sólo si cuando D_1 y D_2 son elementos disjuntos de $\mathcal{D}$, $cl_T \varphi^{-1}(D_1) \cap cl_T \varphi^{-1}(D_2) = \emptyset$.

3. *Teorema.* Si A es un anillo de Wallman sobre un espacio X , entonces $\sigma(X, A_0) \geq \omega(X, Z(A))$.

Demostración. Sea φ la identidad de $X \subset \sigma(X, A_0)$ sobre $X \subset \omega(X, Z(A))$. Sean $f, g \in A$ tales que $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$. Entonces $h = f^2/(f^2 + g^2) \in A_0$, $h^\sigma(Z(f)) = 0$ y $h^\sigma(Z(g)) = 1$, siendo h^σ la extensión continua de h a $\sigma(X, A_0)$. Puesto que $\varphi^{-1}(cl_\omega Z(f)) = Z(f) \subset Z(h^\sigma)$, $\varphi^{-1}(cl_\omega Z(g)) \subset Z((h-1)^\sigma)$ y $\{cl_\omega Z(k): k \in A\}$ es una base de conjuntos cerrados en $\omega(X, Z(A))$, del Teorema 2 se sigue que φ se extiende continuamente a $\sigma(X, A_0)$. Por lo tanto $\sigma(X, A_0) \geq \omega(X, Z(A))$.

Como veremos en el siguiente ejemplo, la desigualdad $\omega(X, Z(A)) \leq \sigma(X, A)$, en general no es cierta.

4. *Ejemplo.* Sea N^* la compactación de Alexandrof de N , el espacio discreto de los números naturales. Sea $A = E(N^*)^{(3)}$. Entonces A es un anillo de Wallman sobre N , cerrado uniformemente y contiene todas las funciones reales constantes (i.e. es un retículo). Sin embargo, $\sigma(N, A) = N^* < \omega(N, Z(A)) = \beta N$ (la compactación de Stone-Čech de N), ya que $Z(A)$ es la colección de todos los subconjuntos de N .

Sea Y un conjunto y H un subanillo de R^Y . Denotamos por Y_H al conjunto Y provisto de la topología para la cual una base de conjuntos cerrados es $Z(H)$. Hacemos notar que si H es además un retículo que contiene todas las funciones racionales constantes, la topología anterior coincide con la topología inicial generada por las funciones de H ([5], Teorema 3.6).

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos familias de subconjuntos de un conjunto dado.

(3) Si K es una compactación de un espacio X , escribiremos $E(K)$ para denotar el conjunto $\{f|_X: f \in C(K)\}$.

Escribiremos $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ si cuando $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existen $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ tales que $F_i \subset G_i$ y $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ [8]. Escribiremos $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ si $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$. En [9] se prueba que si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son bases normales sobre un espacio X , entonces $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ si y sólo si $\omega(X, \mathcal{F}) \leq \omega(X, \mathcal{G})$. Consecuentemente, $\omega(X, \mathcal{F}) = \omega(X, \mathcal{G})$ si y sólo si $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$. Dos anillos de Wallman A y B sobre X se dice que son equivalentes si $Z(A) \cong Z(B)$.

5. Teorema. Sea X un conjunto. Sean F y G dos subanillos de $(R^X)^*$, que son además retículos y contienen una función que no se anula. Entonces $\sigma(X_G, G) \leq \omega(X_F, Z(F))$ si $Z(G) \leq Z(F)$.

Demostración. Consideremos el anillo asociado $G_0 = \{f/g \in C^*(X_G) : f, g \in G, Z(g) = \emptyset\}$. Entonces $G \subset G_0 \subset C^*(X_G)$ y $Z(G) = Z(G_0)$. Además, G_0 es un retículo que contiene todas las funciones racionales constantes y separa puntos y cerrados en X_G . Por otra parte, F es un subretículo de $C^*(X_F)$ que separa puntos y cerrados en X_F . Por el Lema 1, F es un anillo de Wallman sobre X_F . Puesto que $Z(G) \leq Z(F)$, se sigue que la identidad φ de $X_F \subset \omega(X_F, Z(F))$ sobre $X_G \subset \sigma(X_G, G_0)$ es continua.

Veamos a continuación que φ se extiende continuamente a $\omega(X_F, Z(F))$. Si K_1 y K_2 son subconjuntos compactos disjuntos de $\sigma(X_G, G_0)$, existe una función $g \in C(\sigma(X_G, G_0))$ tal que $g(K_1) = -1$ y $g(K_2) = 1$. Puesto que el conjunto $G_0^\sigma = \{h^\sigma : h \in G_0\}$ es denso en $C(\sigma(X_G, G_0))$, existe una función $f \in G_0$ tal que

$$\sup \{|f^\sigma(y) - g(y)| : y \in \sigma(X_G, G_0)\} < 1/2$$

Consecuentemente, $f^\sigma(K_1) < -1/2$ y $f^\sigma(K_2) > 1/2$. Si $h_1 = (f + 1/2) \vee 0$ y $h_2 = (f - 1/2) \wedge 0$, se sigue que $h_i \in G_0$, $K_i \cap X \subset Z(h_i)$ y $Z(h_1) \cap Z(h_2) = \emptyset$. Sean $Z_1, Z_2 \in Z(F)$ tales que $Z(h_i) \subset Z_i$ y $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. Como $\varphi^{-1}(K_i) \subset Z_i$, se tiene que $cl_\omega \varphi^{-1}(K_1) \cap cl_\omega \varphi^{-1}(K_2) = \emptyset$. Por el Teorema 2, φ admite una extensión continua a $\omega(X_F, Z(F))$. Por otra parte, $G \subset G_0$ implica que $\sigma(X_G, G) \leq \sigma(X_G, G_0)$, por lo tanto $\sigma(X_G, G) \leq \omega(X_F, Z(F))$.

Como consecuencia del resultado anterior, si A es un anillo de Wallman sobre un espacio X , que además es un subretículo de $C^*(X)$, entonces $\sigma(X, A) \leq \omega(X, Z(A))$. Es natural preguntarse si la condición de retículo puede ser omitida. Como veremos en el siguiente ejemplo, la respuesta es negativa.

6. Ejemplo. Sea $B = \{h \in R^N : h \text{ es eventualmente constante}\}$. Entonces B es un subanillo de $C^*(N)$ y $Z(B) = \{M \subset N : M \text{ o bien}$

$N \sim M$ es finito}. Es bien conocido que B es anillo de Wallman sobre N y que $\omega(N, Z(B)) = N^*$.

Sea f la función definida $f(2n) = 1/n$, $f(2n-1) = 1 + 1/n$, $n = 1, 2, \dots$. Sea A el subanillo de $C^*(N)$ engendrado por $B \cup \{f\}$. Obviamente, $Z(B) \subset Z(A)$. Veamos que $Z(A) \subset Z(B)$. Sea $g \in A$. Entonces $g = h_0 + h_1 f + \dots + h_p f^p$, donde $h_i \in B$, $0 \leq i \leq p$, $p \in N$. Sea $m_0 \in N$ tal que para todo $m \geq m_0$, $h_i(m) = \alpha_i \in R$, $0 \leq i \leq p$. Si $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$, entonces $g \in B$. Supongamos que para algún $i_0 \geq 1$, $\alpha_{i_0} \neq 0$. Entonces $g(2n) = \alpha_0 + \alpha_1/n + \dots + \alpha_p/n^p$, $g(2n-1) = \alpha_0 + \alpha_1(n+1)/n + \dots + \alpha_p(n+1)^p/n^p$, si $2n-1 \geq m_0$. Por lo tanto g se anula a lo sumo en un número finito de puntos del conjunto $\{m_0, m_0+1, \dots\}$ y consecuentemente $Z(g)$ es finito. De esta forma $Z(g) \in Z(B)$ y $Z(A) = Z(B)$. Entonces A es un anillo de Wallman sobre N equivalente a B .

Puesto que N^* es la mínima compactación de N , se tiene que $N^* = \sigma(N, E(N^*)) \leq \sigma(N, A)$. Como $f \in C^*(N) \sim E(N^*)$, se sigue que $N^* < \sigma(N, A)$. Por otra parte, como $A \subset A_0$ y $Z(A) = Z(A_0)$, se tiene que $N^* = \omega(N, Z(A_0)) < \sigma(N, A) \leq \sigma(N, A_0)$.

El próximo resultado es una condición suficiente para la equivalencia de las compactaciones consideradas.

7. Corolario. Sea X un conjunto y A un subanillo de $(R^X)^*$ que contiene una función que no se anula. Si A es un retículo cerrado para inversión acotada, entonces $\sigma(X_A, A) = \omega(X_A, Z(A))$.

Demostración. Por el Teorema 3 se tiene que $\omega(X_A, Z(A)) \leq \sigma(X_A, A)$. Por otra parte, tomando $F = G = A$ en el Teorema 5 resulta que $\sigma(X_A, A) \leq \omega(X_A, Z(A))$. El anillo A es un retículo que contiene las funciones racionales constantes y separa los puntos y cerrados de X_A . Entonces A es un anillo de Wallman sobre X_A y $\omega(X_A, Z(A))$ es un espacio de Hausdorff. De las desigualdades anteriores se deduce entonces que $\sigma(X_A, A) = \omega(X_A, Z(A))$.

8. Teorema ([12], Teorema 4.3). Sea A un subanillo de $(R^X)^*$. Entonces $A = E(\omega(X_A, Z(A)))$ si y sólo si A es uniformemente cerrado, contiene una función que no se anula y es cerrado para inversión acotada.

Demostración. Necesidad. Puesto que A es un subanillo de $C^*(X_A)$ se tiene que $A \subset A_0 \subset C^*(X_A)$. Además A_0 es un retículo cerrado para inversión acotada, luego $\sigma(X_A, A_0) = \omega(X_A, Z(A_0))$. Por hipótesis $\sigma(X_A, A) = \omega(X_A, Z(A))$, luego $\sigma(X_A, A) = \sigma(X_A, A_0)$ ya

que $Z(A) = Z(A_0)$. Así pues $A = A_0$. *Suficiencia.* Por el Corolario 7, $\sigma(X_A, A) = \omega(X_A, Z(A))$, luego A es denso en $E(\omega(X_A, Z(A)))$. Pero como A es uniformemente cerrado, se sigue que $A = E(\omega(X_A, Z(A)))$.

Nota. En [2] se prueba el resultado anterior, con la hipótesis adicional de que A es un anillo de Wallman sobre X contenido en $E(\omega(X, Z(A)))$. Sin embargo, como acabamos de ver, dicha hipótesis no es necesaria.

9. Corolario. *Si A es un anillo de Wallman sobre un espacio X que además es un retículo, existe un anillo de Wallman equivalente, denso en $E(\omega(X, Z(A)))$ y que contiene las funciones racionales constantes.*

Demostración. Por el Corolario 7, $\omega(X, Z(A)) = \omega(X, Z(A_0)) = \sigma(X, A_0)$. Además, A_0 es denso en $E(\sigma(X, A_0))$.

10. Corolario ([1], Teorema 2.8). *Sea A un subanillo y subretículo de $C(X)$ que contiene las funciones reales constantes. Sea B un subanillo uniformemente cerrado de $C(X)$ que además es cerrado para inversión acotada. Entonces $Z(A) \leq Z(B)$ si y sólo si $A^* \subset B$.*

Demostración. La suficiencia es obvia. Veamos la necesidad. Por el Teorema 5, $\sigma(X_{A^*}, A^*) \leq \omega(X_{B^*}, Z(B^*))$. Del Teorema 8 se sigue que $\sigma(X_{B^*}, B^*) = \omega(X_{B^*}, Z(B^*))$. Por lo tanto $\sigma(X_{A^*}, A^*) \leq \sigma(X_{B^*}, B^*)$. Como B es uniformemente cerrado en $C^*(X)$ se tiene que $A^* \subset B^*$.

11. Teorema. *Sea A un anillo de Wallman sobre un espacio X que contiene las funciones reales constantes y es uniformemente cerrado. Entonces en la familia de todos los anillos de Wallman sobre X que son equivalentes a A y subretículos de $C^*(X)$, existe uno que contiene a todos los demás.*

Demostración. Consideremos el conjunto $M = \{f \in (R^X)^* : f^{-1}(C) \in Z(A) \text{ para todo conjunto cerrado } C \subset R\}$. Es claro que M es un subanillo de $C^*(X)$. Veamos que $M = E(\omega(X, Z(A)))^{(4)}$. Del Teorema 2 se sigue que $M \subset E(\omega(X, Z(A)))$. Por otra parte, si $h \in E(\omega(X, Z(A)))$ y C es un conjunto cerrado en R , se tiene que $h^{-1}(C)$ es un conjunto cero en $\omega(X, Z(A))$. Por lo tanto $h^{-1}(C)$ es igual a la intersección de las clausuras (en $\omega(X, Z(A))$) de una suce-

(4) Esta igualdad ha sido probada en [11]. Incluimos aquí una prueba sencilla de la misma.

sión de conjuntos de $Z(A)$ ([10], Teorema 2.2). Como $Z(A)$ es cerrado para intersecciones numerables, se sigue que $h^{-1}(C) \in Z(A)$. Consecuentemente $E(\omega(X, Z(A))) \subset M$.

Veamos ahora que $A^* \subset M$. Sea $g \in A^*$ y $\alpha \in R$. Como A es un retículo, las funciones $(g - \alpha) \vee 0$ y $(g - \alpha) \wedge 0$ están en A . De este modo, los conjuntos $\{x \in X : g(x) \geq \alpha\}$ y $\{x \in X : g(x) \leq \alpha\}$ pertenecen a $Z(A)$. Como $Z(A)$ es cerrado para intersecciones numerables, tenemos que $f \in M$. Entonces $A^* \subset M$ y $Z(A^*) = Z(M)$.

Sea ahora L un anillo de Wallman sobre X equivalente a A y subretículo de $C^*(X)$. Entonces L es equivalente a M y por el Corolario 10, $L^* = L \subset M$.

Vamos a probar con un ejemplo que en el Teorema anterior la condición de que A contenga las funciones reales constantes es necesaria.

12. Ejemplo. Como en el Ejemplo 6, sea B el anillo de todas las funciones reales eventualmente constantes definidas sobre N . Entonces B es un anillo de Wallman sobre N y $\omega(N, Z(B)) = N^*$. Sea f (resp. h) la función definida $f(2n) = 1/n$, $f(2n-1) = 0$ (resp. $h(2n) = 0$, $h(2n-1) = 1/n$), $n = 1, 2, \dots$. Consideremos el subanillo F (resp. G) de $C^*(N)$ engendrado por $B \cup \{f\}$ (resp. $B \cup \{h\}$).

(I) $Z(F) \cong Z(B)$ y por lo tanto F es un anillo de Wallman sobre N equivalente a B .

Demostración. Obviamente $Z(B) \leq Z(F)$. Sea $g \in F$. Entonces existen en B funciones $k_0, k_1, \dots, k_p$, $p \in N$, tales que $g = k_0 + k_1 f + \dots + k_p f^p$. Sea $m_0 \in N$ tal que si $m \geq m_0$, entonces $k_i(m) = \alpha_i \in R$, $0 \leq i \leq p$. Luego si $m \geq m_0$ resulta que $g(m) = \alpha_0 + \alpha_1 f(m) + \dots + \alpha_p f(m)^p$. En el caso de que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$, se sigue que $g \in B$. Supongamos entonces que para algún $i_0 \geq 1$, $\alpha_{i_0} \neq 0$. Por la definición de f existe un $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$g(2n-1) = \alpha_0, g(2n) = \alpha_0 + \alpha_1/n + \dots + \alpha_p/n^p (*)$$

Entonces existe un $n_1 \in N$, $n_1 \geq n_0$ tal que $g(2n) \neq 0$ si $n \geq n_1$. En el caso de que α_0 sea distinto de cero, se tiene que $Z(g) \subset \{1, 2, \dots, 2n_1\}$, luego $Z(g) \in Z(B)$. Si $\alpha_0 = 0$, entonces $\{2n_0 - 1, 2n_0 + 1, \dots\} \subset Z(g) \subset \{1, 3, 5, \dots\} \cup Z$, con $Z \subset \{1, 2, \dots, 2n_1\}$.

Veamos que $Z(F) \leq Z(B)$. Si Z_1 y Z_2 son conjuntos disjuntos de $Z(F)$, al menos uno de ellos es finito. Supongamos que Z_1 lo es. Entonces Z_1 y $N \sim Z_1$ son elementos de $Z(B)$ que separan Z_1 y Z_2 .

Consecuentemente $Z(F) \leq Z(B)$. Entonces $Z(F) \cong Z(B)$ y F es un anillo de Wallman sobre N equivalente a B ([1], Teorema 2.15).

(II) F es un subretículo de $C^*(N)$.

Demostración. Sea g una función de F . Razonando como en (I) podemos suponer que (*) es válido para esta función. Definimos la función polinómica $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p$, $x \in R$. Como $P(x)$ posee un número finito de ceros, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $P(x) \neq 0$ si $0 < x < \varepsilon$. Por continuidad se sigue que $P(x)P(y) > 0$ si $0 < x < \varepsilon$ y $0 < y < \varepsilon$. Entonces podemos elegir un $n_2 \in N$, $n_2 \geq n_0$, tal que $P(1/n)P(1/n') > 0$ si $n, n' \geq n_2$. Además, como $P(0) = \alpha_0$ se tiene que $P(1/n) \cdot \alpha_0 > 0$ si $\alpha_0 \neq 0$ y $n \geq n_2$.

Si χ_H denota la función característica de un subconjunto H de N , de (*) se deduce que

$$|g| = g \chi_{\{2n_2, 2n_2+1, \dots\}} + |g| \chi_{\{1, 2, \dots, 2n_2-1\}}$$

si $P(1/n) > 0$ para todo $n \geq n_2$.

De la misma forma, si $P(1/n) < 0$ para todo $n \geq n_2$, se tiene que

$$|g| = (-g) \chi_{\{2n_2, 2n_2+1, \dots\}} + |g| \chi_{\{1, 2, \dots, 2n_2-1\}}.$$

Como g y $-g$ pertenecen a F y $\chi_{\{2n_2, 2n_2+1, \dots\}}$, $|g| \chi_{\{1, 2, \dots, 2n_2-1\}}$ pertenecen a B , se sigue que $|g| \in F$. Entonces F es un subretículo de $C^*(N)$ y $\omega(N, Z(F)) = N^*$.

Un razonamiento análogo prueba que G es un anillo de Wallman sobre N equivalente a B y un subretículo de $C^*(N)$. Puesto que $Z(f)$ y $Z(h)$ son subconjuntos infinitos de N , disjuntos, resulta que $cl_N^* Z(f) \cap cl_N^* Z(h) \neq \emptyset$. Consecuentemente, no existe un anillo de Wallman sobre N , equivalente a B , que contenga a f y a h . Entonces:

(a) *En la familia de todos los anillos de Wallman sobre N , equivalentes a B , y subretículos de $C^*(N)$, no existe uno que contenga a los demás.*

(b) *En la familia de todos los anillos de Wallman sobre N equivalentes a B , no existe uno que contenga a todos los demás.*

Finalmente, veamos que en el Teorema 11, la condición de que A contenga las funciones reales constantes no puede ser omitida. Sea L el anillo de las funciones definidas sobre N , que son eventualmente constantes y con valores enteros. Es claro que L es uniformemente cerrado y que $Z(L) = Z(B)$. Entonces L es un anillo de Wallman sobre N equivalente a B y uniformemente cerrado. De (a) se sigue que en este caso, la tesis del Teorema 11 no es cierta.

REFERENCIAS

- [1] H. L. BENTLEY y B. J. TAYLOR. *Wallman Rings*, Pacific J. Math. 58 (1975), 15-35.
- [2] H. L. BENTLEY y B. J. TAYLOR. *The Stone-Weierstrass theorem for Wallman rings*, J. Austr. Math. Soc. 25 (1978), 230.
- [3] C. M. BILES, *Gelfand and Wallman-Type compactifications*, Pacific J. Math. 35 (1970), 267-78.
- [4] O. FRINK, *Compactifications and semi-normal spaces*, Amer. J. Math. 86 (1964) 602-607.
- [5] L. GILLMAN y M. JERISON. *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, 1960.
- [6] R. B. KIRK y J. A. CRENSHAW. *A generalized topological measure theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 207 (1975), 189-217.
- [7] J. NAGATA. *Modern General Topology*, North-Holland P. Comp. (Amsterdam), 1968.
- [8] E. F. STEINER. *Wallman spaces and compactifications*, Fund. Math. 61 (1968), 295-304.
- [9] A. K. STEINER y E. F. STEINER. *Wallman and Z-compactifications*, Duke Math. J. 35 (1968), 269-75.
- [10] A. K. STEINER y E. F. STEINER. *Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1970), 589-601.
- [11] A. SULTAN. *General rings of functions*, J. Austr. Math. Soc. 20 (1975), 359-65.
- [12] A. SULTAN. *Measure, Compactification and representation*, Canad. J. Math. 30 (1978), 54-65.
- [13] A. TAIMANOV. *On extensions of continuous functions of topological spaces*, Math. Sbornik 31 (1952), 459-63.

José L. Blasco

Cátedra de Matemáticas II
Facultad de Ciencias
Burjasot, Valencia

