

# SOBRE LOS CUATRITEJIDOS HEXAGONALES Y OCTAEDRALES DE PLANOS

POR

J. TEIXIDOR

RESUMEN: Después de justificar por vía analítica los principales resultados de la teoría general de tejidos que han de utilizarse en este trabajo, se pasa a caracterizar sintéticamente los cuatritejidos hexagonales de planos, mostrando su identidad con las envolventes de cuarta clase. El resultado se generaliza a tejidos de hiperplanos y se aplica a establecer muy simplemente el teorema de R. SAUER sobre los tejidos octaedrales. Traduciendo por dualidad el teorema de SAUER, W. BLASCHKE ha obtenidos dos condiciones que entrañan un teorema sobre las cuárticas alabeadas de primera especie, cuyo contenido geométrico estudiamos aquí circunstanciadamente y por último, tomando pie en este estudio, tratamos de la congruencia de cuárticas de 1.ª especie que contienen cuatro puntos genéricos de un plano y en tres de ellos admiten como tangentes rectas dadas.

## § I. CUATRITEJIDOS DE SUPERFICIES EN EL ESPACIO

Definido en un espacio afín  $R_3$  un sistema de coordenadas curvilíneas  $u, v, w$ , sean

$$s_j(u, v, w) = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

las ecuaciones de cuatro series  $S_j$  de superficies tales, que exista una región  $\Gamma$  de  $R_3$  en la cual se tenga:

- 1.º Por cada punto de  $\Gamma$  pasa una superficie y una sola de cada serie.
- 2.º En todo punto de  $\Gamma$  resulta ser

$$\frac{\partial (s_j, s_k, s_l)}{\partial (u, v, w)} \neq 0, \quad (2)$$

para  $j, k, l = 1, 2, 3; 0, 2, 3; 0, 3, 1; 0, 1, 2$ .

3.º La región  $\Gamma$  es convexa con relación al sistema de superficies  $S_j$ , es decir, corta a cada superficie en una región simplemente conexa y a la intersección de dos superficies de distinta serie en un solo arco.

Las superficies  $S_j$ , se supondrán además analíticas.

Bajo tales condiciones, se dice que las series  $S_0, S_1, S_2, S_3$ , constituyen en  $\Gamma$  un cuatritejido  $T^4$  de superficies.

Las cuatro series  $S_j$  pueden representarse también mediante las ecuaciones pfaffianas

$$\sigma_j = 0, \quad (\sigma_j = a_j du_j), \quad j = 0, 1, 2, 3$$

definidas a menos de sendos factores escalares que no se anulan en  $\Gamma$  y los pfaffianos  $\sigma_j$  estarán sometidos a las condiciones de integrabilidad <sup>(1)</sup>

$$[\sigma_j, d\sigma_j] = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (3)$$

Desde luego, los pfaffianos de un tejido podrán normalizarse ligándolos con la relación

$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (4)$$

que se supondrá verificada para todo elemento lineal  $\{u, v, w; du, dv, dw\}$  en  $\Gamma$ .

Aún así, queda a nuestro arbitrio el *cambio de la normalización*

$$\sigma_j^* = \frac{\sigma_j}{g}, \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad g \neq 0 \text{ en } \Gamma \quad (5)$$

posibilidad de la que tendremos cuenta en lo sucesivo.

Sustituiremos los cuatro pfaffianos  $\sigma_j$  ligados por la relación (4) por tres pfaffianos  $\tau_i$  mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ \sigma_1 &= \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 \\ \sigma_2 &= -\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 \\ \sigma_3 &= -\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 \end{aligned} \quad (6)$$

de las cuales resulta

$$\begin{aligned} 2\tau_1 &= \sigma_0 + \sigma_1 = -\sigma_2 - \sigma_3 \\ 2\tau_2 &= \sigma_0 + \sigma_2 = -\sigma_3 - \sigma_1 \\ 2\tau_3 &= \sigma_0 + \sigma_3 = -\sigma_1 - \sigma_2. \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>(1)</sup> En estos párrafos introductorios seguimos a BLASCHKE en su nueva formulación de la teoría de tejidos expuesta en los cursos de Barcelona y Messina (Otoño 1950, Primavera 1951, resp.) mediante el uso ecléctico de operadores lineales y cálculo exterior. Por lo que a los diferenciadores lineales se refiere, véase la obra de BLASCHKE y BOL [3] y para los elementos del cálculo de CARTAN, una cualquiera de las obras de AMALDI [1] o KÄHLER [7] o el artículo de BLASCHKE [2], donde se expone lo indispensable, debiendo observarse que ahora y en lo sucesivo los números entre corchetes se refieren a la Bibliografía puesta al final del trabajo.

Las condiciones (2) aseguran la independencia lineal en  $I'$  de tres cualesquiera de los pfaffianos  $\sigma_i$  y como consecuencia de ello resulta la independencia lineal en la misma región de los pfaffianos  $\tau_i$ ; es decir, se tiene en  $I'$

$$\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3] \neq 0. \quad (8)$$

Sentados estos preliminares, pasemos a tratar de algunos invariantes topológicos de los cuatritejidos de superficies.

A tal efecto, pongamos

$$[\tau_j, \tau_k] = \tau_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (9)$$

y por consiguiente

$$\tau_{jk} + \tau_{kj} = 0. \quad (10)$$

Las formas cuadráticas externas así introducidas, se reducen pues, esencialmente a tres:  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{12}$  y son linealmente independientes como consecuencia de la condición  $\tau \neq 0$  hallada en (8). Por tanto, las diferenciales externas de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  y  $\tau_3$  pueden expresarse mediante fórmulas del tipo siguiente

$$d\tau_i = c_{i1}\tau_{23} + c_{i2}\tau_{31} + c_{i3}\tau_{12}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Ahora bien, si se tienen en cuenta las condiciones de integrabilidad, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{22} + c_{33} &= 0 \\ c_{jk} + c_{kj} &= 0, \quad j \neq k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (12)$$

y por tanto, en vez del sistema (11) con las condiciones (12) podremos escribir el siguiente

$$\begin{aligned} d\tau_1 &= a_1\tau_{23} + b_3\tau_{31} - b_2\tau_{12} \\ d\tau_2 &= -b_3\tau_{23} + a_2\tau_{31} + b_1\tau_{12} \\ d\tau_3 &= b_2\tau_{23} - b_1\tau_{31} + a_3\tau_{12} \end{aligned} \quad (11)'$$

con la condición única

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0. \quad (12)'$$

Además, teniendo en cuenta las (9) y (11)' al diferenciar exteriormente resultan las fórmulas

$$d\tau_{23} = 2b_1\tau, \quad d\tau_{31} = 2b_2\tau, \quad d\tau_{12} = 2b_3\tau. \quad (13)$$

Con el cambio (5) de la normalización las formaciones hasta ahora consideradas se transforman del siguiente modo :

Para  $\sigma_j, \tau_j, \tau_{jk}$  se obtiene

$$\sigma_j^* = \frac{\sigma_j}{g}, \quad \tau_j^* = \frac{\tau_j}{g}, \quad \tau_{jk}^* = \frac{1}{g^2} \tau_{jk}. \quad (14)$$

En cuanto a las funciones  $a_j, b_j$  de las fórmulas (11)' resulta

$$a_j^* = g a_j, \quad b_j^* = g b_j - g_j \quad (15)$$

siendo  $g_j$  el coeficiente de  $\tau_j$  en la expresión de  $dg$  mediante los pfaffianos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  es decir,  $dg = g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 + g_3 \tau_3$  (16) y pondremos

$$g_j = \partial_j g \quad (17)$$

designando por  $\partial_j$  el correspondiente operador lineal.

De las fórmulas (15) resulta en particular que las funciones  $a_j$  que se denominan *curvaturas* del tejido, son semiinvariantes de peso uno.

Asimismo resulta claro que el pfaffiano

$$\gamma = b_1 \tau_1 + b_2 \tau_2 + b_3 \tau_3, \quad (18)$$

el cual se denomina *conexión* del tejido, obedece a la siguiente ley de transformación

$$\gamma^* = \gamma - d \log g. \quad (19)$$

Diferenciando exteriormente la conexión y expresando el resultado mediante las formas cuadráticas  $\tau_{jk}$  resulta

$$d\gamma = c_1 \tau_{23} + c_2 \tau_{31} + c_3 \tau_{12} \quad (20)$$

con

$$\begin{aligned} c_1 &= b_{32} - b_{23} + a_1 b_1 \\ c_2 &= b_{13} - b_{31} + a_2 b_2 \\ c_3 &= b_{21} - b_{12} + a_3 b_3 \end{aligned} \quad (21)$$

fórmulas en las que se ha puesto  $b_{jk} = \partial_k b_j$ .

Se comprueba inmediatamente que las funciones  $c_j$  se transforman mediante las fórmulas

$$c_j^* = g^2 c_j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (22)$$

y por tanto, resultan semiinvariantes de peso dos.

Al diferenciar exteriormente las (11)' y tener en cuenta las (13), resultan las siguientes relaciones :

$$\begin{aligned} a_{11} + 2 a_1 b_1 + b_{32} - b_{23} &= 0 \\ a_{22} + 2 a_2 b_2 + b_{13} - b_{31} &= 0 \\ a_{33} + 2 a_3 b_3 + b_{21} - b_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

siendo  $a_{ij} = \partial_j a_i$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Teniendo en cuenta las (21) y (23) se obtiene en definitiva el siguiente grupo de fórmulas

$$\begin{aligned} a_{11} + a_1 b_1 + c_1 &= 0 \\ a_{22} + a_2 b_2 + c_2 &= 0 \\ a_{33} + a_3 b_3 + c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Los operadores  $\partial_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  definidos mediante las (16) y (17) obedecen a ciertas fórmulas de asimetría que se calculan diferenciando exteriormente las (16) y teniendo en cuenta las (11)'.

Resulta

$$\begin{aligned} \partial_3 \partial_2 - \partial_2 \partial_3 &= a_1 \partial_1 - b_3 \partial_2 + b_2 \partial_3 \\ \partial_1 \partial_3 - \partial_3 \partial_1 &= b_3 \partial_1 + a_2 \partial_2 - b_1 \partial_3 \\ \partial_2 \partial_1 - \partial_1 \partial_2 &= -b_2 \partial_1 + b_1 \partial_2 + a_3 \partial_3. \end{aligned} \tag{25}$$

Junto a los operadores  $\partial_j$  definiremos otros tres por las fórmulas

$$\partial_{\bar{j}} = \partial_j + p b_j, \quad j = 1, 2, 3 \tag{26}$$

de tal manera que los nuevos operadores transforman un semiinvariante de peso  $p$  en un semiinvariante de peso  $p + 1$ .

Para estos nuevos operadores que llamaremos invariantes, mediante las (21) y (25) se obtienen las siguientes fórmulas de asimetría

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{3}} \partial_{\bar{2}} - \partial_{\bar{2}} \partial_{\bar{3}} &= a_1 \partial_{\bar{1}} - b_3 \partial_{\bar{2}} + b_2 \partial_{\bar{3}} - p c_1 \\ \partial_{\bar{1}} \partial_{\bar{3}} - \partial_{\bar{3}} \partial_{\bar{1}} &= b_3 \partial_{\bar{1}} + a_2 \partial_{\bar{2}} - b_1 \partial_{\bar{3}} - p c_2 \\ \partial_{\bar{2}} \partial_{\bar{1}} - \partial_{\bar{1}} \partial_{\bar{2}} &= -b_2 \partial_{\bar{1}} + b_1 \partial_{\bar{2}} + a_3 \partial_{\bar{3}} - p c_3 \end{aligned} \tag{27}$$

siendo  $p$  el peso del semiinvariante al cual se suponen aplicados. En particular los operadores  $\partial_{\bar{j}}$  aplicados a  $a_j$  que son semiinvariantes de peso uno, habida cuenta de las fórmulas (24) dan

$$a_{\bar{j}\bar{j}} + c_j = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{28}$$

## § II. TRITEJIDOS SECCIONES EN UN CUATRITEJIDO

Proponiéndonos tratar de tejidos hexagonales que se definen por la naturaleza de los tejidos  $T^3$  cortados sobre las superficies de cada serie por las superficies de las tres restantes series, resulta conveniente dar la interpretación geométrica de los operadores  $\partial_j$ .

Con tal fin, sea  $P$  un punto de  $T$ ; a las cuatro superficies del tejido que pasan por  $P$  corresponden otros tantos planos tangentes que cortados por el plano impropio dan rectas cuyas ecuaciones en dicho plano son

$$\sigma_j = 0 \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

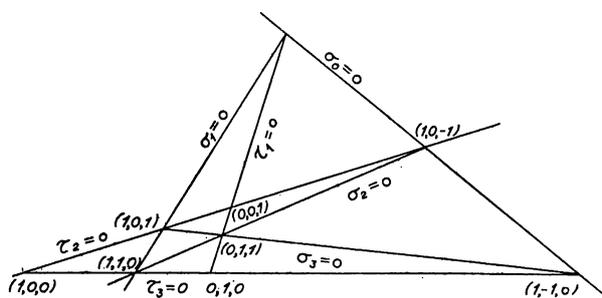


Fig. 1

sin más que considerar  $dx, dy, dz$  como coordenadas homogéneas de una dirección. Dichas rectas forman un cuadrilátero completo a causa de las hipótesis de independencia de los pfaffianos. Considerando también las rectas

$$\tau_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

se observa fácilmente sobre las fórmulas (I, 7) que estas últimas son las diagonales de dicho cuadrilátero.

Ahora bien, está claro, que uniendo  $P$  con los vértices del triángulo diagonal se obtienen tres rectas, cada una de las cuales puede considerarse como tangente a la trayectoria de un operador  $\partial_j$  <sup>(1)</sup>. En cuanto a las rectas que unen  $P$  con las intersecciones de cada dos lados del cuadrilátero y que por ello son las tangentes a las curvas intersección de las correspondientes superficies, pueden considerarse como tangentes a las trayectorias de operadores del tipo  $\partial_i \pm \partial_j$ . En efecto, mediante las ecuaciones (7) se determinan las coordenadas  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  de los vértices

(1) Vid. p. e. BLASCHKE y BOL [3], pág. 178.

tices del cuadrilátero, que son las señaladas en la figura 1. Así, por ejemplo, el punto  $(1, 1, 0)$  da lugar a una tangente a la trayectoria por  $P$  del operador  $\partial_1 + \partial_2$ .

Sentado lo que precede y antes de abordar el estudio de los tejidos de curvas sección de una superficie del tejido por las superficies de distinta serie, conviene intercalar un breve paréntesis para establecer el concepto de *curvatura* de un tejido de  $T^3$  de curvas sobre una superficie.

Imponiendo condiciones análogas a las del párrafo I, se define un tejido  $T^3$  de curvas sobre una superficie mediante tres pfaffianas  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  dos a dos independientes, en dos variables  $u, v$  y ligados por la relación

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (1)$$

El diferencial de un escalar  $g$  puede expresarse mediante las fórmulas

$$dg = g_2 \sigma_3 - g_3 \sigma_2 = g_3 \sigma_1 - g_1 \sigma_3 = g_1 \sigma_2 - g_2 \sigma_1 \quad (2)$$

con lo cual resulta

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0. \quad (3)$$

De este modo quedan definidos los operadores  $\partial_k$  por las fórmulas

$$\partial_k g = g_k \quad k = 1, 2, 3 \quad (4)$$

y están ligados en virtud de la (3) por la relación

$$\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 = 0. \quad (5)$$

Introduciendo la forma cuadrática externa no nula

$$\Omega = [\sigma_2, \sigma_3] = [\sigma_3, \sigma_1] = [\sigma_1, \sigma_2] \quad (6)$$

pondremos

$$d\sigma_1 = h_1 \Omega, \quad d\sigma_2 = h_2 \Omega, \quad d\sigma_3 = h_3 \Omega \quad (7)$$

con lo cual, a causa de (1) resulta

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0. \quad (8)$$

Si se diferencian exteriormente las (2) teniendo en cuenta las (7) se obtienen las fórmulas de asimetría para los operadores  $\partial_k$ :

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2 &= h_2 \partial_3 - h_3 \partial_2 \\ \partial_3 \partial_1 - \partial_1 \partial_3 &= h_3 \partial_1 - h_1 \partial_3 \\ \partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1 &= h_1 \partial_2 - h_2 \partial_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Para un cambio de normalización  $\sigma_k^* = \frac{\sigma_k}{g}$ , las transformaciones de  $\partial_k$  y  $h_k$  se rigen obviamente por las fórmulas

$$\begin{aligned}\partial_k^* &= g \partial_k \\ h_k^* &= g h_k + g_k,\end{aligned}$$

y por tanto, el pfaffiano

$$\omega = h_3 \sigma_2 - h_2 \sigma_3 = h_1 \sigma_3 - h_3 \sigma_1 = h_2 \sigma_1 - h_1 \sigma_2 \quad (10)$$

se transforma en

$$\omega^* = \omega - \frac{dg}{g} \quad (11)$$

de la cual resulta

$$d\omega^* = d\omega. \quad (12)$$

Luego poniendo  $d\omega = K\Omega$  en virtud de (13) y de (6)  $\left(\Omega^* = \frac{\Omega}{g^2}\right)$ , el escalar  $K$  resulta un semiinvariante de peso (2).  $K$  se denominará la curvatura del tritejido  $T^3$  y está claro que la condición

$$K = 0$$

es invariante. Los tejidos que la cumplen se denominan *hexagonales*. Calculando  $d\omega$ :

$$d\omega = (h_{23} - h_{32})\Omega = (h_{31} - h_{13})\Omega = (h_{12} - h_{21})\Omega$$

obtenemos para la curvatura las siguientes expresiones

$$K = h_{23} - h_{32} = h_{31} - h_{13} = h_{12} - h_{21}. \quad (13)$$

Tomemos ahora una superficie  $S_0$  de  $T^4$  y cortémosla por las superficies de los restantes sistemas. Considerando un punto  $P$  de  $S_0$  en  $\Gamma$ , resulta de cuanto hemos dicho, que las curvas de intersección que pasan por  $P$  vienen definidas como trayectorias de los operadores

$$\widehat{\partial}_1 = \partial_2 - \partial_3, \quad \widehat{\partial}_2 = \partial_3 - \partial_1, \quad \widehat{\partial}_3 = \partial_1 - \partial_2 \quad (14)$$

ya que como se observa en la figura 1, sobre la recta  $\sigma_0 = 0$  las intersecciones con  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$  tienen coordenadas  $\tau_i$ :  $(0, 1, -1)$ ,  $(-1, 0, 1)$ ,  $(1, -1, 0)$  respectivamente.

Normalizando de tal manera que en  $P$  se tenga  $b_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$  obtendremos de las (14) y (1,25), (1,12)

$$\widehat{\partial}_2 \widehat{\partial}_1 - \widehat{\partial}_1 \widehat{\partial}_2 = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2 + a_3 \partial_3 = a_2 \widehat{\partial}_1 - a_1 \widehat{\partial}_2.$$

Comparando ésta con la última de las (9) se obtiene

$$h_1 = a_1 \quad h_2 = a_2$$

y análogamente hallaríamos  $h_3 = a_3$ .

Mediante las (13) calculamos para la curvatura  $K_0$  en  $P$  del tritejido  $T^3$  sección, la siguiente fórmula

$$K_0 = \widehat{\partial}_2 a_1 - \widehat{\partial}_1 a_2 = (\partial_3 - \partial_1) a_1 - (\partial_2 - \partial_3) a_2 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \quad (15)$$

y como por ser  $b_j = 0$ , coinciden los derivadores  $\partial_j$  con los  $\partial_{\bar{j}}$  resulta

$$K_0 = -(a_{1\bar{1}} + a_{2\bar{2}} + a_{3\bar{3}})$$

es decir, mediante las (1,28)

$$K_0 = c_1 + c_2 + c_3. \quad (16)$$

De una manera análoga se obtiene cada una de las curvaturas en  $P$  relativas a los  $T^3$  sobre las demás superficies de  $T^4$  por  $P$ , como suma algébrica de las tres  $c_i$ .

### § III. CUATRITEJIDOS OCTAEDRALES Y HEXAGONALES

En el inciso sobre tritejidos de curvas de una superficie, hemos recordado que la condición de anularse un determinado semiinvariante denominado curvatura es invariante frente a las transformaciones topológicas <sup>(1)</sup> y que tales tritejidos se denominan hexagonales.

Si llamamos función del tejido a la que se obtiene al expresar que las tres curvas  $s_1(u, v) = k_1$ ,  $s_2(u, v) = k_2$ ,  $s_3(u, v) = k_3$  pasan por un mismo punto  $u, v$ , es fácil probar que la condición  $K = 0$  es equivalente a que la función del tejido puede tomar la forma

$$s_1(u, v) + s_2(u, v) + s_3(u, v) = 0. \quad (1)$$

---

<sup>(1)</sup> De acuerdo con el uso, se seguirán denominando topológicas las transformaciones consideradas a pesar de las condiciones de diferenciabilidad que se supondrán verificadas. Vid. DUBOURDIEU [5], pág. 2.

En efecto, si la función del tejido es tal, tomando  $\sigma_i = ds_i$  resulta  $d\sigma_i = 0$  y por consiguiente  $h_i = 0$ , lo cual, claro está, en virtud de las (2,13) supone  $K = 0$ .

Si, recíprocamente es  $K = 0$ , se anula  $d\omega$ , es decir  $\omega$  es un diferencial total. Puesto que por un cambio de la normalización hemos obtenido en (2, 11)

$$\omega^* = \omega - d \log g,$$

podemos elegir el factor de normalización  $g$ , de modo que resulte  $\omega = 0$  y por tanto  $h_i = 0$ , con lo cual los pfaffianos  $\sigma_i$  son diferenciales totales, de donde por la (2,1) resulta la siguiente función del tejido

$$s_1(u, v) + s_2(u, v) + s_3(u, v) = \text{const.}$$

equivalente a la (1).

Efectuando el cambio

$$\begin{aligned} s_1(u, v) &= x \\ s_2(u, v) &= y \end{aligned}$$

e interpretando  $x, y$ , como coordenadas cartesianas, resulta claro que todo  $T^3$  hexagonal de curvas sobre una superficie, puede interpretarse localmente, mediante tres haces de rectas paralelas.

Si ahora en el espacio procedemos análogamente, considerando los cuatritejidos para los cuales

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \tag{2}$$

que se llaman *octaedrales*, obtenemos una representación local mediante cuatro haces de planos paralelos a partir de la función del tejido

$$S_0(u, v, w) + S_1(u, v, w) + S_2(u, v, w) + S_3(u, v, w) = 0, \tag{3}$$

cuya equivalencia con las condiciones diferenciales (2), se establece de la misma manera que en el plano, a partir de las fórmulas (1,6), (1,11') (1,19).

Observemos ahora, que de las fórmulas (1,24) resulta sin más que la anulación de las  $a_i$  supone la de las  $c_i$  y por consiguiente la de las curvaturas  $K_i$  de los tejidos sección. Si pues denominamos tejidos hexagonales de superficies de  $R_3$ , a aquéllos para los cuales los tejidos de curvas sección son hexagonales (y para ello, como es obvio, basta que sean hexagonales tres), resulta en particular que los tejidos octaedrales son también hexagonales.

La última propiedad se obtiene asimismo por vía sintética <sup>(1)</sup> cuando se caracterizan los tejidos octaedrales y hexagonales mediante el cierre de ciertas figuras de las que tratamos sucesivamente con relación a nuestro objeto.

Para los cuatritejidos de superficies del espacio conviene calcular las curvaturas a partir de la función del tejido, con vistas a una aplicación reportada en el párrafo 6.

Sean pues  $s_0, s_1, s_2, s_3$ , parámetros normales <sup>(2)</sup> para las series  $S_0, S_1, S_2, S_3$  de superficies del  $T^4$  y

$$F(s_0, s_1, s_2, s_3) = 0 \quad (4)$$

la condición para que cuatro superficies, una de cada serie, pasen por un punto de la región  $I'$  de regularidad.

En virtud de la condición

$$dF = 0 \quad (5)$$

que se obtiene de la (4) al diferenciar, pueden darse los pfaffianos  $\sigma_i$  mediante las fórmulas

$$\sigma_i = \frac{\partial F}{\partial s_i} ds_i = F_i ds_i.$$

Por tanto, a causa de las (1,7) resulta

$$\begin{aligned} 2 \tau_1 &= -F_2 ds_2 - F_3 ds_3, \\ 2 \tau_2 &= -F_3 ds_3 - F_1 ds_1, \\ 2 \tau_3 &= -F_1 ds_1 - F_2 ds_2, \end{aligned} \quad (6)$$

y poniendo

$$[ds_j, ds_k] = s_{jk}$$

se obtienen para las formas cuadráticas  $\tau_{jk}$  las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} 4 \tau_{23} &= F_1 F_2 F_3 \left( -\frac{s_{23}}{F_1} + \frac{s_{31}}{F_2} + \frac{s_{12}}{F_3} \right), \\ 4 \tau_{31} &= F_1 F_2 F_3 \left( \frac{s_{23}}{F_1} - \frac{s_{31}}{F_2} + \frac{s_{12}}{F_3} \right), \\ 4 \tau_{12} &= F_1 F_2 F_3 \left( \frac{s_{23}}{F_1} + \frac{s_{31}}{F_2} - \frac{s_{12}}{F_3} \right), \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Vid. BLASCHKE y BOL [3], pág. 44.

<sup>(2)</sup> Vid. BLASCHKE y BOL [3], pág. 4.

de las cuales se recaba inmediatamente

$$s_{23} = 2 \frac{\tau_{31} + \tau_{12}}{F_2 F_3}, \quad s_{31} = 2 \frac{\tau_{12} + \tau_{23}}{F_3 F_1}, \quad s_{12} = 2 \frac{\tau_{23} + \tau_{31}}{F_1 F_2}. \quad (7)$$

Si ahora se diferencian exteriormente las (6) y se tienen en cuenta la (5) y sus productos exteriores por  $ds_1, ds_2, ds_3$ , (7) y además las (1,11'), se hallan para las curvaturas  $a_1, a_2, a_3$ , cuya anulación caracteriza a los tejidos octaedrales desde el punto de vista invariante, las siguientes expresiones linealmente dependientes

$$\begin{aligned} a_1 &= G_{02} - G_{03} + G_{31} - G_{12} \\ a_2 &= G_{03} - G_{01} + G_{12} - G_{23} \\ a_3 &= G_{01} - G_{02} + G_{23} - G_{31} \end{aligned} \quad (8)$$

siendo

$$G_{jk} = \frac{F_{jk}}{F_j F_k}$$

y, naturalmente

$$F_{jk} = \frac{\partial^2 F}{\partial s_j \partial s_k}.$$

#### § 4. TEJIDOS HEXAGONALES DE PLANOS Y DE HIPERPLANOS

En el párrafo precedente se ha recordado que el carácter hexagonal u octaedral de un tejido  $T^3$ , o resp.  $T^4$  puede expresarse independientemente del cálculo, introduciendo determinadas figuras formadas mediante las curvas o superficies del tejido.

Comenzando por el caso de un  $T^3$  de curvas sobre una superficie, sea  $P$  un punto del campo de regularidad  $I$  (vid. fig. 2). Por él las tres curvas  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ . Tómese sobre  $\sigma_1 = 0$  y dentro de  $I$  un punto  $Q \neq P$ ; por este punto la curva del tercer sistema que se supone corta a la  $\sigma_2 = 0$  en un punto  $R$  tal, que el arco  $QR$  pertenezca enteramente a  $I$ . Reiterando el procedimiento van obteniéndose sucesivamente puntos  $S, T, U, V, X$ . El último punto,  $X$ , puede o no coincidir con  $Q$ .

Es inmediato que para un tejido susceptible de representación analítica y que sea hexagonal ( $K = 0$ ), basta dar un modelo mediante tres haces de rectas formando ángulos de  $60^\circ$  (tejido regular) para concluir que el punto  $X$  coincide con el  $Q$ , es decir, que la figura hexagonal  $\mathfrak{E}$  considerada se cierra. Que la propiedad de cierre de las figuras  $\mathfrak{E}$  es

además característica para los tejidos hexagonales se prueba de varias maneras, incluso geoméricamente (1).

Independientemente pues de la representación analítica, consideraremos los tejidos hexagonales  $T^3$  de superficies del espacio como aquellos para los cuales cierran las figuras  $\mathcal{E}$  trazadas sobre una superficie cualquiera de una de las series, mediante las intersecciones con las superficies de las series restantes, siempre dentro del correspondiente dominio de regularidad  $\Gamma$ .

Concretamente, en este párrafo vamos a ocuparnos de la caracterización de los  $T^4$  hexagonales de planos en  $R_3$  y de los  $T^{n+1}$  de hiperplanos en  $R_n$ , utilizando solamente el cierre de las figuras  $\mathcal{E}$ .

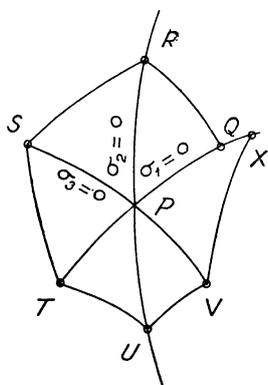


Fig. 2

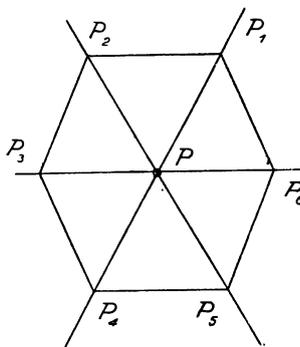


Fig. 3

Con tal fin comencemos por efectuar en  $R_3$  una dualidad que transformará el tejido de planos en un «tejido» de puntos y a las condiciones de cierre de una figura  $\mathcal{E}$  (fig. 3) plana, sustituirá obviamente las de una figura « $\mathcal{E}$ » radiada.

Sean  $P'$ ,  $\pi'$ ,  $\pi_1'$ ,  $\pi_2'$ ,  $\pi_3'$ ,  $\pi_4'$ ,  $\pi_5'$ ,  $\pi_6'$  los elementos homólogos en la dualidad mencionada, respectivamente de los  $\pi$ ,  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  que integran la figura 3.

Como resulta sin más de la naturaleza de esta última, reportada en el esquema, la figura dual « $\mathcal{E}$ » estará constituida por puntos, y planos y rectas de la radiación de vértice  $P'$ , de tal manera, que en cada plano por  $P'$  que es por hipótesis punto del tejido, hay otros tres puntos del mismo. Estos últimos unidos con  $P'$  dan las rectas duales de las que aparecen en la figura 3. La condición de cierre en el caso de la figura  $\mathcal{E}$  con la hipótesis de partir del punto  $P_1$  para llegar al  $P_6$  consis-

(1) Vid. BLASCHKE y BOL [3], págs. 10 - 18.

tía en que la recta por  $P_6$  y  $P_1$  pertenecía al tejido, consistirá en el caso de la figura radiada « $\mathcal{E}$ » en que se corten según una recta del tejido los planos  $\pi_6'$ ,  $\pi_1'$ .

Por consiguiente, si proyectamos desde el punto  $P'$  sobre un plano que no pase por éste, a las ternas de puntos situados con  $P'$  en un plano, corresponderán en la proyección ternas de puntos alineados. Se partirá de una primera terna correspondiente al plano  $\pi'$  y se seguirá con la terna correspondiente al plano  $\pi_1'$  que tendrá — como también las que corresponden a los  $\pi_2' \dots, \pi_6'$  — un punto común con la terna de partida debido a que ambos planos se cortan en una recta del tejido. Al final estaremos conducidos a expresar que las ternas correspondientes a  $\pi_1'$  y  $\pi_6'$  tienen en común un elemento del tejido proyección.

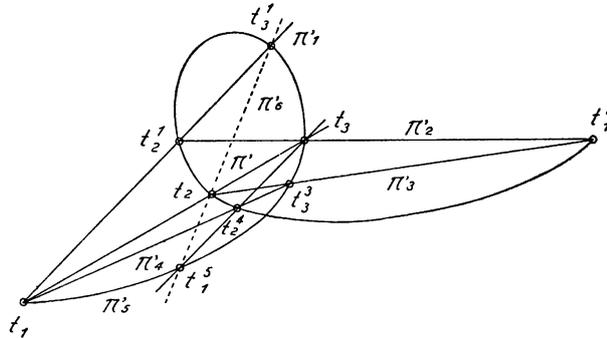


Fig. 4

Observemos ahora que mediante proyección desde un punto genérico de la curva, una cuártica alabeada de segunda especie se transformará en una cúbica racional con un punto nodal, o cuspidal de primera especie. Suponiendo por ejemplo que el punto singular sea un nodo, quedará a nuestro arbitrio una proyectividad que permitirá transformarla en la curva

$$x^3 + y^3 - xy = 0$$

cuyas ecuaciones paramétricas pueden elegirse así :

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{t^2}{1+t^3} \quad (1)$$

y por tanto, para que tres puntos de la misma estén alineados es necesario y suficiente que sus parámetros cumplan la condición

$$t_1 t_2 t_3 + 1 = 0. \quad (2)$$

Admitamos pues que el plano  $\pi'$  sea cortado en tres puntos de la estrofoide (1) cuyos parámetros sean  $t_1, t_2, t_3$ , ligados por la relación (2).

Suponiendo que el plano  $\pi_1'$  tenga en común con el  $\pi'$  el punto de la cúbica de parámetro  $t_1$  contendrá además de éste y de  $P'$  otros dos cuyos parámetros  $t_2, t_3$  están ligados con  $t_1$  por la relación

$$t_1 t_2 t_3 + 1 = 0.$$

Reiterando el procedimiento tal como se pone de manifiesto en la figura 5 obtenemos el siguiente sistema :

$$\begin{aligned} \pi_1', \quad t_1 t_2 t_3 + 1 &= 0, \\ \pi_2', \quad t_1 t_2 t_3 + 1 &= 0, \\ \pi_3', \quad t_1 t_2 t_3 + 1 &= 0, \\ \pi_4', \quad t_1 t_2 t_3 + 1 &= 0, \\ \pi_5', \quad t_1 t_2 t_3 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

del cual se deduce fácilmente :

$$t_1 t_2 t_3 + 1 = 0.$$

Pero es obvio que esta relación expresa que la sección  $\pi_6'$  determinada mediante los puntos  $t_1, t_2$  tiene en común con la  $\pi_1'$  el punto  $t_3$ , es decir, que la figura proyectada cierra.

En el caso en que la curva proyección presentara una cúspide podríamos tomar como modelo la parábola semicúbica :

$$y^2 - x^3 = 0,$$

para la cual la relación análoga a la (2) es :

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0,$$

y así, mutatis mutandis, se aplica el proceso anterior y podemos asegurar en general el cierre de la figura proyectada, es decir, siendo  $P'$  genérico, la figura « 6 » relativa a la cuártica alabeada de segunda especie, cierra a su vez, es decir dicha curva constituye un  $T^4$  hexagonal de puntos.

La vía seguida para calificar las cuárticas alabeadas de segunda especie de tejidos hexagonales de puntos va a conducirnos muy simplemente a la *identificación de los tejidos hexagonales de puntos de  $R_3$  con la totalidad de las cuárticas alabeadas*.

A este fin, conviene que nos apoyemos en un teorema debido a GRAF y SAUER <sup>(1)</sup> según el cual, en el plano, *los tejidos hexagonales de rectas se identifican con las envolventes de clase tres*.

Sea  $T^4$  un tejido hexagonal de puntos en  $R_3$  y  $P$  un punto genérico del mismo. Proyectemos el tejido desde  $P$  y mostremos que de este modo obtenemos un cono algébrico de tercer orden. En efecto, la calidad de hexagonal para  $T^4$  supone en la radiación de vértice  $P$ , el cierre de todas las figuras « $\mathcal{E}$ ». Si en el plano el cierre de las figuras  $\mathcal{E}$  implica que las rectas del tejido sean tangentes a una curva algébrica de clase tres, es obvio que por dualidad en el espacio, el cierre de las figuras « $\mathcal{E}$ » traerá como consecuencia que las rectas del tejido considerado, las cuales unen  $P$  con los restantes puntos de  $T^4$  constituyan un cono algébrico de orden tres, lo cual equivale a que el tejido  $T^4$  de puntos constituya una cuártica, necesariamente alabeada.

Que recíprocamente, dada una cuártica alabeada cualquiera, incluso degenerada, en regiones convenientes, dicha totalidad de puntos es un tejido  $T^4$  hexagonal, podrá probarse proyectando desde un punto de ella sobre un plano, con lo que se obtiene una cúbica y traduciendo por dualidad (en el plano) el teorema de GRAF y SAUER. De este modo, en particular, se obtiene sin cálculo lo que hemos demostrado de las cuárticas alabeadas de segunda especie.

Resumiendo y dualizando podemos enunciar la siguiente proposición <sup>(2)</sup>: *los cuatritejidos hexagonales de planos del espacio  $R_3$  coinciden con las envolventes de clase cuatro pertenecientes a dicho espacio*.

Paralelamente a como se ha procedido en el párrafo 1 al definir los cuatritejidos de superficies en  $R_3$ , podrán introducirse los  $(n + 1)$  — tejidos de hipersuperficies en  $R_n$ , mediante  $n + 1$  series de hipersuperficies en una conveniente región  $\Gamma n$  — dimensional de  $R_n$ .

Si en particular, se trata de tejidos de hiperplanos, se generalizará inmediatamente el concepto de cuatritejidos hexagonales en el de  $(n + 1)$  — *tejidos hexagonales, definiéndolos por la condición de que en la intersección — a  $(n - 1)$  dimensiones — de  $\Gamma$  con todo hiperplano  $R_{n-1}$  de una cualquiera de las series, los hiperplanos de las series restantes corten a  $R_{n-1}$*

<sup>(1)</sup> Vid. BLASCHKE y BOL [3], págs. 24 - 28, donde se da una demostración geométrica del teorema de GRAF y SAUER.

<sup>(2)</sup> Este resultado fué obtenido por BOL [4] utilizando un teorema de BLASCHKE [3] pág. 210 cuya demostración postula condiciones de diferenciabilidad.

en un  $n - 2$  — tejido hexagonal de  $R_{n-2}$ . Esta definición por recurrencia trae como consecuencia necesaria que en la región contenida en  $\Gamma$  de todo plano común a  $n - 2$  hiperplanos de series distintas, las tres series restantes de hiperplanos cortan un tejido  $T^3$  de rectas, hexagonal. Recíprocamente si esto es así, en la región — tridimensional — contenida en  $\Gamma$  del espacio  $R_3$  según el cual se cortan  $n - 3$  hiperplanos de series distintas, las cuatro series restantes cortan un tejido hexagonal  $T^4$  de planos. Pasando a los espacios  $R_4$  sección de  $n - 4$  hiperplanos de series distintas, ello supone que los hiperplanos de las demás series corten un pentatejido hexagonal de  $R_3$  y así, sucesivamente, es posible asegurarse de que son hexagonales los tejidos secciones sobre los hiperplanos  $R_{n-1}$  del  $(n + 1)$  — tejido de  $R_n$ , con lo cual se vuelve a la definición inicial <sup>(1)</sup>.

Sentado esto, podemos extender el teorema de GRAF y SAUER a un espacio lineal cualquiera.

Desde luego se comprueba en seguida que debido a las consecuencias obtenidas de la definición de tejido hexagonal de hiperplanos, toda desarrollable algebraica de orden  $n + 1$  perteneciente a un  $R_n$ , en convenientes regiones  $\Gamma$  de éste, constituye un  $(n + 1)$  — tejido hexagonal de hiperplanos.

Para probar que recíprocamente todo  $(n + 1)$  — tejido hexagonal de hiperplanos de un  $R_n$  está constituido por hiperplanos de una desarrollable algebraica perteneciente a  $R_n$  debemos proceder por pasos sucesivos a partir del análogo resultado ya establecido para  $n = 3$ .

Tomemos un  $R_4$  cualquiera sección de  $n - 4$  hiperplanos de series distintas. Las cinco series restantes de hiperplanos determinan en  $R_4$  un pentatejido hexagonal de espacios  $R_3$ . Como hemos visto, esto supone que en cada uno de éstos los de las restantes series cortan un tejido hexagonal de planos y por consiguiente, en virtud de lo ya demostrado éstos se organizan en una desarrollable algebraica de cuarta clase perteneciente a dicho  $R_3$ .

Imaginemos una dualidad entre  $R_4$  y un espacio  $R_4'$  auxiliar. El tejido formado por los  $R_3$  en  $R_4$  se transforma en un tejido de puntos de  $R_4'$ . Como consecuencia de que en todo  $R_3$  se tenía una desarrollable algebraica de cuarta clase obtenida como sección por los  $R_3$  de las otras series, al proyectar desde un punto del tejido obtendremos un cono algebraico de cuarto orden (basta considerar la dualidad en la radiación) y por tanto, el tejido de puntos en  $R_4'$  constituye una curva algebraica

<sup>(1)</sup> Nótese que lo dicho es susceptible de extensión a tejidos hexagonales de hipersuperficies, definiendo los tejidos de superficies, variedades a tres dimensiones, etc., no en un espacio afín, sino directamente en una variedad curvilínea.

de quinto orden perteneciente a  $R_4'$ . Volviendo a  $R_4$  ello supone que en este espacio, el tejido sección constituye una desarrollable algébrica de quinta clase perteneciente a  $R_4$ .

Así, sucesivamente, por pasos como éste, llegamos al espacio  $R_n$ , obteniendo el siguiente teorema que parece natural denominar teorema de GRAF y SAUER generalizado: *los  $(n + 1)$  — tejidos hexagonales de hiperplanos de  $R_n$  se identifican con las envolventes algébricas de clase  $(n + 1)$  pertenecientes a dicho espacio.*

### § 5. CUATRITEJIDOS OCTAEDRALES DE PLANOS

La caracterización obtenida en el párrafo precedente para los cuatritejidos hexagonales de planos junto con la propiedad (Vid. § 3) en virtud de la cual todo tejido octaedral es hexagonal, permiten obtener una demostración simplificada del teorema de SAUER (1).

Comencemos por recordar la propiedad de cierre característica (2) de un cuatritejido octaedral. Para abreviar refrámonos a la imagen del cuatritejido formada por cuatro sistemas de planos paralelos a las caras de un tetraedro regular. Elegido un tetraedro cualquiera dentro de la región de regularidad, formado por cuatro planos pertenecientes uno a cada sistema, considérense los puntos medios de sus aristas. Estos seis puntos como enseña la figura 5, pueden considerarse como vértices de un octaedro (regular) que tiene cuatro de sus caras sobre las del tetraedro y las otras cuatro pertenecientes también al tejido.

En el caso general, elegida una de las caras del tetraedro y considerado en ella el tritejido  $T^3$  cortado por las superficies de los demás sistemas, se comenzará por «inscribir» en dicha cara un nuevo triángulo que la dividirá en otros cuatro  $T, T', T'', T'''$ . Tomando como bases los tres  $T', T'', T'''$ , quedarán definidos otros tantos tetraedros con caras pertenecientes al tejido y entonces, la condición de cierre estriba en que los vértices  $V', V'', V'''$  de dichos tetraedros estén en una superficie del tejido.

Recordemos ahora el lema de REYE, según el cual: *toda cuádrlica tangente a siete caras de un octaedro es tangente a la octava y el conjunto de las cuádrlicas tangentes a las caras de un octaedro es un sistema lineal doblemente infinito.* (3)

(1) Respecto a la demostración sintética reportada en [3], págs. 47 - 49, la simplificación supone el aborro de una inducción y un paso al límite.

(2) El que dicha propiedad sea característica puede probarse de varias maneras. Vid. [3], págs. 44 - 46 y 50 (Aufgabe 7).

(3) Vid. BLASCHKE y BOL [3], págs. 47 - 48.

En virtud de la primera parte del lema anterior, es evidente que toda envolvente de cuarta clase y primera especie constituye un tejido octaedral de planos.

Para probar que recíprocamente todo tejido octaedral es una envolvente de cuarta clase y primera especie, conviene considerar la figura  $D_3$  del tejido, imagen de la que se construye en un modelo « regular » del mismo, tomando un tetraedro formado por planos del tejido, dividiendo sus aristas en tres partes iguales y trazando por dichos puntos los planos del tejido. Se prueba fácilmente mediante el ya invocado

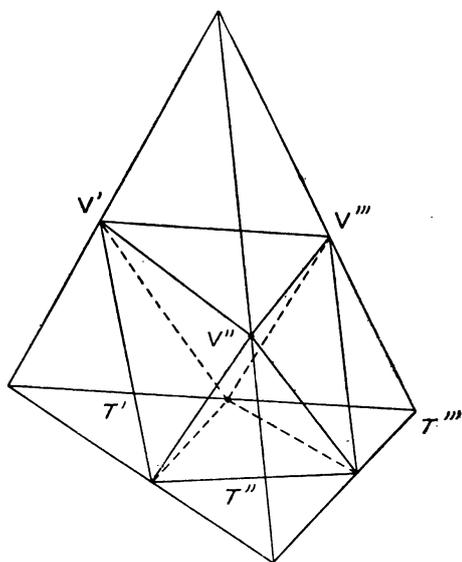


Fig. 5

lema de REYE <sup>(1)</sup> que los doce planos integrantes la figura  $D_3$ , pertenecen a una desarrollable  $\delta$  de cuarta clase y primera especie.

En virtud de la naturaleza de  $\delta$  podrán tomarse dos envolventes de segunda clase  $Q$ ,  $Q'$  de tal manera, que  $\delta$  esté formada por los planos comunes a  $Q$  y  $Q'$ . Ahora bien, puesto que todo tejido octaedral es hexagonal, en virtud del teorema demostrado en el párrafo anterior constituye una envolvente  $\delta'$  de clase cuarta irreducible, o degenerada de cualquier manera.

Si  $\delta'$  es irreducible, por tener doce planos en común con  $\delta$  está contenida tanto en  $Q$  como en  $Q'$  y por tanto coincide con  $\delta$  a consecuencia del teorema de BÉZOUT. Pero lo mismo se comprueba para cualquiera de

<sup>(1)</sup> Vid. BLASCHKE y BOL [3], pág. 48.

ios posibles casos de degeneración: en un haz lineal y una envolvente irreducible de tres, en dos haces lineales y un cono como envolvente de planos, en dos conos, y en cuatro haces de planos, debiendo observarse que así como en el caso hexagonal las componentes no tenían por necesidad vínculo de conexión alguno, ahora por ser  $\delta'$  intersección de  $Q$  y  $Q'$  no ocurre así. Que en efecto, cada una de las componentes de  $\delta'$  pertenece a  $\delta = (Q, Q')$  se comprueba por ejemplo en el caso de máxima degeneración, en cuatro haces, observando que los doce planos comunes a  $\delta$  y  $\delta'$  se distribuyen según las cuatro familias del tejido en grupos de a tres y que por consiguiente cada uno de los haces lineales de  $\delta$  tiene en común con cada una de las envolventes de segunda clase,  $Q$  y  $Q'$ , tres planos, lo cual en virtud del teorema de BÉZOUT permite afirmar que pertenecen a dichas envolventes de segunda clase.

En resumen pues, hemos demostrado el siguiente teorema de SAUER: *los cuatritejidos octaedrales de planos del espacio coinciden con las desarrollables de cuarta clase y primera especie.*

#### § 6. UN TEOREMA RELATIVO A LAS CUÁRTICAS ALABEADAS DE PRIMERA ESPECIE

Volviendo de nuevo a la consideración de los cuatritejidos de puntos del espacio, *el teorema de SAUER traducido por dualidad identifica los cuatritejidos octaedrales de puntos del espacio con las cuárticas alabeadas de primera especie.*

Siendo  $s_0, s_1, s_2, s_3$ , parámetros normales para las cuatro series de puntos que forman el tejido, éste podrá definirse mediante las siguientes ecuaciones:

$$P_i(s_i) \equiv x_i(s_i)u + y_i(s_i)v + z_i(s_i)w + t_i(s_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

y expresando que los cuatro puntos están en un plano, es decir, eliminando las variables  $u, v, w$  entre las ecuaciones (1), se obtiene en forma de determinante la función  $F$  del tejido, o sea abreviadamente:

$$F \equiv [P_0(s_0), P_1(s_1), P_2(s_2), P_3(s_3)] = 0. \quad (2)$$

Ahora bien, en el párrafo 3 se han calculado las curvaturas  $a_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) del tejido, mediante la función  $F$ , expresándolas a través de las funciones  $G_{ij} = \frac{F_{ij}}{F_i F_j}$ . Observemos que por la naturaleza de la función

$F$ , su derivada con relación a  $s_i$  se obtiene sustituyendo en su expresión  $P_i(s_i)$  por  $P'(s_i)$  punto perteneciente a la tangente al tejido <sup>(1)</sup> en  $P_i(s_i)$ . Por consiguiente, al anular las curvaturas para expresar que se trata de una cuártica alabeada  $C^4$  de primera especie, se obtendrán dos condiciones que fijarán una propiedad de configuración del conjunto formado por cuatro puntos genéricos de un plano pertenecientes a una cuártica alabeada  $C^4$  y las tangentes en ellos a la curva, propiedad invariante naturalmente respecto a las homografías.

Para obtener explícitamente estas condiciones, elijamos el sistema de referencia de tal manera que en el plano  $z = 0$ , el triángulo fundamental sea el diagonal del cuadrivértice  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , con lo cual, estos puntos pueden afectarse de las siguientes coordenadas:

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv (1, 1, 0, 1) \\ P_1 &\equiv (-1, 1, 0, 1) \\ P_2 &\equiv (1, -1, 0, 1) \\ P_3 &\equiv (-1, -1, 0, 1). \end{aligned}$$

Respecto a los puntos  $P'_i$ ; en virtud de cuanto se ha señalado con relación a su significado, las coordenadas podrán tomarse arbitrariamente entendiéndose que uniendo  $P'_i$  con  $P_i$  queda determinada la tangente. Esta libertad de elección de los puntos  $P'_i$  se comprueba además mediante la expresión explícita de las  $a_i$ . Así pues, asignaremos a  $P'_i$  las coordenadas siguientes:

$$P'_i \equiv (x_i, y_i, 1, 0), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

De este modo, teniendo en cuenta las fórmulas (3,8) se obtienen las condiciones de BLASCHKE:

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ y_0 - y_1 - y_2 + y_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Con el fin de hallar el significado geométrico de éstas últimas, empecemos por buscar los conos que contienen a nuestra cuártica  $C^4$ , para lo cual observamos que cualquiera de ellos cortará al plano  $\bar{\omega}$  de los cuatro puntos  $P_i$ , según una cónica  $\gamma^2$  circunscrita al cuadrivértice determinado por aquellos, es decir, representable para un conveniente valor de  $\lambda$ , mediante las ecuaciones

$$z = 0, \quad y^2 - l^2 + \lambda(x^2 - l^2) = 0. \quad (4)$$

<sup>(1)</sup> Es decir, la recta que une  $P_i(s_i)$  con el punto infinitamente próximo.

Además, el plano tangente  $\bar{\omega}_i$  al cono, en el punto  $P_i$  vendrá determinado por la recta  $P_i P_i'$  y la tangente  $t_i$  en  $P_i$  a  $\gamma^2$ , de manera que, para los planos  $\bar{\omega}_i$  se obtienen las ecuaciones siguientes :

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_0, & \quad \lambda x + y + (1 + \lambda - \lambda x_0 - y_0) z - (1 + \lambda) t = 0 \\ \bar{\omega}_1, & \quad -\lambda x + y + (1 + \lambda + \lambda x_1 - y_1) z - (1 + \lambda) t = 0 \\ \bar{\omega}_2, & \quad \lambda x + y - (1 + \lambda + \lambda x_2 + y_2) z + (1 + \lambda) t = 0 \\ \bar{\omega}_3, & \quad \lambda x - y + (1 + \lambda - \lambda x_3 + y_3) z - (1 + \lambda) t = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

y anulando la matriz del sistema, se obtiene la siguiente condición :

$$\lambda(1 + \lambda)[y_0 - y_1 - y_2 + y_3 + (x_0 + x_1 - x_2 - x_3)\lambda] = 0. \quad (6)$$

Dejando a un lado las soluciones  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \infty$ , correspondientes a casos degenerados (1) sobre los cuales volveremos en el párrafo próximo, vemos que las condiciones (3) equivalen a la anulación idéntica de la eliminante. Fijándose en el grado respecto a  $\lambda$  del factor esencial resulta incidentalmente demostrado un clásico resultado de la Geometría proyectiva: *toda cuártica alabeada de primera especie está al menos sobre dos conos cuádricos distintos, de los cuales es la intersección completa.*

Las condiciones (3) suponen que una vez dados los cuatro puntos  $P_i$  genéricamente en un plano y sendas rectas por tres de ellos queda determinada la cuarta recta por el punto restante a fin de que exista una cuártica alabeada de primera especie — y como veremos toda una congruencia  $K$  — que pase por aquellos puntos y tenga en ellos aquellas rectas como tangentes.

Supuestas cumplidas las mentadas condiciones, busquemos el lugar geométrico de los vértices de los conos que contienen cuárticas de la congruencia  $K$ , para lo cual convendrá fijarnos en las cónicas (4). Se observará que las tangentes a una de estas cónicas en los puntos  $P_i$  se cortan para cada dos puntos  $P_i$  alineados con un vértice del triángulo diagonal  $\tau$ , sobre los lados de dicho triángulo, de tal modo que variando la cónica en el haz, las tangentes en dos puntos cualesquiera resultan homólogas en una proyectividad. Puesto que como ya se ha visto, los vértices de los conos cuyo lugar buscamos están en la intersección de tres de los planos que se obtienen al proyectar desde tres rectas  $P_i P_i'$

(1) Como se verá en el § 7, corresponden a las cónicas degeneradas del haz (4) que contadas doblemente aparecen como cuárticas de la familia definida por los puntos  $P_i$  y las rectas  $P_i P_i'$  sujetas a las condiciones (3)

las tangentes en  $P_i$  a la cónica sección, y por tanto, los tres haces de planos resultan homográficos, el lugar buscado es una cúbica alabeada  $C^3$  la cual admitirá como cuerdas las aristas de los haces, es decir, las rectas  $P_i P_i'$ . Es evidente, que suponiendo cumplidas las condiciones (3) el haz de planos correspondiente a la recta  $P_i P_i'$  que no sea utilizada, puede sustituir a uno cualquiera de los otros y por tanto, su arista es también cuerda de la cúbica  $C^3$ . Además, se comprueba inmediatamente que la cúbica pasa por los vértices del triángulo diagonal  $\tau$  de los puntos  $P_i$ .

Resumiendo, podemos enunciar el siguiente teorema:

*Dados cuatro puntos no alineados en un plano y sendas rectas genéricas por tres de ellos, queda determinada una cúbica alabeada  $C^3$ , que pasa por los vértices del triángulo diagonal de los cuatro puntos, como lugar de las intersecciones de tres planos homólogos pertenecientes a los haces de aristas en las rectas dadas, en la homografía que se obtiene al tomar como correspondientes los que sean tangentes a una misma cónica del haz cuyos puntos base son los puntos dados. Por el cuarto punto pasa una cuerda única de la cúbica alabeada  $C^3$  la cual es la tangente en dicho punto a todas las cuárticas alabeadas que pasando por los cuatro puntos tienen en los tres primeros las rectas asignadas como tangentes.*

Ocupémonos ahora en indagar cual es la figura determinada sobre la cúbica  $C^3$  por los cuatro pares de puntos de apoyo de las tangentes  $P_i P_i'$  a una  $C^4$  de  $K$  y ello desde el punto de vista de la geometría «interna» (1) de  $C^3$ .

Procederemos aquí analíticamente hallando previamente las ecuaciones de la cúbica alabeada  $C^3$ , para lo cual se resuelve el sistema (5), con las condiciones (3) y se obtiene:

$$\begin{aligned}x &= (1 + \lambda) [y_0 - y_1 + (x_0 + x_1) \lambda] \\y &= \lambda (1 + \lambda) [y_1 + y_2 + (x_2 - x_1) \lambda] \\z &= 2 \lambda (1 + \lambda) \\t &= (y_2 - y_0) \lambda + (z_2 - x_0) \lambda^2.\end{aligned}$$

Para determinar el par de puntos de apoyo sobre  $C^3$ , de la tangente  $P_i P_i'$  basta unir  $P_i$  con el punto  $P$  genérico de  $C^3$ , cortar por el plano  $t = 0$  e identificar el punto así obtenido con  $P_i'$ . Por ejemplo, para la tangente  $P_0 P_0'$  resulta

(1) Vid. Enriques [6], pág. 203.

$$\frac{\lambda^2 (2x_0 + x_1 - x_2) + \lambda (x_0 + x_1 + 2y_0 - y_1 - y_2) + y_0 - y_1}{x_0} =$$

$$= \frac{\lambda [\lambda^2 (x_2 - x_1) + \lambda (x_0 - x_1 + y_1 + y_2) + y_0 - y_1]}{y_0} = 2\lambda(1 + \lambda),$$

sistema que se reduce a la condición única

$$(I), \lambda^2 (x_1 - x_2) + \lambda (x_1 - x_0 + 2y_0 - y_1 - y_2) + y_0 - y_1 = 0. \quad (8)$$

Asimismo se obtienen :

$$P_1 P_1', (II), \lambda^2 (x_2 - x_1) + \lambda (x_0 - x_1 - y_1 + y_2) + y_0 - y_1 = 0 \quad (9)$$

$$P_2 P_2', (III), \lambda^2 (x_1 - x_2) + \lambda (x_0 + x_1 - 2x_1 - y_1 + y_2) + y_0 - y_1 = 0 \quad (10)$$

$$P_3 P_3', (IV), \lambda^2 (x_2 - x_1) + \lambda (2x_2 - x_0 - x_1 + 2y_0 - y_1 - y_2) + y_0 - y_1 = 0 \quad (11)$$

Consideremos ahora los pares de puntos (I), (II), (III), (IV), representados por las ecuaciones (8), (9), (10) y (11) y las involuciones determinadas por los pares siguientes :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv \{(I), (II)\} \\ \Omega_2 &\equiv \{(III), (IV)\} \\ \Omega_3 &\equiv \{(I), (III)\} \\ \Omega_4 &\equiv \{(II), (IV)\} \\ \Omega_5 &\equiv \{(I), (IV)\} \\ \Omega_6 &\equiv \{(II), (III)\} \end{aligned} \quad (12)$$

Se obtiene inmediatamente de las (8), (9), (10) y (11) que las involuciones  $\Omega_1, \Omega_2$  admiten como par común el formado por los puntos cuyos parámetros son  $\infty$  y  $-1$  que designaremos respectivamente por  $L$  y  $U$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{array} \right\} (L, U) \quad (13)$$

y del mismo modo denominando  $O$  <sup>(1)</sup> el punto que corresponde al valor  $0$  del parámetro

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_3 \\ \Omega_4 \end{array} \right\} (O, L) \quad (14)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_5 \\ \Omega_6 \end{array} \right\} (U, O). \quad (15)$$

<sup>(1)</sup> Como se deduce de la expresión de  $z$  en función de  $\lambda$  en las ecuaciones de  $C^3$ , los puntos  $L, U, O$  son los vértices del triángulo diagonal  $\tau$  de los cuatro puntos  $P_i$ .

Para sintetizar más fácilmente las relaciones que acabamos de obtener es oportuno substituir la cúbica  $C^3$  por una cónica  $C^2$  homográfica a ella, lo cual, como veremos en el párrafo 7, tiene lugar de una manera espontánea, al considerar cierta desarrollable definida por los puntos y rectas que determinan la congruencia  $K$ .

Designemos por  $O_i$  el centro de la involución imagen obre  $C^2$  de la  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) y por I, II, III, IV, las rectas que unen los puntos homólogos sobre  $C^3$  de los representados conjuntamente me-

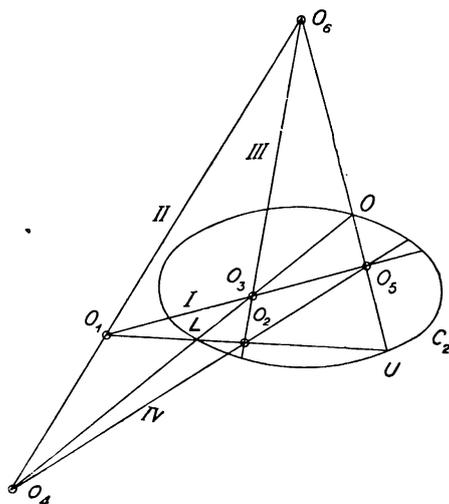


Fig. 6

dante las ecuaciones (I), (II), (III), (IV), respectivamente. Entonces de las (13), (14) y (15) resultan para  $O_i$  las siguientes alineaciones:

$$O_1, O_2, L, U,$$

$$O_3, O_4, O, L,$$

$$O_5, O_6, U, O.$$

Tomando ahora por ejemplo los puntos  $O_1, O_2$  del lado  $LU$  del triángulo  $L, U, O$ , observamos que en virtud de la (12) las rectas I y II se cortan en  $O_1$  y las III y IV en  $O_2$ . Análogamente se deduce para los pares  $O_3, O_4$  de  $OL$  y  $O_5, O_6$  de  $UO$ , con lo cual queda demostrado lo siguiente: *las rectas I, II, III, IV forman un cuadrilátero completo del cual es trilátero diagonal el formado por los lados del triángulo  $OLU$ .*

Las alineaciones de los centros  $O_i$  que resultan como consecuencia de ello, puestas de manifiesto en la figura 6 son, como por otra parte se deduce de las mismas (12):

$$(I; O_1, O_3, O_5), \quad (II; O_1, O_4, O_6), \quad (III; O_2, O_3, O_6), \quad (IV; O_2, O_4, O_5).$$

### § 7. ESTUDIO DE UNA CONGRUENCIA DE CUÁRTICAS DEL ESPACIO

En el párrafo precedente se ha demostrado que dados cuatro puntos  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , y por tres de ellos sendas rectas, las cuárticas alabeadas de primera especie que pasan por los cuatro puntos y en aquellos tres tienen como tangentes las rectas dadas, tienen en el cuarto punto una tangente determinada unívocamente por los cuatro puntos y las tres rectas.

Cada una de las cuárticas así definidas podrá determinarse como intersección de dos cuádricas pertenecientes a la red  $\Phi$  cuyo grupo base está constituida por los cuatro puntos  $P_i$  prescritos, más los tres infinitamente próximos a tres de ellos sobre las rectas dadas. Resulta pues, que por un punto genérico del espacio pasa una y una sola cuártica de la familia la cual es base del haz constituido por las cuádricas de la red  $\Phi$  que contienen dicho punto, de manera que, *las cuárticas consideradas forman una congruencia K*.

Para una cuártica genérica de  $K$  hay cuatro conos *distintos*, cuyos vértices, como hemos visto al principio del párrafo anterior, pertenecen a la cúbica  $C^3$  definida proyectivamente por los cuatro puntos  $P_i$  y las tres rectas por tres de ellos. Como es sabido, el número de conos distintos que contiene una cuártica alabeada de primera especie se rebaja cuando y sólo cuando la curva afecta puntos dobles, los cuales necesariamente pertenecen al lugar de los vértices de los conos, es decir, a la cúbica  $C^3$ . Recíprocamente *todo punto de la cúbica  $C^3$  determina una cuártica de la congruencia  $K$  que tiene dicho punto como doble*. Basta en efecto considerar que la cuártica en cuestión se obtiene como intersección del cono de la red  $\Phi$  con vértice en aquel punto, con la cuádrica genérica de la red que pasa por él. <sup>(1)</sup>

Para estudiar las cuárticas de  $K$  que admiten punto doble, convendrá referirnos a un modelo plano de la cúbica  $C^3$ , que obtenemos del siguiente modo: supongamos representadas analíticamente la red  $\Phi$

(1) Para las intersecciones de  $C^3$  con  $\bar{\omega}$ , que son los vértices del triángulo diagonal  $\tau$ , las cuárticas coinciden con las cónicas que resultan del haz (6,4) al sustituir  $\lambda$  por  $0, \infty, -1$ , contadas doblemente y la afirmación subsiste.

mediante la ecuación  $\Phi = 0$  y sean  $\alpha, \beta, \gamma$  los tres parámetros que figuran linealmente y homogeneamente en esta ecuación. Interpretando  $\alpha, \beta, \gamma$  como coordenadas proyectivas en un plano auxiliar, la imagen de la cúbica  $C^3$  lugar de los vértices de los conos de la red, se obtendrá considerando la curva de dicho plano cuya ecuación se obtiene anulando el discriminante  $\Delta$  de la forma cuadrática  $\Phi$ . Esta curva es naturalmente una cuártica  $\delta^4$  y por estar en correspondencia birracional con la cúbica  $C^3$  es de género cero.

Es fácil precisar que la singularidad de  $\delta^4$  es un punto tripló. En efecto, entre las cuádras de la red  $\Phi$  figura el plano  $\pi$  de los cuatro puntos  $P_i$  contado dos veces. Este plano se obtendrá para valores  $\alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta}, \gamma = \bar{\gamma}$ , de los parámetros, los cuales darán característica uno a  $\Delta$ . Por consiguiente, puesto que toda derivada segunda del discriminante puede escribirse como una combinación lineal homogénea de menores de segundo orden extraídos de la matriz de  $\Delta$ , todas las derivadas segundas de  $\Delta$  se anularán para  $\alpha = \bar{\alpha}, \beta = \bar{\beta}, \gamma = \bar{\gamma}$  y por tanto, el punto  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  de  $\delta^4$  es tripló (1) ordinario.

En el plano de  $\delta^4$ , las rectas corresponden a los haces subordinados de  $\Phi$  y por tanto, representan a las cuárticas de la congruencia  $K$ ; los puntos comunes a una de estas rectas y a  $\delta^4$  corresponden a los cuatro conos de  $\Phi$  que contienen a la cuártica alabeada representada por la recta.

Puesto que como hemos dicho, las cuárticas con punto doble están caracterizadas porque el número de conos distintos que las contienen es inferior a cuatro, corresponderán a rectas del plano de que cortan a esta curva en menos de cuatro puntos distintos y recíprocamente. Por consiguiente, vendrán representadas por el haz de rectas de vértice en el punto tripló y por las tangentes ordinarias y singulares de  $\delta^4$ .

Una recta genérica por el punto tripló corta a  $\delta^4$  en un solo punto fuera de la singularidad. A este punto corresponde uno de  $C^3$ , vértice de un cono que contiene a la cuártica correspondiente de  $K$ . Dicha cuártica está además en el cono degenerado en un plano doble que corresponde al punto tripló. Luego la curva es degenerada en una cónica doble del haz de los cuatro puntos prescritos. Claro está que a las tres tangentes en el punto tripló de  $\delta^4$  corresponden las tres cónicas degeneradas de dicho haz por estar en un cono único degenerado en el plano  $\bar{\omega}$ .

En cuanto a las tangentes ordinarias de la cuártica  $\delta^4$  representan curvas de  $K$ , para las cuales los cuatro conos que las contienen se re-

(1) La singularidad no puede ser de orden más elevado porque  $\delta^4$  es imagen birracional de la cúbica alabeada  $C^3$ .

ducen a tres, uno de los cuales cuenta por dos y por tanto son cuárticas alabeadas con un nodo en el vértice de dicho cono.

Las fórmulas de PLÜCKER dan para las singularidades tangenciales de  $\delta^4$  seis tangentes de inflexión y cuatro tangentes dobles.

Para cada tangente doble las intersecciones con la curva están reunidas en dos pares y en correspondencia, la cuártica de  $K$ , por estar contenida en dos conos distintos cada uno de los cuales cuenta por dos, degenera en una cúbica y una cuerda de la misma. Puesto que la curva de todos modos debe pasar por los cuatro puntos  $P_i$  y tener como tangentes en ellos las rectas prescritas, resulta que la componente rectilínea coincide con una de dichas tangentes, mientras la cúbica residual se apoya en ella precisamente en los puntos en que la recta corta a  $C^3$ .

Cada tangente de inflexión corta a  $\delta^4$  en tres puntos situados en el de contacto de la tangente y en un ulterior punto, lo cual significa que de los cuatro conos que contienen la curva correspondiente de la congruencia  $K$ , tres están confundidos y por tanto la cuártica de  $K$  presenta en el vértice del cono que cuenta por tres un punto cuspidal. Considerando que para toda cuártica alabeada de primera especie con un punto doble, las tangentes en éste están contenidas en el plano determinado por los tres vértices de los conos que contienen la curva y se separan armónicamente a las rectas que unen el vértice doble con los otros dos, se deduce que la tangente en el punto de retroceso es cuerda de  $C_2$ .

En resumen: *la congruencia de cuárticas alabeadas de primera especie definida por cuatro puntos coplanarios independientes  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , y tres rectas genéricas por tres de ellos, contiene una familia  $\infty^2$  de curvas de género uno — seis para cada módulo dado <sup>(1)</sup> — una familia  $\infty^1$  de curvas de género 0 con un punto doble cuyo lugar es una cúbica alabeada  $C^3$  determinada por los cuatro puntos y las tres rectas prescritas: seis de estas curvas tienen un punto cuspidal cuya tangente es cuerda de  $C^3$ , cuatro curvas degeneradas cada una de ellas en una cuerda de  $C^3$  por un punto  $P_i$  y una cúbica residual por los restantes puntos  $P_i$  y los de apoyo de dicha cuerda con  $C^3$ . Además de estas curvas alabeadas, en el plano de los cuatro puntos aparece un haz de cuárticas degeneradas, cada una en una cónica doble circunscrita a dichos puntos y tres de éstas son a su vez degeneradas en dos rectas.*

Es conveniente completar los resultados hasta ahora obtenidos, con la consideración de la superficie desarrollable envuelta por el sistema  $\Sigma$ ,  $\infty^1$ , de planos determinados por las tangentes en el punto doble de las cuárticas

<sup>(1)</sup> Se comprueba fácilmente esta afirmación a partir de la representación analítica (§ 6) de  $C^3$  calculando el módulo en la forma ordinaria.

de la congruencia  $K$  que se apoyan en  $C^3$ . Dicha superficie es de quinto orden y admite una generación proyectiva muy sencilla.

Empecemos por referirnos a las secciones  $\sigma$  del sistema  $\Sigma$  de planos, por el plano  $\bar{\omega}$  de los cuatro puntos  $P_i$  y demosremos que dicha familia de rectas envuelve una cónica.

En efecto, todo plano de  $\Sigma$  tiene en el punto común a las tangentes en el punto doble de la correspondiente cuártica de  $K$ , que es de  $C^3$ , cuatro intersecciones con la curva. Si pues se consideran los planos de  $\Sigma$  que pasan por uno cualquiera de los puntos  $P_i$ , por pertenecer éste a toda cuártica de  $K$ , corresponderán a cuárticas degeneradas de  $K$  y puesto que por  $P_i$  pasa solamente una tal curva que se apoye en  $C^3$ , la cual se compone de las rectas  $P_i P_i'$  y de una cúbica  $C^3$  que corta a  $P_i P_i'$  en los mismos puntos que a la  $C^3$ , obtenemos dos planos y solo dos, que son los que proyectan desde  $P_i$  las tangentes — necesariamente no coplanarias — en los puntos de apoyo en  $C^3$  de la recta  $P_i P_i'$ . Luego por uno cualquiera de los puntos  $P_i$  pasan dos y sólo dos secciones  $\sigma$ . Puesto que ninguna de las dos es múltiple, como se ve por continuidad, concluimos que *las rectas de  $\sigma$  envuelven una cónica  $C^2$* .

La cónica  $C^2$  es tangente a los lados del triángulo diagonal de los cuatro puntos  $P_i$ , como se deduce al considerar que la curva  $C^3$  corta a  $\bar{\omega}$  en los vértices de dicho triángulo por cada uno de los cuales pasa una cuártica consistente en la cónica del haz (6,4) degenerada en dos rectas por aquel punto y contada dos veces, de modo que, por una inmediata consideración de límite, la intersección del correspondiente plano es precisamente la recta que une las otras dos intersecciones de  $C^3$  con  $\bar{\omega}$ .

Al tomar como homólogo de un punto  $P$  de  $C^3$  el punto de contacto  $P'$  de  $C^2$  con la sección por  $\bar{\omega}$  del plano que contiene las tangentes en  $P$  a la cuártica de  $K$  que pasa por él, establecemos una correspondencia  $H$  evidentemente biunívoca y algébrica, es decir, *homográfica*, entre las dos curvas. Obsérvese que esta homografía entre  $C^3$  y  $C^2$  está determinada por las condiciones de corresponderse los tres vértices del triángulo diagonal  $\tau$  de los puntos  $P_i$  con los puntos de contacto de  $C^2$  con los lados opuestos de dicho triángulo.

Además, es evidente que la superficie desarrollable envolvente del sistema  $\Sigma$  de planos se obtiene como lugar de las rectas que unen puntos homólogos en la homografía entre ambas curvas, con lo cual la sección de dicha superficie por  $\bar{\omega}$  consta además de  $C^2$ , de las rectas que unen los vértices del triángulo diagonal con sus homólogos sobre  $C^2$ , componentes todas ellas simples de la intersección, con lo cual podemos afirmar que dicha superficie desarrollable es de quinto orden.

Para dar una aplicación sencilla de estas consideraciones, tratemos de nuevo de la posición de los puntos de apoyo de las rectas  $P_i P_i'$  sobre la cúbica  $C^3$ .

Obsérvese, que mediante la homografía  $H$ , los homólogos en  $C^2$  de los puntos de apoyo de la recta  $P_i P_i'$  en  $C^3$ , son los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde  $P_i$  a  $C^2$  y por tanto, la recta que los une es la polar de  $P_i$  respecto a  $C^2$ . Análogamente, los homólogos de las intersecciones de  $C^3$  con  $\bar{\omega}$  que como sabemos forman el triángulo diagonal de los puntos  $P_i$  resultan ser los polos de los lados (opuestos) de dicho triángulo. Por consiguiente, la figura determinada por dichos puntos imágenes sobre  $C^2$  y las rectas que los unen, por ser polar del cuadrivértice  $P_0, P_1, P_2, P_3$ , y su triángulo diagonal  $\tau$  respecto a la cónica  $C^2$  forma un cuadrilátero y su trilátero diagonal, éste inscrito en  $C^2$ , de acuerdo con lo demostrado ya por otro camino en el párrafo precedente.

---

#### BIBLIOGRAFÍA

- [1] AMALDI, U. Introduzione alla teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni. — Parte prima. Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica. Roma 1944.
- [2] BLASCHKE, W. Über Riemanngeometrie. — Collectanea Mathematica, vol. III fasc. 1. 1950.
- [3] BLASCHKE, W. y BOL, G. Geometrie der Gewebe. — Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Tomo XLIX. Berlin Springer 1938.
- [4] BOL, G. Über Flächengewebe im dreidimensionalen Raum. — Abhandlungen, Hamburg 10-1934.
- [5] DUBOURDIEU, J. Questions topologiques de Geometrie Differentielle. — Memorial Villat. Fasc. LXXVIII. Paris Gauthier Villars 1936.
- [6] ENRIQUES, F. — CHISINI, O. Teoria Geometrica delle equazioni e funzioni algebriche. Vol. III, Bologna Zanichelli 1921.
- [7] KÄHLER, E. Einführung in die Theorie der Systeme von Differential Gleichungen. — Hamburger Mathematische Einzelschriften. XVI Heft. 1934.