SOBRE LA EXISTENCIA DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA QUE SE APROXIME ASINTÓNTICAMENTE A UNA SERIE DADA CON COTAS PREFIJADAS, Y DE UNA FUNCIÓN REAL INDEFINIDAMENTE DERIVABLE EN UN INTERVALO CON DERIVADAS PREFIJADAS EN UN PUNTO Y ACOTADAS EN EL INTERVALO

POR

RICARDO SAN JUAN

(MADRID)

I. Dado un recinto, R, acotado con el punto 0 de acumulación, una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y una sucesión de cotas $m_n \geqslant |a_n|$ ¿existirá una función $f(z)$ holomorfa en R y que admita como desarrollo asintótico $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con cotas m_n? Es decir:

$$\left| \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right| \leq m_n \text{ para } z \in R \text{ y } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si se tratase de un polinomio

$$P_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n,$$

éste y todas las funciones del tipo

$$f(z) = P_m(z) + z^{m+1} \omega(z)$$

admiten como desarrollo asintótico a aquél, por ser

$$\lim \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} = a_n \text{ para } n \leq m$$

y $z \longrightarrow 0$ dentro de R, cualquiera que sea la función $\omega(z)$ holomorfa y acotada en R.

Sea E_m el conjunto de todas estas funciones que tienen además $|f(z)| < K_m$ en R, tomando la constante

$$K_m > M_m = \sum_{n=0}^{m} m_n r^n, \quad r = \overline{\operatorname{extr}}_{z \in R} \quad |z|,$$

para poder elegir las $\omega(z)$ con

$$|\omega(z)| < \frac{K_m - M_m}{r^{m+1}} \quad \text{en } R.$$

E_m es un conjunto compacto en sí en el espacio E de las funciones holomorfas y acotadas (individualmente) en R con esta definición de norma :

$$\|f\| = \overline{\operatorname{extr}}_{z \in R} |f(z)|$$

Es sabido, en efecto, que la esfera $\|f\| \leq K_m$ es un conjunto compacto en sí en dicho espacio E ; luego todo subconjunto infinito de E_m contiene seguramente una sucesión parcial f_n que converge uniformemente en R hacia una función límite φ de la esfera, la cual pertenece también a E_m, puesto que de

$$f_n(z) \sim \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu z^\nu,$$

resulta

$$\varphi(z) \sim \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$$

Ahora bien, el cociente

$$c_n(f, z) = \frac{1}{m_n^2} \left| \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right|^2$$

es una función de z acotada en R, cualquiera que sea la función f de E_m y $0 \leq n \leq m$, poniendo, en particular

$$c_0(f, z) = \frac{1}{m_n^2} |f(z)|^2 ;$$

pues para $z \longrightarrow 0$ dentro de R, tiene $c_n(f, z)$ límite finito a_n^2/m_n^2; y excluído de R su interferencia con un entorno $|z| \leq \varrho$, en la parte complementaria son acotados inferiormente el denominador, $|z^n| > \varrho^n$, y superiormente el numerador por la acotación de $|f(z)|$ y $\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu$. Existe, pues

$$e_n(f) = \overline{\operatorname{extr}}_{z \in f} \; c_n(f, z)$$

y vamos a demostrar la continuidad de este funcional en E_m.

En efecto, en otro punto $(f + h) \in E_m$, se tiene:

$$c_n(f + h) = \frac{1}{m_n^2}\left(\frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} + \frac{h}{z^n}\right)\left(\frac{\bar f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar a_\nu \bar z^\nu}{\bar z^n} + \frac{\bar h}{\bar z^n}\right) =$$

$$= \frac{1}{m_n^2}\left|\frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}\right|^2 + \frac{2}{m_n^2} R\left[\frac{\bar h}{\bar z^n}\,\frac{f(z) - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n}\right] + \frac{1}{m_n^2}\frac{|h|}{|z|^{2n}} =$$

$$= c_n(f) + o(h)$$

designando con $o(h)$ la suma de los dos últimos términos, la cual tiende a cero para $z \longrightarrow o$ dentro del recinto, por ser $h = o(z^n)$; luego será $|o(h)| < \varepsilon$ en la interferencia de R con un entorno $|z| \leq \varrho$; y también en la parte complementaria de R si tomamos $\|h\| < \delta_n$, pues entonces son acotados superiormente los coeficientes de h en ambos términos de $o(h)$.

Es, pues,

$$c_n(f) - \varepsilon \leq c_n(f + h) \leq c_n(f) + \varepsilon \quad \text{para} \quad \|h\| < \delta_n,$$

y resulta:

$$e_n(f) - \varepsilon \leq e_n(f + h) \leq e_n(f) + \varepsilon \quad \text{para} \quad \|h\| < \delta_n,\ 0 \leq n \leq m$$

También es continuo, como consecuencia, el funcional

$$I_m(f) = \max_{0 \leq n \leq m} e_n(f),$$

pues será también

$$I_m(f) - \varepsilon \leq I_m(f + h) \leq I_m(f) + \varepsilon \quad \text{para} \quad \|h\| \leq \min_{0 \leq n \leq m} \delta_n$$

Alcanza, por tanto, $I_m(f)$ un mínimo absoluto I_m en un punto f_m de E_m, al menos.

Si la sucesión I_m de estos mínimos es acotada, $I_m \leq L < +\infty$, también son acotadas en su conjunto las f_m, pues resulta

$$\frac{1}{m_0^2} \, | f_m(z) |^2 \leq e_0(f_m) \leq I_m(f_m) = I_m \leq L \text{ para } m \geq 0.$$

Contiene, por tanto, $f_m(z)$ una sucesión parcial $f_{m_\nu} \longrightarrow \varphi(z)$ uniformemente en R; y como es:

$$\frac{1}{m_n^2} \left| \frac{f_{m_\nu}(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right| \leq e_n(f_{m_\nu}) \leq I_{m_\nu}(f_{m_\nu}) = I_{m_\nu} \text{ para } o \leq n \leq m,$$

fijado n, resulta, para $m_\nu \longrightarrow \infty$:

$$\left| \frac{\varphi(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right| \leq m_n^2$$

si es $I_m \leq 1$ para todo m.

Pero esta condición suficiente es también necesaria evidentemente; pues si una función $f(z)$ holomorfa en R admite el desarrollo dado, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con las cotas m_n, será $c_m(f, z) \leq 1$ en R, luego $e_n(f) \leq 1$; también, por tanto, $I_m(f) \leq 1$, y con mayor razón $I_m = I_m(f_m) \leq I_m(f) \leq 1$, puesto que siendo $| f(z) | < m_0 \leq M_m < K_m$ en R, pertenece seguramente $f(z)$ a todos los E_m.

En resumen: *la condición necesaria y suficiente para que una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *admita una aproximación asintótica holomorfa* $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *en un recinto abierto y acotado* R *con cotas* m_n *prefijadas,* $m_n \geq | a_n |$, *es que resulten* $I_m \leq 1$ *todos los mínimos* I_m *de los funcionales*

$$I_m(f) = \max_{0 \leq n \leq m} \overline{\operatorname{extr}}_{z \in R} \frac{1}{m_n^2} \left| \frac{f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu}{z^n} \right|^2$$

en el conjunto E_m *de las funciones holomorfas* $f(z) \sim \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ *con* $|f(z)| < K_m$ *en* R, *siendo* (*) $K_m > M_m = \sum_{n=0}^{m} m_n r^n$, $r = \overline{\operatorname{extr}}_{z \varepsilon R} |z|$.

Dicha aproximación es el límite de una sucesión de funciones holomorfas, $f_{m_\nu}(z)$, *uniformemente convergente en el recinto, extraída de la sucesión* $f_m(z)$ *de las funciones que dan dicho mínimo* I_m *en cada conjunto* E_m.

Nótese que podemos suponer no creciente la sucesión de conjuntos E_m, es decir, $E_m \geq E_{m+1}$, sin más que sustituir cada E_{m+1} de la sucesión anterior por su interferencia o producto $\prod_{i=1}^{m+1} E_i \neq 0$ con todos los precedentes, lo cual no altera la compacidad ni las otras propiedades en que se apoya la conclusión del teorema. Entonces el funcional $I_{m+1}(f)$ está también definido en E_{m+1} y es $I_m(f) \leq I_{m+1}(f)$ en E_{m+1}; luego también $\min_{E_{m+1}} I_m(f) \leq \min_{E_{m+1}} I_{m+1}(f)$. Pero siendo evidentemente $\min_{E_m} I_m(f) \leq \min_{E_{m+1}} I_m(f)$ por ser $E_m \geq E_{m+1}$, resulta $\min_{E_m} I_m(f) \leq \min_{E_{m+1}} I_{m+1}(f)$. La sucesión I_m es así monótona creciente $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \ldots$ y tiene, por consiguiente, un límite finito o infinito L. En el primer caso existe una aproximación holomorfa con cotas Lm_n; y en el segundo, no hay ninguna aproximación con cotas del tipo Lm_n, siendo $L < +\infty$ constante.

II. El método anterior vale con ligeras modificaciones para la obtención de una función real $f(x)$ indefinidamente derivable en un intervalo $a \leq x \leq b$ con derivadas $f^{(n)}(x)$ que tomen valores prefijados a_n en un punto fijo x_0 del mismo y que se conserven en todo él inferiores en valor absoluto a los términos correspondientes de una sucesión prefijada $m_n \geq |a_n|$, es decir:

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \text{ en un punto fijo } x_0 \text{ de } [a, b]$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq m_n \text{ en todo punto } x \text{ de } [a, b].$$

(*) El profundo método de CARLEMAN (Les functions quasianalitiques. Página, 55. — Colección Borel, París, 1926) para el cálculo de una aproximación asintótica $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ holomorfa en $|z - 1| < 1$, supuesta existente, está a nuestro juicio incompleto, pues la demostración de que la función obtenida hace mínima a la integral considerada, rigurosamente detallada para $a_n = 0$ en la pág. 45, fué omitida en el caso general $a_n \neq 0$ (pág. 58), la cual inútilmente hemos tratado de completar para dar una condición de existencia análoga a la acotación de las formas cuadráticas manejadas para las funciones reales de la pág. 72 (véase la nota al pie de la pág. 91 de este artículo).

Es sabido que las funciones reales con derivada m — ésima continua en $[a, b]$ forman un espacio métrico $C^{(m)}$ (completo y vectorial respecto de cualquier anillo de números (*)), cuando se define la norma o distancia al origen así:

$$\| f \| = \max_{a \leq x \leq b} | f(x) | + \max_{a \leq x \leq b} | f^{(n)}(x) |.$$

Sea E_m el subconjunto de $C^{(m)}$ formado por todasl as funciones cuyas m primeras derivadas toman los valores prefijados $f^{(n)}(x_0) = a_n$ para $n = 0, 1, ..., m$ y cuyas derivadas m — ésimas satisfacen una condición de LIPSCHITZ uniformemente en $[a, b]$ y E_m, esto es,

$$| f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x') | < K_m | x - x' |$$

para todo x y x' de $[a, b]$ y todo $f(x)$ de E_m. Este contiene seguramente el polinomio

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n!} (x - x_0)^n$$

y todas las funciones del tipo

$$f(x) = P_m(x) + \frac{(x - x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \omega(x),$$

siendo $\omega(x)$ una función con sus m primeras derivadas acotadas convenientemente en $[a, b]$.

Demostremos que E_m es compacto en sí con la métrica del espacio $C^{(m)}$. Dado un conjunto parcial infinito de E_m, las derivadas m — ésimas de sus funciones forman una familia normal en $[a, b]$, es decir, contiene una sucesión parcial $f_\nu^{(m)}(x)$ uniformemente convergente en $[a, b]$, la cual en x_0 vale $\varphi(x_0) = \lim_{\nu \to \infty} f_\nu^{(m)}(x_0) = a_m$ y además verifica la misma condición de LIPSCHITZ. Integremos ahora sucesivamente m veces a partir de x_0 con los valores iniciales $a_{m-1}, a_{m-2}, ..., a_0$ para $x = x_0$:

$$\varphi_1(x) = a_{m-1} + \int_{x_0}^{x} f^{(m)}(x)\, dx,$$

$$\varphi_2(x) = a_{m-2} + \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x)\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi(x) = a_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi_{m-1}(x)\, dx.$$

(*) BANACH. Theorie des operations lineaires. Warszawa 1932, pág. 11.

Se obtiene así una función $\Phi(x)$ que pertenece a E_m, y hacia la cual converge uniformemente en $[a, b]$ la sucesión parcial de las funciones $f_\nu(x)$, del subconjunto E_m, que tienen como m — ésimas derivadas las $f_\nu^{(m)}(x)$. Esta $\Phi(x)$ es un punto de acumulación del subconjunto dado con la métrica del espacio $C^{(m)}$, pues resulta de ambas convergencias uniformes:

$$\| f_\nu - f \| \longrightarrow 0 \text{ para } \nu \longrightarrow \infty.$$

Formemos ahora el cociente

$$c_n(f, x) = \frac{[f^{(n)}(x)]^2}{m_n^2},$$

siendo f una función de E_m; y sea $e_n(f)$ su máximo absoluto en $[a, b]$:

$$e_n(f) = \max_{a \leq x \leq b} c_n(f, x)$$

Este máximo es función continua en E_m; pues en $f + h$, se tiene:

$$c_n(f + h) = \frac{[f^{(n)}(x) + h^{(n)}(x)]^2}{m_n^2} =$$

$$= c_n(f) + 2\, h^{(n)}(x) \frac{f^{(n)}(x)}{m_n^2} + \frac{[h^{(n)}(x)]^2}{m_n^2} = c_n(f) + o(h),$$

designando con $o(h)$ la suma de los últimos términos; la cual resulta menor que ε, $|o(h)| < \varepsilon$, en todo $[a, b]$, para $\| h \| < \delta_n$ suficientemente pequeño, por ser entonces $| h^{(n)}(x) | < \delta_n$ y además $| f^{(m)}(x) | \leq | a_m | + K_m (b - a)$ en todo $[a, b]$; luego también $| f^{(n)}(x) | < C$ en $[a, b]$ para $0 \leq n \leq m$, siendo C constante. Es, pues,

$$e_n(f) - \varepsilon \leq e_n(f + h) \leq e_n(f) + \varepsilon \text{ para } \| h \| < \delta_n,\ 0 \leq n \leq m.$$

El funcional

$$I_m(f) = \max_{0 \leq n \leq m} e_n(f)$$

es también función continua en E_m, pues

$$I_m(f) - \varepsilon \leq I_m(f + h) \leq I_m(f) + \varepsilon \quad \text{para} \quad \| h \| < \min_{0 \leq n \leq m} \delta_n$$

Alcanza, por consiguiente, $I_m(f)$ un valor mínimo absoluto I_m en un punto, al menos, f_m de E_m. Estas funciones $f_m(x)$, lo mismo que sus derivadas $f_m(x)$ de un orden cualquiera n, forman sendas familias normales si esta sucesión de mínimos I_m es acotada, $I_m \leq L < +\infty$; pues será

$$[f_m^{(n+1)}(x)]^2 \leq m_{n+1}^2 e_{n+1}(f_m) \leq m_{n+1}^2 I_m(f_m) \leq L m_{n+1}^2 \text{ para } 0 \leq n+1 \leq m;$$

luego las $f_m^{(n)}(x)$ verifican la condición de LIPSCHITZ con $K_m = \sqrt{L} m_{n+1}$ desde $m \geq n+1$; y forman, por tanto, familia normal.

Sea f_{m_ν} la sucesión parcial de las f_m que converge uniformemente en $[a, b]$ hacia una función $f(x)$; la f'_{m_ν}, como parte de la f_m que converge uniformemente en $[a, b]$ hacia $f''(x)$; y así sucesivamente queda expresada cada derivada $f^{(n)}$ de f como límite de una sucesión parcial $f_{m_{\nu_n}}^{(n)}$ de la $f_m^{(n)}$ uniformemente convergente en $[a, b]$.

Pero siendo

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq m$$

$$[f^{(n)}(x)]^2 \leq m_n^2 e_n(f_{m_{\nu_n}}^{(n)}) \leq m_n^2 I_{m_{\nu_n}}(f_{m_{\nu_n}}) = m_n^2 I_{m_\nu} \leq L m_n^2 \text{ para } 0 \leq n \leq m_{\nu_n}$$

fijado n, resulta, para $m \longrightarrow \infty$ y $m_{\nu_n} \longrightarrow 0$ respectivamente:

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$|f^{(n)}(x)| \leq m_n \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots, a \leq x \leq b,$$

si es $L = 1$, es decir, $I_m \leq 1$ para $m = 0, 1, 2, \ldots$

Recíprocamente, si hay una función $F(x)$ indefinidamente derivable en $[a, b]$ que verifica estas condiciones, es $c_n(F, x) \leq 1$, $e_n(F) \leq 1$, $I_m(F) \leq 1$, y como ésta $F(x)$ pertenece a E_m si tomamos $K_m = m_{n+1}$, será $I_m = I_m(f_m) \leq I_m(F) \leq 1$.

En resumen: *dada una sucesión de números reales cualesquiera a_n, otra de números positivos $m_n \geq |a_n|$, un intervalo finito cerrado $[a\ b]$, y un punto fijo x_0 del mismo, la condición necesaria y suficiente para que exista una función real $f(x)$ indefinidamente derivable en $[a, b]$ tal que sea*

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$|f^{(n)}(x)| \leq m_n \text{ para } a \leq x \leq b \text{ y } n = 0, 1, 2, \ldots$$

es que resulte $I_m \leq 1$, la sucesión de mínimos del funcional

$$I_m(f) = \max_{0 \leq n \leq m} \max_{a \leq x \leq b} \frac{[f^{(n)}(x)]^2}{m_n^2}$$

en el conjunto E_m de todas las funciones con m primeras derivadas

$$f^{(n)}(x_0) = a_n \qquad 0 \leq n \leq m$$

y cuyas derivadas m — ésimas verifiquen la condición de LIPSCHITZ

$$| f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x') | < m_{n+1} | x - x' | \text{ para}$$
$$a \leq x \leq x' \leq b \text{ ó } a \leq x' \leq x \leq b$$

Dicha función $f(x)$ resulta como límite de una sucesión $f_{m_\nu}(x)$ uniformemente convergente en el intervalo $[a, b]$, extraída de la sucesión $f_m(x)$ de las funciones donde el funcional $I_m(f)$ alcanza su mínimo en cada conjunto E_m.

Lo mismo que antes podemos suponer no creciente la sucesión de subconjuntos y resulta no decreciente la sucesión de mínimos $I_0 \leq I_1 \leq I_2 \leq \ldots$ Esta tiene pues, seguramente un límite L, finito o infinito; en el primer caso valen las cotas Lm_m para las derivadas; y en el segundo, no existe ninguna función cuyas derivadas tomen los valores prefijados y tengan cotas del tipo Lm_n con $L < +\infty$ constante.

Se podría utilizar también el funcional (*):

$$I_m(f) = \max_{0 \leq n \leq m} \frac{1}{m_n^2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

en el espacio definido por

$$\| f \| = \int_a^b [f(x)]^2 \, dx + \int_a^b [f^{(m)}(x)]^2 \, dx.$$

Pero como acontece en el espacio de HILBERT, caracterizado por

$$\| f \| = \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

tampoco en éste son conjuntos compactos en sí las esferas de centro 0 (**) y no se evitaría imponer una condición suplementaria en sustitución de la de LIPSCHITZ.

Madrid, mayo 1951 - Instituto « Jorge Juan »

(*) La condición de CARLEMAN (Loc. cit. pág. 72) obtenida mediante un funcional análogo, es necesaria para que sea $| f^{(n)}(x) | < k^n m_n$ y suficiente para $| f^{(n)}(x) | < k^n m_n^*$ siendo m_n^* otra sucesión que verifica también la condición de cuasianaliticidad si la cumple m_n y tal que $\sqrt[n]{\frac{m_n^*}{m_n}} \to \infty$. No es, pues, necesaria y suficiente para la existencia pedida, y en el enunciado de CARLEMANN habría de introducirse esta salvedad.

(**) G. Julia. Introduction mathématique aux théories quantiques. Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Julia, Fasc. XVI - 2 part. pag. 17.