

SUR LES AXIOMES DE LA GEOMETRIE

PAR J. FAVARD (Paris)

1. INTRODUCTION

On sait qu'en géométrie projective une construction du plan est possible une fois admis les axiomes de l'ordre cyclique sur la droite projective et l'axiome de Pasch (sous sa forme projective). Le présent travail a pour but de montrer qu'un résultat analogue vaut pour la géométrie élémentaire, et de présenter les deux premiers systèmes d'axiomes donnés par Hilbert sous une forme différente de celle donnée par cet auteur. ⁽¹⁾

Un énoncé à peine différent de celui, classique, de l'axiome de Pasch, énoncé qui en fait un axiome d'espace, permet de supprimer quelques axiomes d'incidence et c'est, comme on le verra, une hypothèse singulièrement précise, puisqu'elle permet, de proche en proche, la construction d'espaces de dimension aussi grande qu'on veut, à moins qu'un axiome d'épuisement ne mette fin à la construction. En dehors des espaces projectifs, cela n'a été vu, me semble-t-il, que pour les espaces où sont admis d'autres axiomes que ceux des deux premiers systèmes de Hilbert ; en y adjoignant, bien entendu, les axiomes d'incidence qui permettraient de construire une géométrie à plus de 3 dimensions.

Ici, le mot dimension est à entendre en un sens que le contexte rappellera suffisamment, bien que nous contentions de développer le cas des dimensions 2 et 3 ; cette notion ne doit pas être confondue avec la notion de même nom de la théorie des espaces métriques séparables, car ni l'axiome d'Archimède, ni le fait que l'espace est complet, n'interviennent ici.

Enfin le fait qu'il y a des géométries, planes dans lesquelles le Théorème de Desargues n'est pas vérifié s'exprimera alors en disant que ces géométries ne peuvent être prolongées en des géométries de l'espace où l'axiome de Pasch est toujours vrai.

(1) D. HILBERT : *Grundlagen der Geometrie*. Teubner (7.° édition, 1930).

Cet énoncé me semble situer exactement le problème du prolongement d'une géométrie plane en une géométrie de l'espace. Je n'ai pas tenté de résoudre ce problème qui semble difficile ; on peut penser que, prenant au moins le résultat de Desargues comme axiome, le prolongement peut être fait mais, dans cette voie, aucune indication n'est fournie par les considérations développées par Hilbert dans son livre au sujet d'un problème qui paraît analogue. D'ailleurs, prendre comme axiome la validité du résultat de Desargues n'est qu'un pis aller, car son énoncé semble bien complexe. Enfin, remarquons que, une fois résolu le problème du prolongement d'une géométrie plane en une géométrie à trois dimensions, avec axiome de Pasch, le problème analogue du prolongement d'une géométrie à n dimensions en une géométrie à $(n + 1)$ dimensions ($n > 2$), avec axiome de Pasch, s'il pourra sans doute être résolu à partir de principes analogues, ne l'est tout de même pas ipso facto. ⁽¹⁾

2. CONSTRUCTION DU PLAN

L'espace est un ensemble d'éléments appelés points. Nous admettons les axiomes suivants :

1.^o *Axiome d'incidence : Par deux points a et b distincts passe une droite ab et une seule.*

2.^o *Axiomes de l'ordre des points sur une droite : C'est le deuxième système d'axiomes de Hilbert, sauf l'axiome de Pasch.*

3.^o *Axiome de non-épuisement : Il existe trois points non en ligne droite.*

4.^o *Axiome de Pasch (forme nouvelle) : Etant donnés trois points a , b , c , non en ligne droite (mais à cela près quelconques), soit c' un point de la droite ab qui ne soit pas entre a et b , b' un point de la droite ac entre a et c , alors la droite $b'c'$ coupe la droite bc en un point a' situé entre b et c (ou a avec la droite bc un point commun a' situé entre b et c).*

Nous dirons que les trois points a , b , c , ou les trois droites bc , ca , ab définissent un *triangle*, dont a , b , c , sont les *sommets*, ab , bc , ca les *côtés*, et nous perlerons de l'axiome de Pasch appliqué au triangle abc coupé par la droite $b'c'$.

Au point de vue physique, l'axiome de Pasch, ainsi énoncé, apparaît comme axiome de *vérification des règles*, après la réalisation des

⁽¹⁾ Un résumé de ce travail a paru dans une note : *Sur l'axiome de Pasch considéré comme axiome d'espace*. (C. R. Acad. Sci. de Paris. t. 230 p. 1996. — 1950). Je tiens à remercier Monsieur E. Fary qui a bien voulu revoir ce manuscrit.

trois règles ab , bc , ca ; il est donné ici avant toute définition axiomatique de la notion de plan, et c'est là la seule différence avec l'énoncé classique.

A partir de là, on peut procéder à la construction du plan. Soient a , b , c trois points non en ligne droite ; désignons par A l'ensemble des points des droites ab et ac et des droites obtenues en joignant a à un point a' de la droite bc situé entre b et c (plus brièvement, nous dirons que A est l'ensemble des droites ab et ac et des droites aa') ; par B et C désignons les ensembles analogues construits à partir de b et de c respectivement : nous appellerons *plan* défini par les trois points a , b , c , ou *plan* abc , l'ensemble des points appartenant à A , ou à B ou à C (fig. 1).

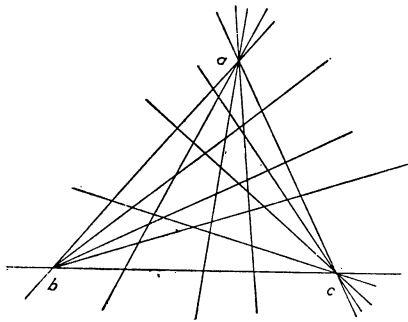


Fig. 1

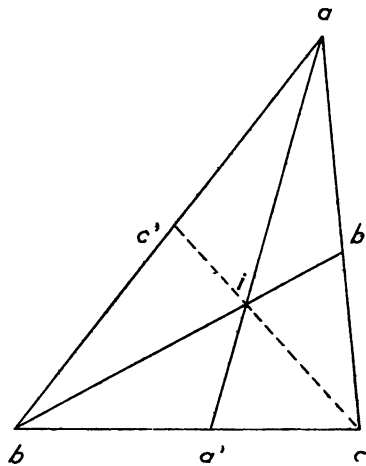


Fig. 2

Tout ensemble de points contenant a , b , c et qui, avec deux points distincts, contient tous les points de la droite qui les joint, contient évidemment la réunion des ensembles A , B et C ; nous allons montrer qu'avec deux points, cette réunion contient la droite qui les joint, elle mérite donc d'être appelée un plan.

Deux droites aa' et bb' (a' entre b et c , b' entre c et a) se coupent en un point i entre a et a' (ou entre b et b') : il suffit en effet d'appliquer l'axiome de Pasch au triangle $bc b'$ et à la droite aa' , on en déduit l'existence de i et le fait qu'il est entre b et b' . En joignant alors ci (fig. 2) et en appliquant à nouveau l'axiome de Pasch au triangle abb' coupé par ci , on voit que ci coupe ab en un point c' situé entre a et c , et i est aussi entre c et c' . Inversement tout point i situé entre a et a' sur une droite aa' est tel que bi coupe ac entre a et c : il suffit pour le voir d'appliquer l'axiome de Pasch au triangle $aa'c$ coupé par bi .

La réunion de l'ensemble des segments ab , bc , ca et de l'ensemble des points i est donc l'ensemble commun aux trois ensembles A , B , C ; l'ensemble des seuls points i constitue l'intérieur I du triangle abc .

Les points de la droite ab sont communs aux deux ensembles A et B .

Ainsi, sauf les points de I et ceux des droites ab , cb , ca , tous les autres points du plan n'appartiennent qu'à une seule droite de A , de B ou de C .

1.^o Cela étant, nous allons d'abord montrer que toute droite joignant un sommet, soit a , à tout autre point d du plan, appartient au plan.

Si d appartient à A , il n'y a pas de question; il suffit donc d'examiner le cas où d appartient à B , et même le cas où la droite bd ne coïncide avec bc car, dans ce dernier cas, il suffit de supposer que c , par exemple,

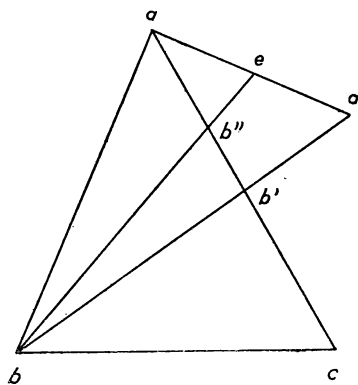


Fig. 3

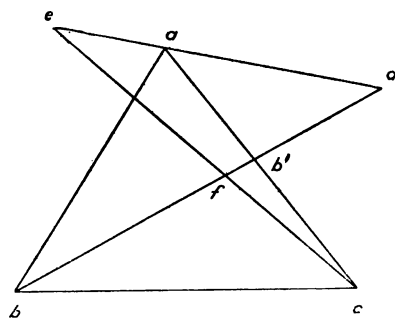


Fig. 4

est entre b et d ; joignant alors b à un point b' entre a et c , et appliquant l'axiome de Pasch au triangle acd coupé par bb' , on voit que cette droite coupe ad en un point d' qui n'est pas sur bc , et l'on peut alors définir ad au moyen des deux points a et d' . En définitive nous supposons donc que bd coupe ac en b' entre a et c et que d n'est pas entre b et b' .

α) Supposons alors que b' soit entre b et d ; si un point e de ad appartient à bc , il appartient au plan, nous supposons donc dorénavant que e n'est pas sur bc .

α) 1.^o Soit e un point de ad entre a et d ; la droite be coupe ab' en b'' entre a et b' , donc b'' est entre a et c ; la droite bb'' appartient au plan, il en est donc de même de e (fig. 3).

α) 2.^o Supposons maintenant que a soit entre d et e et joignons c à e (fig. 4). La droite bd a, en commun avec les côtés du triangle eac , le point d sur ea qui n'est pas entre c et a et le point b' entre a et c ; donc elle coupe ec en un point f entre e et c .

Si f appartient à I , ce appartient au plan, donc e appartient au plan.

Si f n'appartient pas à I , f n'est pas entre b et b' ; f ne peut pas être entre b' et d car, considérant le triangle $ab'd$ et la droite cf , celle-ci coupant le côté ab' en c , non situé entre a et b' , et le côté $b'd$ en f entre b' et d couperait ad en e entre a et d , contrairement à l'hypothèse.

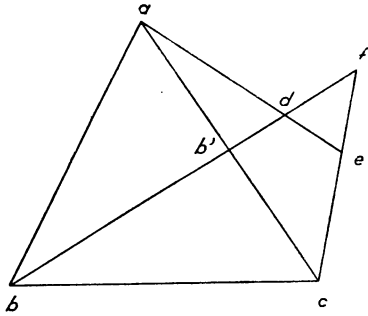


Fig. 5

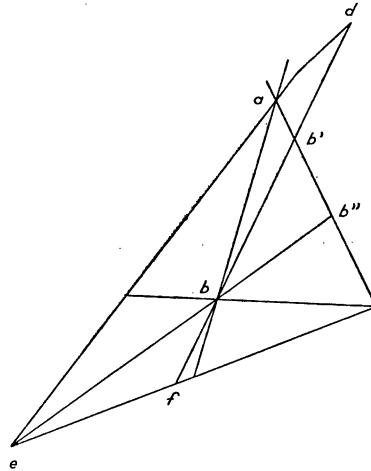


Fig. 6

Le point d ne peut pas être non plus entre b' et f , car, considérant le triangle $b'cf$ et la droite ad , on en conclurait que e est entre c et f (fig. 5).

Considérant ensuite le triangle ace , coupé par df , on voit que d devrait être entre a et e , contrairement à l'hypothèse. En définitive

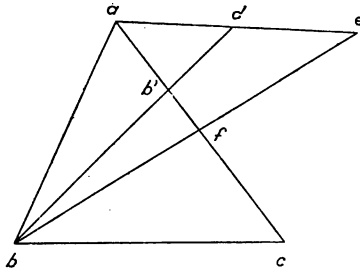


Fig. 7

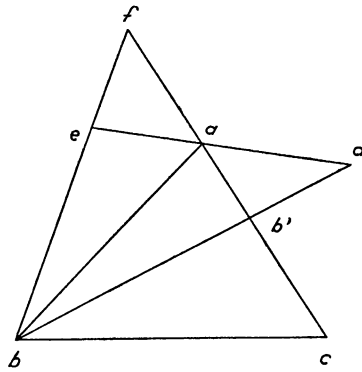


Fig. 8

b est donc entre f et b' ; considérons alors le triangle $b'c$ coupé par be , comme e n'est pas entre f et c , la droite be coupe $b'c$ en un point b'' entre b' et c ; b'' est donc entre a et c sur ac , la droite bb'' fait partie du plan donc e aussi (fig. 6).

α) 3.^o Il ne reste plus à examiner que le cas où d est entre a et e . On joint encore be et, en considérant le triangle bde et coupé par ac , on voit que be est coupé par ac en f entre b et e (fig. 7).

Si f est entre a et c , la droite bf appartient au plan, donc le point e appartient aussi au plan.

Le point a ne peut être entre f et c , car, considérant le triangle bb' coupé par ad , on voit que e serait entre b et f (fig. 8), ce qui est contraire au résultat obtenu ci-dessus. Donc, si f n'est pas entre a et c , c est entre a et f (fig. 9), joignons alors ce ; le triangle abf coupé par ce donne le résultat que ce coupe ab en un point c' entre a et b ; donc e appartient à la droite cc' du plan, il appartient donc aussi au plan.

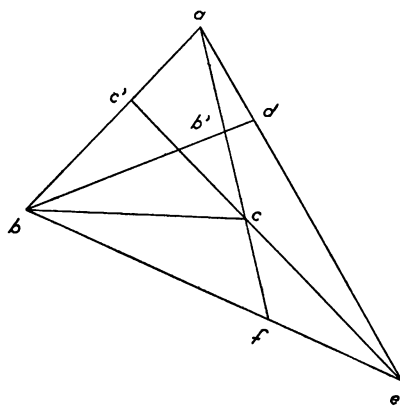


Fig. 9

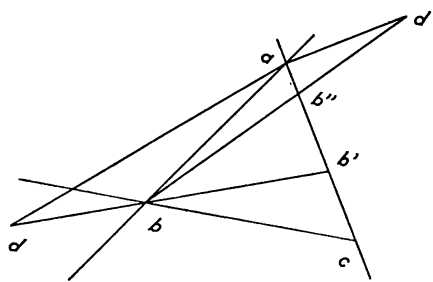


Fig. 10

β). Il reste encore à examiner le cas où la droite est définie par un point d de B tel que b est entre b' et d . Soit alors d' un point de la droite tel que a soit entre d et d' ; joignons bd' et considérons le triangle adb' , coupé par bd' , on en déduit que bd' coupe ab' en b'' entre a et b' , donc b'' est aussi entre a et c (fig. 10).

La droite ad peut être définie par a et d' et le point b'' est entre b et d' , comme on le voit en considérant le triangle bdd' coupé par ab' ; on est ramené au cas précédent.

2.^o Soient maintenant b' et c' deux points situés respectivement entre a et c et entre a et b , on va montrer que la droite $b'c'$ appartient au plan.

Il est immédiat que tout point d de cette droite situé entre b' et c' appartient au plan car, coupant le triangle $ab'c'$ par bd , on voit que cette droite coupe ab' en b'' entre a et b' , donc entre a et c (fig. 11).

Il suffit ensuite d'examiner le cas où d est tel que b' se trouve entre

c' et d ; considérant alors le triangle $bc'd$ coupé par ab' , on voit qu'il existe un point b'' commun à ac et bd (fig. 12).

La droite bb'' appartient au plan, d'après ce que nous venons de voir, donc le point d aussi.

3.^o Une droite joignant un point a' de bc à un point quelconque d du plan appartient au plan.

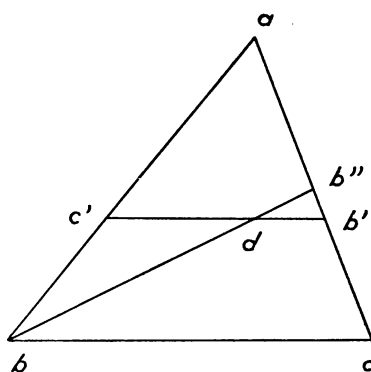


Fig. 11

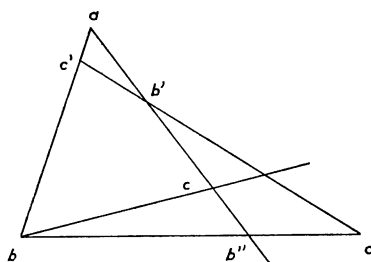


Fig. 12

(α) Supposons d'abord que a' soit entre b et c .

α) 1.^o Lorsque d appartient à A , la droite ad coupe bc en un point a'' entre b et c , et l'on peut supposer que a'' est entre b et a' (si a'' coïncide avec a' , il n'y a pas de question).

Si d est entre a et a'' (fig. 13), en coupant le triangle aba'' par $a'd$, on voit que $a'd$ coupe ab en un point c'

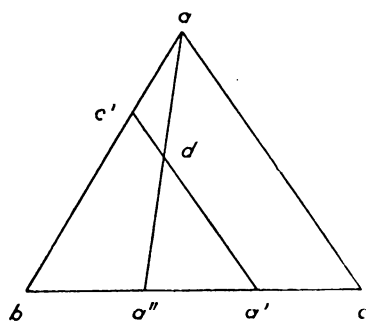


Fig. 13

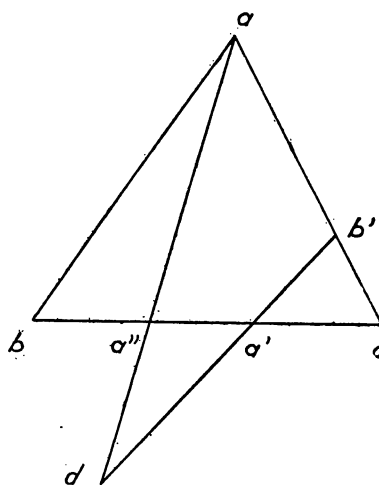


Fig. 14

entre a et b , et la droite $a'd$ coïncide avec la droite $a'c'$, qui appartient au plan, d'après 2.^o

Si d n'est pas entre a et a'' (fig. 14), la droite $a'd$ coupe le triangle $aa''c$ en d et a' , donc aussi en un point b' entre a et c ; la droite $a'd$

coïncide avec la droite $a'b'$, on est encore ramené au résultat 2.^o

α). 2.^o Supposons maintenant que d n'appartienne pas à A , on peut supposer qu'il appartient à B (fig. 15), la droite bd coupe alors ac en b' entre a et c , et d n'est pas entre b et b' . La droite $a'd$ coupe le triangle $bb'c$ en d et en a' ; en vertu des hypothèses faites, elle coupe donc $b'c$ en b'' entre b' et c , donc entre a et c ; on se trouve encore ramené au résultat 2.^o

β). Si a' n'est pas entre b et c , on peut supposer que c est entre b et a' , on va alors montrer que les deux plans abc et aba' sont identiques (fig. 16).

Tout point de aba' , appartient à abc , car il est contenu : soit dans une droite ab , bc , ou aa' qui sont des droites de abc ; soit dans

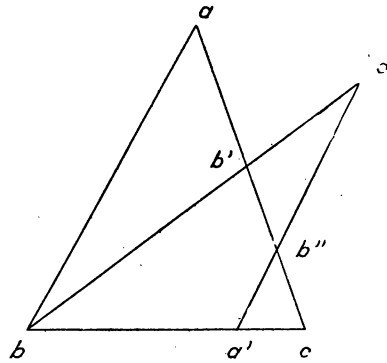


Fig. 15

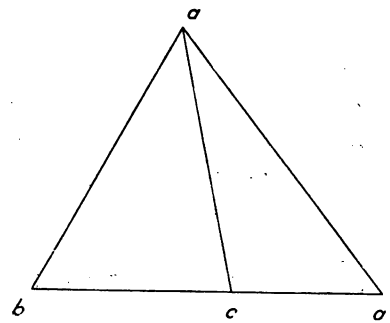


Fig. 16

une droite passant par a et un point entre b et a' , et une telle droite appartient à abc ; soit dans une droite passant par b et un point situé entre a et a' , mais une telle droite coupe ac entre a et c , elle appartient donc à abc ; soit dans une droite passant par a' et coupant ab entre a et b , mais une telle droite coupe ac entre a et c , elle appartient donc aussi à abc .

Inversement tout point de abc appartient à aba' , les ensembles A et B appartiennent en effet à aba' ; l'ensemble C s'obtient en joignant c à un point situé entre a et b , chacune des droites de cet ensemble joint donc dans le plan aba' , un point entre a et a' à un point entre a et c , elle appartient donc à aba' ; ce qui achève la démonstration.

En particulier toute droite joignant a' à un point d de abc appartient à abc ; c'est-à-dire, en général, que toute droite joignant un point de l'une des droites ab , bc ou ca à un point du plan abc appartient à ce plan.

4.^o Soit alors d un point quelconque de abc , non situé sur bc , montrons que les deux plans abc et bcd coïncident (fig. 17). Les droites bd et cd appartiennent en effet au plan abc . En joignant b à un point de cd on a donc une droite de abc (d'après 1.^o).

En joignant d à un point de bc on a aussi une droite de abc d'après 3.^o. Il suit de là que le plan bcd est contenu dans le plan abc .

D'autre part si d appartient à A , la droite ad coupe bc en a' entre b et c , et la droite da' appartient donc à bcd , c'est-à-dire que a appartient à bcd .

Si d n'appartient pas à A , on peut se borner à considérer le cas où il appartient à B , alors bd coupe ac en b' entre a et c et la droite cb' ,

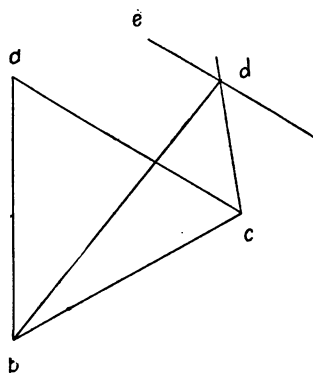


Fig. 17

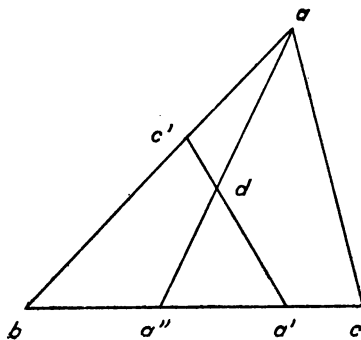


Fig. 18

c'est-à-dire la droite ca , appartient au plan bcd ; dans tous les cas, le point a appartient donc au plan bcd .

Cela étant, on démontrera comme ci-dessus, que tous les points du plan abc appartiennent au plan bcd . Cette conclusion et son inverse montrent donc que les deux plans abc et bcd sont identiques.

Soit alors e un point quelconque de abc , e appartient au plan bcd , la droite de passant par d appartient donc au plan bcd , c'est-à-dire au plan abc . Cela revient à dire que : *Le plan contient toute droite joignant deux de ses points.*

5.^o Enfin soient d, e, f , trois points non en ligne droite, du plan abc , le plan peut être défini aussi par ces trois points.

Supposons, par exemple que d ne soit pas sur bc , le plan abc coïncide avec le plan bcd ; on peut supposer que e n'est pas sur cd , le plan dec coïncide avec le plan bcd ; enfin le plan def coïncide avec le plan dec pour la même raison, ce qui démontre le résultat.

6.^o Dans le plan ainsi construit l'axiome de Pasch est valable sous sa forme classique que voici :

Théorème. Soit abc , un triangle situé dans un plan P , a' un point

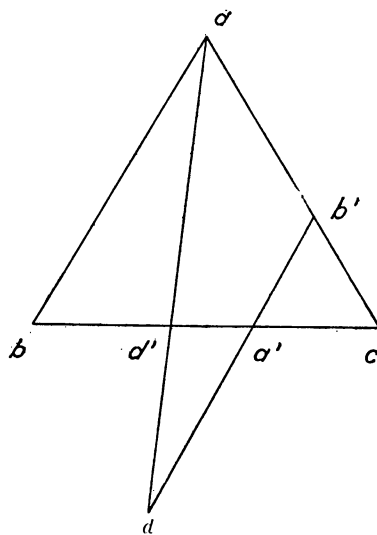


Fig. 19

situé entre b et c , et $a'd$ une droite du plan P , alors la droite $a'd$ coupe ou bien le segment ab , ou bien le segment ac (extrémités comprises).

D'après les résultats précédents nous pouvons supposer que le plan est déterminé par le triangle abc .

1.^o Examinons d'abord le cas où d est dans l'intersection des ensembles A, B, C (c'est-à-dire à l'intérieur du triangle) (fig. 18).

Par raison de symétrie, nous pouvons nous borner au cas où l'intersection a'' des droites ad, bc est située entre b et a' . Or en coupant le triangle aba'' par $a'd$

notre axiome montre l'existence du point c' situé sur $a'd$ et ab .

2.^o Si d n'est pas à l'intérieur du triangle, on peut supposer qu'il appartient à A ou à B .

Examinons d'abord le premier cas (fig. 19) ad coupe bc suivant d' , qui est situé entre b et c . Par raison de symétrie, on peut supposer que a' est entre d' et c . Or, en coupant le triangle $ad'c$ par da' , on conclut à l'existence du point d'intersection de ac et de da' .

3.^o Il nous reste à examiner le cas où d appartient à B (fig. 20) soit d' l'intersection de bd et ac ; c'est un point situé entre a et c , et d' est entre b et d , ou bien b est entre d et d' . De toutes façons en coupant le triangle bcd' par la droite $a'd$ nous obtenons un point b' entre c et d' , donc entre c et a , intersection des droites $a'd$ et ac , et ceci achève la démonstration.

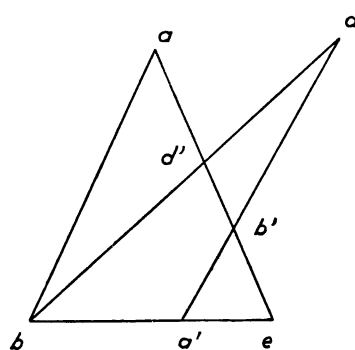


Fig. 20

3. L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Admettons l'axiome suivant :

Axiome de non-épuisement : Il existe dans l'espace quatre points qui ne sont pas dans un même plan. En procédant d'une manière analogue à celle que nous venons de développer pour le plan, nous allons construire un espace à trois dimensions contenant quatre points non coplanaires.

Soient a, b, c, d ces quatre points ; ils définissent ce qu'on appelle un tétraèdre dont les points a, b, c, d sont les sommets ; les segments ab, ac, ad, bc, bd, cd , en sont les arêtes ; les intérieurs et les côtés des triangles bcd, cda, dab, abc en sont les faces.

Appelons AB l'ensemble des points appartenant aux plans abc , ou abd , ou aux plans passant par l'arête ab et par un point e situé sur cd entre c et d ; les ensembles AC, AD, BC, BD, CD se définissent d'une manière analogue.

Nous appellerons espace à trois dimensions $abcd$ la réunion des points appartenant à l'un ou à l'autre des ensembles AB, AC, AD, BC, BD, CD .

Tout point de l'espace appartient donc, soit à une droite passant par un sommet et un point de la face opposée, soit à une droite joignant deux points appartenant à deux arêtes opposées.

Comme pour le triangle on peut définir l'intérieur du tétraèdre.

1.° On va montrer que toute droite joignant un sommet, soit a , à un point e de l'espace appartient à l'espace.

Ce résultat est vrai si e est dans un des trois plans abc, acd, adc , ou bien lorsque e appartient à un plan tel que abf , où f est entre c et d . Il suffit donc d'examiner le cas où e est dans un plan tel que cdf , où f est entre a et b ; si ef coupe cd en f' entre c et d , on revient au cas précédent (avec f' au lieu de f). Il ne reste donc plus à examiner que le cas où ce , par exemple, coupe df en f' entre d et f (fig. 21) ; alors af' coupe bd en g et le plan acg fait partie de l'ensemble AC , il contient e , donc aussi la droite ae .

2.° Toute droite joignant un point de l'une des droites ab, ac, ad, bc, bd, cd , à un point de l'espace, appartient à l'espace.

Soit d'abord en effet e un point de ab entre a et b et f un autre point de l'espace. Considérons le triangle abf et, pour un point g de ef entre e et f joignons a à g (fig. 22) ; cette droite coupe bf en a' entre b et f , mais bf appartient à l'espace, donc a' aussi ; donc la droite aa' appartient à l'espace, donc g aussi.

Pour un point g tel que f est entre e et g , on voit que la droite af coupe bg en un point b' (fig. 23); la droite af fait partie de l'espace, donc b' aussi, donc la droite bb' fait partie de l'espace, donc g aussi.

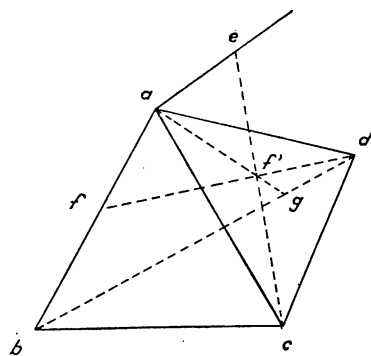


Fig. 21

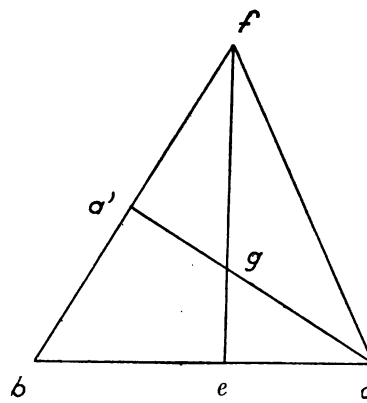


Fig. 22

Pour un point g tel que e est entre f et g , considérons un point a' de af tel que a soit entre a' et f et joignons ba' (fig. 24). La droite ef coupe ba' en e' entre b et a' et si g est entre e et e' , la droite bg coupe aa' , elle appartient donc à l'espace, et g lui appartient aussi; si g

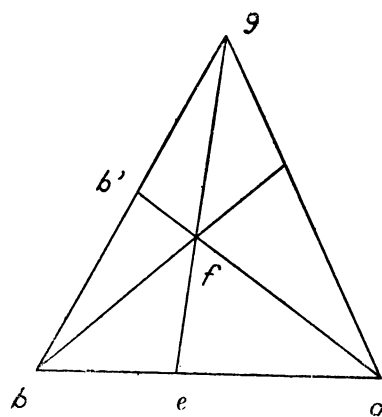


Fig. 23

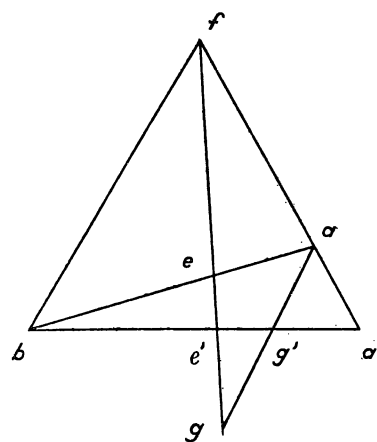


Fig. 24

n'est pas entre e et e' , joignons ga , cette droite coupe ba' en g' ; comme on le voit en appliquant l'axiome de Pasch au triangle $e'a'$ coupé par ga ; mais g' appartient à l'espace, donc la droite $g'a$ appartient à l'espace, donc g aussi.

Supposons maintenant que b soit entre e et a ; pour un point g situé entre e et f , on joint ga qui coupe fb en un point g' , la droite ag' fait partie de l'espace, donc g aussi ; pour un point g non situé entre e et f on joint bg qui coupe af en un point g' et on raisonne comme ci-dessus (fig. 25).

3.^o *Conséquence : Tout plan passant par une arête et un point quelconque de l'espace appartient à l'espace.*

Le plan passant par ab et un point e comprend en effet l'ensemble des points appartenant aux droites passant par a et coupant be entre b et e , ces droites appartiennent à l'espace, ainsi que leurs analogues tracées à partir de b , et il en est de même des droites passant par e et par un point situé entre a et b .

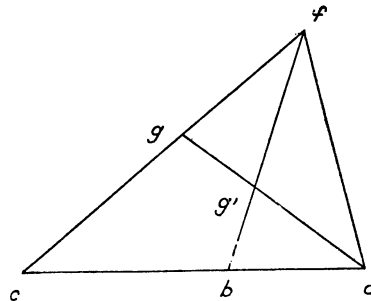


Fig. 25

4.^o *Toute droite joignant un point e d'une face bcd à un point f de l'espace appartient à l'espace.*

Il suffit d'examiner le cas où la droite be coupe cd en a' . Les droites $a'f$, bf , et ba' appartiennent à l'espace ; on peut raisonner alors comme en 2.^o.

5.^o *Conséquence : Tout plan passant par une droite ba' du plan bcd (avec a' entre c et d sur cd) et un point quelconque e de l'espace appartient à l'espace.*

Ce plan est en effet défini au moyen de droites passant par b ou a' , ou par des droites passant par e et un point f de ba' situé entre b et a' , et toutes ces droites appartiennent à l'espace.

6.^o *Soit e un point de l'espace non situé dans le plan bcd , les deux espaces $abcd = E$ et $ebcd = E'$ coïncident.*

Tout plan passant par cd et un point entre b et e appartient à E d'après 3.^o, ainsi que tout plan passant par eb et coupant cd entre c et d d'après 5.^o

La même conclusion vaut pour les autres plans définissant E' , donc E' est contenu dans E .

D'autre part si e est contenu dans AB le plan abe coupant cd en f entre c et d , a appartient au plan bef de E' , donc a appartient à E' ; si e appartient à CD , le plan ecd coupe ab en f' entre a et b , bf' appartient à E' ; donc a aussi. Enfin si e est dans l'un des plans abc , abd ou acd , il est immédiat que a appartient à E' .

De là suit, en raisonnant comme ci-dessus que E est contenu, dans E' , donc enfin, E est identique à E' .

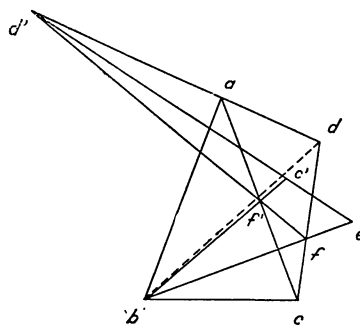


Fig. 26

7.° Conséquences :

α) Soit f un autre point de E , la droite ef appartient à E' , c'est-à-dire à E , donc :

Toute droite joignant deux points de l'espace appartient à l'espace.

β) On déduit immédiatement de là que :

Tout plan défini par trois points appartenant à l'espace appartient aussi à l'espace.

γ) Enfin, à partir de 6°, et en raisonnant comme au numéro 2 (5°), on voit que :

Etant donnés quatre points : a' , b' , c' , d' de E , non situés dans un même plan, ils définissent un espace identique à E .

8.° Deux plans de l'espace $abcd$ ayant un point commun, soit a , ont une droite commune.

Soient en effet, par exemple, abc et ade ses deux plans et supposons d'abord que e soit dans le plan bcd . Si e est tel que de coupe bc en f entre b et c , alors af est la droite commune aux deux plans.

Il suffit maintenant d'examiner le cas où be coupe cd en f entre c et d et où e n'est pas entre b et f . Supposons d'abord que f est entre b et e et soit d' un point de ad tel que a soit entre d et d' ; la droite

$d'f$ coupe ac en f' entre a et c , et f' est aussi entre d' et f (fig. 26); joignons alors bf' , cette droite coupe $d'e$ en e' qui est commun aux deux plans qui ont donc en commun la droite ae' .

Si b est entre f et e , la droite bc coupe de en e' qui est commun aux deux plans; donc l'intersection des deux plans est la droite ae' .

Si e n'est pas dans bcd , il suffit d'examiner le cas où ade ne coupe pas bc entre b et c . Si e est dans un plan bcd' avec d' entre a et d , on se ramène au cas précédent en considérant l'espace défini par a, b, c, d' ; on opère d'une façon analogue si e est dans un plan cdb' , avec b' entre a et b , ou dans un plan bdc' avec c' entre a et c .

Il ne reste donc plus à examiner que le cas où e est dans un plan abf , avec f entre c et d (ou dans un plan acg , avec g entre b et d ; ce qui donne lieu à des considérations analogues); si e dans abf est défini à partir de a ou de b , on revient au cas précédent, il suffit donc de supposer que ef coupe ab en b' entre a et b . Il suffit alors de considérer l'espace $ab'cd$ et de raisonner comme ci-dessus.

CONSEQUENCE : Tout plan coupe l'espace.

4. A partir de là, et par des considérations analogues, on peut construire, de proche en proche, des espaces de dimension de plus en plus élevée, après l'introduction d'axiomes de non-épuisement. Si, pour des raisons mathématiques ou physiques, on décide de s'en tenir, par exemple, à l'espace à trois dimensions, il faudra introduire un axiome d'épuisement.

