

SOBRE CLASIFICACIÓN E INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE TERCER ORDEN

POR

JUAN AUGÉ

RESUMEN: Se estudian las ecuaciones entre derivadas parciales de tercer orden con tres variables independientes y homogéneas respecto al orden de derivación; se establece una clasificación de las ecuaciones de aquel tipo atendiendo principalmente a las propiedades proyectivas y afines del cono característico correspondiente. Aplicando la teoría de los funcionales analíticos de FANTAPPIÈ se expresa mediante integrales de volumen la solución del problema de CAUCHY para el caso totalmente hiperbólico y real. (1)

ÍNDICE

	<u>Páginas</u>
Cap. I. <i>Envolventes de tercera clase.</i>	
1. Introducción.....	4
2. Envolventes de tercera clase y género uno.....	5
3. Curva puntual base de la envolvente.....	6
4. Clasificación de las envolventes \mathcal{E}	6
5. Relaciones entre las distintas clases de envolventes \mathcal{E}	10
6. Representación paramétrica.....	12
Cap. II. <i>Ecuaciones en derivadas parciales de tercer orden.</i>	
7. Generalidades.....	16
8. Clasificación.....	16
9. Condiciones iniciales.....	18
10. Introducción de operadores.....	19
11. Aplicación de funcionales analíticos.....	20

(1) Nuestra gratitud al Profesor L. FANTAPPIÈ, por sus enseñanzas e indicaciones que nos han conducido al estudio de los temas tratados en el presente trabajo.

Cap. III. <i>Expresión de la solución en el campo complejo.</i>	
12. Cálculo del producto funcional proyectivo.....	21
13. Cambio de variables.....	24
14. Estudio de las funciones $J_r(X, Y)$	26
15. Expresión de J en función elíptica.....	29
16. Interpretación geométrica.....	29
17. Puntos singulares de $1:J(X, Y)$	31
Cap. IV. <i>Paso al campo real.</i>	
18. Estudio de los términos Z_r	32
19. Ramificación de J para $Y = 0$	33
20. Ramificación de J para Y próximo a $Y = 0$	36
21. Ramificación de J en el caso general.....	38
22. Cálculo del sumatorio $\sum Z_r$	41
23. Estudio de la función salto $J_2^{-1} - J_1^{-1}$	43
Cap. V. <i>Fórmulas resolutivas.</i>	
24. Expresión de la solución mediante integrales de volumen....	45
25. Estudio del núcleo resolvente.....	48
26. Condiciones iniciales de tipo general.....	53

CAPÍTULO I

ENVOLVENTES DE TERCERA CLASE

1. **Introducción.** — En dos memorias publicadas en números precedentes de esta Revista ⁽¹⁾, se estudian dos tipos de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes y con tres variables independientes, que corresponden a los casos de cono característico racional de tercera clase y cuarto orden (CASULLERAS) y de cuarta clase y cuarto orden (TEIXIDOR). En el presente trabajo estudiamos otro tipo de ecuación

⁽¹⁾ J. CASULLERAS, Aplicación de la teoría de los funcionales analíticos a la resolución de un tipo de ecuaciones en derivadas parciales de tercer orden. *Collectanea Mathematica*, Vol. I, fasc. II (1948). J. TEIXIDOR, Resolución en términos finitos del problema de Cauchy para una familia de ecuaciones en derivadas parciales *Collectanea Mathematica*, Vol. III (1950).

ciones con cono característico de género 1 y, por tanto, no racional, y de tercera clase; el método empleado es el de aplicación de los funcionales analíticos de FANTAPPIÉ, igual que en las memorias citadas. No repetimos, por tanto, los conceptos que en la parte introductoria contienen aquellas memorias, en especial: *a)* reducción a forma homogénea de las ecuaciones en derivadas parciales; *b)* superficies características y cono característico; *c)* transformaciones proyectivas del cono característico y su relación con la transformación de la ecuación en derivadas parciales dada; *d)* ecuaciones canónicas para los diferentes tipos de conos característicos, y, finalmente, *e)* los conceptos y resultados contenidos en la memoria *L'Indicatrice proiettiva* del profesor L. FANTAPPIÉ ⁽¹⁾; supuestos conocidos estos preliminares, entramos en el estudio de las

2. **Envolventes de tercera clase y género uno.** — Designando por m la clase, n el orden, δ el número de nodos, k el de cúspides, τ el de tangentes dobles, i el de tangentes de inflexión, las fórmulas de PLÜCKER dan para estas envolventes los valores:

$$m = 3, \quad n = 6, \quad \delta = 0, \quad \tau = 0, \quad i = 0, \quad k = 9$$

Este es el único tipo de envolventes de tercera clase y género uno.

Las propiedades geométricas de estas envolventes son sobradamente conocidas, y pueden obtenerse tomando las propiedades correlativas de las de la cúbica plana. Repasemos a tal efecto las más importantes ⁽²⁾:

Necesario y suficiente para que dos envolventes sean proyectivamente equivalentes es que posean el mismo invariante absoluto; esta propiedad permite reducir por una transformación proyectiva real, cualquier envolvente con coeficientes reales, a la forma normal

$$\alpha^2 = 4\beta^3 - g_2\beta - g_3 \quad (2.1)$$

donde g_2, g_3 son cantidades reales. Llamaremos abreviadamente \mathcal{E} a estas envolventes. El invariante absoluto viene dado por

$$J_{\mathcal{E}} = \frac{g_2^3}{3^3 g_3^2}$$

⁽¹⁾ Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, T. XXII, 1943.

⁽²⁾ F. ENRIQUES-O. CHISINI. «La teoria elementare delle curve piane basata sulla polarità». De las «Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche», V. II, libro III, Cap. III.



Las envolventes de clase 3 y orden 4, estudiadas en la citada memoria de CASULLERAS, pueden también reducirse por una transformación proyectiva a la forma normal anterior (2.1), en la que, en este caso ha de ser forzosamente

$$J_{\mathcal{E}} = 1 \quad \delta \equiv 2^4 (g_2^3 - 3^3 g_3^2) = 0$$

es decir, en este caso se anula el discriminante del trinomio de tercer grado

$$\varphi(\beta) \equiv 4\beta^3 - g_2\beta - g_3$$

Como que este caso está estudiado con detalle en la memoria de CASULLERAS, supondremos, mientras no se advierta lo contrario, el discriminante anterior distinto de cero :

$$\delta \equiv 2^4 (g_2^3 - 3^3 g_3^2) \neq 0 \quad (2.2)$$

3. **Curva puntual base de la envolvente.** — La forma de la envolvente \mathcal{E} se aprecia mejor con el dibujo de la curva puntual correspondiente, cuya ecuación se obtiene eliminando α, β en el sistema :

$$\begin{cases} \alpha^2 = 4\beta^3 - g_2\beta - g_3 \\ \alpha x + \beta y + 1 = 0 \\ (12\beta^2 - g_2)x + 2\alpha y = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Hecha la eliminación se obtiene para la ecuación puntual

$$\begin{aligned} P(x, y) \equiv & 2^2 g_3 y^6 - g_2^2 x^2 y^4 + 2^3 \cdot 3^2 g_2 g_3 x^4 y^2 - \delta x^6 - 2^2 g_2 y^5 + \\ & + 2^4 \cdot 3^2 g_3 x^2 y^3 - 2^5 \cdot 3 g_2^2 x^4 y - 2^3 \cdot 3 \cdot 5 g_2^2 x^2 y^2 + 2^5 \cdot 3^3 g_3 x^4 + 2^4 y^3 + \\ & + 2^4 \cdot 3^3 x^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

La forma de esta curva se obtiene también fácilmente ⁽¹⁾ por correlación aplicada a las cúbicas planas ; debemos distinguir varios casos, según el signo de discriminante δ de $\varphi(\beta)$, y según el carácter real de los puntos impropios de $P(x, y) = 0$.

4. **Clasificación de las envolventes \mathcal{E} .** — Cuando el discriminante δ es positivo, $\varphi(\beta) = 0$ tiene tres raíces reales

$$e_1 > e_2 > e_3 ;$$

α será real sólo para

$$e_3 \leq \beta \leq e_2, \quad \beta \geq e_1$$

⁽¹⁾ KLEIN. «Entwicklung der Mathematik...»

lo que da dos haces continuos de tangentes, correlativos de los dos trozos continuos reales de la cúbica con óvalo, con lo que la curva $P = 0$ se compondrá de dos trozos continuos reales, ambos cerrados en el plano proyectivo; uno de ellos C_1 dotado de tres cúspides, de clase impar, es decir, por todo punto del plano (que no sea de C_1) pasan un número impar de tangentes al trozo C_1 ; el otro C_2 , de clase par, tiene un número par de tangentes que pasan por cualquier punto del plano no situado sobre C_2 .

Convendrá, además, tener en cuenta el carácter afín de la envolvente \mathcal{E} o la curva $P = 0$; los puntos de intersección reales con la recta impropia $z = 0$, vienen dados por la ecuación (3.2) con $z = 0$:

$$2^2 g_3 y^6 - g_2^2 x^2 y^4 + 2^3 \cdot 3^2 g_2 g_3 x^4 y^2 - \delta x^6 = 0 \quad (4.1)$$

pero el carácter real o imaginario de estos puntos se descubre mejor por correlación, estudiando el carácter de las tangentes trazadas desde el origen a la cúbica correlativa

$$x^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 \quad (4.2)$$

así se ve qué condición necesaria y suficiente para que las tangentes trazadas desde el origen sean todas imaginarias es que aquel punto esté en el interior del óvalo de la cúbica, es decir $y = 0$, esté entre e_2 y e_3 ; en efecto, para cualquier punto exterior al óvalo hay siempre dos tangentes reales al contorno del mismo; y para todo punto interior al óvalo, todas las tangentes que pasan por él son imaginarias, porque el óvalo queda situado en el ángulo opuesto por el vértice del que forman las tangentes de inflexión que limitan la región de puntos por los que pasan tangentes reales al trozo impar (fig. 1) ⁽¹⁾; por tanto, *necesario y suficiente para que las tangentes sean imaginarias es que*

$$e_3 < 0 < e_2$$

lo que en virtud de la relación

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

equivale a la condición

$$e_1 e_2 e_3 = \frac{g_3}{4} < 0 \quad (4.3);$$

por correlación se obtienen los dos casos posibles para las envolventes \mathcal{E} :

⁽¹⁾ En caso contrario habría rectas que cortarían a la cúbica en cinco puntos lo que es absurdo.

Si $g_3 < 0$, los puntos impropios de $P = 0$ son todos imaginarios; si $g_3 \geq 0$ existen entonces puntos reales impropios de aquella curva.

Cuando δ es negativo, $\varphi(\beta) = 0$ tiene una raíz real e_1 y dos imaginarias conjugadas, α será real tan sólo para $\beta > e_1$, lo que da tan sólo un haz continuo de tangentes reales, correlativo del trozo real de la parábola campaniforme sin óvalo; este haz de tangentes C_1 , es de clase impar y está dotado de tres cúspides reales; el otro haz C_2 del caso anterior $\delta > 0$ es ahora imaginario, si es que se permite este modo de expresión.

Para estudiar el carácter afín de la envolvente \mathcal{E} en este caso $\delta < 0$, veamos por correlación el caso en que la cúbica campaniforme sin óvalo

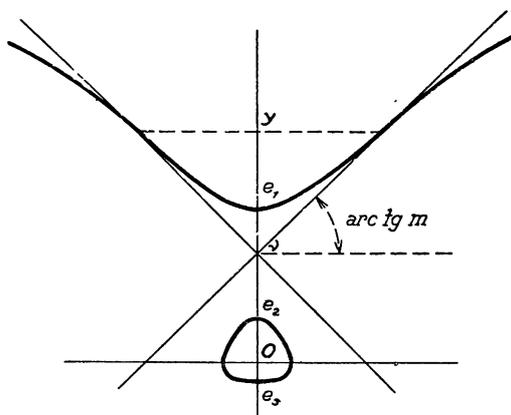


Fig. I

tiene todas las tangentes que pasan por el origen imaginarias; entonces para la ecuación (4.2) los puntos del eje y , desde los cuales, todas las tangentes trazadas a la cúbica son imaginarias, son los situados debajo del punto μ de intersección con las tangentes de inflexión reales de la cúbica; para obtener el valor ν de y , cortemos la cúbica por un par de rectas simétricas respecto al eje y :

$$\left. \begin{aligned} (y - n)^2 - m^2 x^2 &= 0 \\ x^2 &= 4y^3 - g_2 y - g_3 \end{aligned} \right\}$$

eliminando x en este sistema, la ecuación en y obtenida ha de tener una raíz triple, lo que obliga a

$$\left. \begin{aligned} (y - n)^2 - m^2 (4y^3 - g_2 y - g_3) &= 0 \\ 2(y - n) - m^2 (12y^2 - g_2) &= 0 \\ 2 - 24m^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

este sistema de ecuaciones liga, la ordenada y del punto de contacto de las tangentes de inflexión, la n de intersección de éstas con el eje y , y la pendiente m^2 de las mismas. Pero para nuestro objeto sólo nos interesa la n de aquella solución de (4.4) para la que y , n , sean reales, m^2 positivo. Eliminando y , n en (4.4), puede escribirse aquel sistema en la forma equivalente :

$$\left. \begin{aligned} 2^4 \cdot 3^3 g_2^2 m^8 + 2^6 \cdot 3^3 g_3 m^6 + 2^3 \cdot 3^2 g_2 m^4 - 1 &= 0 \\ 2^2 \cdot 3 g_2 m^4 - 2^3 \cdot 3 m^2 n + 1 &= 0 \\ 2^2 \cdot 3 m^2 y &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Por la naturaleza de la cúbica en estudio, sabemos que este sistema sólo puede admitir una solución (m^2, n, y) con m^2 positivo, n , y reales. Las otras soluciones se refieren a las tangentes de inflexión restantes que siempre son imaginarias. De aquí, que la *condición para que las tangentes a la cúbica desde el origen sean todas imaginarias es que*

$$v = \frac{1 + 2^2 \cdot 3 g_2 \mu^2}{2^3 \cdot 3 \mu} > 0 \quad (4.6)$$

donde μ es la única raíz positiva de la ecuación

$$2^4 \cdot 3^3 g_2^2 \mu^4 + 2^6 \cdot 3^3 g_3 \mu^3 + 2^3 \cdot 3^2 g_2 \mu^2 - 1 = 0 \quad (4.7)$$

El que esta ecuación tiene que tener exactamente una raíz positiva se deduce de la naturaleza del sistema (4.5) : a cada raíz positiva de (4.7) corresponde un par de tangentes de inflexión, reales según (4.5) ; como que sólo hay uno de tales pares, lo mismo puede decirse de las raíces positivas de (4.7).

Correlativamente : *necesario y suficiente para que la curva puntual $P = 0$, tenga todos los puntos impropios imaginarios es que se verifique la condición (4.6).*

En resumen, obtenemos la siguiente clasificación afín de las envolventes \mathcal{E} , con coeficientes reales :

A) Completamente reales sin puntos impropios, cuando

$$\delta > 0, \quad g_3 < 0 ;$$

B) Completamente reales con puntos impropios, si

$$\delta > 0, \quad g_3 \geq 0 ;$$

C) Semirreales sin puntos impropios, cuando

$$\delta < 0, \quad \nu > 0;$$

D) Semirreales con puntos impropios, si

$$\delta < 0, \quad \nu \leq 0,$$

y añadamos para mejor completar la clasificación, aunque se trate de un caso excluido por nosotros.

E) Con tangente doble, cuando

$$\delta = 0.$$

La condición (4.6) que distingue las clases C) D), puede transformarse para ponerla directamente en función de los coeficientes g_2, g_3 . La condición (4.6), puesto que μ es esencialmente positivo, puede sustituirse por la

$$1 + 2^2 \cdot 3 g_2 \mu^2 > 0 \quad (4.8)$$

si $g_2 \geq 0$, esta condición se cumple efectivamente; si $g_2 < 0$, podemos escribirla

$$-2^2 \cdot 3 g_2 \mu^2 < 1 \quad \text{o bien} \quad \mu < \sqrt{-\frac{1}{2^2 \cdot 3 g_2}}$$

necesario y suficiente para que así ocurra es que el polinomio de (4.7) tome valor positivo para

$$\mu = \sqrt{-\frac{1}{2^2 \cdot 3 g_2}}$$

Obtenemos la condición:

$$2^2 3^3 g_3^2 + g_2^3 > 0 \quad (4.9)$$

condición que también se satisface en el caso antes considerado $g_2 \geq 0$; podemos, pues, concluir:

En la clasificación de los envolventes \mathcal{E} podemos tomar

$$\nu \equiv 2^2 3^3 g_3^2 + g_2^3$$

5. **Relaciones entre las distintas clases de envolventes \mathcal{E} .** — Hemos efectuado la clasificación de las envolventes \mathcal{E} atendiendo a dos propiedades: la primera de carácter proyectivo cual es el signo del discri-

minante, la segunda de carácter afín cual es el signo del coeficiente g_3 . Sin embargo, no quiere esto decir que todas las envolventes de una misma clase puedan obtenerse una de otra por una afinidad, ni siquiera por una proyectividad; en realidad, una clase se distingue de la otra por ciertas propiedades topológicas intrínsecas o relativas a la recta impropia. De hecho *las cuatro clases abarcan envolventes distintas desde el punto de vista proyectivo real*; esta circunstancia se aprecia mejor cuando se refieren las condiciones que definen cada clase al invariante absoluto de la envolvente $J_{\mathcal{E}}$; la condición

$$\delta \equiv 2^4 (g_2^3 - 3^3 g_3^2) > 0$$

puede, en efecto, escribirse:

$$J_{\mathcal{E}} > 1$$

y la (4.9) puede, asimismo, ponerse en la forma:

$$J_{\mathcal{E}} > -4$$

con lo cual las clases C), D), son distintas entre sí y de las clases A) y B) proyectivamente, por corresponderles valores distintos del invariante absoluto, y ser, por tanto, imposible transformar una envolvente de una de tales clases en otra de otra clase por una transformación proyectiva; pero el invariante absoluto $J_{\mathcal{E}}$ no distingue entre sí las clases A), B), y es que efectivamente por una transformación proyectiva compleja se pasa de una a otra; basta hacer, por ejemplo:

$$\alpha = i\bar{\alpha} \quad \beta = -\bar{\beta} \quad (5.1)$$

y se cambia el signo de g_3 , con lo que la clase B) de envolventes E se confunde con la A), exceptuando el caso $g_3 = 0$. Este caso es un caso límite, no caracterizado por completo como el tránsito entre las clases A) y B); basta observar que el invariante absoluto $J_{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$ para $g_3 \rightarrow 0$, y por tanto, $g_3 = 0$ puede también ser caso límite de las clases D) o E).

La proyectividad (5.1) que reduce la clase B) a la A) es imaginaria; no existe, en cambio, como es conocido en la teoría de las cúbicas planas, ninguna proyectividad real que relacione ambas clases, por no existir ninguna que altere el signo de g_3 . Con esto queda perfectamente clara la distinción entre las cuatro clases de envolventes \mathcal{E} . Una clasificación acurada, quizá obligaría a desdoblarse alguna de nuestras clases, sepa-

rando los casos límites y distinguiendo el número de puntos impropios reales que aparecen ; pero la que hemos dado nos basta para el presente trabajo que sólo pretende un esbozo de clasificación para dedicar una atención preferente a la clase A), que es el caso que estudiamos con detalle ; se harán tan sólo referencias incidentales a las restantes clases, y en todo caso habrá que tener presente que la transformación (5.1) permite transformar la clase B) en casi toda su totalidad en la clase A), (único caso de excepción $g_3 = 0$).

6. **Representación paramétrica.** — Las propiedades de las envolventes \mathcal{E} y de la curva puntual asociada $P(x, y) = 0$, se estudian fácilmente utilizando la representación paramétrica conocida

$$\alpha = p' \lambda \qquad \beta = p \lambda \qquad (6.1)$$

Las ecuaciones de la curva puntual se obtienen despejando x, y , del sistema

$$\left. \begin{aligned} xp' \lambda + yp \lambda + 1 &= 0 \\ xp'' \lambda + yp' \lambda &= 0 \end{aligned} \right\}$$

lo que nos da la representación paramétrica de la curva :

$$x = \frac{-p' \lambda}{p'^2 \lambda - p'' \lambda p \lambda} \qquad y = \frac{p'' \lambda}{p'^2 \lambda - p'' \lambda p \lambda} \qquad (6.2)$$

o bien escribiendo ambas funciones elípticas en la forma canónica

$$x = \frac{p' \lambda}{2 p^3 \lambda + \frac{g_2}{2} p \lambda + g_3}, \qquad y = \frac{\frac{g_2}{2} - 6 p^2 \lambda}{2 p^3 \lambda + \frac{g_2}{2} p \lambda + g_3} \qquad (6.3)$$

Estas funciones elípticas tienen todas ellas períodos comunes w, w' , que pueden calcularse en forma conocida a partir de los invariantes g_2, g_3 . En el caso particular de envolventes de la clase A), pueden suponerse w real y w' imaginario puro dados por las fórmulas :

$$w = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}, \qquad w' = \int_{e_3}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \qquad (6.4)$$

Para obtener los valores de λ de un paralelogramo de períodos para los que α, β, x, y , son todos reales, basta con ver los que dan valores

reales a las funciones $p\lambda$, $p'\lambda$. Supuesto $\delta > 0$ la primera es real sobre el contorno de un rectángulo de lados coincidentes con los semiperíodos, y la segunda lo es tan sólo en los lados horizontales de tales rectángulos; ambas son, pues, reales cuando λ se mueve sobre el haz de paralelas al eje real distantes un múltiplo $k w'$. Se aprecia bien en este caso que la curva o la envolvente han de estar divididas en dos continuos distintos, que corresponden a los dos segmentos

$$(0, 2w) \quad (w', 2w + w')$$

situados dentro de un mismo paralelogramo de períodos. En el caso $\delta < 0$, los períodos real e imaginario puro no son primitivos, pero se pueden elegir dos períodos primitivos imaginarios conjugados, y $p\lambda$ es real sobre las paralelas a los ejes real e imaginario, las primeras a distancias $w + w'$ cada una de la siguiente, y las segundas a distancia $w - w'$, mientras que $p'\lambda$ sólo es real en las rectas horizontales de aquel cuadro; se deduce que dentro de un paralelogramo de períodos serán las dos reales tan sólo en el segmento $(0, 2(w + w'))$, y, por tanto, la curva y la envolvente correspondientes sólo tendrán un continuo real.

Los puntos impropios de la curva puntual $P(x, y) = 0$ serán los que correspondan a valores de λ raíces de la ecuación

$$p'^2 \lambda - p'' \lambda p \lambda = 0 \quad (6.5)$$

que puede también escribirse en la forma

$$4 p^3 \lambda + g_2 p \lambda + 2 g_3 = 0 \quad (6.6)$$

Esta ecuación tendrá sus raíces reales cuando el discriminante de la ecuación en $p\lambda$ sea positivo o nulo y supuesto $\delta < 0$ sólo en aquel caso, por la distribución de los valores de λ que dan puntos reales; se obtiene así la condición

$$2^4 (-g_2^3 - 2^2 3^3 g_3^2) \geq 0$$

condición que coincide con la $\nu \leq 0$ utilizada en la clasificación de las envolventes \mathcal{E} .

Los valores de λ a los que corresponden puntos y tangentes de retroceso se obtienen buscando los puntos en que se cortan tres tangentes infinitamente próximas del haz (6.1); estamos conducidos a resolver el sistema

$$\left. \begin{aligned} x p' \lambda + y p \lambda + 1 &= 0 \\ x p'' \lambda + y p' \lambda &= 0 \\ x p''' \lambda + y p'' \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

lo que obliga a λ a satisfacer a la ecuación

$$p''^2 \lambda - p' \lambda p''' \lambda = 0 \quad (6.8)$$

ecuación que tiene ocho raíces por ser el primer miembro una función elíptica con un solo polo de orden octavo en el paralelogramo de períodos ; el teorema de ABEL permite la resolución completa de la ecuación (6.8) ; para cada sistema de valores de x, y , el primer miembro $xp' \lambda + yp \lambda + 1$ de la primera ecuación del sistema (6.7) define una función elíptica con un polo de tercer orden en los vértices de la red de períodos ; luego, si llamamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, los ceros de esta función

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2mw + 2m'w'$$

donde m, m' son números enteros ; cuando x, y sean tales que aquella función posea un cero triple λ_1 , éste deberá satisfacer a la relación

$$3\lambda_1 = 2mw + 2m'w'$$

lo que nos da como valores posibles para λ_1 , y, por tanto, raíces de la ecuación (6.8) los siguientes :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}w, \frac{4}{3}w, \frac{2}{3}w', \frac{4}{3}w', \frac{2}{3}w + \frac{2}{3}w', \\ \frac{4}{3}w + \frac{2}{3}w', \frac{2}{3}w + \frac{4}{3}w', \frac{4}{3}w + \frac{4}{3}w', \end{aligned} \quad (6.9)$$

valores que dan los puntos y tangentes de retroceso. Los dos primeros son los únicos que dan valores reales para las coordenadas del punto y las de la tangente ; ambos dan el mismo valor para y , ordenada del punto de retroceso, según (6.3) y las propiedades de realidad de $p\lambda$. Es la ordenada de un par de puntos de retroceso simétricos respecto al eje y , de acuerdo con la simetría de la curva. Los valores $\frac{2}{3}w', \frac{4}{3}w'$ dan también un mismo valor real para y , y dos imaginarios puros conjugados para x . Análogamente los $\frac{2}{3}w + \frac{2}{3}w', \frac{4}{3}w + \frac{4}{3}w'$, dan el mismo valor para $p\lambda$ por ser simétricos respecto al centro del paralelogramo de períodos, y, por tanto, el mismo valor z_1 para y ; los valores $\frac{2}{3}w + \frac{4}{3}w', \frac{4}{3}w + \frac{4}{3}w'$, que son salvo un período imaginarios conjugados de

los anteriores darán como valor para y el conjugado \bar{z}_1 . Además, forzosamente $z_1 \neq \bar{z}_1$, con lo que ambos valores no pueden ser reales, porque en caso contrario sobre la recta $y = z_1$, existirían cuatro puntos de retroceso, cosa imposible para una curva de sexto orden. En definitiva :

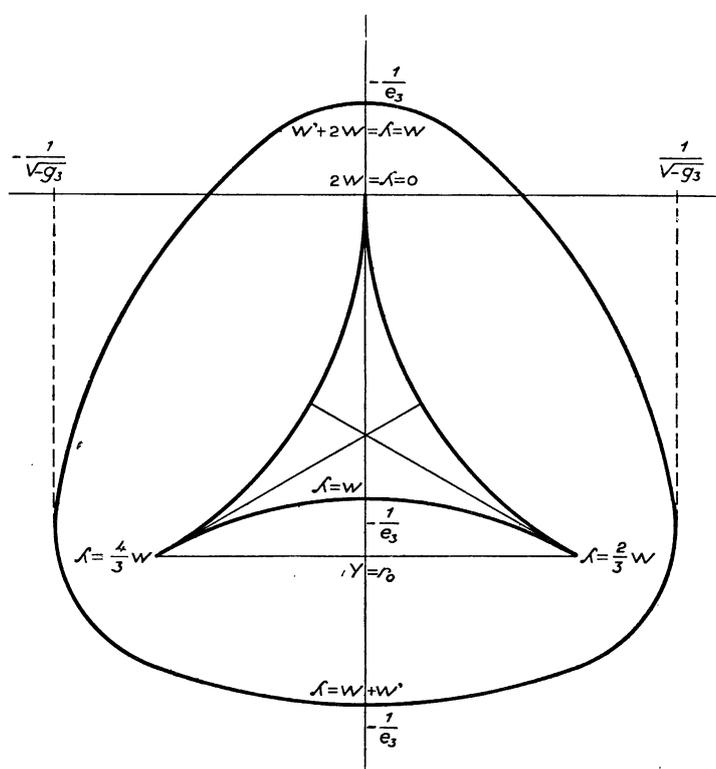


Fig. II

Además del origen, la curva $P(x, y) = 0$, sólo posee dos puntos de retroceso reales, y otros dos imaginarios, pero con ordenada común real $(\lambda = \frac{2}{3} w', \frac{4}{3} w')$, y los cuatro restantes tienen todos ordenada imaginaria.

Las propiedades de la envolvente \mathcal{E} en el caso A) pueden resumirse en el dibujo de la curva $P(x, y) = 0$ (fig. II).

CAPÍTULO II

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE TERCER ORDEN

7. **Generalidades.** — Estudiamos las ecuaciones en derivadas parciales de tercer orden lineales, homogéneas respecto al orden de derivación y con coeficientes constantes ; pueden, pues, escribirse en la forma :

$$\sum_{r,s=0}^3 a_{rs} \frac{\partial^3 u}{\partial x^r \partial y^s \partial t^{3-r-s}} = f(t, x, y) \quad (7.1)$$

A ellas se puede reconducir cualquier ecuación entre derivadas parciales de tercer orden con dos variables independientes ; y una de ellas queda determinada al fijar la envolvente tangencial sección del cono característico con vértice en un punto cualquiera del espacio con el plano impropio :

$$\sum_{r,s=0}^3 a_{rs} \alpha^r \beta^s = 0 \quad (7.2)$$

Una transformación afín (es decir, lineal homogénea) de las variables independientes de nuestra ecuación (7.1), induce la transformación proyectiva tangencial de la envolvente (7.2) ; reduciendo la ecuación (7.2) a la forma canónica (2.1), la ecuación (7.1) adopta con el cambio de variables asociado la forma canónica :

$$g_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + g_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - 4 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = f(t, x, y) \quad (7.3)$$

El estudio de las ecuaciones de tercer orden puede, pues, reducirse al de las formas canónicas resumidas en la expresión (7.3). Para tener en cuenta el punto de vista real, supondremos que en esta ecuación los coeficientes g_2, g_3 , son reales, dado que la reducción de la envolvente (7.2) a la (2.1) como se ha advertido, puede siempre efectuarse en el campo real.

8. **Clasificación.** — Las distintas clases de envolventes \mathcal{E} establecidas en el n.º 4, dan lugar a otras tantas clases de ecuaciones en derivadas parciales de la forma (7.3) ; y cada una de las clases obtenidas, contiene ecuaciones diferenciales con propiedades distintas.

Si la envolvente \mathcal{E} asociada es de la clase A), la ecuación (7.3) aparece como una de las llamadas totalmente hiperbólicas ⁽¹⁾; en efecto, con un cambio de variables proyectivo siempre se puede conseguir que en las nuevas variables $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ se pueda destacar una de ellas, por ejemplo, $\bar{\alpha}$, de manera que para cualquier valor de la misma $\bar{\alpha} = c = \text{constante}$, la ecuación en $\bar{\beta}$ obtenida tenga todas sus raíces reales; lo que equivale a la existencia de una recta tal, que en todos sus puntos, las tangentes trazadas a la envolvente son todas reales: puede, en nuestro caso (2.1), tomarse la recta impropia del plano. La envolvente tiene, además, en este caso todos los puntos impropios imaginarios, es decir, la curva puntual correspondiente, tiene todos sus puntos a distancia finita. Este es el caso estudiado con detalle en el presente trabajo.

El caso en que la envolvente \mathcal{E} asociada es de la clase B), la ecuación en derivadas parciales (7.3) es también totalmente hiperbólica, pero la recta impropia no es lugar de puntos con todas las tangentes a la envolvente reales, con lo que la curva puntual de \mathcal{E} tiene puntos impropios; por lo demás, este caso se reduce al anterior por el cambio de variables complejo.

$$\bar{x} = ix, \quad \bar{y} = -y \quad (8.1)$$

asociado a la transformación (5.1); para no salir del campo real se puede conseguir que la curva puntual tenga todos sus puntos impropios imaginarios, cambiando la recta del infinito por la transformación

$$\beta = \bar{\beta} + b \quad (8.2)$$

asociada de la

$$\bar{t} = t + by \quad (8.3)$$

y eligiendo el valor de b convenientemente; los razonamientos que se efectúen para la clase A), valen también para este caso teniendo en cuenta el cambio (8.2); en particular, las representaciones paramétricas (6.1), (6.2) deben sustituirse en este caso por las

$$\alpha = p'\lambda, \quad \bar{\beta} = p\lambda - b, \quad (8.4)$$

$$x = \frac{-p'\lambda}{p'^2\lambda - p''\lambda(p\lambda - b)}, \quad y = \frac{p''\lambda}{p'^2\lambda - p''\lambda(p\lambda - b)} \quad (8.5)$$

Las ecuaciones (7.3) correspondientes a las clases C) y D), dan problemas de ecuaciones diferenciales que no pertenecen propiamente ni

⁽¹⁾ COURANT u. HILBERT, Methoden der Mathematische Physik, II, cap. III § 4.

al tipo hiperbólico ni al elíptico sin que sean tampoco casos de degeneración o parabólicos ; pero el objeto de este trabajo es fijar la atención al caso totalmente hiperbólico por lo que dejamos el estudio de los casos correspondientes a estos tipos de envolventes. Evitamos con esto la aparición de soluciones imaginarias como se descubre en el transcurso del presente trabajo.

9. Condiciones iniciales. — Nos proponemos resolver el problema hiperbólico para ecuaciones del tipo (7.3) pertenecientes a la clase A). Las condiciones iniciales para este tipo de problemas suelen plantearse

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)_\Gamma = \varphi_k(t, x, y), \quad k = 0, 1, 2, \quad (9.1)$$

donde Γ es una superficie no característica de ecuación

$$t - \psi(x, y) = 0 \quad (9.1')$$

Siempre podemos suponer que las funciones φ_k son las tres idénticamente nulas ; en efecto, hallada una función cualquiera $\Phi(t, x, y)$ que satisfaga a las condiciones (9.1) aún sin ser solución de la ecuación (7.3) (1), con el cambio de función

$$u = v + \Phi$$

no se altera la forma de nuestra ecuación (7.3), de la que cambia tan sólo el segundo miembro, y, en cambio, las condiciones iniciales (9.1) quedan en la forma apetecida

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)_\Gamma = 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad (9.2)$$

Es fácil la determinación de una tal función Φ , sirviéndose de un cambio de variables que transforme Γ en un plano ; supondremos, pues, de ahora en adelante reducidas las condiciones iniciales a la forma simple (9.2). Con esto nuestro problema queda reducido al siguiente :

(1) La construcción de Φ no ofrece dificultad : si $t = \psi(x, y)$ es la ecuación de la superficie Γ , hagamos el cambio de variables

$$\bar{t} = t - \psi(x, y), \quad x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}$$

La función $\varphi_k(t, x, y) \rightarrow \bar{\varphi}_k(\bar{x}, \bar{y})$, y la función $\Phi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ será, por ejemplo:

$$\Phi = \bar{\varphi}_0(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{t} \bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\bar{t}^2}{1} \bar{\varphi}_2(\bar{x}, \bar{y})$$

y deshaciendo el cambio se obtiene una función con las condiciones exigidas.

Buscar la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$g_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + g_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial y} - 4 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = f(t, x, y) \quad (9.3)$$

que satisfaga a las condiciones iniciales (9.2)

10. Introducción de operadores. — Apliquemos tres veces consecutivas a la ecuación (9.3) el operador

$$I f(t, x, y) = \int_{\psi}^t f(t, x, y) dt$$

con lo que la ecuación (9.3) y las condiciones iniciales (9.2) se resumen en

$$g_3 u + I^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g_2 I \frac{\partial u}{\partial y} - 4 I^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = I^3 f(t, x, y) \quad (10.1)$$

Introduciendo los operadores

$$B_1 f(t, x, y) = I \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, y), \quad B_2 f = I \frac{\partial f}{\partial y}$$

la ecuación (10.1) puede escribirse ⁽¹⁾

$$g_3 u + B_1^2 u + g_2 B_2 u - 4 B_2^3 u = I^3 f(t, x, y) \quad (10.2)$$

y, recíprocamente, haciendo $t = \psi$ en (10.2) y en las ecuaciones obtenidas derivándola una y dos veces respecto t , se observa que toda solución de (10.2) satisface a (9.2), y derivándola tres veces, se ve también que se satisfará la (9.3). La ecuación integro diferencial (10.2) es, pues, equivalente al conjunto de la ecuación en derivadas parciales (9.3) y las condiciones iniciales (9.2).

La ecuación (10.2) puede escribirse

$$(g_3 + B_1^2 + g_2 B_2 - 4 B_2^3) u = I^3 f(t, x, y) \quad (10.3)$$

y el problema de buscar la solución existente y, única por los teoremas de CAUCHY se reduce al de obtener el operador inverso del que figura en el primer miembro, expresándose la solución por

$$u(t, x, y) = \frac{1}{g(B_1, B_2)} F(t, x, y) \equiv \frac{I}{g_3 + g_2 B_2 + B_1^2 - 4 B_2^3} I^2 f(t, x, y) \quad (10.4)$$

⁽¹⁾ Los operadores I , B_1 , B_2 han sido introducidos por FANTAPPIÉ, y puede hacerse el estudio de sus propiedades en « Risoluzione in termini finiti del problema di CAUCHY ». Rend. R. Acc. d'Italia, s. 7, vol. II, 1941. Recordemos expresamente la propiedad de ser permutables entre sí.

La existencia y sentido que hay que dar a los operadores funciones racionales de I, B_1, B_2 , ha sido establecido por FANTAPPIÉ⁽¹⁾, y nos limitaremos a esbozar las operaciones que deben efectuarse para obtener la función transformada de la $F(t, x, y)$ por el operador (10.4).

11. Aplicación de Funcionales Analíticos. — La función $u(t, x, y)$, solución de nuestro problema, se puede considerar como un funcional analítico lineal mixto de la función $g(B_1, B_2)$ que figura en (10.4)

$$u(t, x, y) = F[g(B_1, B_2)] = F\left[\frac{1}{g_3 + g_2 B_2 - 4 B_2^3 + B_1^2}\right] \quad (11.1)$$

llamando $p(B_1, B_2, t, x, y)$ a la indicatriz proyectiva del funcional F , la solución de nuestra ecuación vendrá dada por

$$u(t, x, y) = \frac{\frac{\Delta}{1}}{g_3 + g_2 B_2 - 4 B_2^3 + B_1^2} p\left(\frac{\Delta}{B_1, B_2}, t, x, y\right) \quad (11.2)$$

La indicatriz proyectiva $p(B_1, B_2, t, x, y)$ se obtendrá calculando F para la sencilla función

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 B_2 + \alpha_2 B_2}$$

con lo que deberá satisfacerse la relación

$$p(\alpha_3, \alpha_2, t, x, y) = \frac{1}{1 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2} I^3 f(t, x, y) \quad (11.3)$$

Apliquemos a los dos miembros (de 11.3) el operador $1 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$, derivando seguidamente respecto a t , y obtendremos:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial y} = I^2 f(t, x, y) \quad (11.4)$$

luego p ha de ser solución de esta ecuación entre derivadas parciales de primer orden; asimismo aplicando a (11.3) el mismo operador de antes y haciendo ahora $t = 0$, se obtiene

$$p(0, x, y) = 0 \quad (11.5)$$

(1) FANTAPPIÉ. L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi. Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, T. XXII, 1943. Véanse también las citadas memorias de CASULLERAS y TEIXIDOR.

condición inicial que unida a la (11·4) determina completamente la función $p(x_1, x_2, t, x, y)$ ⁽¹⁾.

Conocida la función p , el problema que nos hemos propuesto queda reconducido al del cálculo del producto funcional proyectivo (11·2) en el que por comodidad consideraremos como indicatriz la función primer factor en vez de la p , lo que puede efectuarse en virtud de la simetría de dicho producto. Pero por ser el primer factor función racional en las variables del producto B_1, B_2 , será la indicatriz proyectiva de un funcional de tipo abeloide, y el cálculo con tales funcionales ha sido estudiado en la citada memoria I. P., cuyos resultados para comodidad del lector trasladaremos al problema que nos ocupa.

CAPÍTULO III

EXPRESIÓN DE LA SOLUCIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO

12. **Cálculo del producto funcional proyectivo.** — El producto funcional proyectivo (11·2) lo escribiremos abreviadamente

$$u(t, x, y) = \left\{ \frac{\overset{\Delta}{1}}{Q(\alpha, \beta)} \right\} p(\overset{\Delta}{\alpha}, \overset{\Delta}{\beta}, t, x, y) \quad (12.1)$$

en donde hemos llamado para abreviar

$$Q(\alpha, \beta) \equiv g_3 + g_2\beta - 4\beta^3 + \alpha^2 \quad (12.2)$$

alterando por comodidad el nombre de las variables sobre las que se efectúa el producto funcional proyectivo.

⁽¹⁾ También puede obtenerse la función indicatriz p , observando que el operador $\frac{\partial}{\partial t}(1 + \alpha B_1 + \alpha_2 B_2)$ significa simplemente la derivación según la dirección de la recta que tiene por cosenos directores $1, \alpha_1, \alpha_2$; luego, el operador inverso

$$\frac{I}{1 + \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2}$$

significará la integración según la dirección de aquella recta.

También puede obtenerse dicha función como media proyectiva de la $I^2 f(t, x, y)$ entre los puntos $(\alpha_1, \alpha_2), (x, y)$. Véase I. P., números 17, 18.

El producto (12.1) viene dado por la fórmula

$$u = \left\{ \frac{1}{Q} \right\}^{\Delta} p = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{c_1} d\alpha \int_{c_2} d\beta \int_0^1 \frac{d\tau}{\alpha\beta} \frac{1}{Q\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\tau-1}{\beta}\right)} z(\alpha, \beta, t, x, y) \quad (12.3)$$

en donde:

a) $z(\alpha, \beta, t, x, y)$ se obtiene como media proyectiva de la función $p(\alpha, \beta, t, x, y)$, y puede expresarse por la fórmula:

$$z(\alpha, \beta, t, x, y) = \frac{\partial}{\partial \lambda_{\lambda=1}} [\lambda p(\alpha \lambda, \beta \lambda, t, x, y)] = p + \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial p}{\partial \beta} \quad (12.4)$$

b) C_1, C_2 son curvas cerradas de los planos complejos de variación de α, β , respectivamente, que envuelven en su interior para cada valor de las restantes variables, los puntos singulares de la función $1:Q$, dejando al exterior los de la función z o de la u , puesto que la derivación (12.4) no altera la posición de los puntos singulares.

c) τ varía en su plano entre los puntos 0 y 1 siguiendo un camino fijo que dé sentido a la integral.

Resulta así (12.3) una integral triple extendida a cierta variedad tridimensional del espacio complejo con tres variables, en la que las variables de integración se mueven con independencia unas de otras y pueden, por tanto, efectuarse en cualquier orden las tres operaciones de integración que en ella figuran.

En la expresión (12.3) de $u(t, x, y)$ podemos proceder a efectuar una integración, por ejemplo, respecto β , por la teoría de residuos; los puntos singulares del integrando, serán los ceros del denominador.

$$\beta Q\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\tau-1}{\beta}\right) = 0 \quad (12.5)$$

ecuación que compararemos con la

$$Q(\alpha, \beta) = 0$$

cuyas tres raíces designaremos por $\beta_r(\alpha)$, $r = 1, 2, 3$.

La ecuación (12.5) tendrá entonces por raíces, además de la $\beta = 0$, las

$$\frac{\tau-1}{\beta} = \beta_r \left(-\frac{\tau}{\alpha}\right) \quad r = 1, 2, 3 \quad (12.6)$$

Haciendo ahora la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{1}{Q(\alpha, \beta)} = \frac{A_1}{\beta - \beta_1(\alpha)} + \frac{A_2}{\beta - \beta_2(\alpha)} + \frac{A_3}{\beta - \beta_3(\alpha)} \quad (12.7)$$

donde

$$A_r = \frac{1}{Q'_\beta(\alpha, \beta_r(\alpha))},$$

se obtiene inmediatamente la de

$$\frac{1}{Q\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \frac{\tau-1}{\beta}\right)} = \sum_1^3 \frac{1}{\left[\frac{\tau-1}{\beta} - \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right] Q'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad (12.8)$$

y sustituyendo esta expresión en (12.3)

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_0^1 d\tau \sum_1^3 \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{z(\alpha, \beta, t, x, y) d\beta}{\left[\tau-1 - \beta\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right] Q'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad (12.9)$$

ya la integración respecto β , puede ya efectuarse obteniendo:

$$u(t, x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_0^1 d\tau \sum_1^3 \frac{z\left(\alpha, \frac{\tau-1}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)}, t, x, y\right)}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right) Q'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad (12.10)$$

fórmula que escribiremos abreviadamente

$$u = \sum_1^3 Z_r \quad (12.11)$$

llamando

$$Z_r = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_0^1 d\tau \frac{z\left(\alpha, \frac{\tau-1}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)}, t, x, y\right)}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right) Q'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad (12.12)$$

La fórmula (12.11) que da la solución $u(t, x, y)$ de nuestro problema, tiene la forma de una suma de tres integrales, que se distinguen porque en el integrando figura la función, distinta para cada sumando:

$$\frac{z\left(\alpha, \frac{\tau-1}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)}, t, x, y\right)}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right) Q'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad r = 1, 2, 3, \quad (12.13)$$

Estas tres funciones pueden considerarse como las tres ramas de una función uniforme sobre la superficie de RIEMANN R correspondiente a la función algebraica $\beta(\alpha)$ definida por la ecuación

$$Q(\alpha\beta) = 0$$

Para cada valor de α , la integración respecto de τ va extendida al camino (que podemos tomar real) que va de $\tau = 0$ a $\tau = 1$; haciendo $\tau_1 = -\frac{\tau}{\alpha}$, $d\tau = -\alpha d\tau_1$, las tres funciones (12.13) aparecen entonces como la función

$$\frac{z\left(\alpha, \frac{-\alpha\tau_1 - 1}{\beta(\tau_1)}, t, x, y\right)}{\beta(\tau_1) Q'_\beta(\tau_1, \beta(\tau_1))}$$

calculada sobre las tres hojas de la superficie R , en el camino $\tau_1 = 0$, $\tau_1 = -\frac{1}{\alpha}$. Tenemos, pues, un sentido perfectamente claro para las fórmulas resolutivas (12.11), (12.12).

13. Cambio de variables. — Efectuemos en las fórmulas (12.11), (12.12) el cambio de variables

$$X = \alpha, \quad Y = \frac{\tau - 1}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)} \quad (13.1)$$

El Jacobiano tendrá por expresión

$$\frac{\partial(\alpha, \tau)}{\partial(X, Y)} = 1 : \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\alpha, t)} = 1 : \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dots & \frac{1}{\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)} + \frac{\tau - 1}{\beta_r^2\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)} \frac{\beta'_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)}{\alpha} \end{vmatrix}$$

y teniendo en cuenta que

$$\beta'_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right) = -\frac{Q'_\alpha\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)}{Q'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)}, \quad \frac{\tau - 1}{\alpha} = \frac{Y}{X} \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)$$

se obtiene :

$$\frac{\partial(\alpha, \tau)}{\partial(X, Y)} = \frac{X\beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)Q'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)}{XQ'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right) - YQ'_\alpha\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad (13.2)$$

con lo que las fórmulas (12·11) (12·12) tomarán la forma

$$u = \sum_r^3 Z_r \quad (13.3)$$

$$Z_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} dX \int_0^{-\frac{1}{\beta_r(0)}} \frac{z(X, Y, t, x, y) dY}{XQ'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right) - YQ'_\alpha\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad (13.4)$$

en donde ha de expresarse la función a integrar en función de las variables X, Y , por las fórmulas del cambio (13·1); $\beta_r(0)$ $r = 1, 2, 3$, son los valores raíces de la ecuación :

$$Q(0, \beta) = 0 \quad (13.5)$$

y C_1 , sigue siendo una curva cerrada en el plano complejo de la Y que contiene en su interior los puntos singulares de

$$\frac{1}{J_r(X, Y)} \equiv \frac{1}{XQ'_\beta\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right) - YQ'_\alpha\left(-\frac{\tau}{\alpha}, \beta_r\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)\right)} \quad (13.6)$$

y deja al exterior los puntos singulares de $z(X, Y, t, x, y)$.

Cambiando el orden de integración en la fórmula (13·4) puesto que los caminos a que van extendidas las integrales son fijos e independientes uno de otro, escribiremos la fórmula (13·4) en la forma :

$$Z_r = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\beta_r(0)}} dY \int_{c_1} \frac{z(X, Y, t, x, y)}{J_r(X, Y)} \quad (13.7)$$

donde $J_r(X, Y)$ tiene el significado (13·6).

Para el cálculo de la integral (13·7) procederemos a transformar la integral compleja extendida a la curva C_1 . Este camino debe comprender en su interior los puntos singulares de $1 : J_r(X, Y)$. Fijado el valor de Y ,

esta función será una función analítica de una variable, de la que podemos determinar los puntos singulares, y el comportamiento en ellos permite hacer el estudio de las integrales (13.7).

14. **Estudio de las funciones $J_r(X, Y)$.** — La función J_r depende de X, Y , a través de la variable τ relacionada con ellas por las fórmulas (13.1); haciendo $-\tau : \alpha = \tau_1$, esta nueva variable τ_1 se expresará en función de X, Y , por

$$\beta_r(\tau_1) Y + X \tau_1 + 1 = 0 \quad (14.1)$$

y teniendo en cuenta el significado de la función $\beta_r(\tau_1)$ resulta $\tau_1(X, Y)$ una rama de una función algebraica de X, Y , definida por el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \tau_1 X + \beta Y + 1 = 0 \\ Q(\tau_1, \beta) = 0 \end{array} \right\} \quad (14.2)$$

La función $\tau(X, Y)$ viene dada entonces simplemente por

$$\tau = -X \tau_1 \quad (14.3)$$

y $J_r(X, Y)$ se expresa entonces

$$J_r(X, Y) = XQ'_\beta(\tau_1, \beta) - YQ'_x(\tau_1, \beta) \quad (14.4)$$

donde β_r es función algebraica de τ_1 , definida por $Q(\tau_1, \beta) = 0$; pero para esta función algebraica debe tomarse la misma determinación que en (14.2), luego podemos considerar a J_r como función polinómica de X, Y, τ_1, β ,

$$J_r = XQ'_\beta(\tau_1, \beta) - YQ'_x(\tau_1, \beta) \quad (14.5)$$

con τ_1, β , funciones algebraicas de X, Y definidas por (14.2); tomando en la segunda de tales ecuaciones la determinación $\beta_r(\tau_1)$ que fija el subíndice de la J_r en (14.5).

Cambiando las letras τ_1, β por ξ, η , podemos, pues, afirmar que $J_r(X, Y)$ es una rama de la función algebraica definida por el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} J = XQ'_\beta(\xi, \eta) - YQ'_x(\xi, \eta) \\ \xi X + \eta Y + 1 = 0 \\ Q(\xi, \eta) = 0 \end{array} \right\} \quad (14.6)$$

Una de estas ecuaciones, la segunda, es de primer grado en las variables auxiliares, y puede, por tanto, disminuirse en una unidad el nú-

mero de ecuaciones y de variables auxiliares ; para mejor conservar la expresión de J_r , sin incluirla en la función analítica completa J , fijémosnos en (14·1) que nos da

$$\beta_r(\tau_1) = \frac{-1 - \tau_1 X}{Y} \quad (14.7)$$

luego, la función τ , (X , Y) vendrá dada como una raíz de la ecuación

$$Q\left(\tau_1, \frac{-1 - \tau_1 X}{Y}\right) = 0 \quad (14.8)$$

y J_r se expresará como función de τ , por

$$J_r = XQ'_\beta\left(\tau_1, \frac{-1 - \tau_1 X}{Y}\right) - YQ'_\alpha\left(\tau_1, \frac{-1 - \tau_1 X}{Y}\right) \quad (14.9)$$

donde hemos afectado a la variable τ_1 , de un nuevo subíndice r que caracterice la raíz elegida en (14·8). Suprimiendo este subíndice el sistema (14.8), (14·9) puede sustituir al (14·6).

Procedamos a la obtención de la ecuación en J , para lo que basta la eliminación de ξ , η , en (14·6), o bien τ_1 , entre (14·8) y (14·9). Para obtener la resultante por un cálculo sencillo, procederemos de la siguiente manera ⁽¹⁾ :

El primer miembro de (14·8) es un polinomio en τ_1 , con coeficientes funciones racionales de X , Y :

$$f(\tau_1) \equiv Q\left(\tau_1, -\frac{1 + \tau_1 X}{Y}\right) \quad (14.10)$$

La ecuación (14·9) puede entonces escribirse :

$$J + Y f'(\tau_1) = 0 \quad (14.11)$$

Para poder referirnos a polinomios enteros, hagamos

$$Y^3 f(\tau_1) \equiv f_1(\tau_1) \quad Y^2 J = -\eta \quad (14.12)$$

y la ecuación en η se obtendrá eliminando τ_1 en

$$\left. \begin{aligned} f_1(\tau_1) &\equiv a_3 \tau_1^3 + a_2 \tau_1^2 + a_1 \tau_1 + a_0 = 0 \\ f'(\tau_1) - \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.13)$$

⁽¹⁾ Este proceso de eliminación nos ha sido comunicado por el Sr. TEIXIDOR.

donde a_i son polinomios enteros en X, Y de tercer grado. La resultante de (14.13) será de la forma

$$R(X, Y, \eta) \equiv A_0 \eta^3 + A_1 \eta^2 + A_2 \eta + A_3 = 0 \quad (14.14)$$

con las A_i también de forma polinómica. Haciendo $\eta = 0$, se observa en (14.13) que la eliminación de τ_1 conduce al discriminante D de $f_1(\tau_1)$; luego

$$R(X, Y, 0) \equiv A_3 \equiv -a_3 D \quad (14.15)$$

También (14.13) dice que η no es más que la pendiente de la curva $y = f_1(x)$ en sus puntos de intersección con el eje x ; cuando $\eta = 0$, $f_1(x)$ tendrá una raíz doble, $A_3 = 0$, y dos pendientes η deberán anularse; luego en (14.14) cuando $A_3 = 0$, también $A_2 = 0$, con lo que el grado de A_2 no puede ser inferior al de A_3 ; pero en (14.13) se observa que el grado de A_2 ha de ser menor que el de A_3 ; basta imaginar el determinante de SYLVESTER descompuesto en suma de determinantes. Luego forzosamente

$$A_2 \equiv 0. \quad (14.16)$$

A_0, A_1 , se calculan ahora fácilmente, descomponiendo el determinante de SYLVESTER en suma de determinantes:

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv -a_3^2 \equiv -2^4 X^6 \\ A_1 &\equiv a_3(a_2^2 - 3a_3 a_1) \equiv 4 X^3 Y^2 (Y^4 + 24 X^2 Y + 12 g_2 X^4) \end{aligned} \quad (14.17)$$

con lo cual, η deberá ser raíz de la ecuación

$$-2^4 X^6 \eta^3 + 2^2 X^3 Y^2 (Y^4 + 24 X^2 Y + 12 g_2 X^4) \eta^2 - 4 X^3 D = 0$$

En cuanto a D , es el discriminante de la ecuación en α

$$f_1(\alpha) \equiv Y^3 Q\left(\alpha, -\frac{1 + \alpha X}{Y}\right) = 0$$

cuyas raíces son la primera coordenada tangencial de cada una de las tangentes a la envolvente; D se anulará cuando dos de estas raíces coincidan, lo que únicamente ocurrirá si el punto X, Y , está sobre la curva puntual, o sobre el eje $Y = 0$; por esto D es de la forma $k Y^m P^p(X, Y)$, donde k es constante, $m \geq 1$, $p \geq 1$, y $P(X, Y)$ la curva puntual (3.2). La primera fórmula de PLÜCKER nos determina entonces $m = 6$, $p = 1$, y la constante k se determina, por ejemplo,

escribiendo la misma condición para $X = 0$ con lo que se obtiene $k = -1$; en definitiva, la ecuación en η es

$$2^4 X^6 \eta^3 - 4 X^3 Y^2 (Y^4 + 24 X^2 Y + 12 g_2 X^4) \eta^2 - 4 X^3 Y^6 P(X, Y) = 0 \quad (14.18)$$

de la que en virtud de (14.12) se obtiene para ecuación en J después de simplificar el factor $-4 X^3 Y^6$:

$$4 X^3 J^3 + (Y^4 + 24 X^2 Y + 12 g_2 X^4) J^2 + P(XY) = 0, \quad (14.19)$$

$P(X, Y)$ dado por (3.2).

15. **Expresión de J en función elíptica.**— Utilizando las funciones elípticas introducidas en el n.º 6, la función $J(X, Y)$ se expresa por el sistema

$$\left. \begin{aligned} X p' \lambda + Y p \lambda + 1 &= 0 \\ J &= Q'_\beta(p' \lambda, p \lambda) X - Q'_\alpha(p' \lambda, p \lambda) Y \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Esta expresión se transforma teniendo en cuenta la relación:

$$Q'_\alpha(p' \lambda, p \lambda) p'' \lambda + Q'_\beta(p' \lambda, p \lambda) p' \lambda = 0$$

En nuestro caso es

$$Q'_\alpha(p' \lambda, p \lambda) \equiv 2 p' \lambda$$

por tanto:

$$-\frac{1}{2} = \frac{p' \lambda}{-Q'_\alpha(p', p)} = \frac{p'' \lambda}{Q'_\beta(p', p)} = \frac{X p'' \lambda + Y p' \lambda}{J}$$

que nos da para $J(XY)$ la expresión

$$J(XY) \equiv -2(X p'' \lambda + Y p' \lambda) \quad (15.2)$$

con λ raíz de la ecuación

$$X p' \lambda + Y p \lambda + 1 = 0 \quad (15.3)$$

16. **Interpretación geométrica.**— La función $J(X, Y)$, goza de algunas propiedades geométricas interesantes: las ecuaciones (14.6) nos muestran que la superficie representativa de aquella función en el espacio ordinario es una superficie reglada R , obtenida por intersección del haz de planos.

$$Q(\xi, \eta) = 0, \quad \xi X + \eta Y + 1 = 0 \quad (16.1)$$

que son los que envuelven el cilindro de generatrices paralelas a OJ , y sección igual a la curva puntual $P(X, Y) = 0$, con el haz de planos

$$Q(\xi, \eta) = 0, \quad J = XQ'_\beta(\xi, \eta) - YQ'_\alpha(\xi, \eta) \quad (16.2)$$

que envuelven al cono circunscrito a la superficie $J(X, Y)$ con vértice en el origen. Las generatrices de R , se determinan por las condiciones: tienen su traza en la curva $P(X, Y) = 0$; están situadas en el plano perpendicular al X, Y , y que tiene por traza la tangente a $P(X, Y) = 0$; y, finalmente, forman con el plano XY el ángulo θ dado por

$$Q(\xi, \eta) = 0, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{Q'_\xi(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \quad (16.3)$$

la ecuación de estas generatrices es, llamando (x, y) a un punto de la curva $P(x, y) = 0$, (α, β) las coordenadas tangenciales de la tangente en aquel punto:

$$\frac{X-x}{-\beta} = \frac{Y-y}{\alpha} = \frac{J}{-(\alpha Q'_\alpha + \beta Q'_\beta)} \equiv \frac{J}{Q'_\nu(\alpha, \beta)}, \quad Q(\alpha, \beta) = 0 \quad (16.4)$$

de las que al variar simultáneamente (x, y) , (α, β) describiendo respectivamente la curva $P(x, y) = 0$ y la tangente correspondiente, se obtiene el sistema simplemente infinito de generatrices.

Es fácil de obtener la curva doble de R ; cortada por una paralela al eje J , debe obtenerse dos intersecciones confundidas, lo que nos da la relación:

$$J(12X^3J + 2[Y^4 + 24X^2Y + 12g_2X^4]) = 0 \quad (16.5)$$

de la que simplificando $J = 0$, que corresponde al caso de contacto, queda determinada la curva doble.

En nuestro caso, y utilizando la representación paramétrica, las generatrices se escriben

$$\frac{X-x}{-p\lambda} = \frac{Y-y}{p'\lambda} = \frac{J}{2(p''p - p'^2)} \quad (16.6)$$

y la inclinación de la generatriz sobre el plano x, y

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2(p''p - p'^2)}{\sqrt{p^2\lambda + p'^2\lambda}} = -\frac{2\nu}{x\bar{X}} \quad (16.7)$$

designando por ν la distancia al origen de la tangente a $P(xy) = 0$ en el punto x, y , y \bar{X} el segmento interceptado por esta tangente sobre el

eje x . Se ve entonces que J es el doble de la tangente del ángulo del plano XY , bajo el que se ve el segmento (x, y) (X, Y) desde el punto de intersección de la normal a $P(x, y) = 0$ en (x, y) con el eje Y .

17. **Puntos singulares de $1 : J(XY)$.** — Esta es una función a tres valores, cada uno de los cuales es función analítica regular de las variables X, Y , excepto en aquellos puntos en que $J(X, Y)$ se ramifica. Vamos a determinar estos puntos de ramificación. La expresión de J puede obtenerse de (14·12) (14·13) :

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{Y^2} f'_1(\tau_1) = -\frac{1}{Y^2} \frac{\partial}{\partial \tau_1} Y^3 Q\left(\tau_1, -\frac{1 + \tau_1 X}{Y}\right) = \\ &= -Y Q'_\alpha\left(\tau_1, -\frac{1 + \tau_1 X}{Y}\right) + X Q'_\beta(\dots) \end{aligned} \quad (17.1)$$

donde τ_1 , es función de X, Y definida por la ecuación

$$Q\left(\tau_1, -\frac{1 + \tau_1 X}{Y}\right) = 0$$

Ahora bien, los únicos puntos de ramificación para J serán los que lo sean de τ_1 , que son fáciles de obtener de (17·2) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \tau_1} Q\left(\tau_1, -\frac{1 + \tau_1 X}{Y}\right) \equiv \\ &\equiv Q'_\alpha\left(\tau_1, -\frac{1 + \tau_1 X}{Y}\right) - \frac{X}{Y} Q'_\beta\left(\tau_1, -\frac{1 + \tau_1 X}{Y}\right) = 0 \end{aligned} \quad (17.3)$$

relación a que han de satisfacer todos los puntos de ramificación de τ_1 , y, por tanto, los de J . Pero (17·3) puede escribirse, según (17·1) :

$$-JY = 0 \quad (17.4)$$

luego, fuera del plano $Y = 0$, y también en él por la continuidad de la variedad formada por los puntos de ramificación,

J se anula en todos sus puntos de ramificación.

Esto es lo que se ve también en nuestro caso, partiendo de la representación paramétrica (15·2) de J . Esta se expresa como función uniforme de λ , y λ como función multiforme de X, Y , definida por (15·3), y los puntos de ramificación de J serán sólo los de λ , que satisfarán a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (X \wp' \lambda + Y \wp \lambda + 1) = -\frac{1}{2} J = 0$$

También partiendo de la ecuación en J (14·19), los puntos de ramificación se obtienen anulando la derivada parcial respecto J , lo que da la condición (16·5); ésta se desdobra en la $J = 0$ y en la J correspondiente a la curva doble de la reglada R , en cuyos puntos vemos, por lo que antecede, que cada una de las ramas de J se expresa como función analítica regular, a excepción de los puntos de la curva doble situados en el plano $J = 0$. Es decir, la curva doble de la reglada R es una curva nodal.

En el plano $J = 0$, todos los puntos de R son de ramificación para $J(X, Y)$, puesto que la normal está en aquel plano, con lo que resultando, obtenemos en definitiva:

Todos los puntos singulares de $1 : J(X, Y)$, son puntos de ramificación en los que J se anula, y son precisamente los puntos de la curva $P(X, Y) = 0$, envolvente del haz tangencial asociado a nuestra ecuación entre derivadas parciales; y también recíprocamente todos los ceros de J son puntos de ramificación situados sobre la curva $P(X, Y) = 0$.

CAPÍTULO IV

PASO AL CAMPO REAL

18. Estudio de los términos Z_r . — La solución de nuestra ecuación en derivadas parciales (7·3) con las condiciones iniciales (9·2) se expresa según (13·3), (13·7) por

$$u = \sum_1^3 Z_r$$

$$Z_r = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\beta_r(0)}} dY \int_{c_r} \frac{z(X, Y, t, x, y)}{J_r(X, Y)} dX \quad (18.1)$$

donde z , se obtiene en la forma indicada por n.º 11, 12 (12·4), y J_r es una de las ramas de la función J estudiada en el capítulo anterior.

Tomemos Y real, para mejor fijar las ideas, próximo al origen; podemos entonces efectuar la integración respecto X en cada uno de los términos Z_r , a lo largo de la curva C_r , que deja en su interior los puntos singulares de $1 : J_r$; haciendo variar después Y de 0 a $-1 : \beta_r(0)$, este último, ordenada del punto de contacto de una tangente paralela

al eje x , e integrando entre ambos límites, obtendremos la expresión de Z_r . Ahora bien, de la fórmula (14.4) se deduce que para los valores

$$Y = -\frac{1}{\beta_r(0)}, \quad \tau_1 = 0, \quad \tau = 0, \quad (18.2)$$

la rama correspondiente se expresa :

$$J_r \left(X, -\frac{1}{\beta_r(0)} \right) = X Q'_\beta(0, \beta_r(0)) \quad (18.3)$$

que se anula para $X = 0$. Luego, la rama J_r debe elegirse de forma que se anule para el par de valores $\left(0, -\frac{1}{\beta_r(0)} \right)$, es decir, en el punto de contacto de la tangente paralela a OX . Pero como este punto es de ramificación de J a dos valores existirán aún dos determinaciones de J que cumplirán con la última condición. Esta no permite, pues, destacar ninguna de estas dos ramas; pero si nos fijamos en la expresión (18.3), observamos que la rama integrada hasta $-1 : \beta_r(0)$, es función uniforme de X para $Y = -1 : \beta_r(0)$, es decir, la rama $J_r(X, Y)$ carece de puntos de ramificación, cuando Y toma el valor del extremo superior de la integral; y por continuidad, puesto que para valores de Y próximos al extremo superior existen dos puntos de ramificación que desaparecen al confundirse ambos en el punto de contacto de la tangente, resulta en definitiva :

La rama $J_r(X, Y)$ tomada como función de X para valores de Y próximos al extremo de la integral $Y \sim -1 : \beta_r(0)$, sólo posee dos únicos puntos de ramificación que son los dos de intersección de una secante paralela al eje X , y que se confunden en el punto de contacto de la tangente al tender $Y \rightarrow -1 : \beta_r(0)$. Este criterio de selección está indicado ya por FANTAPPIÉ⁽¹⁾ y demostrado por un razonamiento geométrico.

19. Ramificación de J para $Y = 0$. — La ecuación se escribe :

$$4 X^3 J^3 + 12 g_2 X^4 J^2 - \delta X^6 + 2^5 \cdot 3^3 g_3 X^4 + 2^4 3^2 X^2 = 0,$$

y simplificado $X^2 = 0$,

$$4 X J^3 + 12 g_2 X^2 J^2 - \delta X^4 + 2^5 \cdot 3^3 g_3 X^2 + 2^4 \cdot 3^3 = 0. \quad (19.1)$$

(1) L'Indicatrice proiettiva..., pág. 279.

Esta ecuación define una función algebraica $J(X)$ con tres ramas, y que tiene como puntos singulares el origen y las cuatro raíces de la ecuación

$$\delta X^4 - 2^5 \cdot 3^3 g_3 X^2 - 2^4 \cdot 3^3 = 0 \quad (19.2)$$

Conviene, además, conocer el comportamiento de $J(X, 0)$ en el punto del infinito, o mejor, que interesa más directamente, el de $1 : J(X, 0)$ en aquel punto. Haciendo $1 : X = t$, la ecuación en $1 : J$ es :

$$\chi \left(t, \frac{1}{J} \right) \equiv 4t^3 + 12g_2 t^2 \frac{1}{J} + (2^4 \cdot 3^3 t^4 + 2^5 \cdot 3^3 g_3 t^2 - \delta) \frac{1}{J^3} = 0 \quad (19.3)$$

que nos dice que para $t = 0$, $1 : J = 0$, y además las derivadas $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial X}{\partial 1 : J}$ del primer miembro se anulan simultáneamente para aquellos valores que constituyen un nodo con tangentes distintas de la curva $X(t, u) = 0$; en efecto, el coeficiente angular de las tangentes a las ramas en el origen satisface a

$$\delta \lambda^3 - 12g_2 \lambda - 4 = 0$$

ecuación de tercer grado, que por tener su discriminante

$$4\delta 12^3 g_2^3 - 27 \cdot \delta^2 \cdot 4^2 = 2^8 3^6 \delta g_2^3 > 0$$

tendrá sus tres raíces reales distintas; luego, *las tres ramas de $1 : J(X, 0)$ son ultrarregulares en el punto del infinito.*

Además, la ecuación (19.3) puesta en la forma

$$4 + 12g_2 \frac{1}{tJ} + (2^4 \cdot 3^3 t^4 + 2^5 \cdot 3^3 g_3 t^2 - \delta) \frac{1}{(tJ)^3} = 0$$

nos dice que los tres desarrollos en serie en el entorno del origen de $1 : tJ$, contendrán únicamente potencias pares de t , por tanto $1 : J$, contendrá únicamente potencias impares. De aquí que no sólo puede afirmarse que J es función impar de X , cosa que ya se ve directamente en (19.1), sino que, además *cada una de las ramas de J en el entorno del infinito considerada aisladamente es una función impar de X .*

Por ser el ∞ punto regular para cada rama, la ramificación de $1 : J$ dependerá exclusivamente de la posición de las raíces de (19.2). Y puesto

que esta ecuación, es una bicuadrada con discriminante positivo y el término independiente negativo, tendrá dos raíces reales simétricas respecto el origen y otras dos imaginarias puras con la misma simetría. Los puntos de ramificación tienen, pues, la posición indicada en la figura III. Efectuando el corte del plano complejo de la variable X , a lo largo de los dos segmentos de los ejes limitados por estos puntos críticos la función J y la $1 : J$ quedarán descompuestas en sus tres ramas perfectamente diferenciadas. Las llamaremos J_1, J_2, J_3 .

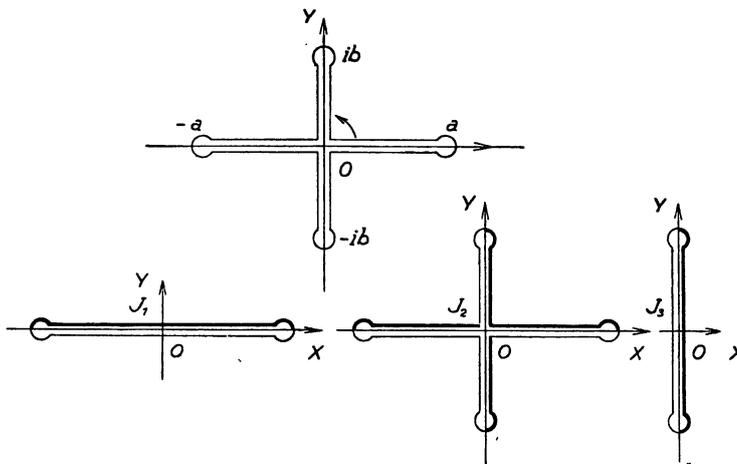


Fig. III

Interesa conocer, además, cómo se permutan estas ramas en los puntos de ramificación. Empecemos por el origen; en él se hacen infinitos los tres valores de J ; hagamos, pues, en (19.1) el cambio $1 : J = J'$,

$$4X + 12g_2X^2J' + (2^4 \cdot 3^3 + 2^5 3^3 g_3 X^2 - \delta X^4)J'^3 = 0 \quad (19.4)$$

es fácil ver que esta curva (19.4) tiene en el origen un punto de inflexión tangente a $X = 0$; por tanto ⁽¹⁾, obtenemos en el entorno del origen un desarrollo de la forma :

$$J' = \frac{1}{J} = a_0 X^{\frac{1}{3}} + a_1 X^{\frac{2}{3}} + \dots \quad (19.5)$$

⁽¹⁾ Véase, por ejemplo, P. APPELL-E. GOURSAT. Théorie des Fonctions Algébriques, Paris, 1895, n.º 87.

y en el origen se permutarán las tres determinaciones de $1 : J$ y también las tres de J . Calculado el primer coeficiente se obtiene :

$$a_0 = -\frac{1}{3 \cdot 4^3}.$$

En el punto a se permutan, en cambio, sólo dos determinaciones de J . puesto que sólo dos de los valores tienden a cero para $X \rightarrow a$ y la regla R hace ver que en este punto la tangente es paralela al eje J y hay, efectivamente, permutación. Igual puede decirse de los puntos $-a, bi, -bi$.

Llamemos J_1, J_2 , a las dos determinaciones que se permutan en a ; en $-a$ se permutarán las mismas ramas por ser cada una de ellas función impar de X ; la rama restante J_3 deberá permutarse en los puntos $\pm ib$, porque, en caso contrario, tendría un solo punto de ramificación, el origen, lo que es absurdo. Se permutará, además, con una sola de las anteriores, la J_2 , por ejemplo; quedan así conocidos los puntos de ramificación de cada rama: J_1 , se ramifica en $o, a, -a$; J_2 lo hace en todos los puntos $o, a, -a, ib, -ib$, y J_3 sólo en los $o, ib, -ib$. Podemos entonces en la hoja de la superficie de RIEMANN correspondiente a J_3 , suprimir el corte en los segmentos $\overline{oa}, \overline{o(-a)}$, y en la hoja correspondiente a J_1 los $\overline{o(ib)}, \overline{o(-ib)}$, dejando variar con continuidad la variable X en los segmentos suprimidos correspondientes a cada hoja.

Para acabar de fijar las ideas, y determinar las ramas en los puntos situados sobre los segmentos por los que se ha efectuado el corte, consideraremos estos segmentos añadidos a las hojas de la superficie de RIEMANN por el lado del corte visto desde el cuadrante positivo de los ejes: es decir, las tres hojas resultantes de la superficie de RIEMANN quedarán abiertas por el lado del corte visto desde el cuadrante negativo, y cerradas por el lado opuesto. (Véase fig. III, trazos gruesos añadidos a la hoja, trazos finos excluidos).

20. **Ramificación de J para Y próximo a $Y = 0$.** — Demos a Y un valor Y_0 próximo a cero, con proximidad que dejamos indeterminada y que debe ser suficiente para que puedan aplicarse las consideraciones que siguen. Para $Y = Y_0$, la función $J(X, Y_0)$ está definida por (14.19):

$$4X^3J^3 + [Y_0^4 + 24X^2Y_0 + 12g_2X^4]J^2 + P(X, Y_0) = 0 \quad (20.1)$$

y sus puntos de ramificación serán las raíces de

$$P(X, Y_0) = 0 \quad (20.2)$$

ecuación cúbica en X^2 , que según muestra la figura II, tendrá cuatro raíces reales $a, -a, c, -c$ para $Y_0 < 0$, y sólo dos $a, -a$ para $Y_0 > 0$; las restantes en ambos casos son imaginarias puras (sean $ib, -ib$, para $Y_0 < 0$, y $ib, -ib, ic, -ic$, para $Y_0 > 0$), y siempre simétricas respecto al origen.

Por razonamientos análogos a los del número anterior puede verse que con el corte completo indicado en la primera de las figuras III queda descompuesta la función J en tres ramas impares. Podemos entonces en la hoja de la superficie de RIEMANN correspondiente a J_3 , suprimir

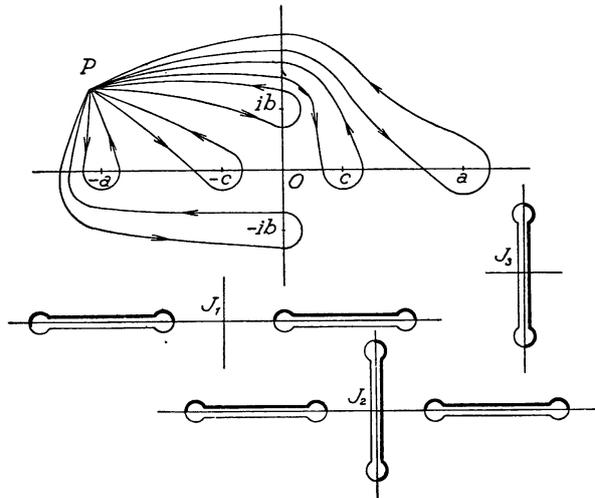


Fig. IV

el corte en los segmentos $\overline{oa}, \overline{o(-a)}$ y en la hoja correspondiente a J_1 los $\overline{o(ib)}, \overline{o(-ib)}$, dejando variar con continuidad la variable X en los segmentos suprimidos correspondientes a cada hoja.

Distingamos ahora separadamente los dos casos :

$Y_0 < 0$. Por continuidad respecto a lo deducido en el número anterior, en $a, -a$, deberán permutarse dos ramas J_1, J_2 y en $ib, -ib$, otras dos J_2, J_3 . Falta ver que ramas se permutarán en $c, -c$, sabiendo que en cada uno tienen que permutarse sólo dos ramas y las mismas en ambos. Tomemos una rama en un punto P arbitrario del plano, y hagamos describir a J_2 con continuidad un lazo que envuelva al punto $-c$ (o el $-b$). Siempre podemos asociarle un conjunto de lazos que partan de P (fig. IV) de forma que seguidos todos ellos sucesivamente y variando la rama de partida con continuidad, el camino seguido sea topológicamente equivalente a un lazo que envuelve a todos los puntos singulares,

y, por tanto, deba llegarse al punto P con la misma rama de partida ; se ve así que en $c, -c$, deben permutarse las dos ramas J_1, J_2 , y quedar la J_3 sin permutar. Los cortes necesarios están indicados para cada rama en la figura IV.

$Y_0 > 0$. Consideraciones análogas a las del caso anterior permiten afirmar que en cada uno de los puntos críticos $ic, -ic$, se permutan

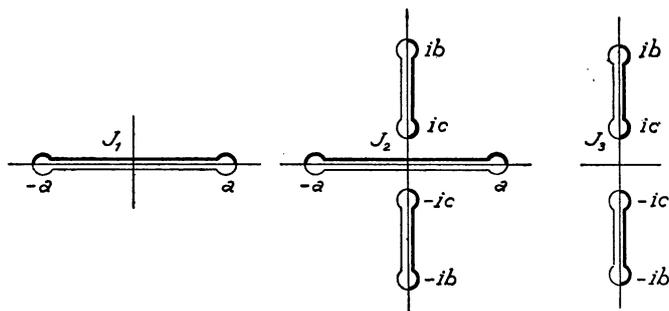


Fig. V

J_2, J_3 , y la rama J_1 , queda sin permutar. La descomposición en ramas queda perfecta con los cortes indicados en la figura V. Tenemos, pues, ya conocida la ramificación de $J(X, Y_0)$ para Y_0 suficientemente próximo al origen. Al ir variando Y_0 apartándolo del origen seguirá manteniéndose la distribución de los puntos críticos de $J(X, Y_0)$, mientras dos de los puntos singulares no vengan a coincidir. El estudio de este caso nos permitirá obtener la ramificación de $J(X, Y_0)$ para todos los valores de Y_0 .

21. **Ramificación de J en el caso general.** — Veamos qué sucede cuando para $Y = Y_0$ vienen a coincidir dos puntos de ramificación de $J(X, Y_0)$.

Como que los puntos críticos son los de intersección de la recta $Y = Y_0$ con la curva $P(X, Y) = 0$, dos puntos críticos vienen a coincidir, sólo cuando, o bien la recta $Y = Y_0$ es tangente a $P = 0$, o bien contiene uno de los puntos dobles que en nuestro caso sólo pueden ser puntos de retroceso ; si el punto de confusión es de tangencia, en los puntos críticos distintos que en las posiciones próximas van acercándose se permutarán las mismas ramas, pues la rama sin permutar tomará en el punto de contacto, en general, un valor distinto al de las dos ramas que se permutan ; recíprocamente, si van a confundirse dos puntos críticos que permutan las mismas ramas, en el punto de confusión desaparecerá toda ramifi-

cación, y no puede tratarse, pues, de una cúspide que permuta las tres determinaciones de J , como se ha visto en el caso de la cúspide que $P = 0$ posee en el origen, e igual podría verse para cualquier otra repitiendo el razonamiento después de un cambio de ejes adecuado. En definitiva :

Si van a confundirse dos puntos críticos que dejan ambos una rama de $J(X, Y_0)$, sin permutar, el punto de confusión es de tangencia de $Y = Y_0$ con $P(X, Y) = 0$; si entre ambos, en cambio, se permutan las tres ramas, el punto es cuspidal. Estudiemos ahora separadamente los dos casos $Y_0 > 0$, $Y_0 < 0$.

$Y_0 > 0$. La ramificación estudiada en el número anterior, está representada en la figura V. Alejando ahora Y_0 del origen, no pueden venir a confundirse los puntos críticos ic, ib (y análogamente tampoco los $-ic, -ib$), puesto que, según el lema anterior, aparecería un punto de contacto imaginario, siendo así que las tres tangentes $Y = \text{constante}$ son reales y con puntos de contacto reales. Por tanto, se mantendrá la posición de la figura V hasta que vengan a confundirse los puntos $-a, a$, en cuyo caso (véase fig. II), se trata de la tangente $Y = -1 : e_3$ a la curva $P(X, Y) = 0$.

$Y_0 < 0$. La ramificación está representada en la figura IV. Observando la figura II, se ve que los puntos críticos que primero van a confundirse al alejarse Y_0 del origen son los $ib, -ib$, lo que sucede al llegar a la tangente $Y = -1 : e_1$. No puede para $0 > Y_0 > -1 : e_1$, tropezarse con ningún punto de retroceso imaginario, pues los puntos $ib, -ib$ permutan las mismas ramas y se mantienen simétricos respecto al origen. En el punto $X = 0, Y = -1 : e_1$ será, pues, según (14·19), (15·2), (15·3).

$$J_1 = \infty, \quad J_2 = J_3 = 0 \quad (21.1)$$

Entonces para $Y_0 < -1 : e_1$ y próximo a este valor los seis puntos críticos de $J(X, Y_0)$ son todos reales, según se observa en la figura II y en los dos más próximos al eje Y sólo se permutan J_2, J_3 , por continuidad aplicada a los valores (21·1). Podemos, pues, efectuar el corte en la forma indicada en la figura VI.

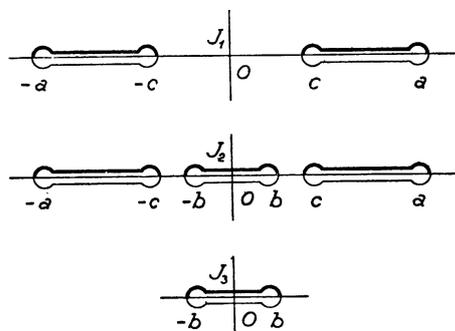


Fig. VI

Al alejarse Y_0 del valor $-1 : e_1$ seguirá manteniéndose la misma posición hasta alcanzar los puntos de retroceso reales de la curva $P(X, Y) = 0$. Estudiaremos ahora cómo se ramificará la función $J(X, Y_0)$, una vez Y_0 ha pasado aquella posición, de ordenada $Y = r_0$, de los puntos de retroceso reales. Según se ve en la figura II, pasada aquella posición, cuatro de los puntos críticos serán imaginarios, conjugados dos a dos y dos a dos simétricos respecto al origen. Adoptarán, pues, la posición de la figura VII. Observemos que antes de atravesar la posición límite en que Y_0 era ordenada de los puntos de retroceso, un lazo que envolviera los puntos $-a, -b, -c$ de la figura VII dejaba la rama J_1 , sin permutar, y, por tanto, pasada aquella posición límite, un lazo que envuelva los puntos $-a, -c + ib, -c - ib$, de la figura VII ha de dejar por

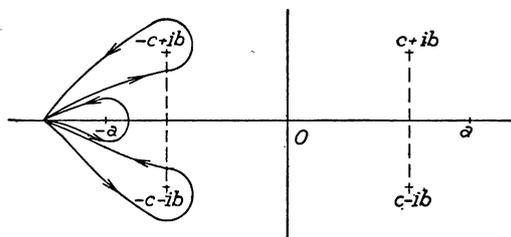


Fig. VII

continuidad la misma rama sin permutar, y lo mismo puede decirse de los otros tres puntos simétricos respecto al eje imaginario. Además, cada una de las ramas seguirá siendo función impar de X, y , por tanto, se permutarán las mismas ramas en puntos simétricos respecto al origen. Por razones parecidas, cada rama tomará valores imaginarios conjugados para valores del argumento que sean imaginarios conjugados, luego en puntos simétricos respecto al eje real se permutarán las mismas ramas, y, en definitiva, los *cuatro puntos críticos* $c + ib, c - ib, -c + ib, -c - ib$, *deberán permutar las mismas ramas*. Además, en cada uno de estos puntos una de las ramas que se permuta ha de ser la J_3 , que no se permuta en los $a, -a$. Si en aquellos cuatro puntos se permutase J_3 con J_2 , describiendo sucesivamente los tres lazos dibujados en la fig. VII, y partiendo con la rama J_3 llegaríamos al punto de partida con la rama J_1 , resultado absurdo, pues los tres lazos dibujados forman un camino topológicamente equivalente a un único lazo que envolviese los tres puntos, y que, según lo antes indicado, no debería permutar J_1 . Luego, forzosamente, *en cada uno de los cuatro puntos* $c + ib, c - ib,$

$-c + ib$, $-c - ib$, se permutan las ramas J_1 , J_3 , y con este resultado desaparece toda contradicción.

En la figura VIII están dibujados los cortes necesarios para la separación en ramas de la función $J(X, Y_0)$ para Y_0 menor que la ordenada de los puntos de retroceso reales de la curva $P(X, Y) = 0$. Al

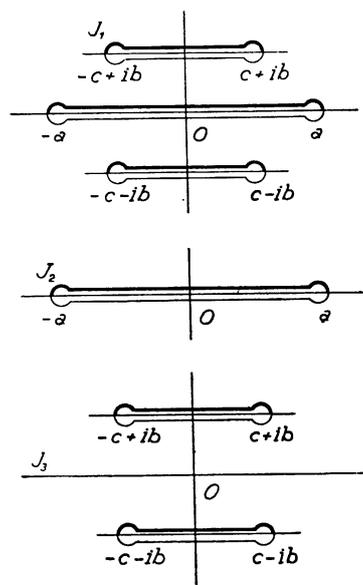


Fig. VIII

alejarse Y_0 de aquél valor, seguirá manteniéndose la misma ramificación hasta alcanzar el valor $Y_0 = -1 : e_2$ en el que coincidirán a , $-a$, en $X = 0$.

22. Cálculo del sumatorio ΣZ_r . — La solución u de nuestra ecuación en derivadas parciales, viene dada por las fórmulas (13.3), (13.4); mediante el criterio de selección expuesto en el n.º 18, podemos ahora precisar los límites de integración $-1 : \beta_r(0)$ que corresponden a cada una de las ramas J_r ; la rama J_1 carece de puntos de ramificación para $Y = -1 : e_3$, luego, hay que extender la integración de la rama J_1 de 0 a $-1 : e_3$;

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{e_3}} dY \int_{c_1} \frac{z(XY | xy)}{J_1(XY)} dX$$

y el camino de integración respecto X puede deformarse con continuidad hasta adaptarlo al segmento que une los dos puntos de ramificación $a, -a$, recorrida en los dos sentidos; y teniendo en cuenta el borde en el que la hoja J_1 es abierta, y aquél en que es cerrada, aparece en definitiva :

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\epsilon_3}} dY \int_{-a}^a \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} \right) z dX$$

Procediendo análogamente con los términos Z_2, Z_3 , se obtiene :

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\epsilon_2}} dY \int_{c_1}^c \frac{z}{J_2} dX = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\epsilon_1}} \left[\int_{-a}^{-c} \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) z dX + \int_c^a \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) z dX + \right. \\ &+ \left. \int_{-ib}^{ib} \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_3} \right) z dX \right] dY + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{\epsilon_1}}^{r_0} \left[\int_{-a}^{-c} \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) z dX + \right. \\ &+ \left. \int_{-b}^b \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_2} \right) z dX + \int_a^c \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) z dX \right] dY + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{r_0}^{-\frac{1}{\epsilon_2}} dY \int_{-a}^a \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) z dX \\ Z_3 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\epsilon_1}} dY \int_{-ib}^{ib} \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_2} \right) z dX \end{aligned}$$

Efectuado el sumatorio ΣZ , y agrupando los términos de igual integrando, y sustituyendo las integrales sucesivas por integrales dobles, nos queda en definitiva :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi i} \int \int_{D_1} \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} \right) z(X, Y, t, x, y) dX dY + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int \int_{D_2} \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} \right) z dX dY \end{aligned} \quad (22.1)$$

donde los dominios D_1, D_2 , tienen la significación representada en la figura IX.

23. Estudio de la función salto $J_2^{-1} - J_1^{-1}$. Las ramas J_1, J_2 , se permutan en el contorno del dominio D_1 , y son ambas raíces (en el interior de D_1 imaginarias) de una ecuación de tercer grado con coeficientes reales y, por tanto, imaginarias conjugadas en el interior de D_1 ; luego, la función salto

$$\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} = \frac{1}{\bar{J}} \quad \text{en } D_1 \quad (23.1)$$

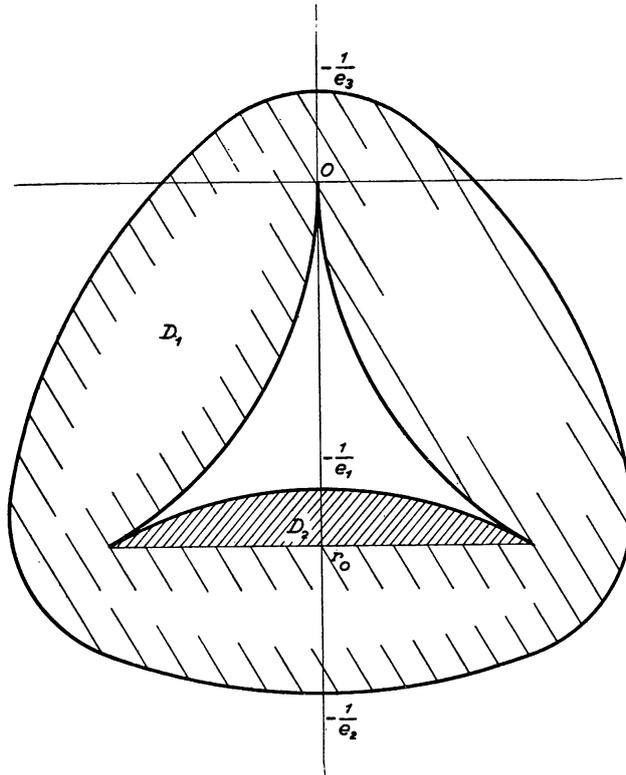


Fig. IX

es imaginaria pura e igual al doble de la parte imaginaria de una de las dos determinaciones $1 : J_1, 1 : J_2$. Lo mismo puede decirse de

$$\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_3} = \frac{1}{\bar{J}} \quad \text{en } D_2 \quad (23.2)$$

Razonando de manera semejante a la empleada por CASULLERAS en las páginas 36 y siguientes de su memoria, $1 : \bar{J}$ tendrá signo constante

en el interior del dominio D_1 , puesto que la parte imaginaria de $1 : J_1$ (o de $1 : J_2$), no puede ser nula ni infinita, por no ser allí nunca J_1 (o J_2) real; para determinar el signo basta hacerlo en uno cualquiera de los puntos interiores a D_1 .

A partir del desarrollo (19.5) de $1 : J$ en el entorno del origen, se puede determinar aquel signo en los puntos de $D = D_1 + D_2$ próximos al origen. Las ramas de la función

$$\frac{1}{J} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} X^{\frac{1}{3}} + a_1 X^{\frac{2}{3}} + \dots$$

estarán aproximadas en el entorno del origen por las de la función

$$\frac{1}{J^*} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} X^{\frac{1}{3}}$$

y las ramas de esta función darán el mismo signo de la parte imaginaria que las de $1 : J$.

De las tres ramas de $1 : J$, hay una real para $x > 0$ y próximo a él, que es precisamente la $1 : J_3$ porque es la única que no se permuta en los puntos $a, -a$. Estará aproximada por la rama real de $1 : J^*$ que designaremos $1 : J_3^*$. Describiendo un lazo en sentido directo alrededor del origen al llegar otra vez al semieje $X > 0$, $1 : J$ toma la determinación $1 : J_2$, y $1 : J^*$ toma la que designaremos por

$$\frac{1}{J_2^*} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} X^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$$

y recorrido por segunda vez el mismo lazo, $1 : J$ tomará la determinación $1 : J_1$, y $1 : J^*$ la

$$\frac{1}{J_1^*} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} X^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$$

Con ello la función salto $1 : \bar{J}$, estará aproximada para $X > 0$, por

$$\frac{1}{\bar{J}} \simeq \frac{1}{J_2^*} - \frac{1}{J_1^*} = -\frac{2i}{3\sqrt[3]{4}} X^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$$

y, en definitiva, puesto que en tales puntos esta función es negativa, resulta que también en todo el dominio $D = D_1 + D_2$, la función $1 : \bar{J}$ tiene signo negativo.

Designando entonces por $1:J_0$, el módulo de la parte imaginaria de una cualquiera de las dos determinaciones imaginarias de $1:J$ en el interior de D_1 o de D_2 , la fórmula (22.1) puede escribirse :

$$u = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{1}{J_0(XY)} z(X, Y, t, x, y) dX dY \quad (23.3)$$

fórmula resolutive expresada ya en términos reales.

CAPÍTULO V

FÓRMULAS RESOLUTIVAS

24. **Expresión de la solución mediante integrales de volumen.** — Sustituyendo en (23.3) la función z por su expresión como media proyectiva de la función p del n.º 12, y después de algunas transformaciones ⁽¹⁾, la solución de nuestro problema diferencial (9.2), (9.3) se expresa :

$$u(t, x, y) = -\frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{\bar{f}(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t-\tau) J_0\left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t}\right)} \quad (24.1)$$

donde V es el volumen limitado por el cono característico de vértice en el punto t, x, y , y la superficie Γ (n.º 9)

$$t = \psi(x, y) \quad (24.2)$$

y la función \bar{f} , es el resultado de aplicar a f el operador I ,

$$\bar{f} = If = \int_{\psi}^t f(\tau, x, y) d\tau$$

El cono característico de vértice en t, x, y , forma una superficie de dos hojas, que sólo tienen común el vértice del cono, y que corresponden a la proyección cónica desde el vértice de los dos continuos reales de las curvas de tercera clase antes estudiadas. Entendemos que el volumen V , es el comprendido entre aquellas dos hojas y la superficie Γ , sobre la que se dan las condiciones iniciales. Haremos sobre la misma la siguiente hipótesis :

⁽¹⁾ El cálculo es enteramente análogo al desarrollado en la memoria tantas veces citada de CASULLERAS. Por tal motivo no lo repetimos en el presente trabajo.

La superficie Γ , sobre la que se dan los valores iniciales, es cortada en un solo punto por las generatrices del cono característico. Esta hipótesis se satisface, por ejemplo, en el caso de ser una superficie suficientemente regular que no tenga ninguna clase de contacto con ningún cono característico de vértice en uno de sus puntos, y tomando el punto t, x, y , en las proximidades de aquella superficie. Supondremos, además, para fijar las ideas, que tomamos aquel punto encima de la superficie $\Gamma : t > \psi(x, y)$.

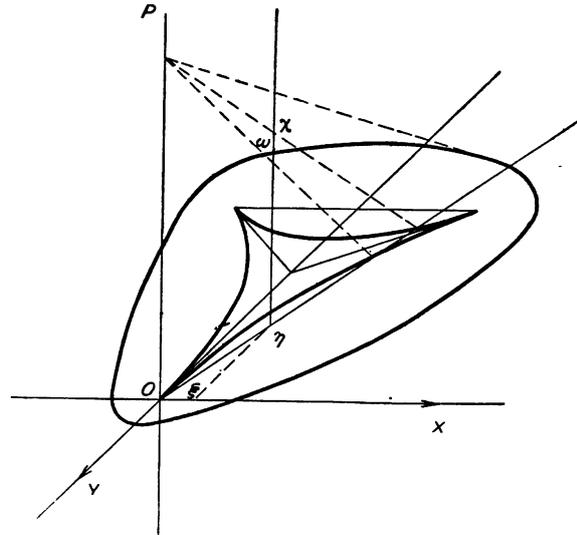


Fig. X

Calculemos ahora la integral (24.1); haremos en primer lugar la integración respecto de τ teniendo en cuenta que, en general, una recta $x = \xi, y = \eta$ cortará al contorno de V en tres puntos \bar{t}, χ, ω , (fig. X) $\omega < \chi < \bar{t}$:

$$u(t, x, y) = -\frac{1}{\pi} \iint_S d\xi d\eta \left\{ \int_{\chi}^{\bar{t}} \frac{\bar{f}(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J_0\left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t}\right)} + \int_{\psi}^{\omega} \frac{\bar{f}(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J_0\left(\frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t}\right)} \right\} \quad (24.2)$$

donde, S es la proyección de V sobre el plano xy , y sustituyendo la segunda integral por cero cuando $\omega \leq \psi$, sustituyendo en la primera χ por ψ cuando $\chi \leq \psi$, y cuando la recta $x = \xi, y = \eta$ corte sólo a la hoja ex-

terior, ambas sustituciones; calcularemos por partes la integral respecto τ , llamando

$$\varphi(t, x, y, \tau, \xi, \eta) = \int_{\bar{i}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t-\tau') J_0 \left(\frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} \quad (24.3)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} & \int_{\chi}^{\bar{i}} \frac{\bar{f} d\tau}{(t-\tau) J_0} + \int_{\psi}^{\omega} \frac{\bar{f} d\tau}{(t-\tau) J_0} = \\ & = [\varphi(t, x, y, \tau, \xi, \eta) \bar{f}(\tau, \xi, \eta)]_{\tau=\chi}^{\tau=\omega} - \int_{\chi}^{\bar{i}} \varphi \cdot f(\tau, \xi, \eta) d\tau - \int_{\psi}^{\omega} \varphi f(\tau, \xi, \eta) d\tau \end{aligned}$$

puesto que $[\varphi]_{\tau=\bar{i}} = 0$, según (24.3), y $[\bar{f}]_{\tau=\psi} = 0$.

Integrando los dos miembros de la expresión anterior respecto ξ, η extendiendo la integral al dominio S , en el primer miembro aparece (24.2), y en el segundo miembro los dos últimos términos se transforman en una integral de volumen extendida a V , y el primero, integrado ya respecto τ da una integral de superficie extendida a la hoja interior H del cono característico limitada por el vértice t, x, y , y la superficie I' . Designando por γ el coseno director respecto el eje τ , de dicha superficie H , obtenemos como fórmula resolutive:

$$\begin{aligned} & u(t, x, y) = \quad (24.4) \\ & = \frac{1}{\pi} \iiint_V \varphi(t, x, y; \tau, \xi, \eta) f(\tau, \xi, \eta) dV - \frac{1}{\pi} \int_H \varphi(t, x, y; \tau, \xi, \eta) \bar{f}(\tau, \xi, \eta) \gamma dS \end{aligned}$$

Es de advertir que (24.3) define la función φ sólo cuando el valor de τ está situado en $\chi \leq \tau \leq \bar{i}$, puesto que J_0 sólo estaba estudiado para X, Y en el interior del dominio D (n.º 23). Cuando τ tome valores comprendidos en el intervalo $\psi \leq \tau \leq \omega$, tomamos:

$$\begin{aligned} & \varphi(t, x, y, \tau, \xi, \eta) = \\ & = \int_{\bar{i}}^{\chi} \frac{d\tau'}{(t-\tau') J_0 \left(\frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} + \int_{\omega}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t-\tau') J_0 \left(\frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} \quad (24.5) \end{aligned}$$

lo que puede conseguirse siempre gracias a que la función φ queda definida en la integración por partes a menos de una constante arbitraria. Con este convenio,

$$\begin{aligned} [\varphi(t, x, y; \tau, \xi, \eta) \bar{f}(\tau, \xi, \eta)]_{\tau=\chi}^{\tau=\omega} &= \varphi(t, x, y; \chi, \xi, \eta) \int_{\chi}^{\omega} f(\tau, \xi, \eta) d\tau = \\ &= - \int_{\omega}^{\chi} \varphi(t, x, y; \chi, \xi, \eta) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \end{aligned}$$

y al integrar respecto ξ, η , la fórmula (24.4) puede sustituirse por la

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \iiint_V \varphi(t, x, y; \tau, \xi, \eta) f(\tau, \xi, \eta) dV + \frac{1}{\pi} \iiint_C \varphi(t, x, y, \chi, \xi, \eta) f dV \end{aligned}$$

designando con C un nuevo volumen limitado por la hoja interior del cono característico, y la superficie Γ de las condiciones iniciales. El núcleo en ambas integrales de volumen sólo difiere en que en la primera es independiente de la variable t , por tomarse $\tau = \chi$ (o indistintamente $\tau = \omega$), es decir, el valor de φ en la hoja interior del cono característico. En definitiva, el valor de la solución en un punto, depende de los valores que toma la función f en todo el cono convexo, mínima cobertura del cono característico de acuerdo con la teoría general.

25. Estudio del núcleo resolvente. — La función $\varphi(t, x, y; \tau, \xi, \eta)$, cuando $\tau \geq \chi$, viene dada por la expresión (24.3) en la que es fácil de efectuar la integración mediante un cambio de variables. La función J_0 , está definida en el n.º 23 por la relación

$$\frac{1}{J_0} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right) \text{ en } D_1 \quad (25.1)$$

y sustituyendo J_1 por J_3 en D_2 , pero para mayor comodidad haremos el cálculo escribiendo siempre J_1 , aunque los razonamientos son válidos en D_2 como en D_1 . Haciendo la sustitución (25.1) en (24.3), obtenemos :

$$\begin{aligned} \varphi(t, x, y; \tau, \xi, \eta) &= \\ &= \frac{1}{2i} \int_i^\tau \frac{d\tau'}{(t-\tau') J_1 \left(\frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} - \frac{1}{2i} \int_i^\tau \frac{d\tau'}{(t-\tau') J_2 \left(\frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} \end{aligned} \quad (25.2)$$

Las dos funciones subintegrales del segundo miembro son imaginarias conjugadas ; bastará calcular la primera de las integrales para obtener inmediatamente la segunda.

Notemos que el núcleo resolvente φ depende exclusivamente de las diferencias

$$\xi - x = X, \quad \eta - y = Y, \quad \tau - t = T \quad (25.3)$$

expresándose en función de éstas nuevas variables, cambiando previamente la variable de integración $\tau' - t = T'$:

$$\varphi(T, X, Y) = \frac{1}{2i} \int_T^{\bar{T}} \frac{dT'}{T' J_1\left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'}\right)} - \frac{1}{2i} \int_T^{\bar{T}} \frac{dT'}{T' J_2\left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'}\right)} \quad (25.4)$$

donde \bar{T} es el valor de T que corresponde a la intersección de la recta $x = X$, $y = Y$ con la hoja exterior del cono característico. El cambio (25.3) equivale a llevar el origen al vértice l , x , y , del cono característico. Con nuestra hipótesis de que dicho punto está encima de T , es siempre $T < \bar{T} < 0$.

En (25.4) podemos interpretar las variables T , X , Y (siguiendo a CASULLERAS), como coordenadas homogéneas de un punto del plano impropio. El cono característico se proyecta en él según nuestra envolvente E , el punto \bar{T} según un punto de la curva puntual $P(X, Y) = 0$; fijados X , Y por (25.3), al variar T' el punto correspondiente T' , X , Y , describe una recta que pasa por el origen, sobre la que hay que efectuar las integraciones de (25.4) desde el valor T , hasta el valor T' para el que $X : T'$, $Y : T'$ está sobre la curva $P(X, Y) = 0$.

Tomemos ahora como nueva variable de integración en (25.4) el parámetro λ de uniformización de la función J , utilizado en (15.2); λ se expresará en función implícita de T' por

$$\frac{X}{T'} p' \lambda + \frac{Y}{T'} p \lambda + 1 = 0 \quad (25.5)$$

ecuación que tendrá tres raíces en λ dentro de un paralelogramo de períodos, que serán una real y las otras dos imaginarias conjugadas (salvo un período) mientras $X : T'$, $Y : T'$ sea punto interior a D . Como consecuencia, el cambio de diferenciales vendrá dado por

$$dT' = -(X p'' \lambda + Y p' \lambda) d\lambda \quad (25.6)$$

En cuanto al camino de integración, se obtendrá tomando los valores de λ correspondientes a los valores de T' del segmento $T < T' < \bar{T}$

(fig. XI); en las dos integrales de (25.4) hacemos cambios de variables distintos, aunque dados por las mismas fórmulas implícitas (15.2), (25.5), (25.6), puesto que precisa que las dos determinaciones J_1, J_2 de J estén siempre relacionadas con las correspondientes λ_1, λ_2 de λ por la relación (15.2):

$$J_i \left(\frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right) = -2 \left(\frac{X}{T'} p'' \lambda_i + \frac{Y}{T'} p' \lambda_i \right), \quad i = 1, 2 \quad (25.7)$$

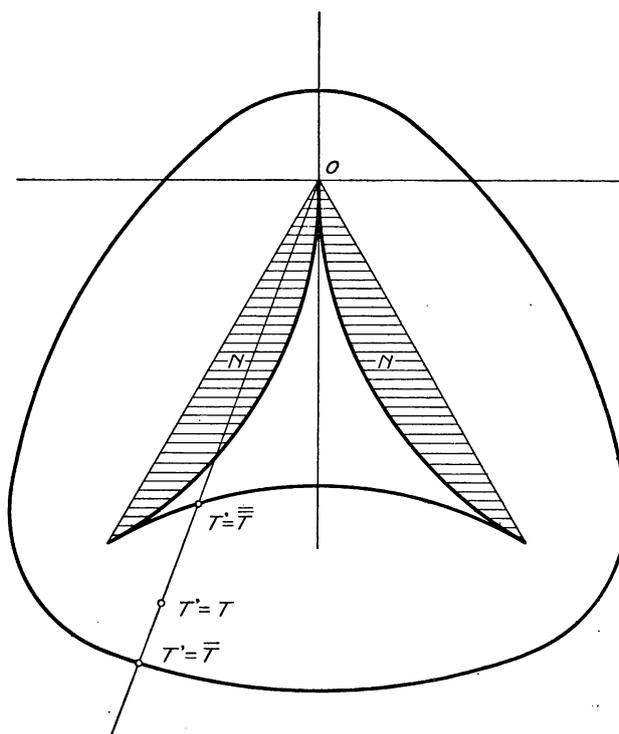


Fig. XI

Con esto obtendremos en las integrales de (25.4) dos caminos de integración distintos, imaginarios conjugados salvo un período, que tendrán común el extremo superior $\bar{\lambda}$ correspondiente al valor \bar{T} de T' , ya que en él se confunden las dos determinaciones λ_1, λ_2 , de λ . Haciendo entonces en (25.4) el cambio de variables definido por (25.5), (25.6) y (25.7), obtenemos:

$$\varphi(T, X, Y) = \varphi(\lambda) = \frac{1}{2i} \int_{\lambda_1}^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda}{2} - \frac{1}{2i} \int_{\lambda_2}^{\bar{\lambda}} \frac{d\lambda}{2} = \frac{1}{4i} (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (25.8)$$

λ_1, λ_2 están definidos a menos de un período: vamos a determinarlos sin ambigüedad de forma que siempre permanezcan en el interior de un mismo paralelogramo de períodos. Para $T' = \bar{T}$, toman los valores $\lambda_1 = \lambda_2 = \bar{\lambda}$, es decir, se confunden dos raíces de la ecuación (25.5), en una sola raíz real; $\bar{\lambda}$ satisfará, pues, a aquella relación y a la obtenida derivando:

$$\frac{X}{T} p'' \lambda + \frac{Y}{T} p' \lambda = 0 \quad (25.9)$$

Pero el sistema (25.5) unido a (25.9) ha sido ya resuelto en el n.º 6, y da para $X : T, Y : T$, puntos de la curva puntual $P = 0$, y para λ el valor correspondiente del parámetro en la representación paramétrica allí establecida; para $T' = \bar{T}$ el punto $X : T', Y : T'$, cae en el continuo exterior de la curva puntual $P = 0$, luego, $\bar{\lambda}$ está situado sobre la paralela media del paralelogramo de períodos, y en el lugar que le asigna la correspondencia paramétrica representada en la figura II.

Al variar T' de forma que $X : T', Y : T'$ esté en el interior del dominio D , λ_1, λ_2 partiendo de $\bar{\lambda}$ y variando con continuidad irán tomando valores simétricos respecto de la paralela media del paralelogramo de períodos; es decir, λ_1, λ_2 , tendrán igual parte real, y las partes imaginarias (para situarnos siempre en el paralelogramo de períodos, que tiene un vértice en el origen y está en el cuadrante positivo de los ejes), serán complementarias respecto $2\omega'$. La tercera raíz en λ de (25.9) es siempre real, y es el valor de λ que corresponde en la figura II a la tangente trazada al continuo real interior de la curva $P = 0$. Al tender T' al punto \bar{T} situado sobre aquel continuo, λ_1, λ_2 , tienden hacia puntos, simétricos respecto la base media, de las bases superior e inferior del paralelogramo de períodos, es decir, sus partes imaginarias, tienden a cero salvo un período.

Designemos por $\Im \lambda$ el coeficiente de i en la expresión compleja de λ ; teniendo en cuenta que la función φ de (25.8) es constantemente no positiva en virtud de (24.3), puesto que J_0 es esencialmente positivo y $\tau < \tau' < \bar{t} < t$, tendremos:

$$\frac{1}{i}(\lambda_2 - \lambda_1) < 0 \quad \Im \lambda_2 < \Im \lambda_1 = 2|\omega'| - \lambda_2 \quad (25.10)$$

con lo cual

$$\varphi(T, X, Y) = \varphi(\lambda) = \frac{1}{4i}(\lambda_2 - \lambda_1) = -\frac{1}{2}(|\omega'| - \Im \lambda_2), \chi < \tau < \bar{t}, \quad (25.11)$$

que nos da la expresión del núcleo resolvente, y donde λ_2 depende de las variables (25.3), siendo la raíz de la ecuación

$$\frac{\xi - x}{\tau - t} p' \lambda + \frac{\eta - y}{\tau - t} p \lambda + 1 = 0 \quad (25.12)$$

que está situada en la mitad inferior del paralelogramo de periodos.

Cuando el punto τ, ξ, η , tiende hacia la hoja interior del cono característico, es decir, el punto $X : T', Y : T'$, tiende hacia el continuo real interior de la curva $P(X, Y) = 0$, las raíces imaginarias de (25.12) tienden hacia las bases del paralelogramo de periodos considerado, en el punto que corresponde a λ en la representación paramétrica de $P = 0$; en aquel punto $\Im \lambda_2 = 0$, y con nuestras notaciones podremos escribir :

$$\varphi(t, x, y; \chi, \xi, \eta) = \varphi(t, x, y; \omega, \xi, \eta) = -\frac{|\omega'|}{2} \quad (25.13)$$

Cuando $\tau < \omega$, la función φ se expresaba por (24.5); aplicando ahora el mismo razonamiento anterior; la primera integral de (24.5) tomará el valor (25.13), $-|\omega'|/2$; en cuanto a la segunda representará igualmente la mitad de la integral de la variación de λ ; para $\tau' = \omega$, T' estará en el continuo interior de la curva $P = 0$, y, por tanto, λ tomará un valor real; además, la segunda integral será esencialmente negativa como la primera; de aquí que cuando τ tome valores $\psi \leq \tau \leq \omega$,

$$\varphi(T, X, Y) = \varphi(\lambda) = -\frac{|w'|}{2} - \frac{\Im \lambda_2}{2} = -\frac{1}{2}(|\omega'| + \Im \lambda_2) \quad (25.14)$$

donde λ_2 tiene la misma significación que en (25.11).

Resumiendo: *La solución de nuestra ecuación entre derivadas parciales (9.3) con las condiciones iniciales (9.2) viene dada por*

$$u(t, x, y) = \quad (25.15)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \iiint_V (|\omega'| - \Im \lambda_2) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta - \frac{|\omega'|}{2\pi} \iiint_C f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta$$

donde V es el volumen comprendido entre las dos hojas del cono característico y la superficie Γ sobre la que se dan las condiciones iniciales, C el volumen limitado por la hoja interior del cono característico y la misma Γ , ω' el período imaginario puro de la función elíptica de invariantes g_2, g_3 , y $\Im \lambda_2$ la parte imaginaria de la raíz de la ecuación (25.12), que está situada en la mitad inferior del paralelogramo de periodos con

un vértice en el origen y en el cuadrante positivo de los ejes, tomada con signo positivo excepto cuando el punto $([\xi - x] : [\tau - t], [\eta - y] : [\tau - t])$ está en el dominio N limitado por la curva $P = 0$ (continuo interior) y las rectas que pasan por el origen y los puntos de retroceso reales (fig. XI), en cuyo caso hay que tomarla con signo negativo.

26. **Condiciones iniciales de tipo general.** — El estudio anterior se ha hecho suponiendo las funciones $\varphi_i(t, x, y)$ de (9·1) nulas sobre la superficie I' en la que se daban las condiciones iniciales. En el caso general de ser aquellas funciones cualesquiera, no son aplicables los razonamientos hasta ahora efectuados en el presente trabajo, pero para resolver aquel caso basta proceder en la forma indicada por FANTAPPIÉ⁽¹⁾, introduciendo en lugar de u la incógnita auxiliar Iu , y aplicando, antes de todo cálculo el operador I a los dos miembros de nuestra ecuación. Bastará derivar la solución del nuevo problema respecto de t , para obtener la solución del problema propuesto. También en el n.º 9 hemos indicado la manera de reconducir, mediante un cambio de variables, el caso presente al que hemos venido estudiando en el presente trabajo.

⁽¹⁾ Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones. Barcelona, 1943, página 166.

