INTRODUCCIÓN A UN ESTUDIO GEOMETRICO DE LA TEORÍA DE ERRORES

POR

FRANCISCO DE A. SALES VALLÉS

CAPÍTULO I

LEY DE ERRORES

1. **Valor plausible y precisión.** Supongamos que se han efectuado m medidas, en las mismas condiciones, de una cierta magnitud física, habiéndose obtenido los resultados x_1, x_2, x_3, ..., x_m. (Puede haber varios valores iguales entre sí). La primera cuestión que se plantea es la siguiente: ¿Qué valor hemos de considerar como medida de la magnitud? Y como cuestión inmediata, ¿Qué grado de confianza podemos poner en este valor? O de otra forma. ¿Cuál es la precisión de este resultado? (1).

Llamaremos *ley de errores* a unas normas que nos permitan resolver las dos cuestiones anteriores, es decir, señalar un valor a la magnitud y una medida de la confianza. Llamaremos *valor plausible* a un valor que se pueda tomar como medida de la magnitud según una determinada ley de errores.

Una forma de dar una ley de errores es mediante una función de distribución de probabilidades $F(x)$ considerada como distribución de las probabilidades de cometer un determinado error, pero no es suficiente dar esta función, sino que hay que tener además un criterio para deducir de ella el *valor plausible* y la medida de la confianza (precisión). Pueden adoptarse diversos criterios que nos sirvan, conociendo ya la función de probabilidades de los errores, para calcular el valor plausible (criterio del valor medio, de la mediana, del valor más probable, etcétera) y diversas medidas de la precisión (la inversa de la dispersión calculada ésta como la raíz cuadrada del momento de segundo orden

(1) Ver P. LEVY, *Calcul des Probabilités.*

respecto al valor medio, la inversa del momento absoluto de 1.^{er} orden, etcétera).

Es sabido ya que para la ley normal los diversos criterios para hallar el valor plausible coinciden, pero no ocurre así con otras leyes que se pueden adoptar (¹). Recíprocamente: supuesto ya dado un criterio para deducir de los datos empíricos el valor plausible, la función de probabilidad de los errores sirve para dar a este valor un significado en términos de probabilidad. Así en la ley normal, supuesto ya admitido el valor medio o media aritmética como valor plausible, éste es el que hace máxima la expresión $\varphi(x - x_1) \cdot \varphi(x - x_2) \dots \varphi(x - x_m)$ siendo $\varphi(x)$ la densidad de probabilidad.

Lo importante para que se pueda decir que se conoce una ley de errores, es pues el saber deducir de los datos de la observación el valor plausible y tener una medida de la precisión del resultado aceptado.

2. **Leyes empíricas de los errores.** En todo intento de establecer una ley de errores se han de introducir previamente unas hipótesis o postulados, entre los cuales, hay que distinguir dos categorías: Hipótesis que pueden considerarse como leyes empíricas, es decir, que vienen impuestas por las experiencias, e hipótesis que se añaden a las primeras para hacer posible una solución. De la primera clase son:

Ley de simetría. Suele enunciarse en la forma siguiente: *Si el número de observaciones es muy grande, se producen en igual número los errores positivos que los negativos.* En una forma más rigurosa puede enunciarse de la siguiente manera: *Hecho un gran número de observaciones y ordenados los valores obtenidos en sucesión no decreciente* x_1, x_2, x_3, ..., x_m, *existe un intervalo central que tiene tendencia a permanecer fijo al ir aumentando el número de observaciones*, o bien, en una forma más concisa, *existe un intervalo formado por valores medianos de la sucesión que tiende a permanecer fijo.*

Ley de los grandes errores. Suele enunciarse en la forma siguiente: *La frecuencia de un error decrece al aumentar su valor absoluto.* Un enunciado más preciso sería: *Los valores observados que se apartan mucho del intervalo de valores medianos son muy poco frecuentes.*

Estas dos leyes empíricas se resumen en un solo enunciado que llamaremos *Ley de la media aritmética;*: *Cuando se han efectuado un gran número de observaciones, la media aritmética de los valores observados es un valor mediano.*

(¹) Véase Polya G., *Sur une proprieté caracteristique de la loi de Gauss.* Ann. Inst. H. Poincaré. t. I. 1931. pág. 118.

Los enunciados de estas leyes empíricas tienen una cierta imprecisión debido a que son principios empíricos y no permiten por tanto expresar otra cosa que una tendencia, son en cierto modo aspectos de la ley empírica del azar aplicada a la teoría de errores.

Desde el punto de vista puramente matemático puede considerarse la ley de la media aritmética como una definición de los errores accidentales, puesto que puede decirse que si se han efectuado un gran número de observaciones y no se cumple, es que hay errores sistemáticos que impiden el cumplimiento de la ley empírica del azar. Obsérvese que la recíproca no es cierta, es decir, puede cumplirse la ley de la media aritmética y haber errores sistemáticos aditivos, o sea un desplazamiento constante del origen de las medidas.

Estas hipótesis empíricas han de ser comunes a todos los procesos que conducen al establecimiento de una ley de errores, y son las que se añaden a ellas las que conducen a resultados distintos si se toman diferentes. Es conocido que para obtener la ley normal o de GAUSSS-LAPLACE a estas dos hipótesis hay que añadir o bien la sumabilidad de los errores elementales en la formación del error final (LAPLACE) o bien la hipótesis de BAYES de las probabilidades de las causas (GAUSS). También se sabe que si se supone que el error total es el máximo error elemental (FRECHET) se obtiene una ley de errores distinta a la normal, y si se admite que la formación del error sigue un proceso comparable a la distribución al azar sobre una recta de los puntos de un conjunto de densidad lineal constante, se obtiene la 1.ª ley de LAPLACE.

3. **Ley de probabilidad de los errores.** Además de las dos cuestiones fundamentales en la teoría de errores, puede plantearse el problema de hallar la distribución de las probabilidades de los errores. Ya hemos visto como su conocimiento puede servir para resolver el problema práctico. Recíprocamente, una determinada ley de errores lleva implicada una determinada distribución de probabilidades, así es, como se sabe, que la ley de los mínimos cuadrados corresponde a la ley de GAUSS de probabilidades, la ley de los módulos mínimos corresponde a la 1.ª ley de LAPLACE, etc.

El problema teórico o sea de hallar la distribución de probabilidades puede plantarse en la forma siguiente, en la cual es fácil ver la relación entre las dos cuestiones: Habiéndose efectuado m observaciones de una misma magnitud, y habiéndose obtenido los valores x_1, x_2, x_3, ..., x_m, ¿Cuál es la probabilidad de que en una nueva observación se obtenga un valor prefijado?

Una primera indicación sobre esta probabilidad ya viene dada por la segunda ley empírica, o sea la ley de los grandes errores, ya que identificando la frecuencia con la probabilidad, podemos decir que los valores próximos al intervalo mediano les ha de corresponder probabilidades superiores a los valores más alejados. Teniendo en cuenta el teorema de Bienaymé - Tchebycheff, podemos deducir sin necesidad de conocer la ley de probabilidades de los errores, una limitación inferior de la probabilidad de un desvío absoluto respecto al valor plausible menor que un múltiplo dado del valor medio cuadrático de estos desvíos, así si X es el valor plausible se tiene

$$\text{Prob}\ \{|X - x| < t\sigma\} \geqslant 1 - \frac{1}{t^2}$$

para $t > 1$. No podemos conocer el valor exacto de esta probabilidad sino conocemos la ley de probabilidad de los errores.

Vamos a intentar establecer, mediante consideraciones de carácter geométrico, apoyándonos solamente en las leyes empíricas de los errores, enunciadas anteriormente, lo que ha de ser común a toda ley de errores, es decir, esclarecer qué parte es propiamente deducida de la experiencia y qué parte se debe a las hipótesis adicionales.

El carácter general del problema nos llevará, no a una ley concreta de distribución de probabilidades sino a un tipo de ley que podrá adaptarse a toda hipótesis ulterior más concreta que se haga sobre los errores.

Estas hipótesis adicionales suelen ser de naturaleza muy distinta, unas presuponen un cierto conocimiento del mecanismo de la formación de los errores, como por ejemplo ocurre en la hipótesis de la aditividad de los errores elementales, o en la hipótesis que conduce a la 1.ª ley de Laplace, otras afectan al carácter analítico de la función de probabilidades, como por ejemplo ocurre en las hipótesis de Gauss, en la cual se supone no sólo la absoluta continuidad de la ley de probabilidades sino también la continuidad de la derivada de la función densidad.

Según nuestro punto de vista estas hipótesis adicionales han de tener un carácter general para que puedan admitirse, es decir, han de presuponer conocimientos globales y no muy precisos, así son aceptables las hipótesis que hemos señalado anteriormente, así como la de Frechet sobre el máximo error elemental, pero no es admisible, como hace F. Haussdorff (1), suponer la aditividad de los errores elementales y que cada uno de ellos siga una ley bien determinada.

(1) Leipzig Ber. t. 53. En realidad no es la intención de Haussdorff llegar a una ley de errores, sino demostrar que no basta la aditividad de los errores parciales para que se obtenga la ley normal.

Las demostraciones, o mejor dicho, verificaciones experimentales de una determinada ley de errores no indican otra cosa que en aquel caso, o sea, en el mecanismo experimental que se ha utilizado para obtener las medidas, se verifican las hipótesis adicionales conducentes a la ley de que se trate, pero no permiten deducir consecuencias más generales, es decir, la validez de la ley en otros casos distintos.

CAPÍTULO II

ESPACIO DE LOS VALORES OBSERVADOS

1. **Criterios determinativos del valor plausible.** Supongamos que se han efectuado m medidas de una misma magnitud física, y que estas medidas están libres de errores sistemáticos, es decir, cumplen las dos leyes empíricas de los errores. Sean los resultados obtenidos: X_1, X_2, X_3, ... X_m, los cuales se pueden suponer todos positivos, pues en caso contrario bastaría un cambio de origen en las medidas.

Tomaremos estos valores como coordenadas de un punto P_1 en un espacio de m dimensiones. Si se hubiesen hecho las medidas sin error, todos los resultados hubiesen sido iguales, luego en este espacio de m dimensiones vendrían representados por un punto de la recta

$$x_1 = x_2 = x_3 \ldots = x_m,$$

que designaremos por $\varDelta$.

Si consideramos los resultados obtenidos en otro orden, distinto al que se han obtenido, sería otro punto en el espacio de m dimensiones el representativo de las medidas, o sea que las m medidas nos dan, no un sólo punto sino m puntos, los cuales todos ellos están situados en el hiperplano $\varPi$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = K,$$

siendo

$$K = \sum_{i=1}^{m} X_i.$$

Si todas las observaciones se han hecho con las mismas condiciones conocidas podemos tomar indistintamente cualquiera de estos puntos P_i como representativo de la serie de medidas, pero sino ocurre así no podemos alterar el orden de los resultados y sólo el punto P_1 nos representará a la serie.

Un valor plausible de la magnitud medida ha de estar representado por un punto de la recta Δ y su posición en ella sólo debe depender del punto P_1 representativo de la serie de medidas efectuadas.

Pueden adoptarse tres tipos de criterios para decidir el valor plausible:

1. *Criterios de incidencia.* Se toma como valor plausible la intersección de la recta Δ con una hipersuperficie determinada por los puntos P_i representativos de la serie de medidas.

2. *Criterios de ortogonalidad.* Se toma como valor plausible el definido por el punto de la recta Δ tal que el hiperplano perpendicular a Δ en este punto contenga a un punto determinado de los P_i.

3. *Criterios de mínimo.* Se toma como valor plausible el definido por un punto de la recta Δ tal que minime una cierta función de las coordenadas de P_i, en particular la distancia al punto P_i.

2. **Criterios de incidencia.** En el primer caso, el problema de determinar el valor plausible está íntimamente relacionado con el problema de la determinación de valores promedios. En efecto: Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ la ecuación de la hipersuperficie determinada por los valores $X_1, X_2, \ldots, X_m$, la intersección de esta hipersuperficie con la recta Δ vendrá dada por la ecuación

$$f(X, X, \ldots X) = 0,$$

luego esta intersección es el valor promedio definido por la relación $f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m) = 0$. [1]

Si nos colocamos en el caso de que las medidas son homogéneas, es decir, todas ellas efectuadas con las mismas condiciones conocidas, la hipersuperficie $f(x_1, x_2, \ldots x_m) = 0$ será simétrica respecto a $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$. Si además queremos que el valor plausible sea tal que al aumentar por lo menos uno de los valores X_i aumente (monotonía) y que si sustituímos varios valores X_i por su valor plausible deducido de ellos (asociatividad), el valor plausible no altere, entonces por el teorema de Namuro - Kolmogoroff, existirá una transformación continua $X_i = \psi(\overline{X}_i)$ tal que el valor plausible X deducido por la relación $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ verifica

$$\psi(X) = \frac{1}{m} \Sigma\, \psi(\overline{X}_i),$$

es decir, se reduce a una media aritmética.

---

(1) Véase B. de Finetti. *Sul concetto di media*. Gior. Ist. It. Att. t. II. 1931. página 369.

Si queremos que el valor plausible sea tal que al aumentar todos los resultados en una cantidad constante aumente también en esta cantidad constante, es decir, sea traslativo, sólo podemos considerar valores plausibles a las medias potenciales o sea

$$X = \sqrt[n]{\frac{1}{m} \sum_1^m X_i^n}$$

y si además queremos que sea homogéneo, es decir, que al multiplicar cada resultado por un valor constante quede X multiplicado por este factor constante, sólo se puede tomar como valor plausible la media aritmética, que viene definida como la intersección del hiperplano Π

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m = K$$

con la recta Δ

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_m.$$

3. **Criterios de ortogonalidad.** En el segundo caso, el valor plausible depende en general de qué punto P_i se trata y de la métrica adoptada en el espacio de los valores observados.

Sean

$$a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + \dots + a_{mm}\, x_m^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + \dots + 2\, a_{m-1}\, a_m\, x_{m-1}\, x_m = d \quad (S)$$

las hipercuádricas fundamentales de la métrica. La ortogonalidad se definirá considerando ortogonales el hiperplano tangente en un punto de la hipercuádrica fundamental y el radio vector que contenga a este punto.

El hiperplano polar de P_1 respecto a (S) será

$$x_1 \sum a_{1i}\, X_i + x_2 \sum a_{2i}\, X_i + \dots x_m \sum a_{mi}\, X_i = d,$$

su intersección con Δ verificará

$$d = X\, (\sum a_{1i}\, X_i + \sum a_{2i}\, X_i + \dots + \sum a_{mi}\, X_i),$$

o sea

$$X = \frac{d}{\sum a_{1i}\, X_i + \sum a_{2i}\, X_i + \dots + \sum a_{mi}\, X_i}.$$

Para que este punto esté sobre (S) se ha de verificar

$$X^2 \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} = d,$$

o sea

$$X^2 \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} = X [\sum a_{1i} X_i + \sum a_{2i} X_i + \dots + \sum a_{mi} X_i],$$

de donde

$$X = \frac{X_1 \sum a_{i1} + X_2 \sum a_{i2} + \dots + X_m \sum a_{im}}{\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}}. \tag{1}$$

El valor plausible es pues una media aritmética ponderada de los resultados. Si consideramos las medidas homogéneas, este valor plausible ha de ser el mismo cualquiera que sea el punto P_i adoptado, o sea (1) ha de ser simétrica respecto a las X_i, de donde

$$\sum a_{i1} = \sum a_{i2} = \dots = \sum a_{im} = \sigma$$

y entonces se verifica

$$X = \frac{\sigma (X_1 + X_2 + \dots + X_m)}{m \sigma} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i,$$

o sea, se obtiene la media aritmética. Como que este mismo resultado se obtiene al buscar la intersección de la recta Δ con el hiperplano Π, resulta que en el caso de que las medidas sean homogéneas, las hipercuádricas fundamentales han de ser tales, que, no sólo Δ y Π han de ser ortogonales en el sentido euclídeo, sino también en la métrica definida por dichas hipercuádricas fundamentales. Estas pues, han de tener como eje a la recta Δ.

Vemos pues, que el segundo criterio para determinar el valor plausible coincide con el primero cuando se supone la homogeneidad de las medidas, y las condiciones restrictivas señaladas anteriormente en la admisión de valores plausibles, o sea la aditividad, homogeneidad y traslatividad del valor plausible.

4. **Criterios de mínimo.** En el tercer caso, si las hipercuádricas fundamentales son

$$\begin{gathered} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{mm} x_m^2 + \\ + 2 a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 a_{m-1,m} x_{m-1} x_m + d = 0, \end{gathered}$$

la expresión de la distancia entre el punto de la recta Δ (X, X, X, ... X) y el punto P_1 de coordenadas (X_1, X_2, X_3, ..., X_m) será

$$d^2 = \sum_{i=1}^{m} a_{1i} (X - X_i)^2 + \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} (X - X_i)(X - X_j)\,;$$

si esta distancia ha de ser la misma para todo punto P_i representativo de la serie de medidas, la expresión ha de ser simétrica respecto a las X_i o sea

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{m,m}$$

y

$$a_{rs} = a_{pq}$$

cualesquiera que sean $r\ s$ y $p\ q$, o sea las hipercuádricas fundamentales han de ser de la forma

$$A \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + B \sum_{i,j=1}^{m} x_i\, x_j + d = 0.$$

Resumiendo: Solamente existen dos clases de valores plausibles; 1.º, la media aritmética, cuyo valor no depende de la métrica adoptada en el espacio de los valores observados, y 2.º, el valor dado por el punto de Δ que mínima la distancia a un punto cualquiera P_i representativo de la serie de medidas. Al primero lo designaremos por P y al segundo que depende de la métrica adoptada lo designaremos por M.

CAPÍTULO III

METRICAS ESPECIALES

1. **Espacio Euclídeo.** Se toman como cuádricas fundamentales las hiperesferas

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_m^2 = r^2$$

y como expresión de la distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_m - \bar{x}_m)^2}.$$

Sea M, (X, X, ..., X) el punto de la recta Δ cuya distancia al punto P_1 de coordenadas X_1, X_2, X_3, ..., X_m, representativo de la serie de medidas, sea mínima, X será el valor que hace mínimo la expresión

$$\sum_{i=1}^{m} (X - X_i)^2, \tag{1}$$

o sea la media aritmética.

Tenemos pues, que en este caso el valor plausible P, o sea la media aritmética de los valores X_i coincide con el valor plausible M.

Podemos tomar como medida de la precisión de las medidas la inversa de la distancia d de los puntos P_i al valor M

$$h = \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} (X - X_i)^2}} = \frac{1}{\sigma}.$$

Si designamos por $\varphi(\xi)\, d\,\xi$ la probabilidad de cometer un error comprendido entre ξ y $\xi + d\,\xi$ y el valor plausible el que haga máxima la expresión

$$\varphi(X - X_1)\,\varphi(X - X_2) \ldots \varphi(X - X_m),$$

(o el valor medio de esta expresión o el valor mediano) y queremos que este valor coincida con la media aritmética de los valores X_i, habrá de ser

$$\varphi(\xi)\, d\,\xi = K\, e^{-\alpha \xi^2}\, d\,\xi\,;$$

o sea, hallamos la ley de GAUSS - LAPLACE como ley de distribución de los errores.

2. **Espacio parabólico especial.** Según hemos visto ya, solo pueden admitirse como hipercuádricas fundamentales las de la forma

$$A \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + B \sum_{i,j=1}^{m} x_i\, x_j = D. \tag{S}$$

La expresión de la distancia deducida de las (S) es

$$d = \sqrt{A \sum (\bar{x}_i - x_i)^2 + B \sum (\bar{x}_i - x_i)(\bar{x}_j - x_j)}.$$

Si $B < A$ la métrica es elíptica, el caso particular de $B = 0$ es la euclídea. Si $B = A$ la métrica es parabólica. Si $B > A$ la métrica es hiperbólica.

En el caso parabólico las hipercuádricas fundamentales son del tipo

$$\sum x_i^2 + \sum x_i\, x_j = D,$$

o sea

$$[\sum x_i]^2 = D,$$

es decir, las (S) son los hiperplanos

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \pm \sqrt{D}.$$

La expresión de la distancia será

$$d = \sqrt{\Sigma\,(\bar{x}_i - x_i)^2 + \Sigma\,(\bar{x}_i - x_i)\,(\bar{x}_j - x_j)} =$$
$$= \sqrt{[\Sigma\,(\bar{x}_i - x_i)]^2} = \Sigma\,(\bar{x}_i - x_i)\,;$$

como que la distancia ha de ser positiva, modificaremos esta expresión (modificación que no altera los resultados esenciales) y tomaremos como expresión de la distancia

$$d = \Sigma\,|\,\bar{x}_i - x_i\,|.$$

Vamos a ver, cual es el grupo del movimiento correspondiente a esta métrica Las rotaciones alrededor del origen serán aquellas transformaciones que dejen invariantes las superficies S, o sea

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + X_1, \\ x_2 &= \alpha_2 + X_2, \\ &\text{— — — — —} \\ x_m &= \alpha_m + X_m, \end{aligned}$$

con la condición

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 0.$$

La amplitud de la rotación vendrá dada por la expresión

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_m^2 = -\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i\,\alpha_j.$$

El movimiento más general en este espacio será pues

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \alpha_1 + X_1, \\ x_2 &= a_2 + \alpha_2 + X_2, \\ &\text{— — — — — —} \\ x_m &= a_m + \alpha_m + X_m \end{aligned}\right\}\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 0),$$

que son traslaciones en el espacio euclídeo, luego el espacio parabólico especial es el de las traslaciones euclídeas.

Volviendo a los valores plausibles M en este espacio, este valor será el que haga mínima la expresión

$$\sum_{i=1}^{m} |\,X - X_i\,|. \tag{2}$$

Si m es par, puede haber más de un valor plausible puesto que según se sabe todo valor mediano hace (2) mínimo, es decir, si consideramos los valores X_i escritos en orden no decreciente, cada uno de ellos tantas veces como ha aparecido en las m observaciones hechas

$$X_1, X_2, X_3 \dots X_m,$$

los valores comprendidos entre $X_{\frac{m}{2}}$ y $X_{\frac{m}{2}+1}$ son los valores que hacen mínima la expresión (2). Si $X_{\frac{m}{2}}$ es igual a $X_{\frac{m}{2}+1}$ este valor es único, pero si no, forman los valores medianos el intervalo cerrado $(X_{\frac{m}{2}}, X_{\frac{m}{2}+1})$.

Si m es impar hay un valor mediano único.

En general el valor plausible P, o sea la media aritmética de las X_i no es un valor mediano M. En efecto : basta considerar los dos ejemplos siguientes que corresponden a un caso de m impar y a un caso de m par, respectivamente.

Sea $m = 3$

$$X_1 = 1,$$
$$X_2 = 2,$$
$$X_3 = 5.$$

Los valores M se reducen al único valor 2 y el valor P es 4.

Sea $m = 4$ y

$$X_1 = 1,$$
$$X_2 = 2,$$
$$X_3 = 3,$$
$$X_4 = 10.$$

Los valores M son los comprendidos entre 2 y 3 y el valor P es igual a 8.

La ley de probabilidades de los errores que convendrá en este caso será aquella que la expresión

$$\varphi(X - X_1)\,\varphi(X - X_2) \dots \varphi(X - X_m)$$

sea máxima para X igual a un valor M o sea la 1.ª ley de LAPLACE

$$\varphi(x) = \delta\, e^{-2\delta|x|}.$$

La precisión de las medidas la definiremos análogamente al caso de la métrica euclídea como la inversa de la distancia de un punto P_i representativo de la serie de medidas a un punto M, o sea

$$h = \frac{1}{\Sigma \mid X - X_i \mid}$$

que es la inversa de la dispersión (no la dispersión como valor medio cuadrático, sino como momento absoluto de primer orden) respecto a la mediana.

La precisión teórica o sea la deducida de la 1.ª ley de LAPLACE, que es la que aquí conviene, se deducirá de la forma siguiente

$$\frac{1}{h} = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\delta |x|} \mid x \mid d\,x = 2\,\delta \int_0^{\infty} e^{-2\delta x} x\,d\,x = -\frac{1}{2\,\delta}\left[e^{-2\delta x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\,\delta},$$

o sea

$$h = 2\,\delta = \frac{1}{\sigma^2},$$

3. **Espacio hiperbólico especial.** — Tomaremos como hipercuádricas fundamentales las

$$\sum_{i,j=1}^{m} x_i\, x_j = D^2,$$

que corresponden al caso particular de $A = O$. La distancia entre dos puntos vendrá dada por

$$d = \sqrt{\Sigma\,(\bar{x}_i - x_i)\,(\bar{x}_j - x_j)}$$

que consideraremos modificada, como hemos hecho en el caso parabólico, en la forma

$$d = \sqrt{\Sigma\,|\bar{x}_i - x_i|\,|\bar{x}_j - x_j|}$$

y tomaremos como valor plausible M un valor extremal de

$$F = d^2 = \sum_{i,j=1}^{m} |X - X_i|\,|X - X_j|.$$

Derivando obtendremos

$$F' = \sum_{i,j=1}^{m}\left[\frac{|X - X_i|}{(X - X_i)}\,|X - X_j| + \frac{|X - X_j|}{X - X_j}\,|X - X_i|\right] =$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{m} \frac{|X - X_i|}{X - X_i}\,|X - X_j|.$$

Sea $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ la sucesión de valores observados ordenados en orden no decreciente y repitiéndose cada valor tantas veces como haya sido obtenido, tomemos

$$X_v < X < X_{v+1},$$

será

$$\frac{1}{2} F' = (v-1) \sum_{i=1}^{v} |X - X_i| + v \sum_{i=v+1}^{m} |X - X_i| - (m-v) \sum_{i=1}^{v} |X - X_i| -$$

$$- (m-v-1) \sum_{i=v+1}^{m} |X - X_i| = v \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| - \sum_{i=1}^{v} |X - X_i| -$$

$$- (m-v) \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| + \sum_{i=v+1}^{m} |X - X_i| = (2v - m) \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| -$$

$$- \sum_{i=1}^{v} |X - X_i| + \sum_{i=v+1}^{m} |X - X_i| = (2v - m) \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| - \sum_{i=1}^{m} (X - X_i).$$

Si el valor de X es un extremal debe anularse F' o sea

$$(2v - m) \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| = \sum_{i=1}^{m} (X - X_i),$$

de donde

$$v = \frac{1}{2} \left[m + \frac{\sum_{i=1}^{m} (X - X_i)}{\sum_{i=1}^{m} |X - X_i|} \right], \tag{1}$$

pero

$$\left| \frac{\sum_{1}^{m} (X - X_i)}{\sum_{1}^{m} |X - X_i|} \right| = \frac{|\sum (X - X_i)|}{\sum |X - X_i|} \leq 1,$$

o sea

$$\frac{1}{2}(m-1) \leq v \leq {}^1/_2 (m+1).$$

Si m es par

$$v = \frac{m}{2}$$

y entonces

$$X_{\frac{m}{2}} \leq X \leq X_{\frac{m}{2}+1}$$

y de (1) se deduce que ha de verificarse

$$\frac{\sum_{1}^{m} (X - X_i)}{\sum_{1}^{m} |X - X_i|} = 0,$$

o sea

$$X = \frac{1}{m} \Sigma X_i,$$

que es la media aritmética, luego en este caso, si la media aritmética es un valor mediano es el valor plausible M, y si no lo es no existe ningún valor X que haga la derivada F' nula.

Si m es impar, entonces o bien

$$v = \frac{m-1}{2},$$

o bien

$$v = \frac{m+1}{2};$$

en el primer caso

$$X_{\frac{m-1}{2}} \leq X \leq X_{\frac{m+1}{2}},$$

y en el segundo caso

$$X_{\frac{m+1}{2}} \leq X \leq X_{\frac{m+3}{2}},$$

en general pues, para m impar,

$$X_{\frac{m-1}{2}} \leq X \leq X_{\frac{m+3}{2}}. \tag{2}$$

Ahora bien, si $v = \dfrac{m-1}{2}$ de (1) se deduce que

$$\frac{\sum_{1}^{m} (X - X_i)}{\Sigma |X - X_i|} = 1,$$

o sea

$$\sum_{1}^{m} (X - X_i) = \sum_{1}^{m} |X - X_i|,$$

de donde

$$X > X_i,$$

cualquiera que sea i, contra la condición (2), si $v = \frac{m+1}{2}$ de (1) se tiene

$$\frac{\sum_1^m (X - X_i)}{\sum_1^m |X - X_i|} = -1,$$

o sea

$$\Sigma (X - X_i) = - \Sigma |X - X_i|,$$

de donde

$$X < X_i,$$

cualquiera que sea i, contra la condición (2), luego para m impar, no hay ningún valor de X que anule la derivada F'.

Vamos a ver ahora si F puede tener un punto anguloso, es decir, un valor extrenal sin que la derivada se anule.

Tenemos

$$F' = (2\,v - m) \sum_1^m |X - X_i| + \sum_1^m (X - X_i),$$

siendo

$$X_v < X < X_{a+1}.$$

Tomemos

$$X < X_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

en este caso $v = 0$ y

$$F' = -m \sum_1^m |X - X_i| + \sum_1^m (X - X_i) = -\sum_{i=1}^m |X - X_i| \, (m + 1) < 0.$$

Tomemos ahora

$$X > X_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

entonces será $v = m$ y

$$F' = m \sum_1^m |X - X_i| + \sum_1^m (X - X_i) = (m + 1) \sum_1^m |X - X_i| > 0,$$

luego F' cambia de signo al pasar X de la izquierda de todos los X_i a la derecha de todos los X_i.

Hagamos $X = X_v$,

será

$$F' = (2v - m)\left[\sum_{1}^{v-1}|X_v - X_i| + \sum_{v+1}^{m}|X_v - X_i|\right] + \sum_{1}^{v-1}(X_v - X_i) + \sum_{v+1}^{m}(X_v - X_i) =$$

$$= (2v - m)\left[\sum_{1}^{v-1}|X_v - X_i| + \sum_{v+1}^{m}|X_v - X_i|\right] - \sum_{1}^{v-1}|X_v - X_i| + \sum_{v+1}^{m}|X_v - X_i| =$$

$$= [2v - (m+1)]\sum_{1}^{v-1}|X_v - X_i| + [2v - (m-1)]\sum_{v+1}^{m}|X_v - X_i|.$$

$$\text{Si}\quad 2v \geqslant m + 1, \qquad F' > 0.$$

$$\text{Si}\quad 2v \leq m - 1, \qquad F' < 0.$$

Supongamos m par y $2v = m$;

$$F' = -\sum_{1}^{\frac{m}{2}-1}|X_{\frac{m}{2}} - X_i| + \sum_{\frac{m}{2}+1}^{m}|X_{\frac{m}{2}} - X_i| = -\sum_{1}^{\frac{m}{2}-1}(X_{\frac{m}{2}} - X_i) - \sum_{\frac{m}{2}+1}^{m}(X_{\frac{m}{2}} - X_i) =$$

$$= -\sum_{1}^{m}(X_{\frac{m}{2}} - X_i) = -m X_{\frac{m}{2}} + \sum_{1}^{m} X_i.$$

$$\text{Si}\quad X_{\frac{m}{2}} < \frac{\sum X_i}{m}, \qquad F' > 0.$$

$$\text{Si}\quad X_{\frac{m}{2}} > \frac{\sum X_i}{m}, \qquad F' < 0.$$

La posición de la media aritmética influye pues en la posición del punto anguloso de F, en el primer caso estará entre $X_{\frac{m}{2}-1}$ y $X_{\frac{m}{2}}$ y en el segundo caso entre $X_{\frac{m}{2}}$ y $X_{\frac{m}{2}+1}$.

Obsérvese que el valor de X que nos da la extremal de F, es precisamente un máximo y no un mínimo, ya que la derivada F' pasa de positiva a negativa.

CAPÍTULO IV

ESPACIO GENERAL DE LOS VALORES OBSERVADOS

1. **Valores plausibles M en el caso general.** — Recordando las leyes empíricas de los errores enunciadas en el primer capítulo podemos siempre considerar m suficientemente grande para que la media aritmética sea un valor mediano de la sucesión de medidas X_1, X_2, ..., X_m, ordenadas en orden no decreciente.

La expresión general de las hipercuádricas fundamentales es

$$A \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + B \sum_{i,j=1}^{m} x_i\, x_j + D = 0$$

y la de la distancia de un punto de la recta $\varDelta$ a un punto P de coordenadas X_i es:

$$F = d^2 = A \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)^2 + B \sum_{i,j=1}^{m} |X - X_i|\,|X - X_j|,$$

las cuales también pueden escribirse en la forma

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \lambda \sum_{i,j=1}^{m} x_i\, x_j + \frac{D}{A} = 0$$

y

$$F = \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)^2 + \lambda \sum_{i,j=1}^{m} |X - X_i|\,|X - X_j|.$$

Si $\lambda < 1$ la métrica es elíptica, si $\lambda = 1$ parabólica y si $\lambda > 1$ es hiperbólica.

Para hallar los valores que pueden ser plausibles M, hemos de buscar aquellos valores que anulan la derivada F'.

Tenemos

$$F' = 2 \sum_{i=1}^{m} (X - X_i) + 2\,\lambda \left[(2\,v - m) \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| - \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)\right] =$$
$$= 2 \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)\,[1 - \lambda] + 2\,\lambda\,(2\,v - m) \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| = 0$$

(X es un valor comprendido entre X_v y X_{v+1}).

De aquí se deduce

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\sum_{i=1}^{m} (X - X_i)}{\sum_{i=1}^{m} |X - X_i|} = 2\,v - m,$$

o sea

$$v = \frac{1}{2}\left[m + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\sum_{i=1}^{m} (X - X_i)}{\sum_{i=1}^{m} |X - X_i|}\right]. \qquad (1)$$

Pero

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} < 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (X - X_i)}{\sum\limits_{i=1}^{m} |X - X_i|} \leq 1$$

o sea

$$\frac{1}{2}(m - 1) \leq v \leq \frac{1}{2}(m + 1).$$

Suponiendo m par, como haremos de ahora en adelante, tenemos que v ha de ser forzosamente igual a $\frac{m}{2}$ por ser el único entero comprendido entre $\frac{m-1}{2}$ y $\frac{m+1}{2}$.

Tenemos pues que: Los valores que anulan F' han de ser valores medianos y han de verificar la condición

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (X - X_i)}{\sum\limits_{i=1}^{m} |X - X_i|} = 0. \tag{2}$$

Si $\lambda = 1$ (caso parabólico), todo valor mediano anula F' y puede tomarse como valor plausible M. Si $\lambda \neq 1$ solo anula F' la media aritmética y es pues éste el único valor plausible M.

2. **Valores negativos de λ.** — Si consideramos ahora el parámetro λ negativo o bien tomándolo positivo, tomamos como expresión de la distancia

$$F = d^2 = \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)^2 - \lambda \sum_{i,j=1}^{m} |X - X_i| \, |X - X_j|,$$

la ecuación que nos dará los valores plausibles será

$$F' = 2 \sum_{i=1}^{m} (X - X_i) - 2\lambda \left[(2v - m) \sum_{i=1}^{m} |X - X_i| - \sum_{i-1}^{m} (X - X_i) \right] = 0,$$

de donde

$$v = \frac{1}{2} \left[m + \frac{1 + \lambda}{\lambda} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (X - X_i)}{\sum\limits_{i=1}^{m} |X - X_i|} \right],$$

o sea que la limitación de v será

$$\frac{1}{2}\left[m - \frac{1+\lambda}{\lambda}\right] \leqslant v \leq \frac{1}{2}\left[m + \frac{1+\lambda}{\lambda}\right].$$

Podemos pues tomar $v \neq \frac{m}{2}$, en cuyo caso

$$\frac{1+\lambda}{\lambda} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (X - X_i)}{\sum\limits_{i=1}^{m} |X - X_i|} = 0.$$

Si $\lambda \neq -1$ el único valor que satisface esta última condición es la media aritmética, pero si $\lambda = -1$ la limitación de v será

$$\frac{m}{2} \leq v \leq \frac{m}{2},$$

o sea $v = \frac{m}{2}$ y todo valor mediano anula F'.

Los valores de λ admisibles en la expresión de la distancia

$$F = \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)^2 - \lambda \sum_{i,j=1}^{m} |X - X_i| \, |X - X_j|, \tag{3}$$

vendrán dados por la condición $F \geqslant 0$, o sea

$$\lambda < \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (X - X_i)^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{m} |X - X_i| \, |X - X_j|}.$$

El valor mínimo del segundo miembro es

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (\overline{X} - X_i)^2}{\sum\limits_{i,j=1}^{m} |\overline{X} - X_i| \, |\overline{X} - X_j|},$$

en donde $\overline{X}$ representa la media aritmética de los valores observados X_i, si tomamos λ menor que este valor mínimo todas las distancias F serán reales positivas.

Ahora bien, si sólo admitimos aquellas expresiones de la distancia para las cuales entre dos puntos reales *cualesquiera* la distancia ha de ser real, se deben excluir las expresiones (3) ya que en este caso suponiendo el punto $P\ (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ y el punto $\bar{P}\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3, \ldots, x_m)$ será

$$F = (\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{x}_2 - x_2)^2 - 2\,\lambda\,|\bar{x}_1 - x_1|\,|\bar{x}_2 - x_2|$$

y llamando δ_1 y δ_2 respectivamente a $|\bar{x}_1 - x_1|$ y $|\bar{x}_2 - x_2|$ será

$$F = \delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\,\lambda\,\delta_1\,\delta_2$$

y se puede lograr que esta expresión sea negativa tomando δ_1 y δ_2 de manera que se satisfaga

$$\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2\,\delta_1\,\delta_2} < \lambda,$$

o sea

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1}\right) < \lambda. \tag{4}$$

Por pequeño que sea λ siempre será posible escoger δ_1 y δ_2 que se cumpla (4), o sea que la distancia d sea imaginaria.

3. **Condiciones de mínimo.** — Vamos a ver, en el caso general

$$F = \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)^2 + \lambda \sum_{i,j=1}^{m} |X - X_i|\,|X - X_j|,$$

cuando se puede asegurar que la media aritmética de los valores observados nos da realmente un mínimo de la distancia. Puesta la derivada F' en la forma

$$F' = 2\sum_{i=1}^{m} (X - X_i) + 2\,\lambda\left[(2\,v - m)\sum_{i=1}^{m} |X - X_i| - \sum_{i=1}^{m} (X - X_i)\right],$$

nos interesa solamente el caso $v = \dfrac{m}{2}$, puesto que en el intervalo $(X_{\frac{m}{2}}, X_{\frac{m}{2}+1})$ está la media aritmética, o sea que tenemos

$$F' = 2\sum_{i=1}^{m} (X - X_i) - 2\,\lambda \sum_{i=1}^{m} (X - X_i) = 2\,(1 - \lambda)\sum_{i=1}^{m} (X - X_i).$$

La derivada segunda para X en el intervalo considerado será

$$F'' = 2\,m\,(1 - \lambda).$$

Para que en la media aritmética haya mínimo ha de ser $F'' \geqslant 0$ o sea $\lambda \leqslant 1$.

Con la restricción impuesta antes a los valores λ para que la distancia entre puntos reales sea real, tenemos que sólo se pueden aceptar como métricas que dan condición de distancia mínima para los valores plausibles, aquellas que corresponden a valores de λ positivos y menores o iguales que la unidad.

CAPÍTULO V

LEY GENERAL DE ERRORES

1. **Espacio general de valores observados y ley general de errores.** — Recordaremos que entendemos por ley de errores a un conjunto de normas mediante las cuales de un conjunto de m medidas efectuadas de una cierta magnitud física, se pueda deducir un valor para dicha magnitud, dando además el grado de confianza que se puede tener a dicho valor.

Si se quiere que la ley de errores satisfaga a los dos principios empíricos de los errores (principios que pueden considerarse como definición axiomática de los errores accidentales) que pueden resumirse en un solo principio, el de la media aritmética, enunciado como hemos hecho en el capítulo primero, o sea que para m suficientemente grande, la media aritmética de los valores observados es un valor mediano, no se pueden tomar en el espacio representativo de los valores observados hipercuádricas fundamentales cualesquiera sino que solo se pueden admitir hipercuádricas de revolución con el eje la recta Δ de ecuaciones

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_m,$$

que es el lugar geométrico de los valores exactos.

Si sólo admitimos métricas que nos den siempre distancias reales para puntos reales, la expresión general de estas distancias será

$$F = d^2 = \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - x_i) + \lambda \sum_{i,j=1}^{m} |\bar{x}_i - x_i| \, |\bar{x}_j - x_j|,$$

con $\lambda > 0$ y si sólo se admiten como valores plausibles los que minimizan la distancia, entonces habrá de ser $\lambda \leqslant 1$.

Ya hemos visto que los casos extremos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ corresponden a la ley normal o de GAUSS - LAPLACE y a la 1.ª de LAPLACE respectivamente.

La formulación más general, de una ley de errores dada en forma de distribución de probabilidades de los errores ha de ser tal que la función densidad dependa de un parámetro α variable entre dos extremos a y b de tal modo que para $\alpha = a$ se obtenga la ley de GAUSS - LAPLACE y para $\alpha = b$ la 1.ª de LAPLACE. Expresando esta función densidad por $\varphi(x, \alpha)$ se ha de verificar además que

$$\prod_{i=1}^{m} \varphi(X - X_i, \alpha)$$

sea máxima para X igual a la media aritmética de los valores observados, si queremos que el valor plausible sea el más probable.

2. **Ley de Subottinne.** — Una ley que cumple las condiciones establecidas en el número anterior es la propuesta por SUBOTTINNE (1) cuya función densidad de probabilidad es

$$K\, e^{-a\,|x|^{\alpha}},$$

que para α igual a 1 da la 1.ª ley de LAPLACE y para α igual a 2 la de GAUUS (2).

El cálculo de K se hace mediante la condición de área o sea

$$K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\,|x|^{\alpha}}\, dx = 1,$$

de donde

$$K = \frac{1}{2 \int_{0}^{+\infty} e^{-a\,x^{\alpha}}\, dx}.$$

Haciendo $a\, x^{\alpha} = t$ se obtiene

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a\,x^{\alpha}}\, dx = \frac{1}{a^{1/\alpha} \cdot \alpha} \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, t^{1/\alpha - 1} dt = \frac{1}{a^{1/\alpha} \cdot \alpha}\, \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

(1) Véase FRECHET. *Sur l'hypothese de l'additivité des erreurs partielles.* Bull. Sciencies Math. t. 63. 1928.

(2) SUBOTTINE aplicando esta ley a un caso práctico ya encontró que el valor conveniente de α estaba comprendido entre 1 y 2.

o sea

$$K = \frac{a^{1/\alpha} \cdot \alpha}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)},$$

La expresión general de los momentos absolutos de esta ley es

$$M_r = \frac{\alpha \cdot a^{1/\alpha}}{2\,\Gamma\,(^1/_\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} |\,x\,|^r\, e^{-a\,|x|^{\alpha}} dx = \frac{\alpha\, a^{1/\alpha}}{\Gamma\,(^1/_\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-a\,x^{\alpha}} x^r\, dx =$$

$$= \frac{\alpha\, a^{1/\alpha}}{\Gamma\,(^1/_\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{r/\alpha + s} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + s + 1\right)}{a^{r/\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)}{a^{r/\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)},$$

habiendo hecho $a\,x^{\alpha} = t$ y $\frac{1}{\alpha} - 1 = s$. Mediante la función B de Euler se obtiene

$$M_r = \frac{\Gamma\left(\frac{r}{\alpha}\right)}{a^{r/\alpha}\, B\left(\frac{r}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Para determinar la ley que corresponde a unas experiencias dadas se han de calcular los parámetros a y α, luego con dos ecuaciones hay suficiente. Estas serán

$$M_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{a^{1/\alpha}\, B\left(\frac{r}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{a^{2/\alpha}\, B\left(\frac{2}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Elevando al cuadrado M_1 y dividiendo por M_2 se logra eliminar a, obteniéndose:

$$\frac{M_1^2}{M_2} = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right) B\left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(-\frac{3}{\alpha}\right)}.$$

Una vez calculado α, que ha de estar comprendido entre 1 y 2 se calcula fácilmente a, mediante la relación

$$M_\alpha = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{a\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{a\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{1}{a\,\alpha},$$

obtenida haciendo $r = \alpha$, de donde;

$$a = \frac{\alpha}{M_\alpha}.$$

3. **Estudio de la ley cuya densidad de probabilidad es** $K\,e^{-a[\lambda|x|+(1-\lambda)x^2]}$. — Esta ley, que como fácilmente se ve, cumple las condiciones establecidas anteriormente para toda ley de errores, es un caso particular de la ley cuya densidad de probabilidad es $K\;e^{-\alpha|x|-\beta x^2}$ estudiada en en mi tesis (¹) como combinación de la 1.ª y 2.ª leyes de LAPLACE.

El valor de K verificará

$$K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a[\lambda|x|+(1-\lambda)x^2]}\,dx = 2\,K\int_0^\infty e^{-a\,[\lambda x+(1-\lambda)x^2]}\,dx =$$

$$= 2\,K\int_0^\infty e^{-a\left(\sqrt{1-\lambda}\,x+\frac{\lambda}{2\sqrt{1-\lambda}}\right)^2+\frac{a\lambda^2}{4(1-\lambda)}}\,dx = 1.$$

Haciendo, para simplificar, $\dfrac{\lambda}{2\sqrt{1-\lambda}} = s$ obtenemos

$$2\,K\,e^{a s^2}\int_0^\infty e^{-a\;(\sqrt{1-\lambda}\,x\,+\,s)^2}dx = 1$$

y con el cambio de variable $-\,a\,(\sqrt{1-\lambda}\;x + s)^2 = t$,

se tiene

$$\frac{K\,e^s}{\sqrt{1-\lambda}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)-\Gamma_{a s^2}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{K\,e^s}{a^{1/2}\sqrt{1-\lambda}}\left[\sqrt{\pi}-\Gamma_{a s^2}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 1,$$

de donde

$$K = \frac{\sqrt{a(1-\lambda)}\;e^{-a\,s^2}}{\sqrt{\pi}-\Gamma_{a\,s^2}\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

(¹) F. SALES. *Contribución a un estudio de una ley de probabilidad*. Sem. Mat. Barcelona. 1947, y también, F. SALES. *Sobre la 1.ª ley de errores de Laplace*. Collectanea Mathematica. t. I.

La expresión general de los momentos absolutos de orden r se hallará de la forma siguiente

$$M_r = 2K\int_0^\infty x^r e^{-a[\lambda x + (1-\lambda)x^2]}\,dx =$$

$$= \frac{2K}{\sqrt{a(1-\lambda)}}\int_{as^2}^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}(t^{1/2} - a^{1/2}s)^r \frac{dt}{a^{r/2}(1-\lambda)^{\frac{r}{2}}}\,.$$

Suponiendo r entero positivo, será

$$M_r = \frac{2K e^{as^2}}{a^{\frac{r+1}{2}}(1-\lambda)^{\frac{r+1}{2}}}\int_{as^2}^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=0}^{i=r}(-1)^r\binom{r}{i}t^{\frac{r-i}{2}}a^{i/2}s^i\right]dt =$$

$$= \frac{2K e^{as^2}}{a^{\frac{r+1}{2}}(1-\lambda)^{\frac{r+1}{2}}}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}a^{i/2}s^i\left[\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{r-i-1}{2}}dt - \int_0^{as^2} e^{-t}t^{\frac{r-i-1}{2}}dt\right] =$$

$$= \frac{2K e^{as^2}}{a^{\frac{r+1}{2}}(1-\lambda)^{\frac{r+1}{2}}}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}a^{i/2}s^i\left[\Gamma\left(\frac{r-i+1}{2}\right) - \Gamma_{as^2}\left(\frac{r-i+1}{2}\right)\right].$$

Sustituyendo K por su valor hallado anteriormente se obtiene

$$M_r = \frac{1}{\left[\sqrt{\pi} - \Gamma_{as^2}\left(\frac{1}{2}\right)\right]a^{r/2}(1-\lambda)^{r/2}}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}s^i\left[\Gamma\left(\frac{r-i+1}{2}\right) - \Gamma_{as^2}\left(\frac{r-i+1}{2}\right)\right].$$

Para hallar los valores de a y λ que convienen en un caso práctico, utilizaremos la relación, hallada en mi tesis, entre el momento de segundo orden y estos parámetros, la cual ahora es

$$16\,a\,(1-\lambda)^2 M_2 - 8\,(1-\lambda) - a\,\lambda^2 = 0, \qquad (1)$$

multiplicando por $d\lambda$ e integrando entre 0 y 1 será:

$$(16\,a\,M_2 - 8)\left[-\frac{(1-\lambda)^2}{2}\right]_0^1 - a\left[\frac{\lambda^3}{3}\right]_0^1 = 0,$$

o sea

$$\frac{1}{2}[16\,a\,M_2 - 8] - \frac{a}{3} = 0,$$

de donde

$$a = \frac{12}{24\,M_2 - 1}\,.$$

Despejando λ en la ecuación (1) se tendrá:

$$\lambda = \frac{(16\,a\,M_2 - 4) \pm 2\sqrt{4 + 4\,a^2\,M_2 - 2\,a}}{a\,[16\,M_2 - 1]}.$$

4. **Aplicación a un caso práctico.** — CASTELNUOVO da (1) la siguiente tabla de errores obtenidos en el cálculo de una cierta latitud

Errores comprendidos entre		Número de errores observados	Número de errores según la ley normal	Diferencias
0	0″42	41	38′3	— 2′7
0″42	0″84	30	30	0
0″84	1″26	15	18′3	+ 3′3
1″26	1″68	8	8′8	+ 0′8
1″68	∞	6	4′6	— 1′4

Vamos a aplicar la ley de probabilidades cuya función densidad es

$$K\,e^{-a[\lambda|x| + (1-\lambda)\,x^2]}.$$

El cálculo de a se hace por la fórmula $a = \dfrac{12}{24\,M_2 - 1}$, o sea en este caso $a = 0'745$.

El valor de λ se calcula mediante la expresión

$$\lambda = \frac{(16 \cdot 0'745 \cdot 0'713 - 4) \pm 2\sqrt{4 + 4 \cdot 0'555 \cdot 0'713 - 1'49}}{0'745\,(16 \cdot 0'713 - 1)}.$$

Los dos valores que se obtienen son

$$\lambda = \frac{8'545}{7'754} \quad \text{y} \quad \lambda = 0'058,$$

el primero de los cuales no nos conviene por ser mayor que la unidad.

Para el valor de K emplearemos la fórmula dada en mi tesis (2)

$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{e^{s^2}\sqrt{\pi}\,(1 - \theta(s))},$$

(1) *Calcolo delle probabilita*. vol. I. pág. 229.

(2) *Contribución al estudio de una ley de probabilidad*. Barcelona, 1947. pág. 42.

que en el caso actual será

$$K = \frac{\sqrt{a\,(1 - \lambda)}}{e^{s^2}\,(1 - \theta\,(s))\,\sqrt{\pi}},$$

siendo

$$s = \frac{a\,\lambda}{2\sqrt{a\,(1 - \lambda)}} = 0'83.$$

El número teórico de errores comprendidos entre v_1 y v_2 vendrá dado por

$$\frac{0'83}{e^{0'00068}\cdot 0'9607} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{-0'745\,[(0'97\,x\,+\,0'0299)^2 - 0'00089]}\,dx.$$

Mediante el cambio

$$0'86\,(0'95\,x + 0'0299) = t$$

se obtiene el número de errores entre v_1 y v_2 dado por la expresión

$$\frac{0'83\cdot e^{0'00002}}{0'9607\cdot 0'817} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0'817v_1 + 0'0257}^{0'817v_2 + 0'0257} e^{-t^2}dt =$$
$$= 1'056\,[\theta\,(0'817v_2 + 0{,}0257) - \theta\,(0'817v_1 + 0'0257)],$$

indicando con $\theta\,(t)$ la integral de Gauss - Laplace.

El cuadro que se obtiene es el siguiente:

Errores entre	Número de errores observados	Número de errores calculados	Diferencias
0″ — 0″42	41	39′65	— 1′35
0″42 — 0″84	30	30′39	+ 0′39
0″84 — 1″26	15	18′82	+ 3′82
1″26 — 1″68	8	9′25	+ 1′25
1″68 — ∞	6	5′07	— 0′93

La suma de los valores absolutos de las diferencias obtenidas es 7′74. Con la ley de Gauss - Laplace esta suma es 8′2.