

ZUR INHALTSTHEORIE DER POLYEDER (*)

VON H. HADWIGER (BERN)

Die Theorie des Polyederinhalts im drei —und höher— dimensional euklidischen Raum kann nicht streng elementargeometrisch ⁽¹⁾ auf dem Begriff der Zerlegungsgleichheit aufgebaut werden, wie dies D. HILBERT ⁽²⁾ in methodisch und inhaltlich voll befriedigender Weise im zweidimensionalen Fall durchführen konnte. Der Grund dieser Schwierigkeit liegt wie bekannt in dem von M. DEHN ⁽³⁾ bewiesenen Satz, wonach es inhaltsgleiche Polyeder gibt, die nicht zerlegungsgleich sind.

Allerdings lässt sich eine geometrische Inhaltstheorie entwickeln, die indirekt auf der Zerlegungsgleichheit beruht, indem man nach dem Vorgehen von M. DEHN ⁽⁴⁾ und F. ENRIQUES ⁽⁵⁾ zwei Polyeder inhaltsgleich nennt, wenn keines von diesen mit einem echten Teilpolyeder des andern zerlegungsgleich ist. Jedoch galt es auch hier die durch das Zerlegungsdilemma bedingte Schwierigkeit zu beheben, vor allem die Unklarheit um das De Zolt'sche Postulat zu überwinden ⁽⁶⁾. Dies wurde in der Tat dadurch möglich, dass man sich zunächst vom klassischen Begriff eines an sich gegebenen geometrischen Inhalts abwandte und den Polyedern nur Inhaltsmasse, also reelle Zahlwerte definitorisch zuordnete. Damit wurde durch die Untersuchungen von G. VERONESE ⁽⁷⁾,

(*) Zusammengestellt und ausgearbeitet nach Vorträgen in Freiburg i. Br., Tübingen und Hamburg im Juli 1950.

(1) Die Bezeichnungsweise «elementargeometrisch» ist hier im weitesten Sinne so zu verstehen, dass nur Schlüsse zur Anwendung gelangen sollen, die mit endlich vielen Polyedern und Zerlegungen auskommen; jeder unendlich fortgeführte Prozess mit Limesbetrachtungen usw. soll vermieden werden.

(2) D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, Kap. IV, 4. Aufl. Leipzig, 1913.

(3) M. DEHN, Ueber raumgleiche Polyeder. Gött. Nachr. 1900; Ueber den Rauminhalt. Math. Ann. 55 (1902) 465-478.

(4) Vgl. die Ausführungen von M. ZACHARIAS, Encykl. III/AB. 9, S. 950.

(5) F. ENRIQUES, Fragen der Elementargeometrie, deutsch von Thieme, I. Teil Leipzig, 1911; insb. § 14 (Pädagogische Schlussbemerkungen S. 202).

(6) Darstellung bei F. ENRIQUES loc. cit. S. 160.

(7) G. VERONESE, Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenze delle figure. Atti del R. Ist. Veneto di scienze, lettere ed arti. t. VI (7) (1894/95).

S. O. SCHATUNOWSKI ⁽⁸⁾ und W. SÜSS ⁽⁹⁾ eine neue äusserst fruchtbare Phase in der Entwicklung des Inhaltsproblems eingeleitet. Es galt vor allem für die definierte Inhaltsmasse diejenigen Eigenschaften nachzuweisen, die einen befriedigenden Ausbau der Theorie gewährleisten; dies betraf in erster Linie die Eigenschaft des Inhaltsfunktional, additiv zu sein. — Für mehrdimensionale Polyeder wurde dieser Nachweis erstmals von W. Süss ⁽¹⁰⁾ erbracht.

Die Theorie der Inhaltsmasse brachte nun für die geometrische Inhaltstheorie auch die notwendige Klärung. So gelang es beispielsweise auf dieser Grundlage sowohl das Cavalierische Prinzip ⁽¹¹⁾ als auch das De Zoltische Prinzip ⁽¹²⁾ als beweisbare Sätze klarzulegen.

Indessen vermochte auch die Theorie der Inhaltsmasszahlen noch nicht vollständig zu befriedigen, vor allem war es die Willkür bei der Wahl der elementaren Inhaltsformel, welche berechtigte Kritik veranlasste. So lehnte es M. ZACHARIAS ⁽¹³⁾ ab, in der Konstruktion von S. O. SCHATUNOWSKI eine vollständige Lösung des Inhaltsproblems zu sehen, da z. B. die Frage offengelassen ist, ob nicht auch andere Inhaltsmasszahlen existieren, die von der willkürlich gewählten verschieden sind.

Mit der vorliegenden Abhandlung wird nun eine Inhaltstheorie für Polyeder angestrebt, die die oben angedeuteten Mängel von vorne herein ausschliesst. Dies wird dadurch erreicht, dass die Theorie einzig und allein auf vier Postulate aufgebaut wird, welche vier Grundeigenschaften einer Inhaltsmasszahl ausdrücken, nämlich die Eigenschaften translationsinvariant, additiv, definit und normiert zu sein. Eine Inhaltsmasszahl wird nicht nur willkürlich angesetzt, und so die Existenz einer Lösung für die vier gestellten Forderungen nachgewiesen, sondern es wird auch gezeigt, dass Eindeutigkeit besteht, in dem Sinne, das sich der Ansatz umgekehrt aus den vier Forderungen in zwingender Weise herleiten lässt.

Der Inhaltssatz, dessen Beweis das eigentliche Hauptziel der vorliegenden Arbeit darstellt, sagt aus, dass der elementare Inhalt das

⁽⁸⁾ S. O. SCHATUNOWSKI, Ueber den Rauminhalt der Polyeder. Math. Ann. 57 (1903) 496-508.

⁽⁹⁾ W. Süss, Begründung der Lehre vom Polyederinhalt. Math. Ann. 82 (1921) 297-305.

⁽¹⁰⁾ W. Süss, Ueber das Inhaltsmass bei mehrdimensionalen Polyedern. Tohoku Math. J. 38 (1933) 252-261.

⁽¹¹⁾ W. Süss, Beweis des Cavalierischen Prinzips für n-dimensionale Polytope ohne Benutzung des Archimedischen Axioms. Tohoku Math. J. 24 (1925), 307-312.

⁽¹²⁾ Vgl. F. ENRIQUES, loc. cit. Fussnote 6).

⁽¹³⁾ M. ZACHARIAS, Encykl. III/AB. 9, S. 940-942.

einzigste translationsinvariante, additive, definite und normierte Polyederfunktional ist ⁽¹⁴⁾.

Es darf hervorgehoben werden, dass in der hier entwickelten Theorie die Translationsinvarianz an die Stelle der sonst üblichen Forderung der Bewegungsinvarianz tritt, sodass also wesentlich schwächere Forderungen gestellt werden als dies bei einer axiomatischen Begründung einer Inhaltslehre üblich ist ⁽¹⁵⁾.

Wie bereits K. F. GAUSS ⁽¹⁶⁾ befürchtete, D. HILBERT ⁽¹⁷⁾ bestimmte vermutete und M. DEHN ⁽¹⁸⁾ erstmals streng nachwies, ist für die Entwicklung einer Theorie des Polyederinhalts ein Grenzprozess unvermeidlich. Es ist ein besonderes Charakteristikum der hier vorgetragenen Inhaltstheorie, dass der Grenzprozess nunmehr vollständig aus dem geometrischen in den arithmetischen Bereich verschoben ist, und auf eine fast unmerklich einfache Weise in Erscheinung tritt. Dadurch dass die oft üblichen Polyederapproximationen oder äquivalente infinite Verfahren ausgeschaltet werden konnten, hat die Theorie den wünschbaren elementargeometrischen Charakter erhalten ⁽¹⁹⁾.

Abschliessend sei noch erwähnt, dass Verf. die Anregung, diese Abhandlung niederzuschreiben, Herrn J. KARAMATA ⁽²⁰⁾ verdankt.

⁽¹⁴⁾ Im Fall dreidimensionaler Polyeder wurde ein analoger Satz, allerdings auf Grund der stärkeren Forderung der Bewegungsinvarianz, auf elementare Weise begründet. Vgl. H. HADWIGER, Bemerkungen zur elementaren Inhaltslehre des Raumes. *Elemente der Math.* 4 (1) (1949) 3-7.

⁽¹⁵⁾ Man kann sich mit Recht fragen, ob es nicht Vorteile bieten würde, die Inhalts- und Masstheorie in euklidischen Räumen grundsätzlich translationsinvariant aufzubauen. Die Bewegungsinvarianz wäre dann nicht eine Forderung, sondern in geeigneten Masssystemen eine zusätzliche Eigenschaft, die gefolgert wird. Den Hauptvorteil des neuen Standpunktes sieht Verf. darin, dass es nunmehr universell gültige Masssysteme (vom BANACHschen Typus) gibt, nach welchen alle beschränkten Punktmengen gemessen werden können; dies hat nach einem Theorem von J. VON NEUMANN seinen tieferen Grund darin, dass die Translationsgruppe abelsch ist. Hält man dagegen an der Bewegungsinvarianz fest, so muss man in einer späteren Phase der Theorie erkennen, dass es sicher kein universelles Masssystem geben kann, so dass sich nur solche beschränkte Punktmengen ausmessen lassen, die gewissen Messbarkeitsbedingungen genügen. — Der durch den Inhaltssatz im Rahmen der elementaren Grundlage enthüllte Sachverhalt spricht für die Vernünftigkeit des oben erörterten neuen Standpunktes.

⁽¹⁶⁾ Vgl. Briefe an Gerling (Werke VIII, S. 241, 299).

⁽¹⁷⁾ *Mathematische Probleme* N.º 3, Gött. Nachr. 1900 S. 266.

⁽¹⁸⁾ Loc. cit. Fussnote 3).

⁽¹⁹⁾ Vgl. Fussnote 1).

⁽²⁰⁾ Anlässlich einer Diskussion im April 1950 in Bern über das Inhaltsproblem bei Polyedern machte mich Herr Karamata auf einen hübschen Kunstgriff aufmerksam, der in einer besonderen fortgesetzten Zerlegung eines Tetraeders bestand. Die weitere Verfolgung des Einfalls ermöglichte es mir, in älteren Plänen eine methodische Vereinfachung vorzunehmen.

§ 1. UEBER POLYEDER, POLYEDERINHALT UND INHALTSPOSTULATE

$A, B, C, \dots$ sollen Polyeder des k — dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen. Diese sind stets als abgeschlossen und beschränkt anzunehmen. Ein einzelnes spezielles Polyeder ist durch den Aufbau der Theorie des Inhalts besonders ausgezeichnet, nämlich ein *Einheitswürfel* E .

Punkte des Raumes R_k charakterisieren wir häufig durch ihre Ortsvektoren, die in einem festen Ursprung 0 angreifen sollen. Die Ortsvektoren der Punkte eines Polyeders A nennen wir kurz Ortsvektoren von A .

Nachfolgend erklären wir kurz vier einfache Polyederoperationen, die im Laufe der Entwicklung angewendet werden müssen. Es sind dies:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------|--------------------|
| (1) <i>Addition</i> | $A + B$ falls | $(AB)^\circ = 0$; |
| (2) <i>Subtraktion</i> | $A - B$ falls | $A \supseteq B$; |
| (3) <i>Dilatation</i> | λA für | $\lambda > 0$; |
| (4) <i>Minkowskische Addition</i> | $A \times B$ | |

Hierbei sind noch die folgenden zusätzlichen Erklärungen und Vorschriften zu beachten: 1. $A + B$ ist die gewöhnliche Summe im Sinne der Punktmengenlehre; sie darf aber hier nur gebildet werden, wenn A und B keine inneren Punkte gemeinsam haben, sodass der offene Kern $(AB)^\circ$ des Durchschnitts AB leer ist (diese Konvention entspricht dem üblichen Begriff des Zusammensetzens bzw. des Zerlegens der Polyeder im Sinne der Elementargeometrie). 2. $A - B$ ist die abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen Differenz im Sinne der Punktmengenlehre; sie kann nur gebildet werden, wenn B in A als Teil enthalten ist, geschrieben $B \subseteq A$. 3. λA ist das zu A homothetische Polyeder, dessen Ortsvektoren durch $\lambda \alpha$ gegeben sind, wobei α die Ortsvektoren von A durchläuft. 4. $A \times B$ ist das sich aus A und B durch die verallgemeinerte Minkowskische Linearkombination ergebende Polyeder, das durch die Ortsvektoren $\alpha + \beta$ beschrieben wird, wobei α und β unabhängig alle Ortsvektoren von A und B durchlaufen.

Durch die Anschrift

$$(5) \quad A = \sum A_\nu$$

bezeichnen wir eine Zerlegung des Polyeders A in die Teilpolyeder A_ν . Die Additionen verstehen sich hier im Sinne der oben gegebenen Vor-

schriften. Alle Summen sind in der vorliegenden Arbeit stillschweigend als endlich vorausgesetzt. Im Hinblick auf die Assoziativität der Addition sind in (5) keine Klammern zu erwägen. — Es soll jetzt eine recht nützliche Erweiterung von (5) eingeführt werden, die dadurch zustande kommt, dass man auch die oben erklärte Subtraktion anwendet. Durch die Anschrift

$$(6) \quad A = \sum \varepsilon_\nu A_\nu \quad (\varepsilon_\nu = \pm 1)$$

sei eine Zerlegung des Polyeders A im erweiterten Sinne charakterisiert. Hierbei sei aber die Voraussetzung erfüllt, dass sich die rechte Seite von (6) durch formales Auflösen beliebig ineinander verschachtelter Klammern ergibt, wobei sich mit Beachtung der Klammern alle Operationen im Sinne der Vorschriften bei Addition und Subtraktion bei Polyedern effektiv ausführen lassen. Diese Konvention bedingt eine in technischer Beziehung sehr wirksame Vereinfachung im formalen Ausbau der Theorie.

Zwei Polyeder A und B , die durch eine Verschiebung im Raum zur Deckung gebracht werden können, heissen *translationsgleich*; dies ist eine Verwandtschaft, die wir durch

$$(7) \quad A \cong B$$

symbolisieren wollen.

Ein für alle Polyeder des Raumes A definiertes reellwertiges Funktional $\Phi(A)$ wollen wir eine *Inhaltsmasszahl* nennen, wenn dieses die vier durch die nachfolgend aufgeführten *Inhaltspostulate* zum Ausdruck gebrachten Grundeigenschaften aufweist:

Das Funktional $\Phi(A)$ sei

I. *translationsinvariant*, d. h. es gilt

$$(8) \quad \Phi(A) = \Phi(A') \quad \text{falls} \quad A \cong A' \text{ ist};$$

II. *additiv*, d. h. es gilt

$$(9) \quad \Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B);$$

III. *definit*, sodass stets gilt

$$(10) \quad \Phi(A) \geq 0;$$

IV. *normiert*, d. h. es gilt

$$(11) \quad \Phi(E) = 1.$$

Die vier Forderungen I. bis IV. drücken die ursprünglichsten und primitivsten Qualitäten aus, die einer Inhaltsmasszahl zugesprochen werden müssen. Sie sind sogar wesentlich schwächer, als die Postulate, die bei der Grundlegung einer Inhaltstheorie sonst üblich sind, da I. nur die Translationsinvarianz an Stelle der hier meist verlangten Bewegungsinvarianz fordert. Es soll noch darauf hingewiesen werden, dass sich IV. nicht auf jeden beliebigen, sondern nur auf einen einzigen fest gewählten Einheitswürfel bezieht. Diese Unterscheidung ist im Hinblick auf die oben erörterte schwache Form von I. nun wesentlich.

§ 2. TRANSLATIVE ZERLEGUNGSGLEICHHEIT

Zwei Polyeder A und B heissen *translativ zerlegungsgleich*, geschrieben

$$(12) \quad A \sim B,$$

wenn sie sich in paarweise translationsgleiche Teilpolyeder zerlegen lassen, d. h. falls es zwei Zerlegungen $A = \sum A_\nu$ und $B = \sum B_\nu$ so gibt, dass $A_\nu \cong B_\nu$ gilt. Die translativ Zerlegungsgleichheit ist eine reflexive, symmetrische und, wie sich leicht einsehen lässt, translativ Polyederverwandtschaft. — Einem kürzlich bewiesenen sich allgemeiner auf Parallelotope beziehenden Satz zufolge, ⁽²¹⁾ sind insbesondere zwei sich in beliebiger relative Drehlage befindliche Einheitswürfel translativ zerlegungsgleich (*Abb. 1* gibt hierzu eine Illustration im Falle $k = 2$).

§ 3. SIMPLEX UND ORTHOGONALSIMPLEX ALS POLYEDERBAUSTEIN

Ein Simplex S mit einem durch den Ortsvektor $\mathfrak{S}$ gegebenen Eckpunkt kann durch die folgende Vorschrift festgelegt werden: Die Ortsvektoren von S sind

$$(13) \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{S} + \sum_1^k \alpha_\nu a_\nu \quad (1 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0),$$

wobei a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, k$) k feste Vektoren sind und α_ν k variable Koeffizienten bedeuten, die den rechts stehenden Nebenbedingungen zu genügen haben. Ein durch die genannten Bestimmungsstücke fixiertes Simplex bezeichnen wir kurz durch

$$(14) \quad S = S [\mathfrak{S}; a_1, \dots, a_k].$$

⁽²¹⁾ Ein Beweis wird unter dem Titel «Translative Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Parallelotope» voraussichtlich in «Revista Matemática Hispano Americana»..., erscheinen.

Das allgemeine Simplex S ist insofern Baustein des allgemeinen Polyeders, als sich bekanntlich jedes Polyeder A in endlich viele Simplexe zerlegen lässt, sodass gemäss (5) eine Darstellung der Form

$$(15) \quad A = \sum S_n$$

möglich ist. — Es mag nun für verschiedene Zwecke, die auch ausserhalb des Rahmens dieser Note liegen dürften, nützlich sein festzuhalten, dass an Stelle des allgemeinen Simplex S ein sehr speziell gebautes

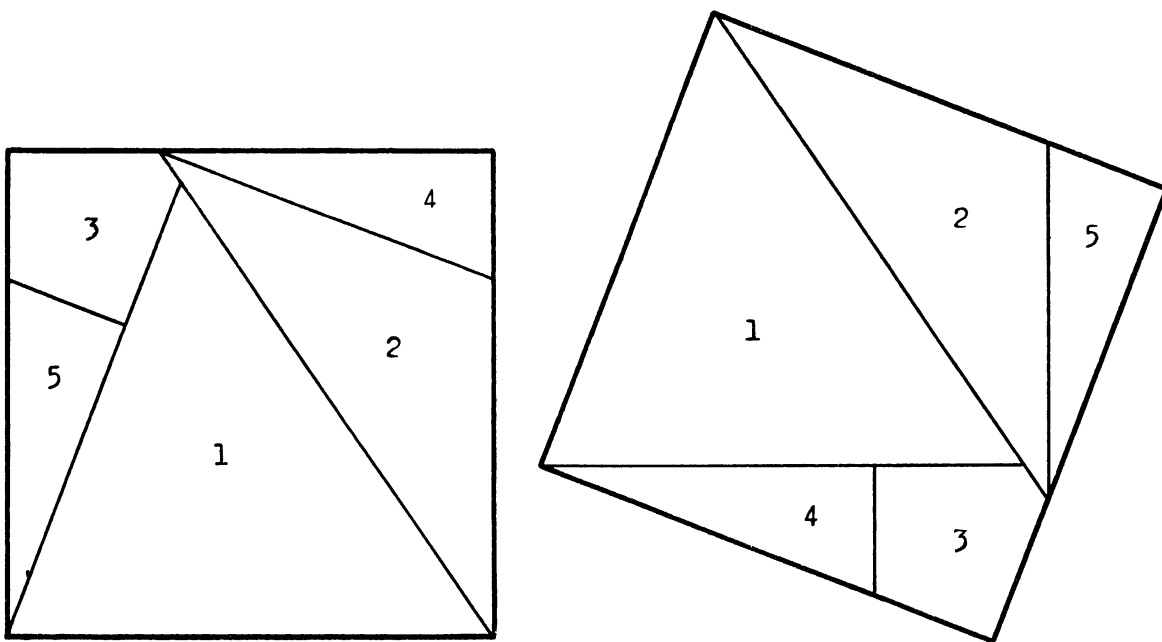


Abb. 1

Simplex T einen ausreichenden Polyederbaustein darstellt, wobei nun allerdings eine Zerlegung im erweiterten Sinne gemäss (6) in Betracht fallen muss. Es handelt sich um das *Orthogonalsimplex* T , das sich nach Ansatz (13) auf Grund eines orthogonalen Vektorsystems a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, k$) ergibt; zusätzlich sind also noch die Bedingungen

$$(16) \quad (a_\nu, a_\mu) = 0 \quad (\nu \neq \mu)$$

zu beachten (Abb. 2 zeigt ein Orthogonalsimplex im Falle $k = 3$). Die runde Klammer bezeichnet das Skalarprodukt.

Wegen des speziellen Baues des Orthogonalsimplex sind zwei seiner Eckpunkte besonders ausgezeichnet, nämlich die Anfangsecke $\mathfrak{S}$ und die Schlussecke $\mathfrak{S} + \sum_1^k \alpha_\nu$.

Die oben erwähnte Darstellung eines beliebigen Polyeders durch Orthogonalsimplexe gelingt sogar auf eine besonders ausgezeichnete Weise, indem nur Orthogonalsimplexe als Bauelemente verwendet werden, deren Anfangsecken alle im Ursprung 0 liegen.

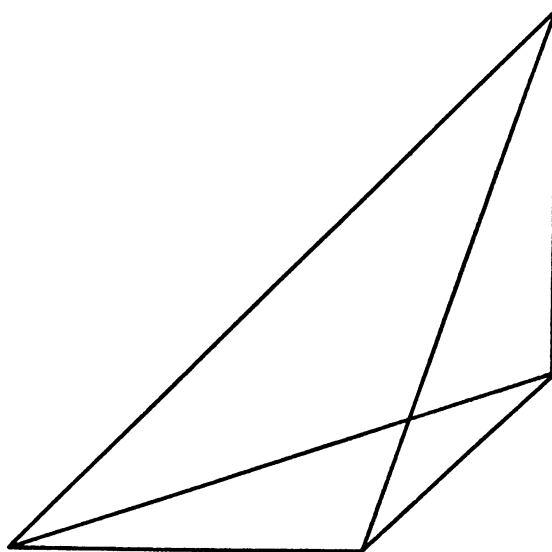


Abb. 2

Demnach gilt für ein beliebiges Polyeder A die folgende Zerlegung im erweiterten Sinne

$$(17) \quad A = \sum \varepsilon_n T_n \quad (\varepsilon_n = \pm 1),$$

wobei T ein Orthogonalsimplex $T(0; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ bezeichnet, dessen Anfangsecke in 0 liegt.

Der Nachweis der Zerlegungsformel (17) lässt sich durch vollständige Induktion leicht führen. Im Falle $k = 1$ ist die Aussage trivial; diese sei jetzt richtig für die Dimension $k - 1$. Um den Nachweis für die Dimension k zu leisten, genügt es im Hinblick auf die Zerlegung (15) zu zeigen, dass (17) für beliebige Simplexe S richtig ist; hierbei ist in-
dessen wie auch im folgenden stets die bei (6) gegebene zusätzliche Er-

klärung zu beachten. Da aber für ein Simplex S stets die Zerlegung $S = \sum_0^k \varepsilon_i S_i$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) besteht, wobei die S_i Simplexe bedeuten, die eine Ecke in 0 aufweisen, genügt es den Nachweis nur für solche S zu führen,

In diesem Falle ist $S = [0, S']$, wobei hier die eckige Klammer die Bildung der konvexen Hülle andeutet, und S' das $(k-1)$ -dimensionale Gegensimplex von 0 in S bezeichnet. Ist nun weiter $0'$ der Fusspunkt des von 0 auf den $(k-1)$ -dimensionalen Träger Raum R_{k-1} von S' gefällten Lotes, so lässt sich nach der induktiven Voraussetzung $S' = \sum \varepsilon_n T'_n$ schreiben, wobei nun T' ein Orthogonalsimplex des R_{k-1} ist, dessen Anfangsecke sich in $0'$ befindet. Müheles erkennt man, dass nun $S = \sum \varepsilon_n [0, T'_n]$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) gilt, und dass weiter $[0, T'_n] = T_n$ gesetzt werden kann, wo jetzt T ein Orthogonalsimplex des R_k ist. Hieraus folgt endlich $S = \sum \varepsilon_n T_n$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) w. z. b. w.

§ 4. EINE SPEZIELLE SIMPLEXZERLEGUNG

Wir greifen auf die Darstellung (13) für ein allgemeines Simplex S zurück. Es sei λ ein festgewählter Wert des Intervalls $0 < \lambda < 1$. Es lässt sich nun eine dem λ zugeordnete Zerlegung von S in $(k+1)$ Teilpolyeder

$$(18) \quad S = \sum_0^k S_i(\lambda)$$

nach der folgenden Vorschrift bilden: Die Ortsvektoren des Teilpolyeders $S_i(\lambda)$ sind:

$$(19) \quad \mathfrak{E} = \sum \alpha_\nu a_\nu \quad (1 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_i \geq \lambda \geq \alpha_{i+1} \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0).$$

Es ist ohne weiteres einzusehen, dass die soeben beschriebenen Polyeder $S_i(\lambda)$ keine inneren Punkte gemeinsam haben, dass sie aber in ihrer Summe das Simplex S vollständig ausfüllen. (Abb. 3 illustriert eine solche Zerlegung im Falle $k=3$ und $\lambda=1/3$).

Für die vorgesehenen Anwendungen ist es erforderlich, die gestaltliche Natur der Teilpolyeder noch einlässlicher zu erörtern. Nach Ansatz (19) lässt sich für die Ortsvektoren von $S_i(\lambda)$ schreiben

$$(20) \quad \mathfrak{E} = p + q,$$

wobei nun

$$\begin{aligned} p &= \sum_1^i \alpha_\nu a_\nu \quad (1 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_i \geq \lambda); \\ q &= \sum_{i+1}^k \alpha_\nu a_\nu \quad (\lambda \geq \alpha_{i+1} \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0) \end{aligned}$$

ist. Die Ortsvektoren p und q charakterisieren einzeln ein i — dimensionales Polyeder $P_i(\lambda)$ und ein $(k-i)$ — dimensionales Polyeder $Q_{k-i}(\lambda)$; die richtige Lescart von (20) führt nun zum Ergebnis, dass

$$(21) \quad S_i(\lambda) = P_i(\lambda) \times Q_{k-i}(\lambda)$$

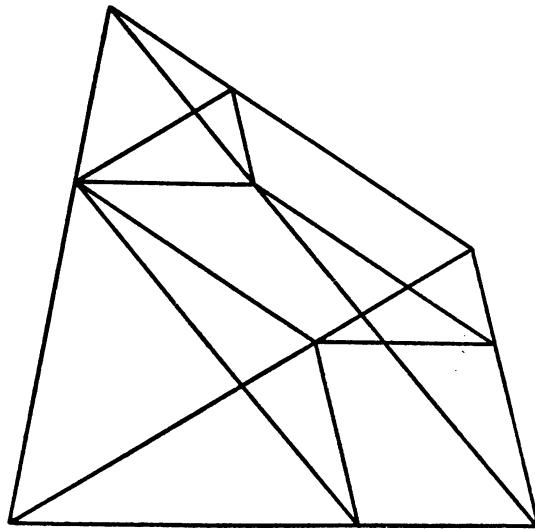


Abb. 3

ist. Wenn in den Darstellungen für die Ortsvektoren p und q die Parametertransformationen $\alpha_\nu = \lambda + (1-\lambda)\beta_\nu$ und $\alpha_\nu = \lambda\beta_\nu$ durchgeführt werden, so ergeben sich die neuen Formeln

$$(22) \quad \begin{aligned} p &= \lambda \sum_1^i a_\nu + (1-\lambda) \sum_1^i \beta_\nu a_\nu \quad (1 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_i \geq 0); \\ q &= \lambda \sum_{i+1}^k \beta_\nu a_\nu \quad (1 \geq \beta_{i+1} \geq \dots \geq \beta_k \geq 0), \end{aligned}$$

welche abzulesen gestatten, dass die Translationsgleichheiten

$$(23) \quad \begin{aligned} P_i(\lambda) &\cong (1-\lambda) S[O; a_1, \dots, a_i]; \\ Q_{k-i}(\lambda) &\cong \lambda S[O; a_{i+1}, \dots, a_k] \end{aligned}$$

gelten, wobei wir die Darstellung (14) auch für unterdimensionale Simplexe sinngemäss beanspruchen.

Indem wir nun (18), (21) und (23) für die Formulierung eines zusammengefassten Ergebnisses verwenden, gewinnen wir die nachfolgende Zerlegungsformel.

Für ein beliebiges Simplex $S = S [O; a_1, \dots, a_k]$ und $0 < \lambda < 1$ gilt

$$(24) \quad S = \sum_0^k S_i(\lambda),$$

wobei sich die Teilpolyeder $S_i(\lambda)$ durch Minkowskische Addition unterdimensionaler Simplexe gemäss der Relation

$$S_i(\lambda) \cong (1 - \lambda) S [O; a_1, \dots, a_i] \times \lambda S [O; a_{i+1}, \dots, a_k]$$

ergeben; insbesondere ist

$$S_0(\lambda) \cong \lambda S; \quad S_k(\lambda) \cong (1 - \lambda) S.$$

§ 5. DER INHALTSSATZ

Es sei jetzt $\Phi(A)$ eine Inhaltsmasszahl, welche den Inhaltspostulaten I. bis IV. genügt. Im Hinblick auf die für ein beliebiges Polyeder gültige Darstellungsformel (17) ist es klar, dass eine Inhaltsmasszahl $\Phi(A)$ durch die Inhaltswerte $\Phi(T)$, welche den Orthogonalsimplex T zukommen, vollständig charakterisiert ist.

Durch Beanspruchung der Additivität des Funktional $\Phi(A)$ allein folgt nämlich aus (17), dass für ein beliebiges Polyeder A die Inhaltsformel

$$(25) \quad \Phi(A) = \sum \varepsilon_n \Phi(T_n) \quad (\varepsilon_n = \pm 1)$$

gilt; hierbei ist T_n ein Orthogonalsimplex $T_n [O; a_1, \dots, a_k]$, dessen Anfangsecke im Ursprung 0 liegt.

Es gilt nun der folgende *Inhaltssatz*:

Es gibt eine aber nur eine Inhaltsmasszahl $\Phi(A) = J(A)$, welche den Inhaltspostulaten I. bis IV. genügt. Sie ist charakterisiert durch die für das Orthogonalsimplex $T = T [O; a_1, \dots, a_k]$ gültige Inhaltsformel

$$(26) \quad J(T) = \frac{|a_1| |a_2| \dots |a_k|}{k!}.$$

Durch diese ausgezeichnete Inhaltsmasszahl ist der elementare Polyederinhalt $J(A)$ gegeben.

Mit etwas anderen Worten ausgedrückt besagt der Inhaltssatz, dass der klassische elementare Polyederinhalt $J(A)$ das einzige translationsinvariante, additive, definite und normierte Polyederfunktional darstellt.

In den folgenden Abschnitten wird ein Beweis des Inhaltssatzes entwickelt, der sich methodisch nach bester Möglichkeit im Rahmen einer elementaren Polyedertheorie hält; dies zu erreichen ist die Hauptzielsetzung der vorliegenden Arbeit.

Vorerst noch einige grundsätzlich wichtige Feststellungen, die sich unmittelbar an den Inhaltssatz anschliessen:

Aus Ansatz (26) geht unmittelbar hervor, dass der elementare Inhalt $J(A)$ *bewegungsinvariant* ist, d. h. es gilt

$$(27) \quad J(A) = J(A') \quad \text{falls} \quad A \cong A' \quad (\text{kongruent}) \text{ ist.}$$

Dadurch ist die für die Grundlegung einer elementaren Inhaltstheorie wesentliche Tatsache ausgedrückt, dass die Bewegungsinvarianz aus der Translationsinvarianz ableitbar ist. — Ferner lässt sich nach (26) ablesen, dass der elementare Inhalt $J(A)$ *homogen* vom Grade k ist, d. h. es gilt

$$(28) \quad J(\lambda A) = \lambda^k J(A).$$

Dass der Inhaltssatz im Falle $k = 1$ richtig ist, darf als trivial bezeichnet werden; die noch notwendigen einfachen Schlüsse können dem Leser überlassen werden. In den folgenden Abschnitten wird die Gültigkeit des Inhaltssatzes gemäss einer induktiven Voraussetzung für alle Dimensionen angenommen, welche kleiner als k sind. Insbesondere wird für verschiedene Konstruktionen ein $(k-1)$ — dimensionaler Inhalt zur Verfügung stehen. Neu werden dann sämtliche Aussagen bewiesen für die Dimension k .

§ 6. DIE ZYLINDERFORMEL (1. HILFSSATZ)

Unter einem k — dim. *Zylinderpolyeder* (kurz Zylinder) verstehen wir die Minkowskische Summe $U \times V$ zweier unterdimensionaler Polyeder U und V , wobei U in einem i — dim. Unterraum R_i und V in einem $(k-i)$ — dim. Unterraum R_{k-i} liegen soll und noch $1 \leq i \leq k-1$ vorausgesetzt sei. Stehen die beiden Trägerräume R_i und R_{k-i} aufeinander orthogonal, so wollen wir von einem *geraden Zylinderpolyeder* sprechen.

Es bezeichne $J_j(A)$ den j — dim. elementaren Inhalt eines unterdimensionalen, in einem j — dim. Unterraum R_j liegenden Polyeders A . Dieser steht gemäss der induktiven Voraussetzung, wie am Schluss des vorausgehenden Abschnittes erwähnt, zur Verfügung, falls $1 \leq j \leq k-1$ ist.

Es sei nun $\Phi(A)$ eine Inhaltsmasszahl im R_k . Nach unseren Erklärungen bedeutet dies nur, dass $\Phi(A)$ die Inhaltspostulate I. bis IV. erfüllt. Dann gilt der

1. *Hilfssatz*: Ist $U \times V$ ein gerader Zylinder, so gilt die Inhaltsformel

$$(29) \quad \Phi(U \times V) = J_i(U) J_{k-i}(V),$$

wobei U bzw. V ein i — dim, bzw. ein $(k-i)$ — dim. unterdimensionales Polyeder ist ($1 \leq i \leq k-1$).

Als einfaches Korollar von (29) ergibt sich noch eine Inhaltsformel für einen geraden Zylinder, der durch Minkowskische Addition zweier unterdimensionaler Orthogonalsimplexe

$$U = U[O; a_1, \dots, a_i], \quad V = V[O, a_{i+1}, \dots, a_k]$$

entsteht. Nach (26) und (29) ergibt sich nämlich

$$(30) \quad \Phi(U \times V) = \frac{|a_1| |a_2| \dots |a_k|}{i! (k-i)!}.$$

Solche Zylinder kommen nach der Zerlegungsformel (24) bei der dort erörterten Simplexzerlegung vor, falls es sich insbesondere um ein Orthogonalsimplex handelt. Die an sich naheliegende Kontrolle der Zerlegungsformel (24) auf Grund der Additivität des elementaren Inhalts nach den Formeln (26) und (30) wird durch den binomischen Lehrsatz in einfachster Weise verifiziert.

§ 7. DER HÜLLVEKTOR (2. HILFSSATZ)

Die $(k-1)$ — dim. Seitenflächenpolyeder eines Polyeders A wollen wir im folgenden durch P_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), bezeichnen. Unter dem Hüllvektor $\mathfrak{X}$ des Polyeders A verstehen wir die Vektorsumme

$$(31) \quad \mathfrak{X}(A) = \sum J_{k-1}(P_\nu) n_\nu,$$

wobei sich die Summation über alle Seitenflächen P_ν von A erstrecken soll und n_ν der nach aussen gerichtete Normaleneinheitsvektor von A

in einem «inneren» Punkt von P_v ist. — Offenbar stellt $\mathfrak{X}(A)$ ein vektorielles Funktional der Polyeder A dar. Dieses ist translationsinvariant, d. h. es gilt

$$(32) \quad \mathfrak{X}(A) = \mathfrak{X}(A'), \quad \text{falls } A \cong A' \text{ ist};$$

ferner ist das Funktional additiv, d. h. es gilt

$$(33) \quad \mathfrak{X}(A + B) = \mathfrak{X}(A) + \mathfrak{X}(B);$$

weiter ist dieses homogen vom Grade $(k-1)$, d. h. man hat die Relation

$$(34) \quad \mathfrak{X}(\lambda A) = \lambda^{k-1} \mathfrak{X}(A).$$

Es gilt nun der folgende 2. *Hilfssatz*:

Der Hüllvektor eines beliebigen Polyeders verschwindet, d. h. es gilt für alle A

$$(35) \quad \mathfrak{X}(A) = 0.$$

§ 8. BEWEIS DER HILFSSÄTZE

1. *Nachweis von (29):*

Es sei $\Phi(A)$ ein Funktional, das die Forderungen I, bis IV. d. h. die Inhaltspostulate befriedigt. $U \times V$ sei ein gerader Zylinder, $E \in R_i$, $V \in R_{k-i}$, $1 \leq i \leq k-1$, $R_i \perp R_{k-i}$.

Wir denken uns zunächst V fest, dagegen wollen wir U in seinem Trägerraum R_i frei variieren lassen. Dann setzen wir

$$(36) \quad \varphi(U) = \Phi(U \times V) / \Phi(E_i \times V),$$

wo E_i einen festen i — dim. Einheitswürfel im R_i bezeichnet. Durch Ansatz (36) wird im R_i ein Funktional $\varphi(U)$ definiert, welches dort translationsinvariant, additiv, definit und normiert ist. Diese Einsichten ergeben sich der Reihe nach auf Grund der folgenden vier Bemerkungen: 1. Aus $U \cong U'$ folgt $U \times V \cong U' \times V$ und also $\varphi(U) = \varphi(U')$; 2. Aus $U = U_1 + U_2$ folgt $U \times V = (U_1 \times V) + (U_2 \times V)$, also $\varphi(U_1 + U_2) = \varphi(U_1) + \varphi(U_2)$; 3. Es ist $\Phi(U \times V) \geq 0$, also $\varphi(U) \geq 0$; 4. Es ist $\varphi(E_i) = 1$.

Da nun aber für den R_i nach der induktiven Voraussetzung der Inhaltssatz gilt, muss demnach

$$(37) \quad \varphi(U) = J_i(U)$$

sein, wo $J_i(U)$ den elementaren Inhalt im R_i bezeichnet.

Weiter betrachten wir jetzt

$$(38) \quad \psi(V) = \Phi(E_i \times V),$$

wobei wir uns nun V in seinem Trägerraum R_{k-i} frei variierbar denken. Der Ansatz (38) definiert jetzt analog im R_{k-i} ein Funktional $\psi(V)$. Zunächst kann in genau gleicher Weise wie oben geschlossen werden, dass $\psi(V)$ translationsinvariant, additiv und definit ist. Die Einsicht, dass es auch normiert ist, gewinnt man so: Wird mit E_{k-i} ein Einheitswürfel im R_{k-i} bezeichnet, so ist zunächst $E_i \times E_{k-i} = E'$ ein Einheitswürfel im R_k . Nach dem in § 2 erwähnten Satz betreffend die translative Zerlegungsgleichheit von Würfeln gilt aber $E' \cong E$, wo nun E den im Inhaltspostulat IV. genannten Würfel bezeichnet. Demnach folgt $\psi(E_{k-i}) = \Phi(E') = \Phi(E) = 1$.

So folgt analog wie oben nach der induktiven Voraussetzung, dass

$$(39) \quad \psi(V) = J_{k-i}(V)$$

sein wird, und aus den Relationen (36) bis (39) lässt sich auf

$$(40) \quad \Phi(U \times V) = J_i(U) J_{k-i}(V)$$

schliessen, wzbw.

2. Nachweis von (35):

Für $k=1$ ist die Aussage trivial und für $k=2$ folgt sie vektorgeometrisch auf einfachste Weise. Es sei demnach $k \geq 3$. Nach (17) und (33) hat man

$$(41) \quad \mathfrak{X}(A) = \sum \varepsilon_n \mathfrak{X}(T_n) \quad (\varepsilon_n = \pm 1).$$

Es genügt demnach zu zeigen, dass für ein Orthogonalsimplex T stets $\mathfrak{X}(T) = 0$ ist. — Zunächst betrachten wir einen beliebigen geraden Zylinder $U \times V$, $E \in R_i$, $V \in R_{k-i}$, $1 \leq i \leq k-1$, $R_i \perp R_{k-i}$. Die $(k-1)$ dim. Seitenflächen von $U \times V$ sind die geraden Zylinder $P_\nu \times V$ und $Q_\mu \times U$, wobei P_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), die $(i-1)$ dim. Seitenflächen von U und Q_μ ($\mu = 1, 2, \dots$), die $(k-i-1)$ — dim. Seitenflächen von V bezeichnen. Sind nun n_ν und m_μ die äusseren Normalenvektoren von $U \times V$ in «inneren» Punkten von $P_\nu \times V$ und $Q_\mu \times U$, so liegt n_ν wegen $n_\nu \perp V \in R_{k-i}$ im R_i und analog liegt m_μ wegen $m_\mu \perp U \in R_i$ im R_{k-i} . n_ν bzw. m_μ ist also im R_i bzw. im R_{k-i} äusserer Normalenvektor von U an die Seitenfläche P_ν bzw. von V an die Seitenfläche Q_μ .

Nun hat man nach Definition (31) für den Hüllvektor des Zylinders $U \times V$ mit Rücksicht auf die oben gemachten Feststellungen zunächst

$$\mathfrak{X}(U \times V) = \sum J_{k-1}(P_\nu \times V) n_\nu + \sum J_{k-1}(Q_\mu \times U) m_\mu,$$

und dann nach der Zylinderformel (29), die nach der induktiven Voraussetzung für den elementaren Inhalt J_{k-1} gilt,

$$(43) \quad \mathfrak{X}(U \times V) = J_{k-i}(V) \sum J_{i-1}(P_\nu) n_\nu + J_i(U) \sum J_{k-i-1}(Q_\mu) m_\mu,$$

oder endlich

$$(44) \quad \mathfrak{X}(U \times V) = J_{k-i}(V) \mathfrak{X}_i(U) + J_i(U) \mathfrak{X}_{k-i}(V),$$

wobei $\mathfrak{X}_j(A)$ den Hüllvektor des unterdimensionalen Polyeders A im j -dim. Unterraum R_j bezeichnet. Gemäss dem induktiven Verfahren dürfen wir annehmen, dass $\mathfrak{X}_j(A) = 0$ ist, falls $1 \leq j \leq k-1$ ist. So folgt nach (44) also

$$(45) \quad \mathfrak{X}(U \times V) = 0.$$

Nun gilt aber nach (24) für ein Orthogonalsimplex T eine Zerlegung der Form $T = \sum T_j(\lambda)$. Wenn wir nun bedenken, dass $T_j(\lambda)$ für $1 \leq j \leq k-1$ gerade Zylinder sind, hat man nach (33) unter Berücksichtigung des oben erreichten Resultates (45)

$$(46) \quad \mathfrak{X}(T) = \mathfrak{X}\{T_0(\lambda)\} + \mathfrak{X}\{T_k(\lambda)\}.$$

Nun gilt aber $T_0(\lambda) \cong \lambda T$ und $T_k(\lambda) \cong (1-\lambda)T$, sodass sich aus (46) durch Anwendung von (34) und (32) mit $\lambda = \frac{1}{2}$ die Relation

$$(47) \quad [1 - 2^{2-k}] \mathfrak{X}(T) = 0$$

gewinnen lässt, die wegen $k \geq 3$ offenbar die zu beweisende Beziehung

$$(48) \quad \mathfrak{X}(T) = 0 \quad \text{zur Folge hat.}$$

§ 9. EXISTENZ DES ELEMENTAREN INHALTS

Gemäss der induktiven Voraussetzung gilt der Inhaltssatz für Räume, deren Dimension kleiner als k ist. Insbesondere ist damit ausgesagt, dass eine Lösung des Inhaltsmasszahlproblems existiert, insofern als in diesen Räumen durch Ansatz (26) ein translationsinvariantes, addi-

tives, definites und normiertes Polyederfunktional, nämlich der elementare Inhalt, gegeben ist. Wir beweisen jetzt, dass Ansatz (26) auch im k —dimensionalen Raum eine Inhaltsmasszahl charakterisiert, womit auch für die Dimension k die Existenz des elementaren Inhalts sichergestellt ist.

Es sollen wie in den beiden vorstehenden Abschnitten durch P_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), die $(k-1)$ dim. Seitenflächenpolyeder von A bezeichnet werden; ferner bedeute $\mathfrak{n}_\nu$ wieder den nach aussen gerichteten Normaleineheitsvektor von A in einem «inneren» Punkt p_ν von P_ν . Durch den Ansatz

$$(49) \quad \Phi(A) = \frac{1}{k} \sum J_{k-1}(P_\nu)(\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{p}_\nu),$$

wobei sich die Summation über sämtliche Seitenflächen P_ν von A zu erstrecken hat und $\mathfrak{p}_\nu$ den Ortsvektor des Punktes p_ν darstellt, wird ein Polyederfunktional $\Phi(A)$ definiert, da der Wert der in (49) angesetzten Summe von der Wahl des «inneren» Punktes p_ν der Seitenfläche P_ν nicht abhängt. Das verwendete runde Klammersymbol bezeichne das Skalarprodukt. Zunächst zeigen wir, dass das erklärte Funktional translationsinvariant ist, d. h. dass

$$(50) \quad \Phi(A) = \Phi(A') \quad \text{falls } A \cong A'$$

gilt. In der Tat: Bezeichnet $\mathfrak{t}$ den Verschiebungsvektor derjenigen Translation, welche A in A' überführt, sodass $\alpha' = \alpha + \mathfrak{t}$ gilt, wenn α und α' korrespondierende Ortvektoren von A und A' sind, so ist offenbar

$$(51) \quad \Phi(A') = \sum J_{k-1}(P_\nu)(\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{p}_\nu + \mathfrak{t}),$$

oder mit Verwendung des durch Ansatz (31) eingeführten Hüllvektors nach naheliegender Zerlegung

$$(52) \quad \Phi(A') = \Phi(A) + (\mathfrak{x}(A), \mathfrak{t}).$$

Da aber dem 2. Hilfssatz der Hüllvektor verschwindet —vgl. hierzu (35)— so gewinnt man die Behauptung (50) aus (52).

Unmittelbar an die Definition (49) anschliessend kann erkannt werden, dass das konstruierte Funktional additiv ist, d. h. dass die Relation

$$(53) \quad \Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$$

erfüllt wird. Weiter zeigen wir, dass das Funktional auch definit ist, sodass stets

$$(54) \quad \Phi(A) \geq 0$$

gilt. Da sich ein Polyeder A in Simplexe S_n zerlegen lässt — vgl. hierzu (15) — genügt es wegen (53) das Gewünschte für ein allgemeines Simplex S zu beweisen. Mit (50) bedeutet es keine Einschränkung anzunehmen, dass eine Ecke von S im Ursprung O liegt. Ist jetzt S' das $(k-1)$ dim. Gegensimplex von O in S , und $\mathfrak{n}$ der zugehörnde äussere Normalenvektor von S , so hat man

$$(55) \quad \Phi(S) = J_{k-1}(S')(\mathfrak{n}, \mathfrak{p}).$$

Nach Grundtatsachen der elementaren Vektorgeometrie ist indessen $(\mathfrak{n}, \mathfrak{p})$ der Abstand der Trägerebene von S' von O , und als solcher positiv, da der Normalenvektor dieser Ebene in denjenigen Halbraum weist, der O nicht enthält. Demnach folgt $\Phi(S) \geq 0$, und hieraus also die Behauptung (54).

Endlich zeigen wir noch, dass unser Funktional normiert ist, also dass für den Einheitswürfel E

$$(56) \quad \Phi(E) = 1$$

gilt. Es genügt wegen (50) das Gewünschte für einen Würfel $E' \cong E$ nachzuweisen, der eine Ecke im Ursprung O hat. Von den $2k(k-1)$ dim. Seitenflächenwürfel von E' haben k in O einen gemeinsamen Eckpunkt; die k andern Seitenflächenwürfel sollen durch E'_ν ($\nu = 1, 2, \dots, k$) bezeichnet werden. Dann ist zunächst

$$(57) \quad \Phi(E') = \frac{1}{k} \sum J_{k-1}(E'_\nu)(\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{p}_\nu).$$

Aus vektorgeometrischen Gründen, wie sie unmittelbar weiter oben erörtert wurden, gilt aber $(\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{p}_\nu) = 1$ und da E' ein $(k-1)$ dim. Einheitswürfel ist, hat man $J_{k-1}(E') = 1$, sodass sich aus (57) die Behauptung (56) ergibt.

Mit den durch (50), (53), (54) und (56) ausgedrückten Eigenschaften des Funktional $\Phi(A)$ ist dargetan, dass es sich um eine Inhaltsmasszahl handelt. Die in diesem Abschnitt zur Diskussion stehende Behaup-

tung ist offenbar dann bewiesen, wenn wir jetzt noch zeigen, dass für ein Orthogonalsimplex T die Formel

$$(58) \quad \Phi(T) = \frac{|a_1| |a_2| \dots |a_k|}{k!}$$

besteht. In der Tat: Es sei $T = T[O; a_1, \dots, a_k]$. Die Anfangsecke von T befindet sich im Ursprung 0; es sei jetzt noch $T' = T'[a_1; a_2, \dots, a_k]$ das $(k-1)$ -dim. Gegensimplex von 0 in T . Nach Ansatz (49) hat man zunächst

$$(59) \quad \Phi(T) = \frac{1}{k} J_{k-1}(T') (n, p),$$

wobei n den äusseren Normalenvektor von T in T' bedeutet, für den man

$$n = a_1 / |a_1| \quad \text{setzen kann.}$$

Mit Rücksicht darauf, dass $J_{k-1}(S') = \frac{|a_2| |a_3| \dots |a_k|}{(k-1)!}$ ist und dass für p der Vektor a_1 gewählt werden kann, ergibt sich aus (59) die gewünschte Behauptung (58).

Damit ist der Existenz beweis abgeschlossen.

§ 10. EINDEUTIGKEIT DES ELEMENTAREN INHALTS

Wenn im vorstehenden Abschnitt gezeigt worden ist, dass wenigstens eine Inhaltsmasszahl existiert, wollen wir jetzt beweisen, dass es höchstens eine solche geben kann. Damit ist dargetan, dass der elementare Inhalt durch die vier durch die Inhaltspostulate I. bis IV. ausgedrückten Grundeigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Es sei $\Phi(A)$ ein translationsinvariantes, additives, definites und normiertes Polyederfunktional. — Für einen geraden Zylinder $U \times V$, $U \in R_i$, $V \in R_{k-i}$, $1 \leq i \leq k-i$, $R_i \perp R_{k-i}$ gilt nun nach dem 1. Hilfssatz — vgl. hierzu (29) —

$$(60) \quad \Phi(U \times V) = J_i(U) J_{k-i}(V).$$

Dies muss so interpretiert werden, dass die Funktionalwerte für gerade Zylinder eindeutig vorgeschrieben sind. Offenbar kann es sich

in diesem Fall nur um den elementaren Inhalt handeln, woraus zu schliessen ist, dass

$$(61) \quad \Phi(U \times V) = J(U \times V)$$

sein muss. — Durch den Ansatz

$$(62) \quad \varphi(A) = \Phi(A) - J(A)$$

erklären wir nun ein neues Funktional, das sicher wieder translationsinvariant und additiv ist — die beiden andern Grundeigenschaften gehen i. a. durch lineare Kombination verloren. Nach (61) ist

$$(63) \quad \varphi(U \times V) = 0.$$

Nun gilt wieder nach (24) für ein Orthogonalsimplex T eine Zerlegung der Form $T = \sum T_j(\lambda)$. Da nun aber $T_j(\lambda)$ für $1 \leq j \leq k-1$ einen geraden Zylinder darstellt, hat man wegen der Additivität des Funktionals $\varphi(A)$ und mit Rücksicht auf (63)

$$(64) \quad \varphi(T) = \varphi\{T_0(\lambda)\} + \varphi\{T_k(\lambda)\}.$$

Wählen wir auch hier $\lambda = \frac{1}{2}$ und bedenken, dass $T_0\left(\frac{1}{2}\right) \cong \frac{1}{2}T$ und ebenso $T_k\left(\frac{1}{2}\right) \cong \frac{1}{2}T$ gilt, so gewinnen wir aus (64)

$$(65) \quad \varphi(T) = 2\varphi(2^{-1}T).$$

Durch n -fache Iteration erscheint

$$(66) \quad \varphi(T) = 2^n \varphi(2^{-n}T),$$

und wegen der Darstellungsmöglichkeit eines beliebigen Polyeders durch Orthogonalsimplexe gemäss der Zerlegungsformel (17) folgt allgemeiner

$$(67) \quad \varphi(A) = 2^n \varphi(2^{-n}A).$$

Rückgreifend auf Ansatz (62) hat man mit (28) und (67)

$$(68) \quad \Phi(2^{-n}A) = 2^{-n}\varphi(A) + 2^{-kn}J(A).$$

Da $\Phi(A)$ definit ist, folgt so zunächst

$$(69) \quad \varphi(A) + 2^{-(k-1)n} J(A) \geq 0,$$

und da $k > 1$ ist, und n beliebig gross gewählt werden darf

$$(70) \quad \varphi(A) \geq 0.$$

Das Hilfsfunktional $\varphi(A)$ ist demnach definit und infolgedessen auch monoton, d. h. es muss

$$(71) \quad \varphi(A) \leq \varphi(B) \quad \text{für} \quad A \subseteq B$$

gelten. Wählen wir aber nun für B einen geraden Zylinder und berücksichtigen (63) so schliesst man

$$(72) \quad \varphi(A) \leq 0.$$

Aus (70) und (72) folgert man

$$(73) \quad \varphi(A) = 0$$

oder also

$$(74) \quad \Phi(A) = J(A).$$

Damit ist der Eindeutigkeitsbeweis abgeschlossen.

§ 11. UNABHÄNGIGKEIT DER INHALTSPOSTULATE

Abschliessend weisen wir noch nach, dass die vier Inhaltspostulate I. bis IV. voneinander unabhängig sind. Nachdem wir in den vorausgehenden Abschnitten gezeigt haben, dass der elementare Inhalt $J(A)$ das einzige Funktional ist, dass die vier Postulate befriedigt, genügt es offenbar nachzuweisen, dass dies nicht mehr der Fall ist, falls eine von den vier Forderungen weggelassen wird. Durch vier einfache, teilweise triviale Ansätze erklären wir nachfolgend vier Funktionale $\Phi_I(A)$ bis $\Phi_{IV}(A)$, wobei der Index dasjenige Postulat bezeichnet, das weggelassen soll. Da diese von $J(A)$ verschieden sind, ist der gewünschte Unabhängigkeitsbeweis erbracht.

$$(75) \quad \Phi_I(A) = J(EA).$$

Hier bedeutet E den in Postulat IV. genannten festen Einheitswürfel und EA bezeichnet das Durchschnittspolyeder von E und A .

$$(76) \quad \Phi_{II}(A) = 1.$$

$$(77) \quad \Phi_{III}(A) = J(A) + \sum J_{k-1}(P_\nu) \omega(n_\nu w),$$

P_ν ($\nu = 1, 2, \dots$), bezeichnet das Seitenflächenpolyeder von A und n_ν den zugeordneten äusseren Normalenvektor; w ist ein beliebiger Einheitsvektor; $\omega(t) = 0$ ($-1 < t < 1$), $\omega(-1) = -1$, $\omega(1) = 1$.

$$(78) \quad \Phi_{IV}(A) = 0.$$

BERICHTIGUNGEN

zur Arbeit von W. WEBER

- S. 121. Z. 4 v. o. : statt « Punktkoordinaetn » lies « Punktkoordinaten ».
- S. 125. Z. 11 v. o. : statt « regulyrer » lies « regulärer ».
- S. 125. Z. 7 v. u. : statt « letxteren » lies « letzteren ».
- S. 127. Z. 17 v. o. : der Punkt nach « unter » ist zu streichen.
- S. 128. Z. 16 v. u. : statt « wëre », « wäre ».
- S. 130. Z. 17 v. o. : statt « num » lies « nun ».
- S. 132. Z. 9 v. u. : statt « Vecktor » lies « Vektor ».
- S. 133. Z. 13 v. u. : statt « väre » lies « wäre ».

BERICHTIGUNGEN

zur Arbeit von H. HADWIGER

- S. 138. Z. 7 v. o. : statt W. SUSS lies W. SÜSS.
- S. 139. Z. 18 v. u. : statt « beschränkten » lies « beschränkten ».
- S. 140. Z. 17 v. u. : der Punkt nach « wenn » ist zu streichen.
- S. 142. Z. 11 v. o. : statt « zerlegugsgleich » lies « zerlegungsgleich ».
- S. 153. Z. 13 v. u. : statt « Bezeichnct » lies « Bezeichnet ».
- S. 155. Z. 14 v. o. : statt « Existenz beweis » lies « Existenzbeweis ».
- S. 157. Z. 8 v. u. : statt « dass » lies « das ».