SERIES RECURRENTES DE POLINOMIOS DE LEGENDRE

POR

J. M.ª ORTS

1. — El estudio sistemático y completo de las sucesiones de números reales o complejos, cuyos elementos satisfacen a una relación de recurrencia lineal, se encuentra en una Memoria de M. D'OCAGNE, publicada hace más de medio siglo en el «Journal de L'Ecole Polytechnique» (1).

Dentro del terreno específico de la teoría de funciones, el análisis de las sucesiones recurrentes, conduce a una propiedad asimismo clásica y bien conocida, a saber: toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cuyos coeficientes a_n constituyen una sucesión recurrente (lineal), define en su círculo de convergencia una función racional, y, recíprocamente, toda función de esta clase, es desarrollable en serie de potencias de tipo recurrente, que converge en un círculo de radio no superior al mínimo módulo de las raíces de la ecuación generatriz, que resulta igualando a cero el denominador de aquella fracción racional, supuesta irreducible. El hecho de que las funciones definidas por series recurrentes sean uniformes y posean tan sólo un número finito de polos, constituye, pues, la propiedad característica de dichas series.

Consecuencia inmediata de esa propiedad, es que la suma o producto —a lo CAUCHY— de dos series de potencias recurrentes, es otra serie de la misma clase, como lo es también —y esta observación es mucho más importante para el objeto de este trabajo—, la proposición (asimismo establecida en la citada Memoria de D'OCAGNE), según la cual, la sucesión $(a_n b_n)$ que resulta multiplicando los términos del mismo índice de dos sucesiones recurrentes, es otra sucesión recurrente (2).

(1) Journal de L'Ecole Polytechnique 64e. Cahier (1894), pág. 151.

(2) Esta propiedad resulta inmediata apoyándose en el conocido teorema de HADAMARD relativo a la multiplicación de singularidades, expresado por la fórmula:

$$h(z) = \Sigma a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(u)\, g\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u}$$

siendo: $f(u) = \Sigma a_n u^n$ y $g(u) = \Sigma b_n u^n$.

Obsérvese también que la propiedad en cuestión queda incluída en una proposición de carácter más general, debida a HURWITZ, que afirma que, si cada una de

2. — Dada una sucesión recurrente (a_n), consideremos la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) \tag{1}$$

en la que $P_n(z)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, son los polinomios de LEGENDRE, definidos, según es sabido, como coeficientes del desarrollo de la función $(1 - 2zu + u^2)^{-\frac{1}{2}}$ en serie de potencias de u, esto es:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zu + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, u^n \tag{2}$$

igualdad válida para los valores de u, tales que:

$$|u| < \text{Min.}\ |z \pm i\sqrt{1 - z^2}| \tag{3}$$

como se deduce inmediatamente del teorema de POINCARÉ [1] acerca del límite de la razón $\dfrac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}$ entre dos polinomios consecutivos de la sucesión definida por una relación recurrente de la forma:

$$P_{n+1}(z) + (a_n z + b_n) P_n(z) + c_n P_{n-1}(z) = 0$$

en la que se supone que los coeficientes a_n, b_n, c_n son todos reales y tienden cuando $n \longrightarrow \infty$ hacia sendos límites a, b, c, siendo $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Aplicando dicho teorema al caso de los polinomios de LEGENDRE $P_n(z)$ definidos por la relación recurrente:

$$P_{n+1}(z) - \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) z\, P_n(z) + \left(\frac{n}{n+1}\right) P_{n-1}(z) = 0$$

y cuyos coeficientes, como está patente, cumplen las condiciones precitadas, resulta que para $n \longrightarrow \infty$ el cociente $\dfrac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}$, tiende hacia la raíz de módulo máximo de la ecuación:

$$\theta^2 - 2\theta z + 1 = 0$$

---

las dos funciones $f(u)$ y $g(u)$ satisface a una ecuación diferencial lineal y homogénea cuyos coeficientes son funciones racionales de u, lo propio ocurre a la función $h(u)$. (Véase la nota de R. Jungen: « Remarque sur un theoreme de Hadamard relatif a la multiplication des singularités ». C. R., 1929. Tomo II, pág. 395).

[1] American Journal of Mathematics. Vol. II (1884) pag. 201.

y por tanto, admitida la existencia de:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

valor límite que coincide precisamente con el módulo mínimo de las raíces de la ecuación generatriz [1], la serie (1) será convergente para los valores de z tales que:

$$\text{máx}\cdot\left| z \pm i\sqrt{1-z^2} \right| < \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

es decir, en los puntos interiores a una elipse de focos $(-1, +1)$ y semieje mayor: $a = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$ [2].

Para hallar la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ en la elipse de convergencia, basta observar que si $z_1, z_2, \ldots z_m$ son los ceros o raíces del denominador de la fracción racional $\frac{M(z)}{N(z)}$ que expresa la suma de la serie recurrente de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (raíces que a fin de abreviar cálculos posteriores supondremos son todas distintas), al descomponer dicha fracción en sus elementos simples, se tendrá:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{M(z)}{N(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k}$$

Pero como para $|z| < |z_k|$ es:

$$\frac{1}{z - z_k} = -\frac{1}{z_k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_k}\right)^n$$

---

(1) Que, en toda sucesión recurrente (a_n) no existe necesariamente el límite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, esta patente en el caso bien sencillo de la sucesión definida por la fórmula $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ a partir de los elementos iniciales $a_1 = 0$ y $a_1 = 1$. La demostración de que el valor límite λ — cuando existe — coincide con la raíz de módulo mínimo de la ecuación generatriz de la sucesión, puede verse en la Memoria de D'Ocagne antes citada, o en cualquier tratado de Análisis. En todo caso, y a fin de evitar complicaciones inútiles, bastaría tomar el límite de oscilación de la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ en la fórmula (4).

(2) Pues, haciendo:

$$z = x + iy \quad \text{y} \quad z + i\sqrt{1 - z^2} = \varrho e^{\alpha i},$$

se obtiene:

$$x = \frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)\cos\alpha, \qquad y = \frac{1}{2}\left(\varrho - \frac{1}{\varrho}\right)\operatorname{sen}\alpha.$$

al sumar término a término las m series análogas a ésta, correspondientes a z_1, z_2, ... z_m, se obtendrá una serie que convergerá para todo valor de z que no supere al menor de los módulos $|z_1|$, $|z|$, ... $|z_m|$, y por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_1}{z_1^{n+1}} + \frac{A_2}{z_2^{n+1}} + \dots + \frac{A_m}{z_m^{n+1}} \right) z^n$$

de donde, y por identificación de los coeficientes, resulta:

$$a_n = -\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z_k^{n+1}} \tag{5}$$

Si ahora se sustituye en la serie de polinomios $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$, cada coeficiente a_n, por su respectivo valor (5), y se agrupan los términos correspondientes a un mismo valor del índice k, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = -\sum_{k=1}^{m} A_k \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{1}{z_k^{n+1}} \right\}$$

Pero de la definición misma de los polinomios $P_n(z)$ se deduce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{1}{z_k^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zz_k + z_k^2}}$$

igualdad, que según la condición (3) es válida para los valores de z, tales que:

$$\text{Máx}\cdot\left| z \pm i\sqrt{1 - z^2} \right| < |z_k|. \tag{6}$$

Por tanto, para todo valor de z que cumpla esta condición y cuyo módulo no supere al menor de los $|z_1|$, $|z_2|$, ... $|z_m|$ se tendrá:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\sqrt{1 - 2zz_k + z_k^2}} \tag{7}$$

fórmula que expresa la suma de una serie de polinomios de Legendre $\sum a_n P_n(z)$ cuyos coeficientes satisfacen a una relación lineal de recurrencia. En dicha fórmula — que viene a constituir la generalización de la descomposición de una función racional en sus elementos simples —, intervienen los polos z_k de la función definida por la serie recurrente de potencias $\sum a_n z^n$ y los correspondientes residuos A_k.

Cada uno de los términos $\dfrac{A_k}{\sqrt{1-2zz_k+z_k^2}}$ constitutivos de la suma (7) posee un solo punto de ramificación, a saber:

$$r_k = \frac{1}{2}\left(z_k + \frac{1}{z_k}\right)$$

mas todos esos puntos son exteriores a la elipse de convergencia de la serie de polinomios que figura en el primer miembro.

En efecto; según queda ya advertido, es: $|z_k| \geq \lambda$; por tanto, si hacemos: $z_k = \lambda_k e^{i\varphi_k}$, se tendrá:

$$r_k = \frac{1}{2}\left[\left(\lambda_k + \frac{1}{\lambda_k}\right)\cos\varphi_k + i\left(\lambda_k - \frac{1}{\lambda_k}\right)\operatorname{sen}\varphi_k\right]$$

lo que indica que el punto r_k pertenece a una elipse de focos $(-1+1)$, es decir, homofocal con la de convergencia, y cuyos semiejes son:

$$a_k = \frac{1}{2}\left(\lambda_k + \frac{1}{\lambda_k}\right), \qquad b_k = \frac{1}{2}\left(\lambda_k - \frac{1}{\lambda_k}\right).$$

Mas de la misma condición $\lambda_k \geq \lambda$ se deduce:

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_k - \frac{1}{\lambda_k}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$$

es decir: $b_k \geq b$, de donde, y observando que: $a_k^2 - b_k^2 = a^2 - b^2$, resulta también: $a_k \geq a$.

De esto se infiere que la función $F(z)$ definida por la serie de polinomios $\sum a_n P_n(z)$ es uniforme en su elipse de convergencia (1), y como cada uno de los términos $\dfrac{1}{\sqrt{1-2zz_k+z_k^2}}$ es continuo y diferenciable, esas mismas propiedades posee aquella función $F(z)$; conclusión que constituye un teorema general aplicable a toda serie de polinomios de LEGENDRE uniformemente convergente (2), pero que aquí ha sido deducida directamente de la propia estructura de la función que expresa

(1) De esto se sigue que, en tanto la variable z permanezca en el interior de la elipse de convergencia, el radical $\sqrt{1-2zz_k+z_k^2}$ no cambiará de signo, hipótesis que supondremos satisfecha en todo el curso del razonamiento.

(2) Dicho teorema es recíproco del que afirma que toda función holomorfa en una elipse, es desarrollable en serie uniformemente convergente de polinomios. (Véase por ejemplo: MONTEL. — «Lecons sur les series de polynomes a una variable complexe.«, pág. 91.)

la suma de la serie de polinomios $\sum a_n P_n(z)$, en el caso particular en que la sucesión de los coeficientes es de tipo recurrente.

3. — El resultado anteriormente obtenido, puede alcanzarse por otra ruta que conduce, como veremos, inmediatamente a interesantes generalizaciones.

Consideremos una serie de polinomios de LEGENDRE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ cuyos coeficientes a_n supondremos de momento cualesquiera.

Valiéndonos de la fórmula que expresa los polinomios de LEGENDRE en forma de integral definida (1):

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{z-i\sqrt{1-z^2}}^{z+i\sqrt{1-z^2}} \frac{u^n}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du \tag{8}$$

y haciendo para abreviar:

$$z - i\sqrt{1-z^2} = \alpha, \qquad z + i\sqrt{1-z^2} = \beta$$

se deduce:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u^n}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du \right\} \tag{9}$$

Ahora bien; como según se desprende de (4), el camino rectilíneo (r) que determinan α y β, es interior al círculo de radio $\frac{1}{\lambda}$ donde converge absoluta y uniformemente la serie $\sum a_n z^n$, se verificará para todo valor de u a lo largo de (r):

$$|R_n(u)| = \left|\sum_{n=v}^{\infty} a_n u^n\right| < \varepsilon$$

siendo ε un número positivo dado al arbitrio y v un entero conveniente.

(1) Esta expresión se obtiene inmediatamente partiendo de la integral de LAPLACE que da la expresión de los polinomios $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi} (z + i\sqrt{1-z^2}\cos\varphi)\, d\varphi$$

y efectuando la sustitución: $z + i\sqrt{1-z^2}\cos\varphi = u$. (Véase, por ejemplo, VITALI-SANSONE: « Moderna teoría delle funzioni di variabile reali », T. II, págs. 161 y 189).

Por tanto: tomando dos puntos α_1, β_1 interiores a r e infinitamente próximos a los α, β respectivamente, se tendrá:

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n(u)}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du \right| \leq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{|R_n(u)|}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du < \varepsilon \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{du}{\sqrt{1-2zu+u^2}} \lesssim \varepsilon$$

Por otra parte, si μ es un número real y positivo (cualquiera) comprendido entre $\frac{1}{2}$ y 1, se verifica:

$$\lim_{u \to \alpha} \left| (u-\alpha)^\mu \frac{1}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}} \right| = 0,$$

$$\lim_{u \to \beta} \left| (u-\beta)^\mu \frac{1}{\sqrt{(u-\alpha)(u-\beta)}} \right| = 0$$

de lo cual se sigue, en virtud de criterios de convergencia bien conocidos, que:

$$\lim_{\substack{\alpha_1 \to \alpha \\ \beta_1 \to \beta}} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{R_n(u)}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R_n(u)}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du$$

Por consiguiente es válida la igualdad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u^n}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du \right] = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u^n}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du$$

de donde, y teniendo en cuenta la relación (8), se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u^n}{\sqrt{1-2zu+u^2}}\, du \tag{10}$$

fórmula importante que permite calcular por medio de una integral definida, la suma de la serie de polinomios de LEGENDRE $\sum a_n P_n(z)$, si se conoce la de la serie de potencias $\sum a_n u^n$.

4. — Cuando la sucesión (a_n) de los coeficientes satisface a una relación de recurrencia de tipo lineal, la suma de la serie $\sum a_n u^n$ es, como

ya queda indicado, una fracción racional $\frac{M(u)}{N(u)}$, que descompuesta en sus elementos simples, dará:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = \frac{M(u)}{N(u)} = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{A_{k,1}}{n - u_k} + \frac{A_{k,2}}{(u-u)^2} + \dots + \frac{A_{k,\varrho}}{(u-u)^{\varrho}} \right]. \quad (11)$$

Por tanto, al substituir esta última expresión en la integral (10), su cálculo queda reducido al de otras de la forma:

$$I_{k,s} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{(u-u_k)^s \sqrt{1-2zu+u^2}} \quad (12)$$

de las que basta calcular la que corresponde a $s = 1$, es decir:

$$I_{k,1} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{(u-u_k)\sqrt{1-2zu+u^2}} \quad (13)$$

→ ya que cualquier otra de la forma (12) en que $s > 1$, se deduce de la (13) por sucesivas derivaciones respecto a u_k considerado como parámetro.

El valor de la integral (13) se obtiene inmediatamente efectuando el cambio de variable:

$$u = z + iv\sqrt{1-z^2}.$$

lo que da:

$$1-2zu+u^2 = (1-z^2)+(u-z)^2 = (1-z^2) - v^2(1-z^2) = (1-z^2)(1-v^2)$$

y si designamos por v_k el valor de v correspondiente al u_k de u, es decir:

$$u_k = z + iv_k\sqrt{1-z^2}, \qquad v_k = i\cdot\frac{z-u_k}{\sqrt{1-z^2}}$$

la integral (13) en cuestión toma la forma:

$$I_{k,1} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dv}{(v-v_k)\sqrt{1-v^2}}$$

cuyo valor es [1]:

$$I_{k,1} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\pi i}{\sqrt{1-v_k^2}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{1-2zu_k+u_k^2}} \quad (14)$$

---

(1) Goursat: «Cours d'Analyse Mathematique», Tomo I, pág. 292.

Por tanto, y si para simplificación de notaciones y abreviación del trabajo, nos limitamos a considerar, como antes, el caso en que la función racional tiene todos sus polos simples, es decir:

$$\frac{M(u)}{N(u)} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{A_k}{u - u_k}$$

se obtiene a través de las fórmulas (10), (11) y (14):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = -\sum_{k=1}^{k=m} \frac{A_k}{\sqrt{1 - 2zu_k + u_k^2}} \tag{15}$$

resultado que coincide con el anteriormente obtenido.

5. — La fórmula (15) permite calcular la suma de algunos tipos importantes de series de polinomios de Legendre cuyos coeficientes a_n cumplen las condiciones de recurrencia prefijada. Basta para ello conocer las raíces de la ecuación generatriz correspondiente a la sucesión de dichos coeficientes.

Consideremos en primer lugar el caso más simple, es decir, cuando es $a_n = 1$ para todo valor de n.

Entonces se tiene:

$$\sum a_n u^n = 1 + u + u^2 + \dots = \frac{1}{1-u} = -\frac{1}{u-1} \qquad (|u| < 1)$$

y, por tanto:

$$u_1 = 1, \qquad A_1 = -1,$$

con lo cual la fórmula (15) da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-z}} \tag{16}$$

resultado que no es sino un caso particular de la serie de Stieltjes-Neumann (1) y que puede deducirse también directamente de la igualdad (2) sin más que hacer $u = 1$.

Como segundo caso consideremos el $a_n = n$.

Se tiene ahora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nu^n = u + 2u^2 + 3u^3 + \dots = \frac{u}{(1-u)^2} = \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u-1}$$

---

(1) Véase Vitali-Sansone: «Moderna Teoria delle funzioni di variabile reale», Parte Seconda. Pág. 220.

quedando el problema reducido al cálculo de las dos siguientes integrales:

$$I_1 = \frac{1}{\pi i} \int_{z-i\sqrt{1-z^2}}^{z+i\sqrt{1-z^2}} \frac{du}{(u-1)\sqrt{1-2zu+u^2}}, \quad I_2 = \frac{1}{\pi i} \int_{z-i\sqrt{1-z^2}}^{z+i\sqrt{1-z^2}} \frac{du}{(u-1)^2\sqrt{1-2zu+u^2}}.$$

La primera se deduce de (14) haciendo simplemente $u_k = 1$, con lo cual y al igual que antes, se obtiene:

$$I_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-z}}.$$

En cuanto a I_2 resulta de la (13) por derivación respecto a u_k, o lo que es equivalente, en su valor (14), haciendo luego $u_k = 1$, lo cual da:

$$I_2 = I_1' = -\frac{1}{2}(1 - 2zu_k + u_k^2)^{-\frac{3}{2}}(-2z + 2u_k)$$

y haciendo $a_k = 1$ resulta:

$$I_2 = 2^{-\frac{3}{2}}(1-z)^{-\frac{3}{2}}(1-z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-z}}$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que el numerador de $(u-1)^2$ en la descomposición de la fracción racional que expresa la suma de la serie $\sum nu^n$ es también igual a la unidad, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(z) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-z}}.$$

Resultado que puede alcanzarse directamente sin más que derivar los dos miembros de la igualdad (2), haciendo luego $u = 1$.

6. — La proposición recíproca de la que expresa la igualdad (15) es igualmente válida, es decir, el desarrollo de una función de la forma:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\sqrt{1-2zu_k+u_k^2}}$$

en la cual se supone $|u_k| < \text{Min}\cdot|z \pm i\sqrt{1-z^2}|$, da origen a una serie de polinomios de Legendre $\sum a_n P_n(z)$, cuyos coeficientes a_n satisfacen a una relación recurrente lineal.

Se tiene en efecto:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{\sqrt{1-2zu_k+u_k^2}} = \sum_{k=1}^{m} A_k \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)\, u_k^n \right\}$$

y como a causa de la condición admitida cada una de las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\, u_k^n \qquad (k = 1,\ 2, \ldots m)$$

es absoluta y uniformemente convergente, lo será también su suma —previa multiplicación por la respectiva constante A_k—. De este modo se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_1 u_1^n + A_2 u_2^n + \ldots + A_m u_m^n)\, P_n(z)$$

que es otra serie de polinomios de LEGENDRE $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$, cuyos coeficientes:

$$a_n = A_1 u_1^n + A_2 u_2^n, \ \ldots, \ A_m u_m^n$$

satisfacen a una relación lineal de referencia como se comprueba fácilmente por eliminación de las constantes A_1, A_2, ... A_m.

7. — Al igual que en el caso de las series potenciales, la suma (o diferencia), término a término de dos series de polinomios de LEGENDRE $\sum a_n P_n(z)$ y $\sum b_n P_n(z)$, cuyos coeficientes (a_n) y (b_n) satisfacen a sendas relaciones de recurrencia lineales, es otra serie $\sum (a_n \pm b_n) P_n(z)$, asimismo recurrente, como lo es también la $\sum c_n P_n(z)$ siendo: $c_n = \sum a_i b_j$ $(i + j = n)$, y ese mismo carácter tiene la $\sum a_n b_n P_n(z)$, que resulta de la composición de las dos primeras, serie esta última cuya elipse de convergencia tiene como semiejes: $a = \frac{1}{2}\left(\lambda\lambda' + \frac{1}{\lambda\lambda'}\right)$ y $b = \frac{1}{2}\left(\lambda\lambda' - \frac{1}{\lambda\lambda'}\right)$. Ello es una simple consecuencia de la validez de la propiedad en cuestión en las series de potencias, y de la relación que enlaza la serie de polinomios $\sum a_n b_n P_n(z)$ con la $\sum a_n b_n z^n$ a través de una igualdad análoga a la (9), [1] y mediante la cual podrá calcularse la suma de la primera conocida la de esta última.

[1] Esta propiedad tiene especial interés dentro de la teoría de las variables aleatorias, ya que, como es sabido, si x_1, x_2, ... x_r son los valores distintos de una variable eventual y p_1, p_2, ... p_r los respectivos pesos o probabilidades, los momentos sucesivos:

$$m_n = \sum_{k=1}^{r} p_k x_k^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

satisfacen a una relación recurrente lineal. Y si $m_n' = \sum\limits_{j=1}^{s} p_j' x_j^n$ son los momentos

8. — La serie $\sum a_n P_n(z)$ que acabamos de estudiar, puede considerarse — bajo ciertas condiciones de continuidad que supondremos satisfechas — como caso particular, para $t = 1$, de esta otra [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)\, t^n \tag{17}$$

Fijado el valor de z, y admitiendo — como hasta aquí hemos supuesto — que existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, el radio de convergencia de la serie (17) viene expresado por:

$$\varrho = \frac{1}{\lambda} \operatorname{Min.} \left| z \pm i\sqrt{1 - z^2} \right|$$

y es, por tanto, variable con z, permaneciendo constante únicamente, cuando z describe una elipse de focos $(-1, +1)$.

Ahora bien; si en la relación fundamental (9), cambiamos a_n en $a_n t^n$, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)\, t^n = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha = z - i\sqrt{1-z^2}}^{\beta = z + i\sqrt{1-z^2}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (tu)^n}{\sqrt{1 - 2zu + t^2}}\, du \tag{18}$$

de donde, y aplicando el mismo razonamiento que en el párrafo 3, teniendo en cuenta que la descomposición de la fracción racional $R(tu)$ que expresa la suma de la serie recurrente $\sum a_n (tu)^n$, es, en el caso actual:

$$R(tu) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{ut - u_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\dfrac{A_k}{t}}{u - \dfrac{u_k}{t}}$$

---

de otra variable aleatoria independiente de la primera, la composición de momentos conduce a la igualdad:

$$m''_n = m_n \cdot m'_n \qquad m''_n = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p''_{kj} (x_k x_j')^n$$

en la que:

$$p''_{kj} = p\, p_j'$$

(1) Obsérvese que la serie $\Sigma\, a_n P_n(z)\, t^n$ puede considerarse como resultante de la composición por la regla de HADAMARD de las dos series de potencias:

$$\Sigma\, a_n t^n = R(t)$$

$$\Sigma\, P_n(z)\, t^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + t^2}}$$

cuyos coeficientes a_n y $P_n(z)$, satisfacen a sendas relaciones de recurrencia la primera de coeficientes constantes, y la segunda de coeficientes variables con z y n.

se deduce que el valor de la integral (18), se obtendrá sin más que cambiar en la fórmula (14), u_k y A_k, en $\frac{u_k}{t}$ y $\frac{A_k}{t}$, respectivamente, con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)\, t^n = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\frac{A_k}{t}}{\sqrt{1 - 2z\frac{u_k}{t} + \left(\frac{u_k}{t}\right)^2}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\sqrt{t^2 - 2zt\, u_k + u_k^2}} \tag{19}$$

expresión esta última que para $t \longrightarrow 1$, tiende hacia el valor (15), lo que hace patente la continuidad de la función en el punto $t = 1$.

Cada uno de los elementos constitutivos del segundo miembro de la igualdad (19), es desarrollable en serie de potencias de z convergente en un cierto entorno del origen.

Haciendo para simplificar:

$$v_k = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{u_k} + \frac{u_k}{t}\right), \qquad (v_k = v_k(t))$$

se tiene:

$$\frac{A_k}{\sqrt{t^2 - 2ztu_k + u_k^2}} = \frac{A_k}{\sqrt{t^2 + u_k^2}}\left(1 - \frac{z}{v_k}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{A_k}{\sqrt{t^2 + u_k^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{z}{v_k}\right)^n \tag{20}$$

desarrollo que converge para $|z| < |v_k|$.

Por tanto, al sumar las m series análogas a la (20) y que de ellas se deducen dando a k los valores sucesivos 1, 2, 3,... m, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t)\, z^n \tag{21}$$

cuyo segundo miembro converge ciertamente cuando z permanece en el interior de un círculo de radio no superior al menor de los módulos $|v_1|$, $|v_2|$... $|v_m|$ y cuyos coeficientes $Q_n(t)$ — dependientes de la variable t — son funciones simétricas — no racionales — de las raíces de la ecuación generatriz de la sucesión (a_n).

En particular, y admitida la continuidad para $t = 1$ de la función definida por la serie $\sum a_n P_n(z)\, t^n$, la fórmula (21) da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

igualdad que transforma la serie recurrente de polinomios $\sum a_n P_n(z)$ en otra de potencias $\sum b_n z^n$, cuyos coeficientes $b_n = Q_n(1)$, vienen dados — como puede comprobarse fácilmente — por:

$$b_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k u_k^n}{(\sqrt{(1+u_k^2)})^{2n+1}}$$

9. — La consideración de la integral (8) que, como hemos visto, constituye el elemento básico para el cálculo de la suma de una serie recurrente de polinomios de LEGENDRE, conduce a otra importante extensión de las series estudiadas en el párrafo anterior, que permite expresar los períodos de las integrales elípticas.

Tomemos la integral definida:

$$J = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha = z - i\sqrt{1-z^2}}^{\beta = z + i\sqrt{1-z^2}} \frac{du}{\sqrt{(u-r)(u-s)(1-2zu+u^2)}} \tag{22}$$

en la que r y s son dos constantes reales o complejas [1].

Si desarrollamos la función $[(u-r)(u-s)]^{-\frac{1}{2}}$ en serie de potencias de u se obtiene:

$$[(u-r)(u-s)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{rs}}\left(1-\frac{u}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n \tag{23}$$

que converge absoluta y uniformemente para valores de u cuyo módulo sea inferior al menor de los $|r|$, $|s|$, y cuyos coeficientes valen:

$$c_n = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{1}{\sqrt{rs}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{2i}} \frac{1}{r^i s^{n-i}} \tag{24}$$

Por consiguiente, *si suponemos que los límites α y β de la integral* (22) *son interiores al círculo de convergencia de la serie* (23), al substituir la función $[(u-r)(u-s)]^{-\frac{1}{2}}$ por dicho desarrollo, podrá efectuarse la integración término a término, y se tendrá:

---

(1) Para $r = s$ la integral J se reduce a otra del tipo (13)

$$J = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n u^n}{\sqrt{1 - 2zu + u^2}} du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a^n}{\sqrt{1 - 2zu + u^2}} du \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n (z) \tag{25}$$

con lo cual queda expresado uno de los períodos de la integral elíptica (22) en serie de polinomios de LEGENDRE (1).

Esa misma integral (22) admite otra representación analítica un tanto más sugestiva en serie de polinomios de LEGENDRE, en el caso en que las constantes r y s son tales que $rs = 1$. Entonces, y haciendo para abreviar: $\theta = \frac{1}{2}(r + s)$, dicha integral toma la forma:

$$J = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{\sqrt{(1 - 2\theta u + u^2)(1 - 2zu + u^2)}} \tag{26}$$

Ahora bien; se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta u + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\theta) u^n. \qquad \text{siendo} \qquad |u| < \text{Min.} \left| \theta \pm i \sqrt{1 - \theta^2} \right|$$

Por tanto, al substituir este desarrollo en (26), resulta:

$$J = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n (\theta) u^n}{\sqrt{1 - 2zu + u^2}} du$$

Y si nos limitamos a considerar los valores de z tales que: α y β sean menores que Min. $\left| \theta \pm i \sqrt{1 - \theta^2} \right|$, serán invertibles los signos $\int_{\alpha}^{\beta}$ y Σ, luego:

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (\theta) \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u^n}{\sqrt{1 - 2zu + u^n}}$$

(1) Obsérvese que los coeficientes c_n de la serie (25) no son recurrentes.

o bien, recordando la fórmula fundamental (8):

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\theta) P_n(z) \tag{27}$$

quedando expresado el período de la integral elíptica considerada en serie de polinomios de LEGENDRE resultante de la composición de las $\Sigma P_n(\theta)$ y $\Sigma P_n(z)$ (1).

---

(1) Si en lugar del período J se considera este otro:

$$J_1 = \frac{1}{\pi i}\int_r^s \frac{du}{\sqrt{(u-r)(u-s)(1-2zu+u^2)}}$$

siguiendo marcha análoga a partir del desarrollo:

$$(1-2zu+u^2)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma P_n(z) u^n$$

se llegaría al mismo resultado para la integral J_1, conclusión que constituye la comprobación indirecta de un teorema bien conocido acerca de los períodos de las integrales elípticas y ultraelípticas. Nótese que en el caso concreto que hemos considerado en que $rs = 1$, los cuatro puntos α, β, r y s son concíclicos.