SOBRE LOS PUNTOS MULTIPLES DE LAS CURVAS PLANAS ALGEBRAICAS

por

J. GOÑI

ABSTRACT.

We associate to any point P of multiplicity μ on a complex plane algebraic curve $C \subset P_2\mathbb{C}$ of order n, a sequence of $\mu - 1$ natural integers $n_2, n_3, \ldots, n_\mu$, defined as follows. Let D_2 denote the discriminant hypersurface in $P_n\mathbb{C}$ and $D_3, \ldots, D_\mu$ the subvarieties of D_2 correspondent to triple, ..., μ- ple roots; then n_i is the intersection mutiplicity, at the point of Γ which corresponds to P, of D_i with a certain rational curve $\Gamma \subset P_n\mathbb{C}$ naturally associate with C. The explicit computation of $n_2, \ldots, n_\mu$ is made by means of a suitable parameter representation of the varieties D_i which also enables in particular the determination of their orders. Finally we apply the algoritm for n_2 to compute the class of C when the singularities are of three certain types, and to the classification of double points.

§ 1. INTRODUCCION.

Kronecker fue el primero en utilizar el discriminante en el tratamiento de los puntos singulares de las curvas planas algebraicas. Su memoria [5] de 1881 recoge resultados que en 1858 había comunicado a Weierstrass y a Riemann y contiene la primera demostración de la existencia de un modelo birracional dotado de singularidades ordinarias para toda curva algebraica plana.

En la memoria citada, Kronecker descompone el discriminante de la función algebraica definida por la curva plana en sendos factores que él llama respectivamente *divisor esencial* y *divisor inesencial* de los cuales el primero, que corresponde a los puntos de ramificación de la función algebraica definida por la curva plana, resulta invariante en toda transformación birracional de la curva. En cuanto al divisor inesencial, que puede alterarse mediante transformaciones birracionales convenientes - de donde resulta la posibilidad de un modelo con singularidades ordinarias -, Kronecker demuestra al final de la citada memoria, que es invariante frente a ciertas proyectividades y termina con el anuncio de una continuación de la Memoria que no llegó a publicarse ([1] pág. 367).

El presente trabajo aborda el estudio de los puntos múltiples de las curvas algebraicas de $P_2\mathbb{C}$ utilizando la hipersuperficie discriminante y las subvariedades que corresponden a las raíces de multiplicidades sucesivas. Empezamos por asociar a la curva plana algebraica C de orden n, de ecuación en coordenadas proyectivas absolutas

$$f(x, y) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y^{n-j} = 0 \tag{1}$$

la curva racional Γ de $P_n\mathbb{C}$ que en la referencia canónica viene dada por las ecuaciones

$$x_j = a_j(x); \qquad j = 0, \dots, n; \qquad x \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Si en $P_n\mathbb{C}$ se considera también la envolvente racional normal $\mathcal{E}$

$$u_j = t^{n-j}; \qquad j = 0, \dots, n; \qquad t \in \mathbb{C} \tag{3}$$

siendo $u_0, \dots, u_n$ las coordenadas de hiperplano correspondientes a la referencia canónica, resulta que la ecuación (1) expresa la condición de incidencia del punto de Γ de parámetro x con el hiperplano de $\mathcal{E}$ de parámetro y.

Sea $P(x_0, \dots, x_n; t)$ el primer miembro de la ecuación del hiperplano cuyo parámetro es t:

$$P \equiv x_0 t^n + \dots + x_{n-1} t + x_n = 0 \tag{4}$$

Para $2 \leqslant r \leqslant n$ se define la variedad D_r de $P_n\mathbb{C}$ cuyos puntos son tales que r al menos de los n hiperplanos de $\mathcal{E}$ que pasan por ellos se confunden, mediante el sistema

$$P = 0; \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = 0; \qquad \dots \quad \frac{\partial^{r-1} P}{\partial t^{r-1}} = 0. \tag{5}$$

Para r = 2 se trata de la hipersuperficie discriminante D_2. Para r = n, D_n resulta una curva racional normal de $P_n\mathbb{C}$ que es la arista de retroceso de la desarrollable $\mathcal{E}$ y es bien sabido ([2] págs. 14-20) que una cualquiera de las D_i, variedad de dimensión $n - i + 1$, se obtiene como lugar geométrico de los puntos de los S_{n-i} osculadores a D_n.

Observemos ahora, que en un punto μ-uplo se anulan en particular las derivadas puras respecto de y hasta el orden $\mu - 1$ inclusive y en consecuencia el punto de Γ que le corresponde pertenece a las variedades $D_2, D_3, \ldots, D_\mu$. Por tanto, podemos considerar las multiplicidades de intersección de Γ en dicho punto con las variedades $D_2, D_3, \ldots, D_\mu$, que designaremos respectivamente por $n_2, n_3, \ldots, n_\mu$.

El cálculo efectivo de dichos enteros (§ § 7, 8 y 9), que es el objetivo prioritario de este trabajo, descansa sobre una representación paramétrica de las variedades D_r (§ 2) que se presta en particular al estudio de sus propiedades de configuración y permite obtener fácilmente los órdenes respectivos.

Como aplicación del algoritmo obtenido, en el § 10 se detalla en tres casos el cálculo de n_2, entero que determina la composición de un punto doble, y cuya relación —en el caso de un punto múltiple cualquiera— con la clase de la curva y con el número de Milnor de la singularidad es conocida*. En un trabajo que aparecerá más adelante mostraremos que del par (n_2, n_3) se deduce la composición de los puntos triples. Tales resultados forman parte de la Tesis doctoral del autor cuyo resumen constituye el núm. 4 del la bibliografía.

§ 2. REPRESENTACION PARAMETRICA DE LAS D_r.

Las ecuaciones paramétricas de la hipersuperficie discriminante D_2 se obtienen inmediatamente observando que está formada por los puntos $(x_0, \ldots, x_n)$ de $P_n\mathbb{C}$ para los que el polinomio P de (1.4) tiene al menos una raíz múltiple. Si $\bar{t}$ es una tal raíz de P, éste se podrá escribir como polinomio en $t - \bar{t}$ en el que sólo figuren términos de grado mayor o igual que dos:

$$P = \sum_{i=0}^{n} x_i t^{n-i} = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i u_{i-2} (t - \bar{t})^i \qquad (1)$$

Usando, por ejemplo, el método de los coeficientes indeterminados se obtienen a partir de (1) las siguientes ecuaciones paramétricas de D_2:

$$x_i = (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-k}{n-i} u_{n-k-2}\, t^{i-k}; \qquad i = 0, \ldots, n \qquad (2)$$

con el convenio de que $\binom{a}{b} = 0$ siempre que a es menor que b.

* (Cfr. p.e. [8] y la literatura que allí se cita).

Las (2) para un valor $\bar{t}$ de t al variar las u_i dan todos los puntos (x_i) de $P_n\mathbb{C}$ para los que P tiene $\bar{t}$ como raíz múltiple. Estos puntos forman un subespacio S_{n-2} en el que las u_i se pueden interpretar como coordenadas homogéneas, y vienen expresadas en función de x_i y t por:

$$u_{n-k-2} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k} P}{\partial t^{n-k}}; \qquad k = 0, \ldots, n-2 \qquad (3)$$

Las ventajas prácticas de disponer de las ecuaciones paramétricas (2) son evidentes si se tiene en cuenta que ya para valores no muy grandes de n como son n = 5 ó 6, D_2 es un polinomio que tiene 59 y 256 términos respectivamente ([6] pág. 331 y 378).

De (1) resulta también inmediato que las ecuaciones paramétricas de D_r se obtienen haciendo en (2) $u_0 = u_1 = \ldots = u_{r-3} = 0$, lo que se consigue sin más que limitar la variación del índice de sumación k:

$$x_i = (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-k}{n-i} u_{n-k-2}\, t^{i-k}; \qquad i = 0, \ldots, n \qquad (4).$$

Estas equivalen a las que da Teissier ([7] pág. 658) en forma vectorial.

En particular D_n es la curva racional normal de $P_n\mathbb{C}$ de ecuaciones paramétricas

$$x_i = (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} t^i; \qquad i = 0, \ldots, n \qquad (5)$$

§ 3. PROPIEDADES DE LAS D_r.

De las (2.4) resulta evidente que D_r es la variedad de los puntos de los subespacios S_{n-r} osculadores a D_n. Asímismo se deduce la siguiente cadena de inclusiones: $D_2 \supset D_3 \supset \ldots \supset D_n$.

Por otra parte, las homografías que dejan invariante D_n, y por lo tanto cada D_r, están en correspondencia biyectiva con las homografías de la recta ([2] pág. 16), de modo que para el estudio de la configuración de los subespacios osculadores a D_n en un punto, podemos escoger dicho punto a nuestra conveniencia. Por ejemplo, si llamamos a los puntos fundamentales de la referencia A_0 (1, 0, 0, . . . , 0), A_1 (0, 1, 0, . . . , 0), . . . , A_n (0, 0, . . . , 0, 1), los subespacios osculadores a D_n en A_0 son los $\langle A_0, A_1, \ldots, A_i \rangle$ para i variando de 0 a n.

Proposición: La proyección de D_r sobre el subespacio de referencia

$$x_n = x_{n-1} = \cdots = x_{n-r+3} = 0$$

desde el subespacio $\langle A_{n-r+3}, \ldots, A_n \rangle$ es la hipersuperficie discriminante de la ecuación

$$\frac{\partial^{r-2} P}{\partial t^{r-2}} = 0.$$

En efecto, proyectemos primero D_3 sobre $x_n = 0$ desde A_n. A partir de las (2.4) se obtienen como ecuaciones de la proyección:

$$x_i = (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-k}{n-i} u_{n-k-2}\, t^{i-k}; \qquad i = 0, \ldots, n \quad 1 \qquad (1)$$

que, llamando $v_{n-1-k-2} = \quad (n-k)\, u_{n-k-2}$, se pueden escribir:

$$(n-i)\, x_i = (\quad 1)^{n-i-1} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1-k}{n-1-i} v_{n-1-k-2}\, t^{i-k}; \qquad i = 0, \ldots, n \quad 1 \, (2)$$

y son las ecuaciones del discriminante de $\dfrac{\partial P}{\partial t}$.

La demostración se concluye sin más que reiterar el proceso.

De la demostración se sigue también que si para un punto de D_r, P tiene $\bar{t}$ como raíz al menos r-múltiple, para la proyección de dicho punto

$$\frac{\partial^{r-2} P}{\partial t^{r-2}}$$

tiene el mismo valor $\bar{t}$ como raíz al menos doble.

§4. ORDEN DE LAS D_r

Es bien sabido ([6] pág. 145) que el orden de D_2 es $2(n-1)$. Asimismo es obvio que D_n es de orden n. Vamos ahora a calcular los órdenes de las D_r utilizando la representación paramétrica (2.4).

Cortemos D_r por un S_{r-1} genérico de ecuaciones paramétricas

$$x_i = a_i + \sum_{j=0}^{r-2} k_j q_{ji}; \qquad i = 0, \ldots, n \tag{1}$$

Sustituyendo en (2.4) las (1) dan:

$$a_i + \sum_{j=0}^{r-2} k_j q_{ji} = (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-k}{n-i} u_{n-k-2}\, t^{i-k}; \qquad i = 0, \ldots, n \tag{2}$$

Ahora debemos imponer a los primeros miembros de (2) las condiciones (1.5) que subsisten entre los segundos. Ello equivale a sustituir en el polinomio P de (1.4) y en sus $r-1$ primeras derivadas los coeficientes x_i por los primeros miembros de las (2).

Para expresar con comodidad el resultado pondremos

$$\begin{aligned} A(t) &= a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \\ Q_j(t) &= q_{j0} t^n + q_{j1} t^{n-1} + \cdots + q_{jn}; \qquad j = 0, \ldots, r-2 \end{aligned} \tag{3}$$

Con estas notaciones de las condiciones (1.5) se deduce

$$A^{(h)}(t) + \sum_{j=0}^{r-2} k_j Q_j^{(h)}(t) = 0; \qquad h = 0, 1, \ldots, r-1 \tag{4}$$

La condición de compatibilidad del sistema (4) en las $k_0, \ldots, k_{r-2}$ se expresa por la anulación del determinante

$$\begin{vmatrix} A & Q_0 & \ldots & Q_{r-2} \\ A' & Q'_0 & \ldots & Q'_{r-2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A^{(r-1)} & Q_0^{(r-1)} & \ldots & Q_{r-2}^{(r-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Como cada solución de (4) sustituída en (2) da un punto y uno solo de intersección, el orden de D_r es el número de soluciones de (4), que coincide con el grado del primer miembro de (5). Ahora bien, si en la matriz de (5) restamos múltiplos convenientes de cada fila a todas las que le preceden, comenzando por la última, podemos ir rebajando los grados de sus términos hasta hacerlos todos iguales a $n - r + 1$, de modo que el desarrollo del determinante es un polinomio de grado $r(n - r + 1)$ cuyo coeficiente de mayor grado es

$$\begin{vmatrix} a_{n-r+1} & q_{0,\,n-r+1} & \cdots & q_{r-2,\,n-r+1} \\ a_{n-r+2} & q_{0,\,n-r+2} & \cdots & q_{r-2,\,n-r+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & q_{0,\,n} & \cdots & q_{r-2,\,n} \end{vmatrix} \tag{6}$$

que es no nulo por haber tomado un S_{r-1} genérico.

Y hemos demostrado lo siguiente:

Proposición: El orden de D_r es $r(n - r + 1)$.

En particular para $r = 2$ y $r = n$, recaemos en los resultados ya mencionados al principio.

§5. Cálculo de n_2.

Supongamos elegida la referencia con origen en el punto múltiple y tal que el eje y no pase por ningún otro punto múltiple ni sea dirección asintótica, es decir, en la ecuación (1,1) de C se tiene $a_0(x) \neq 0$. Vamos a hallar la multiplicidad de intersección n_2 de Γ con D_2 en el punto común, que sobre Γ viene dado por (1.2) para $x = 0$ y sobre D_2 está en el S_{n-2} dado por (2.2) para $t = 0$. Observemos que el hiperplano tangente en él a D_2 es el $x_n = 0$.

Habida cuenta de la condición $a_0(x) \neq 0$ se pueden tomar en $P_n\mathbb{C}$, $x_1, \ldots, x_n$ como coordenadas absolutas ($x_0 \neq 0$). Cortaremos D_2 con las rectas por el punto fundamental A_n que se apoyan en Γ, cuyas ecuaciones son en coordenadas absolutas

$$x_i = a_i(x); \qquad i = 1, \ldots, n-1 \tag{1}$$

y expresaremos como función de x la diferencia de coordenada x_n para los puntos en que tales rectas cortan a D_2 y a Γ. El orden de infinitésimo de tal función da la multiplicidad n_2 que buscamos.

Las intersecciones de D_2 con las rectas (1) vienen dadas por el sistema

$$a_i(x) = (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-k}{n-i} u_{n-k-2}\, t^{i-k}; \qquad i = 0, \dots, n-1 \tag{2}$$

en las que según (2.3) las u_i son

$$u_{n-k-2} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\frac{\partial^{n-k} f}{\partial y^{n-k}}\right)_{y=t}; \qquad k = 0, \dots, n-2 \tag{3}$$

Para hallar t en función de x basta observar que los segundo miembros de (2) cumplen la segunda ecuación (1.5), y por lo tanto t satisface a la ecuación

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=t} = 0 \tag{4}$$

cuyas raíces $t_1, \dots, t_{n-1}$ son funciones de x cada una de las cuales, junto con las (3) dan todas las soluciones de (2).

Sólo queda evaluar las diferencias

$$e_j = \Big[a_n(x) - u_{n-2}\, t^n - \dots - u_2\, t^4 - u_1\, t^3 - u_0\, t^2\Big]_{t=t_j} \tag{5}$$

donde las u_j son las dadas por (3).

El valor de n_2 es el orden de infinitésimo respecto de x, del producto

$$E = \prod_{j=1}^{n-1} e_j \tag{6}$$

§6. EL ENTERO n_2 COMO ORDEN DEL DIVISOR DEL DISCRIMINANTE, CORRESPONDIENTE AL PUNTO MULTIPLE.

Vamos a probar que la expresión (5.6) de E coincide, salvo un factor constante, con el discriminante de f respecto de y.

En efecto, por (5.3) y (5.5) se puede escribir

$$e_j = \left[a_n(x) - \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} y^n + \ldots + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y^3 - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 \right]_{y = t_j} \qquad (1)$$

y teniendo en cuenta que para un polinomio p de grado $\leqslant n$

$$p \equiv p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_{n-1} y + p_n \qquad (2)$$

se cumple idénticamente

$$p - \frac{\partial p}{\partial y} y + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} y^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n p}{\partial y^n} y^n = p_n \qquad (3)$$

queda

$$e_j = \left(f - \frac{\partial f}{\partial y} y \right)_{y = t_j} = f(x, t_j) \qquad (4)$$

y sustituyendo en (5.6)

$$E = \prod_{j=1}^{n-1} f(x, t_j) \qquad (5)$$

El segundo miembro de (5) es, salvo un factor constnate, el discriminante de $f(x, y)$ respecto de y ([9] pág. 99).

El interés del camino seguido reside en que para calcular el orden de infinitésimo de E dado por (5.6) no es necesario usar todos los términos del discriminante ni de la ecuación de C.

En efecto, interesando tan sólo el orden de infinitésimo de E, de las raices t_j de (5.4) basta hallar las que se anulan para $x = 0$, y de éstas, únicamente las partes principales, que se pueden calcular p. ej. usando el método del diagrama de Newton. Todas estas raíces corresponderán a ramas con origen en (0,0) debido a cómo hemos elegido la referencia.

Los valores de t_j así hallados se llevan a las (5.3) de las que nuevamente se toman sólo las partes principales. Las u_j y t_j obtenidas se sustituyen finalmente en (5.5) y el cálculo se termina aquí, a no ser que en alguna de las etapas se cancelen los términos de grado mínimo, en cuyo caso no sería suficiente operar con las partes principales y habría que recomenzar los cálculos empleando más términos de los desarrollos en serie de las t_j.

Conviene señalar que el método expuesto permite calcular efectivamente sin previo análisis de la composición de la singularidad, en cuánto rebaja la clase dicha singularidad.

§ 7. CALCULO DE n_r PARA $r > 2$.

Si (0,0) es para C de multiplicidad mayor o igual a r, Γ cortará a D_r en el punto dado por (1.2) para $x = 0$ y que sobre D_r estará en el S_{n-r} dado por (2.4) para $t = 0$. Procediendo como en § 5, ahora cortaremos D_r con los subespacios S_{r-1} que pasando por $\langle \Lambda_{n-r+2}, \ldots, \Lambda_n \rangle$ se apoyan en Γ, cuyas ecuaciones en coordenadas absolutas son

$$x_i = a_i(x): \qquad i = 1, \ldots, n-r+1 \tag{1}$$

Hallaremos los órdenes de infinitésimo respecto de x de las diferencias de coordenadas $x_{n-r+2}, \ldots, x_n$ en que dichos subespacios cortan a D_r y a Γ. Si estos órdenes son n_r^h, $h = 0, \ldots, r-2$, la multiplicidad que buscamos viene dada por

$$n_r = \text{mín.}\left\{ n_r^h \,\middle|\, h = 0, \ldots, r-2 \right\} \tag{2}$$

Las intersecciones de D_r con los S_{r-1} de ecuaciones (1) vienen dadas por el sistema

$$a_i(x) = (-1)^{n-i} \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-k}{n-i} u_{n-k-2}\, t^{i-k}; \qquad i = 1, \ldots, n-r+1 \tag{3}$$

Este sistema da para las u_i las mismas expresiones deducidas de (2.3)

$$u_{n-k-2} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\frac{\partial^{n-k} f}{\partial y^{n-k}} \right)_{y=t}; \qquad k = 0, \ldots, n-r \tag{4}$$

y la t debe ser una de las $n-r+1$ soluciones $t_1, \ldots, t_{n-r+1}$ de la ecuación

$$\frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial y^{r-1}} \right)_{y=t} = 0 \tag{5}$$

Estas soluciones, sustituídas en las diferencias de las restantes coordenadas, dan las expresiones

$$e_r^h(t_j) = \left| a_{n-h}(x) - (-1)^h \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-k}{h} u_{n-k-2}\, t^{n-h-k} \right|_{t=t_j} \tag{6}$$

$$h = 0, \ldots, r-2$$

$$j = 1, \ldots, n-r+1$$

Para cada t_j el orden de infinitésimo correspondiente es

$$n_{r,j} = \text{mín.} \left\{ \text{ord. } e_r^h(t_j); \quad h = 0, \ldots, r-2 \right\} \tag{7}$$

y la multiplicidad de intersección buscada es

$$n_r = \sum_{j=1}^{n-r+1} n_{r,j} \tag{8}$$

De esta forma, para un punto múltiple de orden μ se obtienen $\mu - 1$ enteros $n_2, n_3, \ldots, n_\mu$, ligados a la singularidad.

§8. RELACION DE n_r CON LAS POLARES SUCESIVAS.

En este apartado vamos a hallar expresiones de los segundos miembros de (7.6) en función de las derivadas suvesivas respecto de y de f (x, y), y de los coeficientes $a_i(x)$ de la ecuación de C (1,1).

Primero sustituiremos (7.4) en (7.6):

$$\begin{aligned} e_r^h(t) &= a_{n-h}(x) - (-1)^h \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-k}{h} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \left(\frac{\partial^{n-k} f}{\partial y^{n-k}} \right)_{y=t} t^{n-h-k} = \\ &= a_{n-h}(x) - \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^{n-h-k}}{(n-h-k)!} \left[\frac{\partial^{n-h-k}}{\partial y^{n-h-k}} \left(\frac{1}{h!} \frac{\partial^h f}{\partial y^h} \right) \right]_{y=t} t^{n-h-k} \end{aligned} \tag{1}$$

$$h = 0, \ldots, r-2$$

Ahora usaremos (6.3) escrita en esta forma:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j p}{\partial y^n} y^j = p(0) \tag{2}$$

teniendo en cuenta que $\dfrac{1}{h!}\dfrac{\partial^h f}{\partial y^h}$ es de grado $n-h$.

De este modo obtenemos

$$c_r^h(t) = \sum_{j=0}^{r-h-1} \frac{(-1)^j}{j!} \left[\frac{\partial^j}{\partial y^j} \left(\frac{1}{h!} \frac{\partial^h f}{\partial y^h} \right) \right]_{y=t} t^j, \quad h=0,1,\ldots,r-2 \quad (3)$$

Por último calcularemos el coeficiente de t^k en (3), para lo que utilizaremos la igualdad

$$\sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{k}{j} = (-1)^s \binom{k-1}{s}.$$

El coeficiente buscado es

$$\sum_{j=0}^{r-h-1} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(k+h)!}{h!\,(k-j)!} a_{n-k-h}(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r-h-1} (-1)^j \binom{k+h}{h} \binom{k}{j} a_{n-k-h}(x) =$$

$$= (-1)^{r-h-1} \binom{k+h}{h} \binom{k-1}{r-h-1} a_{n-k-h}(x)$$

que sustituído en (3), y con el convenio $\binom{-1}{s} = (-1)^s$; $\binom{0}{s} = \binom{1}{s} = \ldots = \binom{s-1}{s} = 0$, da la siguiente expresión de $c_r^h(t)$

$$c_r^h(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{r-h-1} \binom{k+h}{h} \binom{k-1}{r-h-1} a_{n-k-h}(x)\, t^k =$$

$$= (-1)^{r-h-1} \binom{h}{h} \binom{-1}{r-h-1} a_{n-h}(x) + \sum_{k=1}^{n} \cdots = \quad (5)$$

$$= a_{n-h}(x) + (-1)^{r-h-1} \sum_{k=r-h}^{n} \binom{k+h}{h} \binom{k-1}{r-h-1} a_{n-k-h}(x)\, t^k.$$

§9. PUNTO μ- UPLE.

Suponiendo que (0,0) es punto μ-uple de C con la referencia como en § 5, vamos a escribir más detalladamente la ecuación (7,5) y las exprexiones (8,5).

Si el polinomo F (x, y) de la ecuación (1,1) de C se escribe

$$f(x, y) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y^{n-j} \equiv \sum_{i+l \leqslant n} a_{il}\, x^i y^l = 0$$

de las hipótesis hechas se deduce

$$a_{il} = 0; \qquad i + l < \mu; \qquad a_{o\mu} \neq 0; \tag{1}$$

Por lo tanto la ecuación (7,5)

$$\sum_{j=0}^{n-r+1} \binom{r-1+j}{j} a_{n-r+1-j}(x)\, t^j = 0$$

toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &a_{\mu-r+1,r-1}\, x^{\mu-r+1} + a_{\mu-r+2,r-1}\, x^{\mu-r+2} + \ldots + \\ &+ r\,(a_{\mu-r,r}\, x^{\mu-r} + \ldots)\,t + \tbinom{r+1}{2}(a_{\mu-r-1,r+1}\, x^{\mu-r-1} + \ldots)\,t^2 + \ldots + \\ &+ \binom{\mu}{\mu-r+1}(a_{o\mu} + a_{1\mu}\, x + \cdots)\,t^{\mu-r+1} + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Esta ecuación, por ser $a_{o\mu} \neq 0$, tiene exactamente $\mu \;\; r + 1$ raíces que se anulan para $x = 0$. Estas, como veremos, son las únicas que anulan a $e_r^h(t)$ para $x = 0$, y por lo tanto son las únicas que interesan. Para su cálculo se puede utilizar el polígono de Newton que se obtiene a partir de los términos que figuran *efectivamente* en (2). A las raíces de esta ecuación (2) las designaremos por

$$t_j. \qquad j = 1, \ldots, \mu \;\; r + 1$$

Por otra parte, haciendo uso de las condiciones (1), las (8,5) se escriben:

$$e_r^h(t) = a_{\mu-h,h}\, x^{\mu-h} + \ldots + (-1)^{r-h-1} \Big[\binom{r}{h} (a_{\mu-r,r}\, x^{\mu-r} + \ldots)\, t^{r-h} +$$

$$+\binom{r+1}{h}\binom{r-h}{1}(a_{\mu-r-1,r+1}\,x^{\mu-r-1}+\dots)\,t^{r-h+1}+\dots \tag{3}$$

$$\left.+\binom{\mu}{h}\binom{\mu-h-1}{\mu-r}(a_{0\mu}+\dots)\,t^{\mu-h}+\dots\right]$$

$$r=2,3,\dots,\mu;\qquad h=0,1,\dots,r\quad 2;$$

Para $r = 2$ es $h = 0$, y las (3), para $t = t_j$, $j = 1, \dots, \mu-1$, dan las e_j de (5,5) expresadas de la siguiente forma:

$$e_j = e_2^0\,(t_j) = a_{\mu 0}\,x^{\mu} + a_{\mu+1,0}\,x^{\mu+1} + \dots - (a_{\mu-2,2}\,x^{\mu-2} + \dots)\,t_j^2 -$$

$$-\,2\,(a_{\mu-3,3}\,x^{\mu-3} + \dots)\,t_j^3 \;\dots\dots - (\mu-1)\,(a_{0\mu} + \dots)\,t_j^{\mu} \dots$$

Obsérvese que por ser $\binom{\mu}{h}\binom{\mu-h-1}{\mu-r}\,a_{0\mu} \neq 0$, resulta que si $t\,(0) \neq 0$, entonces también $e_r^h\,(t\,(0)) \neq 0$, tal como habíamos anunciado.

§ 10. APLICACION AL CALCULO DE LA CLASE DE UNA CURVA ALGEBRAICA PLANA.

Es sabido que una singularidad ocasiona una disminución de la clase igual a la multiplicidad de intersección de la curva con su primera polar, siempre que se trate de una polar respecto de un punto que no esté sobre ninguna tangente principal del punto múltiple. Dicha multiplicidad por lo visto en § 6 coincide con el valor de n_2. Por lo tanto *se puede utilizar para calcular dicha disminución de la clase el algoritmo desarrollado en* § 9.

Como ilustración vamos a aplicar el método a los tres siguientes tipos de singularidad:

a) Un punto μ-uple ordinario.

b) h puntos μ-uples sucesivos sobre μ ramas lineales sin ulterior contacto.

c) Una rama de orden μ con un solo exponente característico $\dfrac{\nu}{\mu}$.

Los cálculos resultan así:

Caso a) La ecuación de C será de la forma:

$$a_{\mu 0}\,x^{\mu} + a_{\mu-1,1}\,x^{\mu-1}\,y + \dots + a_{0\mu}\,y^{\mu} + \sum_{i+l>\mu} a_{il}\,x^i\,y^l = 0\,;$$

donde la ecuación de las pendientes de las ramas con origen en el punto μ-uple

$$a_{\mu o} + a_{\mu-1,1}\, z + \dots + a_{o\mu}\, z^{\mu} = 0 \tag{1}$$

tiene ahora todas sus raíces simples.

Las partes principales de las t_j, $j = 1, \dots, \mu - 1$, vienen dadas por $t_j \sim \alpha_j\, x$ donde las α_j son las raíces de

$$a_{\mu-1,1} + 2\, a_{\mu-2,2}\, z + \dots + \mu\, a_{o\mu}\, z^{\mu-1} = 0 \tag{2}$$

De modo que la parte principal de e_j es:

$$e_j \sim x^{\mu}\, (a_{\mu o} - a_{\mu-2,2}\, \alpha_j^2 - 2\, a_{\mu-3,3}\, \alpha_j^3 - \dots - (\mu - 1)\, a_{o\mu}\, \alpha_j^{\mu})$$

que teniendo en cuenta que α_j es raíz de (2) se puede escribir así:

$$e_j \sim x^{\mu}\, (a_{\mu o} + a_{\mu-1,1}\, \alpha_j + a_{\mu-2,2}\, \alpha_j^2 + \dots + a_{o\mu}\, \alpha_j^{\mu}) \tag{3}$$

El valor del paréntesis en (3) es distinto de cero pues (1) tiene todas sus raíces simples. Así, el orden de e_j es μ. Y el orden de

$$E = \prod_{j=1}^{\mu-1} e_j \qquad \text{es} \qquad n_2 = \mu\,(\mu - 1).$$

Caso b) . El punto (0,0) será origen de μ ramas lineales de ecuaciones:

$$y^{(i)} = a_1\, x + a_2\, x^2 + \dots + a_{h-1}\, x^{h-1} + a_h^{(i)}\, x^h + \dots \qquad i = 1, \dots, \mu$$

con las $a_h^{(i)}$ todas distintas.

Para obtener n_2 se puede suponer $a_1 = a_2 = \dots a_{h-1} = 0$, y los cálculos se llevan como en a) sin más que sustituir x por x^h, con lo que la ecuación de C es de la forma:

$$a_{\mu h,o}\, x^{\mu h} + a_{(\mu-1)h,1}\, x^{(\mu-1)h}\, y + \dots + a_{o\mu}\, y^{\mu} + \sum_{i + hl > \mu h} a_{il}\, x^i\, y^l = 0$$

y basta repetir los cálculos hechos en a) sin más que sustituir x por x^h, con lo que

$$n_2 = h\,\mu\,(\mu - 1).$$

Caso c) Si el exponente característico es $\frac{\nu}{\mu}$; tomando como eje x la tangente principal, la ecuación de C es del tipo:

$$a_{o\mu}\, y^{\mu} + a_{\nu o}\, x^{\nu} + \sum_{\mu i + \nu l > \mu \nu} x^{i}\, y^{l} = 0;$$

La ecuación para las t_j, $j = 1, \ldots, \mu - 1$; es

$$\mu\, a_{o\mu}\, t^{\mu-1} + \sum_{\mu i + \nu l > \mu \nu} l a_{il}\, x^{i}\, t^{l-1} = 0$$

y por tanto $t_j \sim \alpha_j\, x^{\beta_j}$ con $\beta_j > \frac{\nu}{\mu}$; o $\alpha_j = 0$.

La parte principal de e_j se obtiene a partir de

$$e_j \sim a_{\nu 0}\, x^{\nu} - \sum_{\substack{l=2 \\ \mu i + \nu l > \mu \nu}}^{\mu} (l \quad 1)\, a_{il}\, \alpha_j^{l}\, x^{i + l \beta_j}$$

cuando $\alpha_j \neq 0$ es:

$$i + l\beta_j > i + l\frac{\nu}{\mu} > \nu$$

y se tiene:

$$e_j \sim a_{\nu o}\, x^{\nu} \qquad j = 1, \ldots, \mu \quad 1$$

y por último: $n_2 = \nu(\mu \cdot 1)$.

Como es sabido ([3] pág. 364), si utilizando el algoritmo de Euclides para el cálculo del m.c.d. resulta:

$$\begin{aligned}
\nu &= q_1\, \mu + r_1 \\
\mu &= q_2\, r_1 + r_2 \\
r_1 &= q_3\, r_2 + r_3 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
r_{h-2} &= q_h\, r_{h-1} + 1
\end{aligned}$$

y llamando $\mu = r_0$, se puede decir que hay q_i puntos r_{i-1}-uples para $i = 1, \ldots, h$.

Se comprueba sin dificultad que

$$\nu(\mu - 1) = \sum_{i=1}^{h} q_i r_{i-1} (r_{i-1} - 1) + \mu - 1$$

Los resultados obtenidos en los casos a), b) y c), que incluyen los nodos y las cúspides de primera especie, *demuestran la primera fórmula de Plücker;* y en todo caso concuerdan con los que les asigna la fórmula generalizada por Noether (Cfr. p.e. [3] pág. 424).

Si se trata de un punto doble ($\mu = 2$), la singularidad entra necesariamente como caso particular en los tipos a), b) o c) anteriores. Si el número de puntos dobles infinitamente próximos es h, el valor de n_2 es el siguiente:

a) $n_2 = 2$; b) $n_2 = 2h$; c) $n_2 = 2h + 1$;

Así pues, hay $h = \left[\frac{n_2}{2}\right]$ (parte entera de n/2) puntos dobles suvesivos, que estarán sobre dos ramas lineales si $n_2 = \dot{2}$ (nodo de especie $h - 1$) o sobre una rama de orden 2 si $n_2 = \dot{2} + 1$ (punto de retroceso de especie h). Finalmente resulta: *para determinar la composición de un punto doble basta calcular mediante el algoritmo del §9 el entero n_2 del punto doble.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Brill y M. Noether, "Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen in alterer und neuerer Zeit". Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung, tomo III 1892-93.

[2] W. Burau, "Grundmannigfaltigkeiten der projectiven Geometrie". Collectanea Mathematica, Vol. III, Fasc. 2, 1950.

[3] F. Enriques - O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* Vol. II, Zanichelli, Bologna 1918.

[4] J. Goñi, "Sobre una representación paramétrica del discriminante y algunas aplicaciones". Tesis doctoral, Sección de publicaciones, Universidad de Barcelona 1980.

[5] L. Kronecker. "Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln". Journal für Reine und Andgewandte Mathematik, t. 91.

[6] G. Salmon, *Leçons d'Algèbre Supérieure.* 2ª ed. Gauthier-Villars, París, 1890.

[7] B. Teissier. "The hunting of invariants in the geometry of discriminants", en P. Holm *Real and complex singularities.* Sithoff & Noordhoff International Publishers, Holanda, 1977.

[8] J. Teixidor, "Sur le calcul du nombre de Milnor", IV Col. Int. de Geometría Diferencial, Santiago de Compostela, 1979.

[9] B. L. van der Waerden, *Algebra, t. I,* 5ª ed. Springer 1960.

Dpto. de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona