L'UNIVERSO DI DE SITTER-CASTELNUOVO IN COSMOLOGIA E MICROFISICA

Pei

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)*

1. COSMOLOGIA, ASTROFISICA, MICROFISCA.

Uno dei problemi più importanti della scienza moderna é quello di trovare il profondo, sottile legame tra la fisica subnucleare e la cosmologia, e cioé tra la struttura intima della materia e quella del cosmo. Se infatti ammettiamo che l'Universo é un tutto unico, retto da leggi universali, deve necessariamente esistere una importante connessione tra la sua struutura locale e quella globale.

In questi ultimi anni, in seguito alle grandi scoperte nel campo dell'astrofisica e delle particelle elementari, si incomincia ad intravedere in modo sempre più evidente questo legame. Per esempio, recentemente si é trovato che i neutrino sono dotati di una massa, sia pure assai piccola. Questa scoperta ha immediate ripercussioni sia in astrofisica che in cosmologia. La massa del neutrino risolve infatti la famosa questione dei neutrini solari mancanti, cosa che avrebbe richiesto una profonda revisione dei meccanismi che regolano la vita delle stelle. Inoltre si può risolvere il problema del rapporto massa/luminosità delle galassie, che finora appariva stranamente più basso di quello delle stelle più vicine. Infatti le galassie ci appaiono con luminosità troppo debole rispetto alle loro grandi masse, e tale difficoltà può essere superata ammettendo che all'interno delle galassie ci siano delle grandi nubi di neutrini dotati di massa. Essi allora contribuiscono ai legami gravitazionali ed alla massa delle galassie, ma non alla loro energia raggiante. Infine, la massa dei neutrini fa sî che l'Universo non si espanda indefinitamente, ma risulti chiuso ed oscillante. A questo scopo basta ammettere che nell'Universo ci siano tanti neutrini quanti fotoni.

In questa memoria, che riporta la mia relazione tenuta al IV Congresso Nazionale di Relatività e fisica della Gravitazione (Pavia, settembre 1980), vengono esaminate alcune applicazioni della relatività proiettiva (basata sull'Universo di De Sitter-Castelnuovo), in cosmologia ed in microfisica.

* Ricerca eseguita nell'ambito del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica del Cosniglio Nazionale delle Ricerche.

Nella prima parte del lavoro, viene studiato il momento lineare ed angolare nella meccanica del punto e quella dei sistemi, e viene fatto vedere che su scala cosmica appare una stretta connessione tra momento lineare ed angolare, e tra massa, momenti statici e momento di inerzia di un sistema. Infatti, in un Universo ipersferico, le traslazioni diventano delle particolari rotazioni, e viene superato il dualismo tra aspetti traslatori e rotatori del moto.

Si passa poi allo studio del Dalambertiano e del Laplaciano nell'Universo di De Sitter (con la metrica di Beltrami), e si ottiene una equazione agli autovalori, cioé dipendente da un parametro N. Nel caso di un campo a simmetria sferica, essa assume un aspetto assai semplice ed elegante, e può essere risolta per via elementare. In particolare, per N intero positivo, le soluzioni sono dei polinomi, simili a quelli di Legendre. Tale equazione, che era stata da me stabilita in un precedente lavoro del 1968, ci rivela una stretta connessione dell'equazione di Laplace con l'assoluto di Cayley-Klein.

Nell'ultima parte del lavoro vengono studiate le particelle elementari, concepite come dei "micro-universi". Si ottiene allora la teoria di Caldirola, Pavsic, Recami sugli adroni e le interazioni forti, e la teoria di Caldirola, il quale applica il cronotopo di Castelnuovo ed il gruppo di Fantappié allo studio della struttura interna dell'elettrone, concepito come un microuniverso oscillante, in un intervallo di tempo elementare (cronone).

2. IL MOMENTO LINEARE ED IL MOMENTO ANGOLARE PROIETTIVI.

Abbiamo visto nei precedenti lavori [1] che nella relatività proiettiva, l'Universo di De Sitter viene studiato in rappresentazione geodetica, e cioé adoperando la metrica di Beltrami

$$A^4\, ds^2 = A^2\, dx_i\, dx_i - (\alpha_i\, dx_i)^2 \qquad i = 1, 2 \ldots 4 \qquad (2,1)$$

dove $A^2 = 1 + \alpha_i\, \alpha_i$ ed $\alpha_i = x_i/r$. Si può allora introdurre il tempo proprio

$$A^4\, d\tau^2 = dt^2\, [A^2\, (1 - \beta^2) - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \gamma)^2] \qquad (2,2)$$

con $\beta^2 = V^2/c^2$ e $\gamma = ct/r$, mentre la velocità proiettiva é data da

$$\overline{u}_A = d\overline{x}_A/d\tau \qquad \text{con} \qquad \overline{u}_A\, \overline{u}_A = -c^2 \qquad (A = 1, 2 \ldots 5) \qquad (2,3)$$

Poiché le coordinate proiettive sono normalizzate ($\overline{x}_A\, \overline{x}_A = -r^2$), esse sono legate alle coordinate cartesiane dalle formule

$$\bar{x}_i = x_i/A \quad ; \quad \bar{x}_5 = r/\Lambda \quad \text{con} \quad \Lambda^2 = 1 + \alpha^2 \quad \gamma^2 \tag{2,4}$$

Se allora introduciamo la velocità 4-dimensionale $u_i = dx_i/d\tau$, dalle (2,4) si deduce che

$$\Lambda^3 \, \bar{u}_i = (\Lambda^2 \, \delta_{jk} \cdot \cdot x_i x_k/r^2) \, u_k; \quad \Lambda^3 \bar{u}_5 = \quad r \, u_i \, x_i \tag{2,5}$$

Fatta questa premessa, introduciamo il momento lineare proiettivo $\bar{p}_A = m_0 \bar{u}_A$, e definiamo il momento angolare proiettivo nel sequente modo

$$M_{AB} = \bar{x}_A \, \bar{p}_B - \bar{x}_B \, \bar{p}_A \tag{2,6}$$

con il centro di riduzione nell'origine. Esso, in virtù delle (2,4) e (2,5), si scinde nelle

$$\boxed{M_{ik} = (x_i \, p_k \cdot \cdot x_k \, p_i) \, A^{-2} \quad ; \quad M_{i5} = r \, p_j \, A^{-2}} \tag{2,7}$$

In conseguenza si auvrà

$$\boxed{\Lambda^3 \, \bar{p}_i = p_i + x_k \, M_{ik} / r^2 \quad ; \quad A^3 \, \bar{p}_5 = - r \, x_s \, p_s} \tag{2,8}$$

ed otteniamo un interessante legame tra il momento lineare proiettivo $\bar{p}_\Lambda$, il momento lineare p_j ed il momento angolare M_{ik}. In consequenza, nell'Universo di De Sitter a curvatura costante, viene superato il dualismo tra momento lineare ed angolare, perché adesso le traslazioni sono delle particolari rotazioni.

3. STUDIO DEL TENSORE PROIETTIVO DI INERZIA DI UN SISTEMA.

Consideriamo un sistema formato da N punti materiali di massa di quiete $m_0^{(s)}$, con s = 1, 2...N, e di coordinate proiettive $X_i^{(s)}$, dove i = 1, 2, 3, 5. Allora introduciamo il *tensore di inerzia* nel seguente modo

$$J_{ik} = \Sigma \, m_0 \, \bar{x}_i \, \bar{x}_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 5) \tag{3,1}$$

dove la sommatoria é estesa agli N punti del sistema, ed abbiamo omesso per semplicità gli indici s che numerano tali punti. Tenendo conto delle (2,4), le sue componenti sono le seguenti

$$\left[\begin{array}{ccc|c} s_1 & C & B' & R\,M\,x_o \\ C' & s_2 & A' & R\,M\,y_o \\ B' & A' & s_3 & R\,M\,z_o \\ \hline R\,M\,x_o & R\,M\,y_o & R\,M\,z_o & M\,R^2 \end{array}\right] \tag{3,2}$$

dove R é il raggio dell'Universo. Tale tensore riunisce assieme i *momenti di inerzia planari* (s_1, s_2, s_3), i *prodotti di inerzia* (A', B', C'), i *momenti statici* (Mx_o, My_o, Mz_o), dove (x_o, y_o, z_o) sono le coordinate del baricentro G, e la *massa totale* M del sistema, così definita [2]:

$$M = \Sigma\, m_o \,/\, (1 + \alpha^2) \tag{3,3}$$

Seguendo il Fock [3], diremo che il sistema si muove come un corpo rigido, se i suoi punti hanno la velocità proiettiva

$$\bar{u}_i = \omega_{ik}\,\bar{x}_k \quad \text{con} \quad \omega_{ik} = -\,\omega_{ki} \tag{3,4}$$

dove abbiamo posto

$$\omega_{\alpha\beta} = \omega_\gamma \quad ; \quad \omega_{\alpha 5} = v_\alpha\, R^{-1} \tag{3,5}$$

con ($\alpha\ \beta\ \gamma$) permutazione pari rispetto alla (123), mentre $\vec{v}$ é la velocità di traslazione ed $\vec{\omega}$ la velocità angolare id rotazione del sistema.

Fatta questa premessa, il momento angolare proiettivo del sistema é dato da

$$M_{ik} = \Sigma\, m_o(\bar{x}_i\,\bar{u}_k \quad \bar{x}_k\,\bar{u}_i) = \Sigma\, m_o\,(\bar{x}_i\,\omega_{km}\,\bar{x}_m -\, \bar{x}_k\,\omega_{im}\,\bar{x}_m) \tag{3,6}$$

ed introducendo il tensore di inerzia (3,1) avremo in definitiva

$$\boxed{M_{ik} = \omega_{km}\,J_{im} \quad \omega_{im}\,J_{km}} \tag{3,7}$$

Per scrivere in forma esplicita il momento lineare $\underline{Q}$ ed il momento angolare $\underline{K}$, poniamo

$$M_{\alpha 5} = R\,Q_\alpha \quad ; \quad M_{\alpha\beta} = K_\gamma \tag{3,8}$$

ed indichiamo, seguendo il Levi-Civita [2], con (u, v, w) le tre componenti della velocità di traslazione $\underline{v}$, e con (p, q, r) le tre componenti della velocità angolare $\vec{\omega}$. Avremo allora

$$\begin{cases} K_1 = M\,(z_0\,v - y_0\,w); + A\,p - C'q - B'\,r \\ K_2 = M\,(x_0\,w - z_0\,u) - C'p + B\,q - A'\,r \\ K_3 = M\,(y_0\,u - x_0\,v) - B'p - A'q + C\,r \end{cases} \tag{3,9}$$

dove (A, B, C) sono i tre momenti principali d'inerzia. Si ha poi

$$\begin{cases} Q_1 = M\,u + M\,(q z_0 - r\,y_0) + (u s_1 + v C' + w\,B')\,/\,R^2 \\ Q_2 = M\,v + M\,(r x_0 - p z_0) + (uC' + v s_2 + wA')\,/\,R^2 \\ Q_3 = M\,w + M\,(p y_0 - q x_0) + (uB' + vA' + w s_3)\,/\,R^2 \end{cases} \tag{3,10}$$

le quali, per R tendente all'infinito, si riducono alle ben note espressioni classiche. Invece, nella relatività proiettiva, anche il momento lineare dipende dal tensore di inerzia.

Se poi ci poniamo nel riferimento baricentrale, con assi generici, le (3,10) si scrivono così

$$Q_\alpha = m_{\alpha\beta}\, v_\beta \qquad \text{con} \qquad m_{\alpha\beta} = M\,\delta_{\alpha\beta} + J_{\alpha\beta}/R^2 \tag{3,11}$$

in accordo con la legge di equivalenza $m = m_0 + I/R^2$, valida nella relatività proiettiva.

Se invece ci poniamo nel sistema baricentrale, e con assi principali di inerzia, le (3,9-10) si riducono alle

$$\begin{cases} K_1 = A\,p \quad ; \quad K_2 = B\,q \quad ; \quad K_3 = C\,r \\ Q_1 = (M + s_1/\,R^2)\,u \quad ; \quad Q_2 = (M + s_2/\,R^2)\,v \quad ; \quad Q_3 = (M + s_3/\,R^2)\,w \end{cases} \tag{3,12}$$

come é facile verificare.

4. Energia cinetica ed equazioni dinamiche di un sistema.

L'energia cinetica di un sistema, i cui punti si muovono con la legge (3,4), é data da

$$2\,T = \Sigma\, m_o\, \bar{u}_i\, \bar{u}_i = \Sigma\, m_o\, \omega_{ik}\, \bar{x}_k\, \omega_{im}\, \bar{x}_m \tag{4,1}$$

la quale si può scrivere nel seguente modo

$$\boxed{2\,T = \omega_{ik}\, \omega_{im}\, J_{km}} \tag{4,2}$$

Osserviamo che si ha identicamente

$$2\,\omega_{ik}\,\omega_{im}\,J_{mk} = (\omega_{im}\,J_{km} - \omega_{km}\,J_{im})\,\omega_{ik} = M_{ki}\,\omega_{ik}$$

e sostituendo tale valore nella (4,2), otteniamo la formula

$$\boxed{4\,T = M_{ki}\,\omega_{ik}} \tag{4,3}$$

Passando alla forma tridimensionale, essa si scrive così

$$\boxed{2\,T = \underline{M} \times \vec{\omega} + \underline{Q} \times \underline{v}} \tag{4,4}$$

Se poi teniamo conto delle (3,9-10), otteniamo la seguente espressione esplicita dell'energia cinetica del sistema

$$\begin{aligned} 2\,T = {} & M\,(u^2 + v^2 + w^2) + (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - 2\,(A'\,qr + B'\,pr + C'\,pq) + \\ & + 2\,M\,[(vr - wq)\,x_o + (wp - ur)\,y_o + (uq - vp)\,z_o] + \\ & + [(u^2\,s_1 + v^2\,s_2 + w^2\,s_3) + 2\,(A'vw + B'\,uw + C'\,uv)]/R^2 \end{aligned} \tag{4,5}$$

Per calcolare il lavoro compiuto dal sistema, introduciamo il *momento proiettivo* delle forze, cioé

$$f_{rs} = \bar{x}_r\, f_s - \bar{x}_s\, f_r \tag{4,6}$$

ed allora il lavoro é dato da

$$dL = \Sigma\, f_{rs}\, \omega_{rs}\, dt \tag{4,7}$$

Introducendo la risultante R_{rs} delle forze, si avrà

$$dL = (\Sigma\, f_{rs})\,\omega_{rs}\,dt = R_{rs}\,\omega_{rs}\,dt = R_{\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\beta}\,dt + R_{\alpha 5}\,\omega_{\alpha 5}\,dt \tag{4,8}$$

e cioé, in definitiva

$$\boxed{dL = (\underline{R} \times \underline{v} + M \times \vec{\omega})\, dt} \qquad (4,9)$$

in accordo con la meccanica classica.

Per concludere, scriviamo le equazioni di Eulero generalizzate, valide nel caso di velocità piccole rispetto a quella della luce. Se indichiamo con $\underline{v} = (u, v, w)$ la velocità dell'origine del sistema di riferimento, rispetto al sistema fisso, e con $\vec{\omega} = (p, q, r)$ la sua velocità angolare, le equazioni di Eulero, si possono generalizzare così, nella relatività proiettiva

$$\begin{cases} d\underline{Q}/d\tau + \vec{\omega} \wedge \underline{Q} + (\underline{v} \wedge \underline{K})/R^2 = \underline{R} \\ d\underline{K}/d\tau + \vec{\omega} \wedge \underline{K} + \underline{v} \wedge \underline{Q} = \underline{M} \end{cases} \qquad (4,10)$$

Si può per tale via sviluppare una meccanica dei solidi, valida su scala cosmica e per materia iperdensa. Infati nella meccanica di un Universo ipersferico, il momento lineare e quello angolare non si conservano più separatamente, ma sono trasmutabili l'uno nell'altro in accordo con la legge di equivalenza tra massa e mòmento polare di inerzia ($I = mR^2$).

5. Universo di De Sitter n-dimensionale e metrica di Beltrami.

Recentemente, nello studio delle teorie della "supergravità", ha acquistato particolare importanza l'Universo di De Sitter n-dimensionale, basato sul gruppo SO (1, n), oppure SO (2, n-1) [4]. Ci proponiamo allora di studiare la metrica di Beltrami n-dimensionale, che ci dà la rappresentazione geodetica dell'Universo di De Sitter n-dimensionale.

A tale scopo cominciamo ad esaminare il caso tridimensionale, nel quale la metrica (2,1) si riduce alla

$$\begin{aligned} A^4\, ds^2 = & (A^2 - \alpha_1^2)\, dx^2 + (A^2 - \alpha_2^2)\, dy^2 + (A^2 - \alpha_3^2)\, dz^2 + \\ & - 2\alpha_1 \alpha_2\, dxdy \quad 2\, \alpha_1\alpha_3\, dxdz - 2\, \alpha_2\, \alpha_3\, dydz. \end{aligned} \qquad (5,1)$$

con $\alpha_1 = x/r$; $\alpha_2 = y/r$; $\alpha_3 = z/r$. In consequenza il tensore metrico é dato da

$$A^4\, g = A^2\, \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha\, x_\beta /\, r^2 \qquad (\alpha_1\, \beta = 1, 2, 3) \qquad (5,2)$$

il cui determinante é $g = A^{-8}$. Il tensore contravariante sarà allora

$$g^{\alpha\beta} = A^2\, (\delta_{\alpha\beta} + x_\alpha\, x_\beta /\, r^2) \qquad (5,3)$$

Passando al caso quadridimensionale, si ha ul tensore metrico

$$\boxed{A^4\, g_{ik} = A^2\, \delta_{ik} - x_i\, x_k / r^2} \qquad (i, k = 1, 2...4) \qquad (5,4)$$

In questo caso, il determinante é $g = A^{-10}$, e quindi se ne deduce che

$$\boxed{g^{ik} = A^2\, (\delta_{ik} + x_i\, x_k / r^2)} \qquad (5,5)$$

Tali risultati possono essere facilmente estesi al caso della metrica di Beltrami n-dimensionale (2,1). Si avrà allora il determinante

$$\boxed{g = A^{-2(n+1)}} \qquad (5,6)$$

mentre i due tensori g_{ik} e g^{ik} sono dati dalle (5,4-5), facendo variare gli indici da 1 ad n.

Fatta questa premessa, calcoliamo l'operatore di Lapalce-Beltrami n-dimensionale

$$\bar{\Box}\, \alpha = (1/\sqrt{g})\, \partial_i\, (\sqrt{g}\, g^{ik}\, \partial_k\, \alpha) = 0 \qquad (5,7)$$

Se teniamo presente che $\partial_i\, x_i = n$, e che si ha

$$r^2\, \partial_i\, A^{1-n} = (1 - n)\, x_i\, A^{-(n+1)} \quad ; \quad 1 + x_i\, x_i / r^2 = A^2 \qquad (5,8)$$

otteniamo la seguente equazione differenziale

$$\boxed{\bar{\Box}\, \alpha = A^2\, (r^2\, \Box\, \alpha + x_i\, x_k\, \partial_i\, \partial_k\, \alpha + 2\, x_k\, \partial_k\, \alpha) = 0} \qquad (5,9)$$

cioé il Dalambertiano generalizzato non dipende esplicitamente dal numero $\underline{n}$ delle dimensioni dello spazio. Esso si può scrivere anche nel seguente modo

$$\bar{\Box}\, \alpha = A^2\, (\delta_{ik} + x_i\, x_k / r^2)\, \partial_i\, \partial_k\, \alpha + 2\, A^2\, x_k\, \partial_k\, \alpha = 0 \qquad (5,10)$$

Per $n = 4$ si ottiene una equazione simile a quella proposta dal Kerner [5].

Per concludere, calcoliamo i simboli di Christoffell ed il tensore di curvatura, relativi alla metrica di Beltrami n-dimensionale.

Se teniamo presenta che

$$2\Gamma_{i,\, ks} = \partial_s\, g_{ik} + \partial_k\, g_{is} - \partial_i\, g_{ks} \qquad (5,11)$$

e teniamo conto della (5,4), avremo

$$r^2 A^4 \Gamma_{i,\,ks} = 2 A^{-2} r^{-2} x_i x_k x_s - (x_s \delta_{jk} + x_k \delta_{js}) \tag{5,12}$$

Se poi osserviamo che

$$\Gamma^{i}_{ks} = g^{im} \Gamma_{m,\,sk} \tag{5,13}$$

avremo, in base alla (5,5) l'espressione

$$r^2 A^2 \Gamma^{i}_{ks} = (x_s \delta_{ik} + x_k \delta_{is}) \tag{5,14}$$

Infine, il tensore di curvatura é dato da

$$R_{mi.\,jk} = r (g_{mi} g_{jk} - g_{mk} g_{ij}) \tag{5,15}$$

Fatti i calcoli si trova che

$$A^6 R_{ik,\,lm} = A^2 (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) - (\delta_{il} x_k x_m + \delta_{km} x_i x_l - \delta_{im} x_k x_l - \delta_{kl} x_i x_m) \tag{5,16}$$

che ci dà il tensore di Riemann nella metrica di Beltrami.

6. Studio del Dalambertiano proiettivo 4-dimensionale.

Tornando al caso n = 4 della relatività proiettiva, definiamo il Dalambertiano proiettivo nel seguente modo

$$\boxed{\overline{\Box} \varphi (\overline{x}_S) = \overline{\partial}_A \overline{\partial}_A \varphi (\overline{x}_S) = 0} \tag{6,1}$$

Per trascrivere questa equqzione in forma 4-dimensionale, supponiamo che la funzione $\varphi (\overline{x}_A)$ sia omogenea di grado N nelle variabili $\overline{x}_A$. Vale allora il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee

$$x_S \overline{\partial}_S \varphi (\overline{x}_A) = N \varphi (\overline{x}_A) \tag{6,2}$$

Se poniamo, per maggiore semplicità

$$\varphi (\overline{x}_i, \overline{x}_5) = \overline{\varphi} \; ; \varphi (x_i / A, r/A) = \varphi \; ; \varphi (x_i, r) = \varphi_0 \tag{6,3}$$

in virtù della definizione di funzione omogenea, avremo

$$\boxed{\bar{\varphi} = \varphi = A^{-N}\,\varphi_0} \qquad (6,4)$$

e tenendo conto che $\bar{x}_5 = r/A$, se ne deduce che

$$r^N\,\bar{\varphi} = \bar{x}_5^N\,\varphi_0 \qquad (6,5)$$

Fatta questa premessa, per trovare il legame tra le derivate proiettive $\bar{\partial}_A = \partial/\partial\,\bar{x}_A$ e quelle cartesiane $\partial_i = \partial/\partial\,x_i$, deriviamo i due membri della (6,5) rispetto alla $\bar{x}_i$, e teniamo presente che

$$x_i = r\,\bar{x}_i\,/\,\bar{x}_5 \qquad \text{da cui} \qquad \partial\,x_s\,/\,\partial\,\bar{x}_i = r\,\delta_{is}\,/\,\bar{x}_5. \qquad (6,6)$$

Se ne deduce che

$$\boxed{\bar{\partial}_i\,\bar{\varphi} = A^{1-N}\,\partial_i\,\varphi_0} \qquad (6,7)$$

In modo analogo, derivando i due membri della (6,5) rispetto alla $\bar{x}_5$, avremo

$$r^N\,\bar{\partial}_5\,\bar{\varphi} = N\,\bar{x}_5^{N-1} + \bar{x}_5^N\,(\partial\,x_i\,/\,\partial\,\bar{x}_5)\,\partial_i\,\varphi_0$$

ed osservando che si ha

$$\frac{\partial\,x_i}{\partial\,\bar{x}_5} = \frac{\partial}{\partial\,\bar{x}_5}\left(r\,\frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_5}\right) = -\,r\,\frac{\bar{x}_U}{\bar{x}_5^2} = -\,\frac{x_i}{\bar{x}_5}$$

e che $\bar{x}_5 = r/A$, otteniamo la formula

$$\boxed{r\,\bar{\partial}_5\,\bar{\varphi} = A^{1-N}\,(N - x_s\,\partial_s)\,\varphi_0} \qquad (6,8)$$

Le (6,7-8) ci danno il legame tra le derivate proiettive 5-dimensionali e quelle 4-dimensionali.

Se poi osserviamo che si ha $\varphi_0 = A^N\,\varphi$, e che $\partial_i\,A = x_i\,/\,(Ar^2)$, le precedenti formale si possono scrivere così

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\partial}_i\,\bar{\varphi} = [A\,\partial_i + (N/Ar^2)\,x_i]\,\varphi \\ &r\,\bar{\partial}_5\,\bar{\varphi} = (N/A \quad A\,x_s\,\partial_s)\,\varphi \end{aligned}\right. \qquad (6,9)$$

da noi stabilite in un precedente lavoro del 1972 [6].

Utilizzando le (6,7-8) il Dalambertiano proiettivo (6,1) assume il seguente aspetto 4-dimensionale

$$\boxed{A^{2-N}\,[r^2\,\square + x_i\,x_k\,\partial_i\,\partial_k + (N-1)\,(N - 2\,x_s\,\partial_s)]\,\varphi_o = 0} \tag{6,10}$$

Tale equqzione coincide con quella trovata con altro metodo in un mio lavoro del 1968 [7]. Essa può essere trasformata in una equazione agli autovalori, se teniamo conto che $\varphi_o = A^N\,\varphi$, e si ha l'equazione

$$\boxed{A^2\,(r^2\,\square + x_i\,x_k\,\partial_i\,\partial_k + 2\,x_s\,\partial_s)\,\varphi = -N\,(N+3)\,\varphi} \tag{6,11}$$

simile a quella ottenuta dal Castagnino nel 1970 [8]. E' poi importante osservare che tale equazione si ottiene tenendo conto che $\partial_i\,x_i = 4$. Nel caso in cui nella φ intervengono solo k variabili ($1 \leqslant k \leqslant 4$), il secondo membro deve essere sostituiro da $-N\,(N + k - 1)\,\varphi$.

Facciamo un esempio: data la funzione $\bar{\varphi}$, omogenea di 3° grado nelle $\bar{x}_A$

$$\bar{\varphi} = 3\,\bar{x}_1^2\,\bar{x}_5 + 2\,\bar{x}_2\,\bar{x}_5^2 \tag{6,12}$$

in base a quanto abbiamo detto, avremo

$$\varphi = A^{-3}\,r\,(3\,x^2 + 2\,yr) \quad ; \quad \varphi_o = r\,(3\,x^2 + 2\,yr) \tag{6,13}$$

e si verifica subito che $\varphi_o = A^3\varphi$.

7. IL LAPLACIANO PROIETTIVO A SIMMETRIA SFERICA.

Per studiare il laplaciano proiettivo, poniamo nella (6,10) $x_4 = 0$, ed otteniamo la seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} A^{2-N}\,(r^2\,\Delta + x^2\,\partial_{xx} + y^2\,\partial_{yy} + z^2\,\partial_{zz} + 2\,xy\,\partial_{xy} + \\ + 2\,xz\,\partial_{xz} + 2\,yz\,\partial_{yz} + (N-1)(N - 2\,x\,\partial_x - \\ - 2\,y\,\partial_y - 2\,z\,\partial_z)]\,\varphi_o = 0 \end{aligned} \tag{7,1}$$

Nel caso di un campo a simmetria sferica, cioé del tipo $\varphi_o = \varphi_o\,(\rho)$, poniamo $\varphi_o' = d\,\varphi_o\,/\,d\,\rho$; $\varphi_o'' = d^2\,\varphi_o\,/\,d\,\rho^2$, ed allora si ha

$$\partial_x \varphi_0 = (x/\rho)\,\varphi_0' \quad ; \quad \partial_{xy}\varphi_0 = -(xy/\rho^3)\,\varphi_0' + (xy/\rho^2)\,\varphi_0''$$
$$\partial_{xx}\varphi_0 = (x/\rho)^2\,\varphi_0'' + (\rho - x^2)\,\varphi_0'/\rho^2 \tag{7,2}$$

e le analoghe. Sostituendo tali valori nelle (7,1), ottenendo la seguente equazione differenziale

$$\boxed{\left(1+\frac{\rho^2}{r^2}\right)\varphi_0'' + \frac{2}{\rho}\left(1 - \frac{N-1}{r^2}\,\rho^2\right)\varphi_0' + \frac{N(N-2)}{r^2}\,\varphi_0 = 0} \tag{7,3}$$

ottenuta per altra via nel precedente lavoro del 1968 [7].

Mediante il cambiamento di variabile $\varphi = A^{N}\,\varphi_0$, si ottiene la seguente equazione agli autovalori

$$\boxed{(1+\rho^2/r^2)^2\,(\varphi'' + 2\varphi'/\rho) = -N(N+2)\,\varphi} \tag{7,4}$$

che per $N = 0$ si riduce a quella del laplaciano classico.

Per studiare l'equazione (7,3) conviene fare il nuovo cambiamento di variabile $\varphi_0 = X/\rho$, ed allora ponendo $r = 1$, essa si riduce alla [9]

$$\boxed{(1+\rho^2)\,X'' - 2N\rho\,X' + N(N+1)\,X = 0} \tag{7,5}$$

che é analoga a quella ben nota di Legendre [10].

$$(1-\rho^2)\,P'' - 2\rho\,P' + N(N+1)\,P = 0 \tag{7,6}$$

la quale, per N intero positivo, ci dà per soluzioni i polinomi di Legendre.

Procedendo in modo analogo, cerchiamo una soluzione della (7,5), del tipo

$$X = \Sigma\, a_s\,\rho^s \qquad (s = 0, 1 \ldots \infty) \tag{7,7}$$

Sostituendo tale valore nella (7,5), otteniamo la formula ricorrente

$$a_{s+2} = \frac{2Ns - s(s-1) - N(N+1)}{(s+1)(s+2)}\,a_s \tag{7,8}$$

Ponendo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, ovvero $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, si ricavano due soluzioni fondamentali A_N e B_N, da cui si ricava la soluzione generale

$$\boxed{X_N = b_1 A_N + b_2 B_N} \tag{7,9}$$

dove (b_1, b_2) sono due costanti arbitrarie.

Se per un certo valore di s, si ha $a_{s+2} = 0$, tutti gli altri coefficienti sono nulli, e la (7,7) si riduce ad un polinomio. Questo accade se

$$N^2 - (2s - 1) N + s(s - 1) = 0 \tag{7,10}$$

cioé per $N = s$ ed $N = s - 1$. Ne segue che per N intero positivo, le soluzioni della (7,5) sono dei polinomi, che possiamo chiamare "ipersferici".

La soluzione generale della (7,5) é stata trovata da B. Rizzi [11], ed é data da

$$\boxed{X = c_1 (1 + i\rho)^{N+1} + c_2 (1 - i\rho)^{N+1}} \tag{7,11}$$

Essa ci rivela un interessante legame con l'assoluto di Cayley-Klein della metrica di Beltrami, di equazione

$$A^2 = 1 + \rho^2 = (1 + i\rho)(1 - i\rho) = 0 \tag{7,12}$$

Se allora poniamo

$$\boxed{(1 + i\rho)^{N+1} = A_N + i B_N} \tag{7,13}$$

si ottiene per soluzione generale la (7,9) e si ricavano le formule ricorrenti

$$A_N = A_{N-1} - \rho B_{N-1} \quad ; \quad B_N = B_{N-1} + \rho A_{N-1} \tag{7,14}$$

si trova poi che le derivate rispetto alla ρ sono date da

$$A'_N = -(N + 1) B_{N-1} \quad ; \quad B'_N = (N + 1) A_{N-1} \tag{7,15}$$

Se infine scriviamo $1 + i\rho$ in forma trigonometrica ed applichiamo la formula di De Moivre, la (7,11) assume il seguente aspetto

$$X = A^{N-1} (\lambda_1 \cos \Gamma + \lambda_2 \operatorname{sen} \Gamma) \quad \text{con} \quad \Gamma = (N + 1) \operatorname{arctg} \rho \tag{7,16}$$

da cui si deduce che le due funzioni A_N e B_N sono legate dalla relazione

$$\boxed{B_N = A_N \operatorname{tang} [(N + 1) \operatorname{arctg} \rho]} \tag{7,17}$$

Per N intero positivo, A_N e B_N si riducono a due polinomi:

$$A_N = 1 - \binom{N+1}{2} \rho^2 + \binom{N+1}{4} \rho^4 - \ldots ;$$
$$B_N = (N+1)\rho - \binom{N+1}{3} \rho^3 + \binom{N+1}{5} \rho^5 - \ldots \tag{7,18}$$

E' interessante osservare che per N intero negativo, $A_{-1} = 1$ e $B_{-1} = 0$, mentre

$$A_{-N} = A_{N-2} \cdot A^{2(1+N)} \quad ; \quad B_{-N} = - B_{N-2} \cdot A^{2(1-N)} \tag{7,19}$$

Si trova poi che

$$A_{-1/2} = \sqrt{A-1} \quad ; \quad B_{-1/2} = \rho / \sqrt{A-1} \tag{7,20}$$

come é facile verificare.

8. UNIVERSO IPERSFERICO E CAMPO GRAVITAZIONALE.

E' noto che nello spazio euclideo ad n dimensioni, l'equazione di Laplace, se ci riferiamo ad un campo a simmetria sferica $\varphi = \varphi(\rho)$, si riduce alla equazione

$$\boxed{\varphi'' + (n-1)\varphi'/\rho = 0} \tag{8,1}$$

Indicando con M la massa della sorgente puntiforme, e con g la costante gravitazionale, otteniamo il potenziale

$$\varphi = gM \rho^{2-n} / (n-1) \tag{8,2}$$

E, per $n \neq 2$, il campo gravitazionale é dato da

$$\boxed{f = -gM \rho^{1-n}} \tag{8,3}$$

Invece, per $n = 2$ si ha $\varphi = gM \log \rho$ mentre $f = gM/\rho$.

Le cose si complicano se si passa ad un Universo ipersferico tridimensionale. In questo caso, utilizzando la sua rappresentazione geodetica di Beltrami, si ha la (7,4), la quale come abbiamo visto, ha la soluzione

$$\varphi = A^{-N} \varphi_0 \quad \text{con} \quad \varphi_0 = -(gM\, A_N + k\, B_N)/\rho \tag{8,4}$$

dove k é una seconda costante. Se ne deduce che

$$f = -(gM\,P_N + k\,Q_N)\,/\,(\rho^2\,A^{N+2}) \tag{8,5}$$

e si trova che

$$P_0 = 1 \;\; ; \;\; P_1 = 1 + 3\rho^2 \;\; ; \;\; P_2 = 1 + 6\rho^2 - 3\rho^4 \;\; ;$$

(8,6)

$$P_3 = 1 + 10\rho^2 - 15\rho^4 \tag{8,6}$$

mentre

$$Q_0 = 1 \;\; ; \;\; Q_1 = 2\rho^3 \;\; ; \;\; Q_2 = 8\rho^3 \;\; ; \;\; Q_3 = 4\rho^3\,(5 - \rho^2) \tag{8,7}$$

e così via. Possiamo quindi concludre che nella relatività proiettiva, la legge di gravitazione fa intervenire due costanti universali (g, k) ed al variare di N appaiono dei nuovi termini, proporzionali alle potenze di ρ. Per esempio, per N = 2 si ha

$$f = -A^{-4}\left[\frac{gM}{\rho^2}\left(1 + 6\frac{\rho^2}{r^2} - 3\frac{\rho^4}{r^4}\right) + 8\,k\rho\right] \tag{8,8}$$

I nuovi termini che intervengono sono di tipo attrattivo o repulsivo, e possono essere collegati al collasso oppure all'espansione dell'Universo. Essi poi traducono l'ipotesi di Mach che l'inerzia dei corpi, sia dovuta alla azione gravitazionale delle stelle lontane, in quanto tale azione aumenta con la loro distanza [12].

9. L'Universo di De Sitter e le particelle elementari

Passiamo adesso ad esaminare brevemente in che modo l'Universo di De Sitter può essere utilizzato nel campo delle particelle elementari. Per esempio, il Prasad [13] ha utilizzato il gruppo SO (4,1) e cioé l'Universo di De Sitter D^+, come spazio degli eventi esterni, ed il gruppo SO (3,2) cioé l'Universo D^-, come spazio della struttura interna. Quest'ultimo spazio é di tipo oscillante, e si presta allo studio delle particelle elementari.

Se ci riferiamo alla rappresentazione geodetica di D^-, e ci limitiamo ai campi statici a simmetria sferica, l'equazione dell'assoluto diventa

$$A^2 = 1 - \rho^2 = (1 + \rho)(1 - \rho) = 0 \tag{9,1}$$

ed allora l'equazione (7,5) viene così modificata

$$(1 - \rho^2)X'' + 2\rho N X' - N(N+1)X = 0 \tag{9,2}$$

la cui soluzione generale é data da

$$X_N = c_1 (1+\rho)^{N+1} + c_2 (1-\rho)^{N+1} \tag{9,3}$$

che ci mostra una stretta connessione tra l'equazione dell'assoluto e la soluzione dell'equazione di Laplace generalizzata.

In questo caso, se poniamo

$$(1+\rho)^{N+1} = \bar{A}_N + \bar{B}_N \tag{9,4}$$

si trova che

$$\bar{A}_0 = 1 \quad ; \quad \bar{A}_1 = 1+\rho^2 \quad ; \quad \bar{A}_2 = 1 + 3\rho^2 \quad ; \quad \bar{A}_3 = 1 + 6\rho^2 + \rho^4 \tag{9,5}$$

mentre

$$\bar{B}_0 = \rho \quad ; \quad \bar{B}_1 = 2\rho \quad ; \quad \bar{B}_3 = 3\rho + \rho^3 \quad ; \quad \bar{B}_4 = 4\rho + 4\rho^3 \tag{9,6}$$

e così via.

Per questa via si potrebbe affrontare il problema del "confinamento" dei quark, in quanto esso sarebbe dovuto alla presenza di forze attrattive (forti) proporzionali alla potenza della distanza.

Un diverso modo di utilizzare l'Universo di De Sitter e la relatività proiettiva, nello studio dell'elettrone, é stato suggerito recentemente dal Caldirola [14]. Infatti, in base alla teoria di Lorentz, la massa m_0 dell'elettrone sferico di raggio R é legata alla carica e dalla relazione

$$m_0 = 2e^2 / (3Rc^2) \tag{9,5}$$

ed é di natura interamente elettromagnetica. Ne segue che se l'elettrone é puntiforme (R = 0), la sua massa diventa infinita.

Per superare le difficoltà che si incontrano nello studio del moto dell'elettrone, il Caldirola ha proposto l'introduzione di un intervallo di tempo fondamentale (il "cronone"), atto a caratterizzare una variazione dello stato dell'elettrone, quando questo é sottoposto ad una forza esterna. Il cronone viene definito nel seguente modo

$$\vartheta_0 = \tau_0 / 2 = 2e^2 / (3 m_0 c^2) \tag{9,6}$$

e caratterizza il carattere discontinuo con cui si manifesta la variazione di stato dell'elettrone.

Si può allora considerare l'elettrone come un microuniverso di De Sitter oscillante, e si può adoperare il gruppo di Fantappié e la relatività proiettiva, nello studio dell'elettrone, purché si sostituisca alla età t_0 dell'Universo (che interviene nella relatività proiettiva), il crononc ϑ_0. Per tale via si arriva alla conclusione che il "muone" é uno stato eccitato dell'elettrone, e che si possono prevedere ulteriori stati eccitati, come per es, l'esistenza di un elettrone pesante la cui massa é dell'ordine di 23 masse protoniche.

10. LE PARTICELLE ELEMENTARI COME "MICRO-UNIVERSI"

La "teoria degli Universi fisici" é stata proposta dal Fantappié nel 1952, come una teoria dei possibili Universi [15]. Se invece ci limitiamo agli Universi ipersferici ad n dimensioni, ho fatto vedere che tali modelli di Universo si possono considerare come successive approssimazioni della fisica del nostro Universo.

Come hanno suggerito Caldirola, Pavsic e Recami [16], la teoria degli Universi può essere interpretata in modo diverso, e cioé supponendo che il nostro Universo può contenerne altri ("micro-universi") e può essere contenuto a sua volta entro altri Universi più ampi. Da questo punto di vista, una particella elementare può essere considerata come un "micro-universo", ottenuto da un modello di Universo, il cui raggio viene ridotto del fattore 10^{40}, che é il ben noto "Numero di Dirac". In tal modo le idee di Eddington e di Dirac sui legami esistenti tra le costanti universali della cosmologia e della microfisica, ricevono una interessante applicazione.

Si postula allora che nel nostro Universo valgono le equazioni gravitazionali di Einstein, con termine cosmologico, mentre dentro gli adroni, il campo "forte" é ottenuto concentrando di 10^{40} il campo gravitazionale.

Se ne deducono alcune interessanti conseguenze:

a) Se il nostro cosmo é simile ad un adrone, allora esso potrebbe essere formato da un semicosmo di materia ed uno di antimateria (così come un pione é formato da un quark e da un antiquark).

b) Viceversa, se gli adroni sono simili al nostro cosmo, ed adottiamo la teoria del Big-Bang ciclico, anche essi dovrebbero seguire dei cicli di espansione e di contrazione, con periodo di 10^{-23} secondi, che si ottiene riducendo del fattore 10^{40} l'età dell'Universo.

c) Questo stretto legame tra cosmologia e microfisica viene confermato dalla relatività proiettiva, nella quale, come abbiamo visto, l'equazione di D'Alembert e quella di Laplace generalzzate, sono delle equazioni agli autovalori (come accade in fisica quantistica). Se ne deduce che nell'Universo, come nelle particelle elementari, ci debbono essere vari "stati", con brusco passaggio dall'uno all'altro.

Concludiamo ricordando che recentemente, il De Sabbata e Gasperini [17], riprendendo l'idea delle particelle elementari come microuniversi, hanno ricavato una semplice relazione tra la densità di spin di una particella e la densità di spin del nostro Universo

$$\sigma / \Sigma \sim (M_0 / m) \cdot (r / r_0) \qquad (10,1)$$

dove σ é la densità di spin degli adroni, Σ la densità di spin dell'Universo, M_0 la massa dell'Universo, m la massa dell'adrone, ed r_0 il suo raggio.

Da tale relazione segue che la densità si spin dell'Universo é uguale a quella di un adrone. Inoltre la velocità angolare dell'Universo risulta pari ad $H = c/r$, cioé alla costante di Hubble dell'espansione cosmica.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ARCIDIACONO, Memorie su Collectanea Mathematica del 1958-80; *Relatività e Cosmologia*, 2 voll. (3° ed.). Libreria Veschi (Viale Universtià, 7) Roma 1979.

[2] T. LEVI-CIVITA, U. AMALDI, *Meccanica Razionale*, Zanichelli, Bologna, 1942.

[3] V. FOCK, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, New York, 1964, pagg. 272-275.

[4] A. D'ADDA, R. D'AURIA, P. PRE', R. REGGE, *Geometrical formulation of supergravity theories in orthosymplectic supergroup manifolds*, Rivista del Nuovo Cimento, 1979.

[5] E. H. KERNER, *Extended inertial frames and Lorentz transformations*, Journ. Math. Phys. *17*, 1797 (1976).

[6] G. ARCIDIACONO, *L'Universo di De Sitter-Castelnuovo e la temoidrodinamica*, Coll. Math. XXIII, faso. 2 (1972).

[7] G. ARCIDIACONO, *Magnetoidrodinamica e Cosmologia*, Coll. Math. XIX, fasc. 3, 1968.

[8] G. CASTAGNINO, *Champs de spin entier dans l'espace-temps de De Sitter*, Ann. Inst. Poincaré, XIII, 263-270 (1970).

[9] G. ARCIDIACONO, *The De Sitter Universe and Elementary Particle physics*, General Relativity and Gravitation, *13*, 703 (1981).

[10] G. SZEGO, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 23, 1939. G. SANSONE, *Orthogonals functions*, Int. Publ. New York, 1959.

[11] G. ARCIDIACONO, B. RIZZI, *Sulla equazione di Laplace generalizzata enll'Universo di De Sitter*, Rendiconti di Matematica, 1982.

[12] E. MACH, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico*, Boringheri, 1956; B. BERTOTTI, *Introduzione alla cosmologia*, Le Monnier, Firenze, 1980.

[13] R. PRASAD, *The De Sitter model for elementary particles*, Nuovo Cimento, *44*, 299, 1966.

[14] P. CALDIROLA, *A relativistic theory of the classical electron*, Rivista del Nuovo Cimento, vol. 2, n° 13, 1979.

[15] L. FANTAPPIE', *Opere Scelte*, Ed. Unione Matematica Italiana, Bologna, 1973.

[16] P. CALDIROLA, M. PAVSIC, E. RECAMI, *Explaining the large numbers by a Hierarchy of Universes*, Il Nuovo Cimento, 48 B, n° 2 (1978).

[17] V. DE SABBATA, M. GASPERINI, *Strong gravity and Dirac numbers*, Nuovo Cimento, *20*, 525, 1977.

[18] G. ARCIDIACONO, *Oltre la quarta dimensione*, Ed. Il Fuoco (Via G. Carini 28), Roma, 1980; *Universo e Relatività*, Massimo, Milano, 1967.

Prof. Giuseppe ARCIDIACONO
Via Acq. Peschiera 96
(Italia) 00135 ROMA