PROBLEME DU CHASSEUR AU TROISIEME ORDRE

par

BEBBOUCHI RACHID

INTRODUCTION

R. Lutz et T. Sari (2) ont étudié le problème aux limites:

$$P' \begin{cases} \epsilon^2 y'' = f(y) \qquad 0 < t < 1 \quad , \epsilon > 0 \\ y(0) = a, y(1) = b \end{cases}$$

et ont décrit le comportement asymptotique des solutions, lorsque ϵ tend vers 0, ceci en utilisant les techniques d'analyse non classique.

Nous nous proposons de faire de même concernant le problème aux limites du troisième ordre:

$$P'' \begin{cases} 2\epsilon^2 y''' = f(y') \quad 0 < t < 1 \quad , \epsilon > 0 & \text{(I)} \\ y(0) = y_0, y'(0) = v_0, y(1) = b & \text{(II).} \end{cases}$$

En posant $y' = v$, ce problème se ramène à une équation du second ordre:

$$2\epsilon^2 v'' = f(v)$$

mais assujettie à des conditions d'un type nouveau:

$$v(0) = v_0 \text{ et } b = y_0 + \int_0^1 v(r)\, dr.$$

1. ETUDE AU SECOND ORDRE:

Etudions d'abord le comportement asymptotique des solutions, lorsque ϵ tend vers 0, de:

$$P''' \quad \begin{cases} 2\epsilon^2 x'' = f(x) \\ x(0) = A \ \text{ et } \ \int_0^1 x(s)\,ds = B \end{cases} \tag{III}$$

dans le cas où, si F est une primitive de f, F admet deux zéros α_1 et α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$, de même ordre 2q, q >1.

Par transfert, on peut supposer sans restreindre le problème que les constantes f,F,A,B,α_1 et α_2 sont standard. Il suffit alors d'étudier le problème P''' avec ϵi.p. strictement positif pour en déduire le résultat escompté (voir (1)).

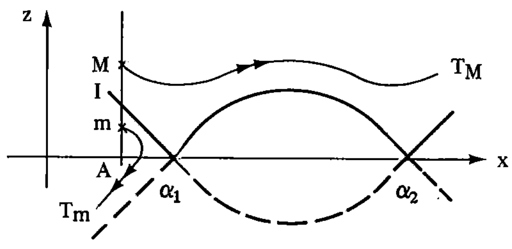
Proposition 1: *Si $A < \alpha_1$, le problème P''' admet une solution.*

Démostration: Dans le plan (x,z) avec $z = \epsilon x'$, le champ associé à l'équation (III) est de la forme:

$$\begin{cases} \epsilon x' = z \\ 2\epsilon z' = f(x) \end{cases}$$

et il a pour intégrale première

$$z^2 = F(x) + k\,.$$



Nous allons utiliser la méthode du "shooting": soient I le point d'intersection de la séparatrice $\sqrt{F(x)}$ et de la droite x = A, d'ordonnée positive, M un point de la droite d'ordonnée supérieure à celle de I et m un point de la droite d'ordonnée positive et inférieure à celle de I. On suppose M,I et m non infiniment proches.

La trajectoire T_M, partant du point M, suit l'équipotentielle $z = \sqrt{F(x) + k_M}$ avec k_M positif non i.p. Au bout d'un temps i.p., T_M atteint des valeurs i.g. de x et y reste; en particulier, si x_1 est la solution associée à la trajectoire T_M, x_1 (t) est i.g. positif pour tout t, $t > a > 0$ où a est un standard quelconque. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_0^1 x_1(t)\, dt$$

est i. g. positive.

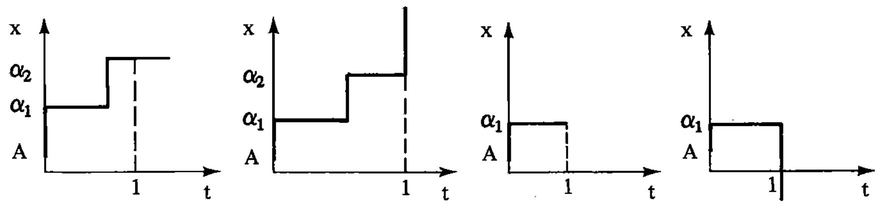
La trajectoire T_m, partant du point m, suit l'équipotentielle $z^2 = F(x) + k_m$ avec k_m négatif non i.p.. Un raisonnement analogue au précédent aboutit à la conclusion que, si x_2 est la solution associée à la trajectoire T_m, $x_2(t)$ est i.g. négatif pour tout t, $t > a > 0$ où a est un standard quelconque, donc que l'intégrale

$$\int_0^1 x_2(t)\, dt$$

est i.g. négative.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'existence d'une solution x de l'équation (III) vérifiant (IV).

Proposition 2: *Si $A < \alpha_1$, l'ombre du graphe de la solution du problème P'' ' présente quatre types d'allure suivant les valeurs de B:*



$\alpha_1 < B \leqslant B_2$ $\qquad$ $B_2 < B$ $\qquad$ $B = \alpha_1$ $\qquad$ $B < \alpha_1$

avec $B_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 L_{12}) / (1 + L_{12})$

où $L_{ij} = (F^{(2q)}(\alpha_i) / F^{(2q)}(\alpha_j))^{1/2q}$.

Démonstration:

i) *cas $B > \alpha_1$:*

La solution x du problème présente des phases rapides séparées par des mouvements de relaxation (correspondant à une perte de temps de la trajectoire T associée, au voisinage des zéros α_1 et α_2).

Soit t_i le temps standard mis par la trajectoire T dans le halo du point α_i. Lutz et Sari (1) ont montré que:

$$(F^{(2q)}(\alpha_1))^{1/2q} t_1 = (F^{(2q)}(\alpha_2))^{1/2q} t_2 .$$

Comme B est standard, on a nécessairement $t_1 + t_2 \geqslant 1$ sinon l'intégrale $\int_0^1 x(t)\,dt$ serait i.g. .

Examinons le cas $t_1 + t_2 = 1$. Si la solution non standard x est bornée, on a:

$$B = \int_0^1 x(t)\,dt = \int_0^{t_1+t_2} x(t)\,dt \simeq \int_0^1 x^\circ(t)\,dt.$$

Mais, dans ce cas-là:

$$\int_0^1 x^\circ(t)\,dt = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 = t_1 (\alpha_1 + \alpha_2 L_{12}).$$

Et on en déduit:

$$t_1 = B / (\alpha_1 + \alpha_2 L_{12}).$$

Or on a aussi:

$$\int_0^1 x^\circ(t)\,dt = \alpha_2 - (\alpha_2 - \alpha_1)t_1 \quad \text{, d'où } t_1 = (\alpha_2 - B) / (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Ceci n'est possible que pour la valeur particulière de B:

$$B_2 = (\alpha_1 + \alpha_2 L_{12}) / (1 + L_{12}) \quad (\alpha_1 < B_2\, H < \alpha_2).$$

Si $\alpha_1 < B \leqslant B_2$, la solution x présente deux paliers, l'un de longueur standard t_1, l'autre de longeur standard $1\text{-}t_1$ et on a:

$$t_1 = (\alpha_2 - B) / (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Si $B > B_2$, la solution x présente deux paliers et une corne: elle n'est plus bornée. Pour calculer la longueur de la corne, il suffit de voir que cela consiste à ajouter à B_2 l'aire d'un rectangle de largeur i.p. et de longueur α_2 plus celle de la corne pour obtenir la valeur de B.

ii) *cas $B \leqslant \alpha_1$*:

Il ne peut y avoir un second palier en α_2 et la trajectoire T associée à la solution x part d'un point infiniment proche de I de hauteur inférieur à celle de I.

Si $B = \alpha_1$, on a $t_1 = 1$ et la solution x est bornée (donc sans corne).

Si $B < \alpha_1$, on retranche à α_1 l'aire d'un rectangle de largeur i.p. et de longueur i.g. jusqu'à obtenir la valeur B. On a toujours $t_1 = 1$ mais la solution x n'est plus bornée et présente une corne dans les x négatifs.

Conséquence: *Si la fonction F admet p zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_1 < \ldots < \alpha_p$, de même ordre $2q(q > 1)$, le problème P'' ' possède une solution à i paliers si* $B_{i-1} < B \leqslant B_i$ *avec* $B_i = \alpha_i (\alpha_1 + \alpha_2 L_{12} + \ldots + \alpha_i L_{1\,i}) / (\alpha_2 + \ldots + \alpha_i L_{1\,i-1} +$

$+ \alpha_i L_{1i}$), *p paliers avec une corne vers le haut si* $B > B_p$ *et un palier avec une corne vers le bas si* $B \leqslant \alpha_1$ *(ceci dans le cas où* $A < \alpha_1$*).*

2. ETUDE AU TROISIÈME ORDRE:

Considérons le problème P″ en supposant que F admet un nombre fini $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (n standard) de zéros d'ordres respectifs $2q_1, \ldots, 2q_n (q_i > 1)$ et que $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$.

Proposition 3: *Si* $v_o < \alpha_1$ *et* $\lim_{v\to\infty} F(v)/v^2 = 0$, *le problème aux limites P″ possède une solution quelle que soit la valeur de b.*

Démonstration: Citons le lemme suivant:

Lemme: *Si* $\lim_{v\to\infty} F(v)/v^2 = 0$, *il existe une solution de l'équation (I) qui, au bout d'un temps égal à un, est i.g. négative et une solution qui, au bout du même temps, est i.g. positive.*

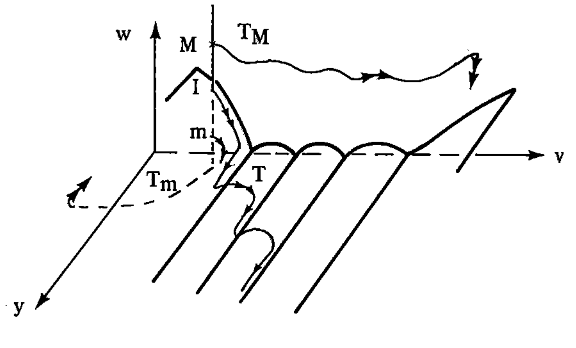
Si le lemme est vrai, d'après le principe de dépendance continue des solutions par rapport aux conditions initiales, il existera une solution qui atteindra la valeur b au bout d'un temps égal à un; c'est aussi la méthode du shooting.

Démonstration du lemme: Dans l'espace (y,v,w) avec $v = y'$ et $w = \epsilon y''$, l'équation (I) est associée au champ:

$$\begin{cases} y' = v \\ \epsilon v' = w \\ \epsilon w' = f(v)/2 \end{cases}$$

qui a pour intégrale première:

$$w^2 = F(v) + k\,.$$



Soient I le point d'intersection de hauteur positive de la droite ($y = y_o$, $v = v_o$) et de la surface séparatrice $w^2 = F(v)$, M un point sur la droite de hauteur supérieure à celle de I et m un point sur la droite de hauteur positive inférieure à celle de I; les points I,M et m ne sont pas infiniment proches.

La trajectoire T_M, issue du point M, reste sur la surface équipotentielle $w = (F(v) + k_M)^{1/2}$ avec k_M positif non i.p. . Comme la composante en v du champ est i.g. sur cette surface, T_M va longer la courbe d'équations

$$(y = y_o, w = (F(v) + k_M)^{1/2})$$

et atteint toutes les valeurs limitées de v pour des temps i.p. d'ordre ϵ.

Le changement de variables

$$\bar{v} = \epsilon^s v \quad \text{et} \quad t = \epsilon^s \bar{t} \quad \text{avec} \quad 0 < s < 1\,,$$

permet d'en étudier le comportement dans les valeurs i.g. de v. En effet, sur l'équipotentielle, T_M va être soumise au champ:

$$\begin{cases} dy/d\bar{t} = \bar{v} \\ d\bar{v}/d\bar{t} = (\epsilon^{4s-2} F(\bar{v}/\epsilon^s) + \epsilon^{4s-2} k_M)^{1/2} \end{cases}$$

L'hypothèse $\lim\limits_{v\to\infty} F(v)/v^2 = 0$ entraîne que la quantité $\epsilon^{2s} F(\bar{v}/\epsilon^s)$ est i.p. d'ordre ϵ^q avec $q > 0$. Un choix adéquat de s permet d'assurer que la quantité $\epsilon^{4s-2} F(\bar{v}/\epsilon^s)$ reste i.p. et le champ précédent est infiniment proche du champ standard:

$$\begin{cases} dy/d\bar{t} = \bar{v} \\ d\bar{v}/d\bar{t} = 0 \end{cases}$$

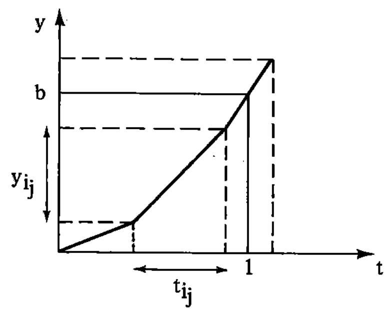
pourvu que $\bar{v}$ soit limité.

La trajectoire T_M atteint donc toutes les valeurs limitées de y pour des temps i.p. et, puisque $\bar{v}$ est toujours positive, le champ croît en y et si y_M est la solution de l'équation (I) associée à T_M, on a: $y_M(1)$ i.g. positif.

La trajectoire T_m, issue du point m, reste sur la surface équipotentielle: $w^2 = F(v) + k_m$ avec k_m négatif non i.p..

Un raisonnement analogue au précédent montre que, si y_m est la solution associée à T_m, $y_m(1)$ est i.g. négatif. Le lemme est démontré.

Théorème: *La solution du problème P″ présente des sauts dans la vitesse. L'ombre de son graphe par rapport au temps est une ligne polygonale. Si q est* *le plus grand des entiers* $q_1, \ldots ;q_n$ *et si* $\alpha_{i_1}, \ldots ,\alpha_{i_p}$ *sont les zéros d'ordre* $2q$ $(\alpha_{i_1} < \ldots < \alpha_{i_p})$, *alors la ligne polygonale a j côtés si* $b_{j-1} < b \leqslant b_j$ *(j = 2, . . . ,p) avec* $b_j = y_o + \alpha_{i_j}\alpha_{i_1} (1 + R_{12} + \ldots + R_{1j})/(\alpha_{i2} + \alpha_{i_1} R_{1j} + \cdots + \frac{\alpha_{i_1}\alpha_{i_j}}{\alpha_{i_{j-1}}} R_{1j-1})$ *où* $R_{kj} = L_{i_k i_j}$, *p côtés si* $b_p \leqslant b$ *et un côté si* $b \leqslant y_o + \alpha_{i_1} = b_1$.



De plus, quand $b > b_{p-1}$, *on a:* $y_{i_j} = (b - \alpha_{i_p})/(F^{(2q)}(\alpha_{i_j}))^{1/2q} U$

où $U = \sum_{j=1}^{p-1} (1 - (\alpha_{i_p}/\alpha_{i_j})) / (F^{(2q)}(\alpha_{i_j}))^{1/2q}$

et $t_{i_j} = y_{i_j}/\alpha_{i_j}$,

y_{i_j} *étant les paliers standard en y et* t_{i_j} *les temps standard correspondants.*

Démonstration: Montrons d'abord que les seuls moments où la solution y du problème P″ présente des mouvements de relaxation c'est quand la trajectoire T associée se trouve dans la ϵ-galaxie des trajectoires privilégiées

$$(w = 0, v = \alpha_{i_j}).$$

La démonstration de la proposition 3 montre que la trajectoire T ne peut que partir d'un point infiniment proche du point d'intersection I; elle reste sur une équipotentielle

$$w = (F(v) + k)^{1/2} \text{avec k i.p.}\,.$$

La composante en v du champ auquel T est soumise est i.g. sauf dans la ϵ-galaxie des trajectoires privilégiées

$$(w = 0, v = \alpha_i).$$

La solution y admet des sauts de vitesse.
Le long de ces trajectoires privilégiées, on a:

$$y(t) \simeq \alpha_i t + y(0).$$

En particulier,

$$t_{i_j} = y_{i_j}/\alpha_{i_j} .$$

Comme le déplacement en y est i.p. quand on saute d'une valeur $v = \alpha_i$ à une autre, pour calculer les y_i, il suffit donc d'intégrer v le long d'un voisinage standard de α_i, aussi petit que l'on veut. Vue la symétrie existante, on peut se restreindre à un voisinage $[\alpha_i, s]$ où s est un standard supérieur à α_i, aussi proche que l'on veut.

$$y_i = \epsilon \int_{\alpha_i}^{s} v dv/w \quad \text{car} \quad dy/dt = (\epsilon v/w)dv/dt.$$

D'où:

$$y_i = \epsilon \int_{\alpha_i}^{s} v dv/\sqrt{F(v) + k} \quad .$$

Soit le changement de variable sur $[\alpha_i^2, s^2]$:

$$\varphi(v) = \alpha_i^2 + (F(\sqrt{v}))^{1/2r}$$

avec 2r entier inférieur ou égal à l'ordre $2q_i$ de la racine α_i. On montre aisément que, si $v \simeq \alpha_i$, on a:

pour $r < q_i$ $\qquad 2v\varphi'(v^2) \simeq 0$

pour $r = q_i$ $\qquad 2v\varphi'(v^2) \simeq (F^{(2q_i)}(\alpha_i) / (2q_i)!)^{1/2q_i}$.

Posons:

$$\bar{y} = 2\epsilon \int_{\alpha_i}^{s} (v^2\varphi'(v^2) / \sqrt{F(v) + k})\, dv \quad .$$

Lemme: *Si $r < q_i$ alors $\bar{y} \simeq 0$, si $r = q_i$ alors* $\bar{y} \simeq y_i\, (F^{(2q_i)}(\alpha_i) / (2q_i)!\,)^{1/2q_i}$

En effet, le théorème des valeurs intermédiaires affirme:

$$\bar{y} = 2\xi\varphi'(\xi^2) y_i \qquad \text{avec } \xi \in]\alpha_i, s[.$$

Le lemme s'en déduit grâce au principe de permanence qui permet de choisir s infiniment proche de α_i.

En comparant les déplacements correspondant à des zéros de même ordre 2q, par changement de variable, on constate que le déplacement $\bar{y}$ de référence est le même. Par contre, si on compare un déplacement correspondant à un zéro d'ordre inférieur à 2 q aux déplacements précédents, il s'avère i.p.; donc les déplacements standard à considérer sont uniquement les y_{i_j} pour $j = 1, \ldots, p$.

Le lemme affirme:

$$y_{i_j} \simeq \left((2q)! \,/\, F^{(2q)}(\alpha_{i_j}) \right)^{1/2q} \bar{y} \,,$$

d'où:

$$t_{i_j} = t_{i_{j'}} (\alpha_{i_{j'}}/\alpha_{i_j}) L_{i_{j'} i_j} \;.$$

En posant $y' = v$ et en considérant l'équation

$$2\epsilon^2 v'' = f(v) \;,$$

les conditions aux limites (II) se traduisent par:

$$v(0) = v_o \text{ et } \textstyle\int_0^1 v(t)dt = b - y_o \;.$$

L'application des résultats du paragraphe 1 fournit les conclusions du théoréme en tenant compte des nouvelles conditions de proportionnalité entre les t_{i_j}.

Dans le cas $b > b_{p-1}$, nous obtenons une ligne polygonale à p côtés, le dernier côté ne correspondant pas exactement au temps t_{i_p} car on a:

$$t_{i_1} + \ldots + t_{i_p} > 1 \;.$$

Comme on impose $y(1) = b$, on a la condition:

$$\alpha_{i_1} t_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_{p-1}} t_{i_{p-1}} + (1 - (t_{i_1} + \ldots + t_{i_{p-1}}))\alpha_{i_p} = b \;.$$

D'où: $(1 - (\alpha_{i_p}/\alpha_{i_1}))y_{i_1} + \ldots + (1 - (\alpha_{i_p}/\alpha_{i_{p-1}}))y_{i_{p-1}} = b - \alpha_{i_p}$.

En passant à l'intégrale de référence, on obtient:

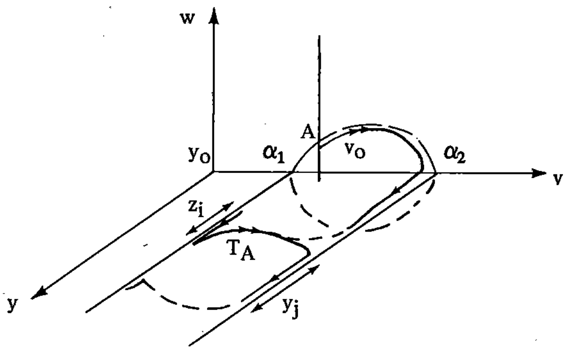
$$\bar{y} \simeq (b - \alpha_{i_p}) \,/\, (2q!)^{1/2q} U \;.$$

La forme des y_{i_j} s'en déduit et le théorème est démontré.

3. CAS OÙ LA SEPARATRICE EST UNE COURBE FERMEE:

Soit le problème aux limites P″ dans le cas où F, une primitive de f, admet deux zéros α_1 et α_2 d'ordre 2q, où, dans l'espace (y,v,w) avec $v = y'$ et $w = \epsilon y''$, la séparatrice $w^2 = F(v)$ a pour trace sur le plan (v,w) une courbe fermée et où

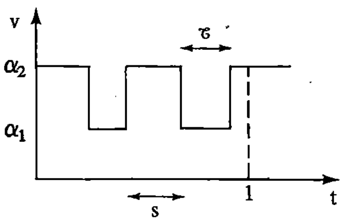
$$\alpha_1 \leqslant v_o \leqslant \alpha_2 .$$



Proposition: *Le problème P″ admet une solution y pourvu que l'on ait:*

$$\alpha_1 \leqslant b \leqslant \alpha_2 .$$

La courbe des vitesses de la solution y a pour ombre:



avec $\tau = (\alpha_2 - b) / n(\alpha_2 - \alpha_1)$ et $s = A\tau$ où
$A = (F^{(2q)}(\alpha_1) / F^{(2q)}(\alpha_2))^{1/2q}(\alpha_1/\alpha_2)$,

si le dernier palier se situe le long de la droite $v = \alpha_2$ *(n étant le nombre minimum de paliers de même hauteur), et*

$$s = (b - \alpha_1)/n(\alpha_2 - \alpha_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{T} = s/A$$

si le dernier palier se situe le long de la droite $v = \alpha_1$.

Démonstration: Le problème aux limites P″ admet une solution: pour cela, on utilise la méthode du "shooting" comme précédemment. La trajectoire T_A, correspondant à la solution du problème, part d'un point de la droite ($y = y_o$, $v = v_o$) infiniment proche du point d'intersection de la droite avec la séparatrice

$$w^2 = F(v).$$

Elle longe alternativement les droites ($w = 0$, $v = \alpha_1$) et ($w = 0$, $v = \alpha_2$), les sauts en v se déroulant périodiquement. Comme le déplacement est presque le même le long des droites, les paliers z_i correspondant à la première droite et y_j à la seconde sont respectivement de même longueur standard r et u, et les valeurs standard t_j et $\mathcal{T}_i$ des temps mis respectivement à parcourir y_j et z_i vérifient:

$$t_1 = \ldots = t_p = s \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_1 = \ldots = \mathcal{T}_n = \mathcal{T}.$$

premier cas: le dernier palier se trouve le long de la droite ($w = 0$, $v = \alpha_2$).

On a: $r = \alpha_1\mathcal{T}$ et $u = \alpha_2 s$.

Comme le dernier palier risque de ne pas être parcouru en entier, on a:

$$(p-1)\alpha_2 s + n\alpha_1\mathcal{T} + \alpha_2(1-(p-1)s-n\mathcal{T}) = b.$$

D'où: $\quad n(\alpha_1 - \alpha_2)\mathcal{T} + \alpha_2 = b$,

et on en déduit la valeur de $\mathcal{T}$.

Il est à noter que les cas $p = n$ et $p = n-1$ donnent le même résultat.

En utilisant l'intégrale de comparaison $\bar{y}$, nous savons que:

$$u \simeq (2q!/F^{(2q)}(\alpha_2))^{1/2q}\bar{y}$$

et

$$r \simeq (2q!/F^{(2q)}(\alpha_1))^{1/2q}\bar{y}.$$

Comme $r = \alpha_1\mathcal{T}$, on en déduit:

$$u = (F^{(2q)}(\alpha_1)/F^{(2q)}(\alpha_2))^{1/2q}\alpha_1\mathcal{T}$$

et la valeur de s.

deuxième cas: le dernier palier se trouve le long de la droite ($w = 0$, $v = \alpha_1$).

On a:

$$p\,\alpha_2\, s + (n-1)\alpha_1 \mathcal{T} + \alpha_1(1-ps-(n-1)\mathcal{T}) = b\ .$$

D'où: $$p(\alpha_2 - \alpha_1)\, s + \alpha_1 = b\ .$$

Comme n est le nombre minimum de paliers de même hauteur, on a forcément $n = p$ et le résultat annoncé pour s.

Les mêmes remarques que précédemment permettent de calculer $\mathcal{T}$.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Lutz R. - Goze M.: Non Standard Analysis, a practical guide with applications, Lectures Notes in Math. N° 881, Springer-Verlag (1981).

(2) Lutz R. – Sari T.: sur le comportement asymptotique des solutions dans un problème aux limites non linéaire, C.R.Acad. Sc. Paris t. 292 (1^{er} Juin 1981) série I p 925-928.

Bebbouchi Rachid
Institut de Mathématiques
Université d'Oran-Es-Sénia
Oran .