SOBRE ESTRUCTURAS UNIFORMES GENERALIZADAS

por

JOSE M. GRACIA, VICTOR M. ONIEVA Y JAVIER RUIZ

ABSTRACT

D.W. Curtis and J.C. Mathews [2], [8] have introduced some structures which generalize, to the product of two sets, structures of usual uniform types. However, their axiomatic is not very natural and, in general, it makes no reference to filters. J.M. Gracia and V.M. Onieva [7] introduce an axiomatic inspired in Curtis' and Mathews', which reflects the generalization in a natural way, presenting the estructures of the first authors within their framework.

In this note, we essentially caracterize the topologies which are compatible with the structures of [7] and we examine the regularity axioms of A.S. Davis [3] in relation with these structures, refining or completing several results of [2], [8].

(AMS Subject Classification: 54 E 15)

INTRODUCCION

En todo lo que sigue. A,B denotarán conjuntos no vacíos, $F \subset A \times B$ una multifunción sobre fija, F_A, F_B sus núcleos inicial y final, es decir, las equivalencias en A, B canónicamente asociadas a F. Nótese que F^{-1} tiene F_B, F_A como núcleos inicial y final.

Dados $U, V \subset A \times B$, $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U \circledF V := U \circ F^{-1} \circ V$$

$$U_{-1} := F \circ U^{-1} \circ F, \qquad U_{-n} := (U_{-(n-1)})_{-1}.$$

U es F-ampliado si $U = U_{-2}$. y es F-conector si $F \subset U$.

La F-composición Ⓕ y la noción de F-inverso U_{-1} permiten definir de modo análogo al usual F-transitividad, F-simetría, etc.

Usaremos también notaciones de significado claro. Así, entre otras, para $\mathcal{U} = \{ U_i \subset A \times B \mid i \in I \}$, escribiremos

$$F^{-1} \circ \mathcal{U} := \{ F^{-1} \circ U \mid U \in \mathcal{U} \} , \qquad \mathcal{U}_{-n} := \{ U_{-n} \mid U \in \mathcal{U} \} .$$

En [7], reemplazando en los axiomas de las estructuras cuasiuniformes y uniformes los términos conector, composición e inverso, respectivamente por F-conector, F-composición y F-inverso, se definen de manera natural las F-cuasiuniformidades y F-uniformidades, así como sus bases. Se prueba que toda F-cuasiuniformidad (F-uniformidad) posee una base F-ampliada (F-simétrica), es decir, una base de F-conectores F-ampliados (F-simétricos), resultado importante que permite situar en este contexto natural las "cuasiuniformidades" y "F-uniformidades" consideradas en [2], [8], que son, respectivamente, las bases F-ampliadas de todos los F-conectores F-ampliados de las F-cuasiuniformidades y F-uniformidades de [7], denominadas aquí bases canónicas. Interesa destacar que la base canónica de una F-uniformidad contiene la base F-simétrica de todos los F-conectores F-simétricos, pero no es necesariamente una base F-simétrica.

Por otra parte, dada una F-(cuasi)uniformidad $\mathcal{U}$, son $F^{-1} \circ \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \circ F^{-1}$ bases de (cuasi)uniformidades $\mathcal{U}_A, \mathcal{U}_B$ en A, B respectivamente. Toda (cuasi)-uniformidad $\mathcal{A}$ en A, o $\mathcal{B}$ en B, que deriva en la forma indicada de una F-(cuasi)uniformidad se dirá F-(cuasi)uniformizable, y este mismo calificativo se aplicará al par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ derivan de dicha forma de una misma F-(cuasi)uniformidad. Caracterizaciones de la F-(cuasi)uniformizabilidad son dadas en [7], donde se prueba también que no existen pares F-cuasiuniformizables formados por una uniformidad y una cuasiuniformidad estricta, es decir, no uniformidad.

Nos proponemos en esta nota caracterizar las topologías en A, o en B, y los pares de topologías, una en A y otra en B, que son F-(cuasi)uniformizables, es decir, inducidas por alguna F-(cuasi)uniformidad a través de sus (cuasi)uniformidades asociadas. Tal F-(cuasi)uniformidad se dirá compatible con la topología en A o en B, o con el par, según sea el caso. También son estudiadas las F-cuasiuniformidades en relación con los axiomas de regularidad de A.S. Davis [3].

Con fines de referencia abreviada posterior, enunciamos la propiedad trivial siguiente:

(a) Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ F-cuasiuniformidades en A x B. Se tiene:

$$\mathcal{U}_A \subset \mathcal{V}_A \iff \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \iff \mathcal{U}_B \subset \mathcal{V}_B .$$

Teorema 1

Sean $(A, \mathcal{T}_A)$, $(B, \mathcal{T}_B)$ *espacios topológicos. Entonces:*

1. *Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{T}_A$ *es F-cuasiuniformizable.*

(ii) *Si* $(x,y) \in F$, *entonces* $\overline{\{x\}} = \overline{F^{-1}(y)}$.

(iii) $F^{-1} \circ F(G) = G$ *para todo* $G \in \mathcal{T}_A$.

En este caso, toda cuasiuniformidad en A compatible con $\mathcal{T}_A$ *es F-cuasiuniformizable.*

2. *Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{T}_B$ *es F-cuasiuniformizable.*

(ii) *Si* $(x,y) \in F$, *entonces* $\overline{\{y\}} = \overline{F(x)}$.

(iii) $F \circ F^{-1}(H) = H$ *para todo* $H \in \mathcal{T}_B$.

En este caso, toda cuasiuniformidad en B compatible con $\mathcal{T}_B$ *es F-cuasiuniformizable.*

3. *El par* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ *es F-cuasiuniformizable si y sólo si se verifican las tres condiciones siguientes:*

(o) *Si* $(x,y) \in F$, *entonces* $\overline{\{x\}} = \overline{F^{-1}(y)}$, $\overline{\{y\}} = \overline{F(x)}$.

(oo) $F(G) \in \mathcal{T}_B$ *para todo* $G \in \mathcal{T}_A$.

(ooo) $F^{-1}(H) \in \mathcal{T}_A$ *para todo* $H \in \mathcal{T}_B$.

En este caso, cuasiuniformidades en A (en B) compatibles con $\mathcal{T}_A$ *(con* $\mathcal{T}_B$*) derivan de F-cuasiuniformidades en A x B tales que las cuasiuniformidades inducidas en B (en A) son compatibles, o equivalentemente, toda F-cuasiuniformidad compatible con una de las topologías del par es compatible con el par.*

Demostración

1. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sea $\mathcal{U}$ una F-cuasiuniformidad compatible con $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{B}$ una base F-ampliada de $\mathcal{U}$, $(x,y) \subset F$ y $a \in F^{-1}(y)$. Para todo $U \in \mathcal{B}$ es $x \in F^{-1}(y) \subset F^{-1} \circ U(a)$, luego $a \in \overline{\{x\}}$, lo que prueba que $\overline{\{x\}} = \overline{F^{-1}(y)}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sean $x \in G \in \mathcal{T}_A$, $a \in F^{-1} \circ F(x)$. Existe $b \in B$ tal que (x,b), $(a,b) \in F$, de donde por (ii) es $\overline{\{x\}} = \overline{\{a\}}$. De aquí que $a \in G$, y así $F^{-1} \circ F(x) \subset G$.

5

(iii) ==> (i): Para cada $G \in \mathcal{T}_A$ definimos

$$S_G = (G \times F(G)) \cup ((A - G) \times B).$$

En forma análoga al caso de las cuasiuniformidades [10], o como se procede en [2], [8] con los conjuntos $(A \times F(G)) \cup ((A - G) \times B)$, se comprueba que la familia de los S_G es una subbase de una F-cuasiuniformidad F-transitiva en A x B tal que $\mathcal{T}(\mathcal{U}_A) = \mathcal{T}_A$.

Supongamos ahora verificadas las condiciones anteriores. Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ respectivamente una F-cuasiuniformidad en A x B y una cuasiuniformidad en A compatibles con $\mathcal{T}_A$, luego $\mathcal{U}_A(x)$ y $\mathcal{A}(x)$ son bases equivalentes de $\mathcal{T}_A$- entornos de $x \in A$. Entonces, para cada $V_A \in \mathcal{A}$ y cada $x \in A$ exista un conector $U_{Ax} \in \mathcal{U}_A$ tal que $F^{-1} \circ F(x) \subset U_{Ax}(x) \subset V_A(x)$, luego $F^{-1} \circ F \subset V_A$ para todo $V_A \in \mathcal{A}$, lo cual caracteriza la F-cuasiuniformizabilidad de $\mathcal{A}$, [7].

2. Razonamiento análogo al de 1, con modificaciones obvias.

3. Sea $\mathcal{U}$ una F-cuasiuniformidad en A x B cuyo par asociado es $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$. En virtud de lo anterior se verifica (o).

Por otra parte, dados $G \in \mathcal{T}_A$, $y \in F(G)$, sea $x \in G$ tal que $y \in F(x)$. Como una base de $\mathcal{T}_A$-entornos de x es $F^{-1} \circ \mathcal{U} \circ F^{-1} \circ F(x)$ y G es $\mathcal{T}_A$-abierto, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$F^{-1} \circ U \circ F^{-1}(y) \subset F^{-1} \circ U \circ F^{-1} \circ F(x) \subset G,$$

luego

$$F \circ F^{-1} \circ U \circ F^{-1}(y) \subset F(G),$$

lo que prueba que $F(G) \in \mathcal{T}_B$ pues $F \circ (F^{-1} \circ \mathcal{U}) \circ F^{-1}$ es una base de $\mathcal{U}_B$. Así, se verifica (oo); y de forma análoga (ooo).

Para el recíproco véase [2], th. 1.1.

Supongamos ahora $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ F-cuasiuniformizable, y sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ F-cuasiuniformidades compatibles respectivamente con $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ y $\mathcal{T}_A$. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases F-ampliadas de $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$; entonces, $\mathcal{A} := F^{-1} \circ \mathcal{B}$ y $\mathcal{A}' := F^{-1} \circ \mathcal{B}'$ son bases de $\mathcal{U}_A, \mathcal{U}'_A$ tales que para $(x,y) \in F$, $U_A \in \mathcal{A}$, $U'_A \in \mathcal{A}'$ se tiene $U_A(x) = U_A \circ F^{-1}(y)$, $U'_A(x) = U'_A \circ F^{-1}(y)$.

En estas condiciones, sean $y \in B$, $x \in F^{-1}(y)$. La compatibilidad de $\mathcal{U}_A$, $\mathcal{U}'_A$ con $\mathcal{T}_A$ asegura que son equivalentes las bases $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A} \circ F^{-1}(y)$ y $\mathcal{A}'(x) = \mathcal{A}' \circ F^{-1}(y)$, luego son también equivalentes las bases $F \circ \mathcal{A} \circ F^{-1}(y)$ y $F \circ \mathcal{A}' \circ F^{-1}(y)$, que, respectivamente, son bases de entornos de $y \in B$ en $\mathcal{T}_B$ y $\mathcal{T}(\mathcal{U}'_B)$. Así, $\mathcal{T}(\mathcal{U}'_B) = \mathcal{T}_B$, y $\mathcal{U}'$ es compatible con el par $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$.

Corolario

Sean $(A, \mathcal{T}_A)$, $(B, \mathcal{T}_B)$ *espacios topológicos tales que* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ *es F-cuasiuniformizable,* $\mathcal{U}$ *una F-cuasiuniformidad en A x B compatible. Tenemos:*

(i) *Existe una F-cuasiuniformidad más fina compatible con* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$. *Además, son equivalentes las propiedades siguientes:*

(i-1) $\mathcal{U}$ *es la F-cuasiuniformidad más fina compatible.*

(i-2) $\mathcal{U}_A$ *es la cuasiuniformidad más fina compatible con* $\mathcal{T}_A$.

(i-3) $\mathcal{U}_B$ *es la cuasiuniformidad más fina compatible con* $\mathcal{T}_B$.

(ii) *Existe una F-cuasiuniformidad F-transitiva más fina compatible con* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$. *Además, son equivalentes:*

(ii-1) $\mathcal{U}$ *es la F-cuasiuniformidad F-transitiva más fina compatible con* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$.

(ii-2) $\mathcal{U}_A$ *es la cuasiuniformidad transitiva más fina compatible con* $\mathcal{T}_A$.

(ii-3) $\mathcal{U}_B$ *es la cuasiuniformidad transitiva más fina compatible con* $\mathcal{T}_B$.

(iii) *Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(iii-1) *El par* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ *es F-transitivo, es decir, la F-cuasiuniformidad más fina compatible es exactamente la F-transitiva más fina compatible.*

(iii-2) $(A, \mathcal{T}_A)$ *es un espacio transitivo.*

(iii-3) $(B, \mathcal{T}_B)$ *es un espacio transitivo.*

Demostración

En virtud de (a) es inmediata a partir del teorema anterior, teniendo en cuenta que toda topología posee una cuasiuniformidad compatible más fina y una cuasiuniformidad transitiva compatible más fina.

&&&

En el resultado siguiente investigamos la F-uniformizabilidad de pares $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ F-cuasiuniformizables, es decir, la existencia de una F-uniformidad compatible. Es de notar que la equivalencia de las condiciones (ii) a (iv) del teorema siguiente, figura en esencia en [8], [2] donde se da una demostración distinta.

Teorema 2

Sean $(A, \mathcal{T}_A)$, $(B, \mathcal{T}_B)$ *espacios topológicos tales que el par* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ *es F-cuasiuniformizable,* $\mathcal{U}$ *una F-cuasiuniformidad en A x B compatible. Son equivalentes:*

(i) $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ *es Fauniformizable.*

(ii) $(A, \mathcal{T}_A)$ *es completamente regular.*

(iii) $(B, \mathcal{T}_B)$ *es completamente regular.*

(iv) $(F, \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B \mid F)$ *es completamente regular.*

(v) $(F_A, \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_A \mid F_A)$ *es completamente regular.*

(vi) $(F_B, \mathcal{T}_B \times \mathcal{T}_B \mid F_B)$ *es completamente regular.*

En este caso existe una F-uniformidad más fina compatible con el par, y son propiedades equivalentes las siguientes:

(o) $\mathcal{U}$ *es la F-uniformidad más fina compatible con* $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$.

(oo) $\mathcal{U}_A$ *es la uniformidad más fina compatible con* $\mathcal{T}_A$.

(ooo) $\mathcal{U}_B$ *es la uniformidad más fina compatible con* $\mathcal{T}_B$.

Demostración

(i) ==> (ii), (i) ==> (iii): Basta observar que una F-uniformidad compatible con $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ induce uniformidades compatibles en los espacios respectivos.

(ii) ==> (i), (iii) ==> (i): Basta notar que para topologías F-cuasiuniformizables, la uniformizabilidad equivale a derivar de una F-uniformidad [7], necesariamente compatible con $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$ por el teorema anterior.

(i) ==> (iv): Consecuencia inmediata de ser la regularidad completa una propiedad productiva y hereditaria.

(iv) ==> (ii): Dado $x \in A$, sean $y \in F(x)$. $\mathcal{K}$ una base F-ampliada de F-cuasiuniformidad compatible con $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_B)$, $U \in \mathcal{K}$. Entonces $F^{-1} \circ \mathcal{K}(x)$ es una base de $\mathcal{T}_A$-entornos de x. y $U(x) = U \circ F^{-1}(y)$, luego el conjunto $((F^{-1} \circ U(x)) \times U(x)) \cap F$ es entorno de $(x,y) \in F$ en $\mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B \mid F$, cuyo complementario en F es $[((F^{-1} \circ U(x))^C \times B) \cap F] \cup [(A \times U(x)^C) \cap F]$. Por (iv), existe una función continua $f_p: F \dashrightarrow [0,1]$ tal que

$$f_p(x,y) = 0,\ f_p[((F^{-1} \circ U(x))^C \times B) \cap F] \equiv 1,\ f_p[(A \times U(x)^C) \cap f] \doteq 1.$$

Ahora, por el axioma de elección, elegimos para cada $a \subset A$ un $y_a \in F(a)$ de forma tal que $y_x = y$. Entonces, la función

$$\varphi: a \subset A \dashrightarrow \varphi(a) := (a, y_a) \in F$$

es continua. En efecto, dado $a \in A$, un entorno básico de $(a,y_a) \subset F$ en la topología inducida en F por $\mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B$, es de la forma $((F^{-1} \circ V(a)) \times V(a)) \cap F$ con

$V \in \mathcal{K}$; considerando el $\mathcal{T}_A$-entorno $F^{-1} \circ V(a)$ de $a \in A$, tenemos para cada $a' \in F^{-1} \circ V(a)$

$$y_{a'} \in F(a') \subset F \circ F^{-1} \circ V(a) = V(a),$$

es decir, $(a', y_{a'}) \in ((F^{-1} \circ V(a)) \times V(a)) \cap F$, luego φ es continua.

En estas condiciones, la función $f_p \circ \varphi$: $A \dashrightarrow [0,1]$ es continua y verifica $f_p(\varphi(x)) = 0$ y

$$f_p[\varphi(F^{-1} \circ U(x))^C] \subset f_p[((F^{-1} \circ U(x))^C \times B) \cap F] = 1.$$

Por tanto, $(A, \mathcal{T}_A)$ es completamente regular.

(ii) ==> (v), (iii) ==> (vi): Basta notar que la regularidad completa es productiva y hereditaria.

(v) ==> (ii): Dado $x \in A$, sea $U_A(x)$ un $\mathcal{T}_A$-entorno de x. Entonces $(U_A(x) \times U_A(x)) \cap F_A$ es entorno de $(x,x) \in F_A$ en la topología $\mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_A \mid F_A$; en virtud de (v), existe una función f_p: $F_A \dashrightarrow [0,1]$ continua tal que

$$f_p(x,x) = 0, \qquad f_p[(U_A(x) \times U_A(x))^C \cap F_A] = 1.$$

Ahora bien, la función φ: $a \in A \dashrightarrow \varphi(a) := (a,a) \in F_A$ es evidentemente continua, luego la función $f := f_p \circ \varphi$: $A \dashrightarrow [0,1]$ es continua y verifica

$$f(x) = 0, \qquad f(U_A(x)^C) \subset f_p[(U_A(x)^C \times A) \cap F_A] = 1.$$

La implicación (vi) ==> (iii) es análoga.

Por otra parte, la equivalencia de (o)-(ooo) es de simple deducción a partir del teorema anterior y de (a). Entonces, se sigue la existencia de una F-uniformidad compatible con el par, más fina, teniendo también en cuenta que toda topología uniformizable admite una uniformidad compatible más fina.

&&&

En la proposición siguiente investigamos los axiomas de regularidad R_0, R_1, R_2 de A.S. Davis [3] (R_2 es la regularidad usual) en el contexto de los espacios F-cuasiuniformes, obteniendo caracterizaciones análogas a las de la regularidad completa. Previamente recordaremos dos definiciones y probaremos un lema simple referente a pares F-cuasiuniformizables de topologías.

Sea $(x, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que es R_1 si y sólo si para todo par de puntos con clausuras distintas existen entornos disjuntos. Y se dice que es R_0, o esencialmente T_1 para algunos autores, si y sólo si verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) $x \in G \in \mathcal{T} \Longrightarrow \{\overline{x}\} \subset G$.

(2) Para todo cerrado S y todo punto $x \notin S$, existe un entorno V de S tal que $x \notin V$.

(3) Para cada dos puntos distintos, sus clausuras o coinciden o son disjuntas.

Lema

Sean $(A,\mathcal{T}_A)$, $(B,\mathcal{T}_B)$ *espacios topológicos tales que el par* $(\mathcal{T}_A,\mathcal{T}_B)$ *es F-cuasiuniformizable. Dados* $S \subset A$, $T \subset B$, $(a,b) \in F$, *se tiene*

$$F(\overline{S}) = \overline{(F(S)}, \quad F^{-1}(\overline{T}) = \overline{F^{-1}(T)}, \quad F(\{\overline{a}\}) = \{\overline{b}\}, \quad \overline{F^{-1}(\{b\})} = \{\overline{a}\}.$$

Demostración

En primer lugar, dado $G \in \mathcal{T}_A$ es $F(G^C) \cup F(G) = B$, y si existe un elemento $y \in F(G^C) \cap F(G)$, es obvio que $F^{-1}(y) \subset G \cap G^C$, absurdo. Así, $F(G^C) = F(G)^C$ lo que asegura que F transforma $\mathcal{T}_A$-cerrados en $\mathcal{T}_B$-cerrados.

En estas condiciones, $F(\overline{S})$ es $\mathcal{T}_B$-cerrado tal que $F(\overline{S}) \supset \overline{F(S)}$. Por otra parte, sean $y \in F(\overline{S})$, $x \in \overline{S}$ tal que $y \in F(x)$, $x \in G \in \mathcal{T}_A$. Entonces, se tiene $y \in F(G) \in \mathcal{T}_B$, $F(G) \cap F(S) \neq \emptyset$; ahora bien, por ser el par $(\mathcal{T}_A,\mathcal{T}_B)$ F-cuasiuniformizable se sigue del teorema 1 anterior que $\mathcal{T}_B = \left\{F(G) \mid G \in \mathcal{T}_A\right\}$, y desde luego también $\mathcal{T}_A = \left\{F^{-1}(H) \quad H \in \mathcal{T}_B\right\}$. Por tanto, $y \in \overline{F(S)}$, y de aquí que $F(\overline{S}) = \overline{F(S)}$.

Por lo anterior, y en virtud del teorema 1, se tiene $F(\{\overline{a}\}) = \overline{F(a)} = \{\overline{b}\}$.

Finalmente, un razonamiento semejante con modificaciones simples prueba las restantes afirmaciones del lema.

&&&

Teorema 3

Sean los espacios topológicos $X_1 = (A,\mathcal{T}_A)$, $X_2 = (B,\mathcal{T}_B)$ *tales que el par* $(\mathcal{T}_A,\mathcal{T}_B)$ *es F-cuasiuniformizable, y consideremos también los espacios* $X_3 = (F, \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_B \mid F)$, $X_4 = (F_A,\mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_A \mid F_A)$, $X_5 = (F_B,\mathcal{T}_B \times \mathcal{T}_B \mid F_B)$. *Entonces, ik si y sólo si jk, donde i,j = 1,2,3,4,5, k = 0,1,2, e ik denota abreviadamente la propiedad* "X_i *es espacio* R_k".

Demostración

(1º) ik $\Longleftrightarrow$ jk (i,j = 1,2,3; k = 0,1,2).

Las equivalencias con k = 0,2, esencialmente figuran en [8], o más detalladamente en [2]. 21 $\Longrightarrow$ 11 se deduce como 11 $\Longrightarrow$ 21 con modificaciones simples. 11 $\Longrightarrow$ 31 se sigue de 11 $\Longrightarrow$ 21 y de que R_1 es productiva y hereditaria según se comprueba fácilmente. Basta pues probar las implicaciones 11 $\Longrightarrow$ 21 y 31 $\Longrightarrow$ 11.

11 $\Longrightarrow$ 21: Dados $b,y \in B$, $\{\bar{b}\} \neq \{\bar{y}\}$, sean $a,x \in A$, $(a,b), (x,y) \in F$; como $F(\{\bar{a}\}) = \{\bar{b}\}$, $F(\{\bar{x}\}) = \{\bar{y}\}$, es $\{\bar{a}\} \neq \{\bar{x}\}$. Entonces, por 11, dada una base F-ampliada $\mathcal{H}$ de F-cuasiunifomidad compatible con el par, existen $U, V \in \mathcal{H}$ tales que $F^{-1} \circ U(x) \cap F^{-1} \circ V(a) = \emptyset$, de donde por el carácter F-ampliado de U, V deducimos

$$F^{-1} \circ (U \circ F^{-1}(y) \cap V \circ F^{-1}(b)) \subset F^{-1} \circ U(x) \cap F^{-1} \circ V(a) = \emptyset,$$

y de aquí $U \circ F^{-1}(y) \cap V \circ F^{-1}(b) = \emptyset$, es decir, y,b poseen entornos disjuntos, lo que prueba 21.

31 $\Longrightarrow$ 11: Sean $x, a \in A$, $\{\bar{x}\} \neq \{\bar{a}\}$, $y,b \in B$, $(x,y), (a,b) \in F$. Puesto que $x' \in \{\bar{x}\}$, $a' \in \{\bar{a}\}$ implican $F(x') \subset F(\{\bar{x}\}) = \{\bar{y}\}$, $F(a') \subset F(\{\bar{a}\}) = \{\bar{b}\}$, se tiene

$$\overline{(x,y)}_F = \overline{(x,y)} \cap F = (\{\bar{x}\} \times \{\bar{y}\}) \cap F = \bigcup_{x' \in \{\bar{x}\}} (x', F(x')),$$

e igualmente $\overline{(a,b)}_F = \bigcup_{a' \in \{\bar{a}\}} (a', F(a'))$, luego $\overline{(x,y)}_F \neq \overline{(a,b)}_F$.

Consideremos ahora una base F-ampliada $\mathcal{H}$ de F-cuasiuniformidad compatible con el par. Por 31 existen $U,V \in \mathcal{H}$ tales que

$$(*) \quad [(F^{-1} \circ U(x)) \times (U \circ F^{-1}(y))] \cap F \cap [(F^{-1} \circ V(a)) \times (V \circ F^{-1}(b))] = \emptyset,$$

de donde $F^{-1} \circ U(x) \cap F^{-1} \circ V(a) = \emptyset$, pues si existe $a' \in F^{-1} \circ U(x) \cap F^{-1} \circ V(a)$, el carácter F-ampliado de U,V implica $F(a') \subset U \circ F^{-1}(y)$ y $F(a') \subset V \circ F^{-1}(b)$, lo que contradice (*). Así, se tiene 11.

(2º) 1k $\Longleftrightarrow$ 4k; 2k $\Longleftrightarrow$ 5k (k = 0,1,2).

Para 2k $\Longleftrightarrow$ 5k se procede como haremos con 1k $\Longleftrightarrow$ 4k, con modificaciones obvias. Además, 1k $\Longrightarrow$ 4k es evidente por ser R_k productiva y hereditaria. Basta, pues, probar 4k $\Longrightarrow$ 1k (k = 0,1,2).

40 $\Longrightarrow$ 10: Sean $a,x \in A$, $a \neq x$, luego $(a,a) \neq (x,x)$. Por 40 se tiene $\overline{(a,a)}_{F_A} = \overline{(x,x)}_{F_A}$ ó $\overline{(a,a)}_{F_A} \cap \overline{(x,x)}_{F_A} = \emptyset$.

En el primer caso se verifica $(\{\bar{a}\} \times \{\bar{a}\}) \cap F_A = (\{\bar{x}\} \times \{\bar{x}\}) \cap F_A$; entonces, si $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{a}\} \neq \emptyset$ y existe $a' \in \{\bar{a}\} \quad \{\bar{x}\}$ (análogamente si $a' \in \{\bar{x}\} \quad \{\bar{a}\}$), tenemos $F_A(a') \subset F^{-1}$ o $F(a') \subset \{\bar{a}\}$, $F_A(a') \subset F^{-1}$ o $F(a') \subset \{\bar{x}\}^C$, contradicción con la hipótesis del caso. Luego $\{\bar{a}\} = \{\bar{x}\}$ ó $\{\bar{a}\} \cap \{\bar{x}\} = \emptyset$.

En el segundo caso, es $(\{\bar{a}\} \times \{\bar{a}\}) \cap F_A \cap (\{\bar{x}\} \times \{\bar{x}\}) = \emptyset$, y si existe $a' \in \{\bar{a}\} \cap \{\bar{x}\}$, será $(a', F_A(a')) \subset (\{\bar{a}\} \times \{\bar{a}\}) \cap F_A \cap (\{\bar{x}\} \times \{\bar{x}\})$, contradicción; luego $\{\bar{a}\} \cap \{\bar{x}\} = \emptyset$. Esto completa la verificación de 10.

41 ==> 11: Se procede como en la demostración de 31 ==> 11, con modificaciones evidentes.

42 ==> 12: Sean $x \in A$, $S \subset A$ $\mathcal{T}_A$-cerrado, $x \notin S$, luego $(x,x) \notin (S \times S) \cap F_A$. Por 42. existen $H_1, H_2 \in \mathcal{T}_A \times \mathcal{T}_A$ tales que $H_1 \cap H_2 \cap F_A = \emptyset$, $(x,x) \in H_1 \cap F_A$, $F_A \cap (S \times S) \subset H_2 \cap F_A$; luego también existen $G_x, G_a \in \mathcal{T}_A$ con $a \in S$ tales que

$$(x,x) \in (G_x \times G_x) \cap F_A \subset H_1 \cap F_A. \quad (a, F_A(a)) \subset (G_a \times G_a) \cap F_A \subset H_2 \cap F_A.$$

Entonces, los conjuntos $\mathcal{T}_A$-abiertos G_x y $G := \bigcup_{a \in S} G_a$ son tales que $x \in G_x$, $S \subset G$, $G_x \cap G = \emptyset$. Así, se verifica 12.

&&&

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUMMER, G.C.L. "Initial quasi-uniformities". Indag. Math. 31, 1969, 403-409.

[2] CURTIS, D.W. MATHEWS, J.C. "Generalized uniformities for pairs of spaces".– Topology Conference, Arizona State Univ., 1967.

[3] DAVIS, A.S. "Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces".– Amer. Math. Montly 68, 1961, 886-893.

[4] FLETCHER, P. "Quasi-uniformities with a transitive base". Pacific J. Math. 40, 1972, 619-631.

[5] FLETCHER, P. LINDGREN, W.F. "Transitive quasi-uniformities". Journal Math. Anal. and Appl. 39, 1972, 397-405.

[6] GRACIA, J.M. "Nuevos aspectos de la teoría de multifunciones: Estructuras relacionales". - Tesis doctoral, Univ. de Zaragoza, 1979.

[7] GRACIA, J.M. ONIEVA, V.M. "Sobre estructuras preuniformes y uniformes generalizadas". Actas VI Jornadas de Matemáticas Hispano-Lusas, Santander 1979; Revista de la Universidad de Santander 2, 1979, 521-547.

[8] MATHEWS, J.C. "Relatively contractive relations in pairs of generalized uniform spaces". Journal London Math. Soc. 44, 1969, 100-106.

[9] MURDESHWAR, M.G. "Quasi-uniform topological spaces". Sijthoff & Noordhoff, 1966.

[10] PERVIN, W.J. "Quasi-uniformization of topological spaces". Math. Ann. 150, 1963, 316-317.