IL TENSORE DI CURVATURA-TORSIONE DI CARTAN E LA RELATIVITA' GENERALE PROIETTIVA

per

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma) (°)

1. GRAVITAZIONE, MATERIA IPERDENSA, COSMOLOGIA

Poiché, per materia iperdensa ed alte energie, la teoria della gravitazione di Einstein porta ai Buchi Neri ed alle loro singolarità, sorge il problema di vedere se essa vale ancora in tali condizioni estreme. Infatti, anche la teoria di Newton non vale più alle alte velocità a per campi gravitazionali intensi.

Purtroppo, la via da seguire per perfezionare la teoria di Einstein, é indeterminata, e così come accadeva per il problema cosmologico, sono possibili molte teorie, tra le quali é poi difficile fare una scelta, a causa delle difficoltà di una loro verifica sperimentale. Ne ricordiamo alcune delle più interessanti:

a) *La teoria bimetrica di N. Rosen,* che é stata sviluppata a partire dal 1940, e poi ripresa in questi ultimi anni [1]. Essa introduce una metrica euclidea fissa (background), alla quale si sovrappone una metrica riemanniana, dipendente dalla distribuzione locale di materia-energia. Nella "teoria bimetrica" che così si ottiene, vengono eliminate le singolarità dei Buchi Neri. In una versione più recente della teoria, la metrica fissa (euclidea) viene sostituita dalla metrica dell'Universo di De Sitter a curvatura costante, e per tale via si può affrontare su nuove basi la problematica cosmologica. Più recentemente, la teoria bimetrica é stata rielaborata, a partire dal principio di Mach, da R. Goldoni [2].

b) *La teoria della inerzia-gravità di A. Quale.* Nella relatività generale, la geometria dello spazio-tempo coincide con il campo gravitazionale, e quindi non c'é alcun substrato al quale riferirsi, per definire le varie grandezze fisiche, come le onde, l'energia, il momento lineare ed angolare. Si può allora avanzare

(°) Lavoro eseguito nell'ambito del GNFM del CNR.

l'idea che la struttura geometrica dello spazio-tempo di Riemann, si possa decomporre in due parti, e cioé in una struttura geometrica fissa (inerzia) ed in una variabile (gravità), secondo lo schema:

Gravitazione = Inerzia + Gravità

Questo significa che il campo gravitazionale é scomponibile in un campo di inerzia ed in uno di gravità. La prima parte può essere determinata mediante considerazioni cosmologiche, per esempio in base al principio di Mach, e risulta indipendente dalle proprietà locali. Ad essa corrisponde una struttura geometrica fissa, che ammette un gruppo di movimenti in sé. Invece la seconda parte viene a dipendere dalle interazioni dinamiche locali, ed é legata ai potenziali gravitazionali.

Però, in virtù del principio di equivalenza di Einstein, localmente non si possono distinguere gli effetti inerziali da quelli gravitazionali. Per tale via si può costruire una nuova versione della relatività generale, in grado di superare le varie difficoltà [3].

c) *La teoria tensoriale-scalare di C. Brans-R.H. Dicke,* proposta nel 1961, e nella quale la teoria della gravitazione di Einstein viene ampliata aggiungendo ai 10 potenziali un nuovo potenziale gravitazionale scalare. Esso viene intepretato fisicamente come la costante gravitazionale, che viene supposta variabile, e legata alla struttura dell'Universo su scala cosmica [4]. Otteniamo in tal modo una nuova teoria della gravitazione, che porta a previsioni un pò diverse da quelle di Einstein.

d) *La teoria non simmetrica di D.W. Sciama.* In tale teoria viene introdotta una metrica non simmetrica, che descrive il campo gravitazionale, e che é legata ai fluidi a spin [5].

Come si vede, le varie possibili generalizzazioni del campo gravitazionale sono assai diverse tra loro, e si escludono a vicenda. Una loro scelta su basi sperimentali potrebbe essere fatta in base alle osservazioni di fenomeni astrofisici, in cui avvengono dei violenti processi.

2. Gravitazione, Elettromagnetismo, Teorie Unitarie

Il problema di ampliare la teoria della gravitazione di Einstein, può essere affrontato per una via del tutto diversa, e cioé collegandolo al problema della geometrizzazione del campo elettromagnetico. Si ottengono allora le varie *teorie unitarie della materia e dell'elettricità,* il cui studio é stato ripreso recentemente, e collegato alle ricerche sulle particelle elementari e le teorie di gauge.

Ma anche questa via risulta indeterminata, e si presentano molte possibilità, sebbene le equazioni di Maxwell sono determinate in modo univoco, e sono confermate sperimentalmente. Ci limiteremo ad esaminare le più importanti teorie unitarie proposte:

a) *La teoria unitaria di Weyl,* che si ottiene ampliando la connessione dello spazio di Riemann con l'aggiunta di un termine simmetrico [6]. In conseguenza, accanto al tensore di curvatura di Riemann (che descrive la gravitazione), viene introdotta una "curvatura di misura", legata al campo elettromagnetico.

b) *La teoria unitaria di Einstein-Cartan,* nella quale viene introdotta una connessione non simmetrica, e quindi una torsione, legata al campo elettromagnetico [7]. Possiamo quindi dire che la materia produce una *curvatura* e l'elettricità una *torsione* dello spazio-tempo.

c) *La teoria non simmetrica di Einstein,* con tensore fondamentale non simmetrico [8]. La parte simmetrica ci dà i potenziali gravitazionali, mentre quella antisimmetrica si interpreta come tensore elettromagnetico.

d) *La teoria di Kaluza-Klein,* perfezionata successivamente da Jordan-Thiry [9], che utilizza uno spazio di Riemann a 5 dimensioni, e quindi introduce un tensore fondamentale a 15 componenti. Le prime 10 ci danno i potenziali gravitazionali, 4 sono i potenziali elettromagnetici, e poi c'é un nuovo potenziale scalare. Però non si dà una adeguata interpretazione fisica della 5° dimensione introdotta.

e) *La relatività proiettiva di Veblen,* infine, nella quale la 5° coordinata viene interpretata in termini di geometria proiettiva, e cioé come quinta coordinata omogenea. Ma anche in questo caso non viene spiegato dal punto di vista fisico, perché occorre adoperare la geometria proiettiva [10].

Possiamo quindi concludere che le varie teorie unitarie proposte si escludono a vicenda, ed ognuma di esse geometrizza in modo diverso il campo elettromagnetico, con interpretazioni più o meno arbitrarie.

A mio avviso, il motivo dell'insuccesso e della proliferazione di tali teorie unitarie, sta nel fatto che prima di ampliare la relatività generale, non si é cercato di perfezionare ulteriormente la relatività ristretta, estendendone la sua validità su scala cosmica. Cooe abbiamo visto nei precedenti lavori [11], questo può essere fatto utilizzando l'Universo di De Sitter ed il gruppo di Fantappié, ed allora la generalizzazione della teoria di Einstein può essere fatta in modo *univoco.* Si ottiene così la *Relatività Generale Proiettiva* (RGP), da me proposta nel 1964 [12], la quale, pur essendo diversa dalle teorie esaminate, ne conserva alcune delle loro principali caratteristiche.

3. La Relativita 'Proiettiva ed il Gruppo di Fantappie'

Nella Relatività Speciale Proiettiva (RSP), l'Universo di De Sitter viene studiato in rappresentazione geodetica di Beltrami, e si ottiene allora il cronotopo di Castelnuovo. Esso é formato dai punti esterni all'assoluto di Cayley-Klein, e nel quale da ogni punto esce il cono-luce formato dalle rette tangenti all'assoluto.

Per tale motivo, nella relatività proiettiva intervengono in modo essenziale le due quantità A e B. Se ci limitiamo al caso bidimensionale (x, t). l'equazione dell'assoluto é data da

$$A^2 = 1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0 \tag{3,1}$$

mentre l'equazione delle caratteristiche é

$$B^2 = 1 \quad \beta^2 + (\alpha \quad \beta\gamma)^2 = 0 \tag{3,2}$$

Al limite relativistico ($r \to \infty$) ci riduciamo alle $A^2 = 1$, $B^2 = 1 \quad \beta^2$.

Fatta questa premessa. le trasformazioni del gruppo di Fantappié con i tre parametri (T, T_0, V) sono state da me calcolate nel 1960 [13], e sono

$$\begin{cases} x' = \dfrac{Ax + [\beta + \gamma(\alpha - \beta\gamma)]\, ct + BT}{A(\beta\gamma \quad \alpha)\, x/r + (\gamma \quad \alpha\beta)\, t/t_0 + B} \\[2ex] t' = \dfrac{A\beta x/c + [1 + \alpha(\alpha \quad \beta\gamma)]\, t + BT_0}{A(\beta\gamma \quad \alpha)\, x/r + (\gamma \quad \alpha\beta)\, t/t_0 + B} \end{cases} \tag{3,3}$$

Esse si scrivono cosi, in coordinate omogenee (x_1, x_4, x_5):

$$\begin{cases} AB\, x'_1 = A\, x_1 + i\,[\beta + \gamma(\alpha \quad \beta\gamma)]\, x_4 + BT\, x_5 \\ AB\, x'_4 = iA\beta x_1 + [1 + \alpha(\alpha \quad \beta\gamma)]\, x_4 + i\, BT_0\, x_5 \\ AB\, x'_5 = A(\beta\gamma \quad \alpha)\, x_1\, r^{-1} \quad i(\gamma \quad \alpha\beta)\, x_4\, t_0^{-1} + B\, x_5 \end{cases} \tag{3,4}$$

Il determinante di tale trasformazione ortogonale è dato da

$$\Delta = (AB)^{-2} \begin{vmatrix} 1 & i(\beta + \gamma(\alpha \quad \beta\gamma)) & T \\ \beta/c & 1 + \alpha(\alpha \quad \beta\gamma) & iT_0 \\ (\beta\gamma \quad \alpha)/r & i(\gamma \quad \alpha\beta)/t_0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (3,5)$$

E' importante tener presente che *la trasformazione di parametri (T, T_0, V) non è l'inversa della (3,3).* Infatti la matrice inversa di una matrice ortogonale è data dalla sus trasposta, e non si ottiene cambiando di segno i parametri. Questo accade perché tali parametri non sono canonici ortogonali. Dalla trasformazione (3.3), differenziando i due membri e ponendo W = dx'/dt; ed U = dx/dt, si deduce la ***legge di addizione delle velocità,*** valida su scala cosmica

$$\boxed{W = \frac{U + AV + \alpha(\alpha \quad U\gamma/c) + \gamma B(x \quad Ut)/r}{A + UV/c^2 + \gamma(\alpha \quad U\gamma/c) + \alpha B(x \quad Ut)/r}} \qquad (3,6)$$

Se ne deduce che le due velocità (U,V) non sono permutabili, e se ci poniamo sul cono-luce dell'osservatore ($\alpha = \quad \gamma$), si ha A = 1, e la precedente formula si riduce alla

$$W = \frac{U + V + \alpha^2 (1 + U/c) + \alpha B(x \quad Ut)/r}{1 + UV/c^2 \quad \alpha^2 (1 + U/c) + \alpha B(x \quad Ut)/r} \qquad (3,7)$$

Ne segue che se U = c, si ha W = c, come nella relatività ristretta. Invece per U = +c, ovvero per V = ± c, si ha W ≠ c.

Infine, se il punto G(x,t) si muove di moto uniforme con velocità U, ovvero per x = t = o la (3,7) si semplifica ulteriormente

$$W = \frac{U + V + \alpha^2 (1 + U/c)}{1 + UV/c^2 \quad \alpha^2 (1 + U/c)} \qquad (3,8)$$

A questa stessa formula si perviene partento dalla x = Ut, ed utilizzando le trasformazioni inverse delle (3,3).

Per concludere ricordiamo che nella RSP. la legge di espansione cosmica

$$\beta = \alpha/(1 + \gamma) \tag{3,9}$$

é ricavata a partire dal gruppo di Fantappic. Si ha poi la legge di variazione della massa

$$m = m_0 \, A^2 \, / \, B \tag{3,10}$$

nella quale intervengono le due quantità A e B. Poiché noi vediamo una galassia sul cono-luce ($\alpha = -\gamma$) e con velocità di fuga (3,9), si ha $A = B = 1$, ed allora $m = m_0$. In altri termini, le galassie fuggono da noi con velocità tali che le loro masse non cambiano.

4. Lo Spazio a Connessione Proiettiva di Cartan

In un mio lavoro del 1964 [12], ho fatto vedere in che modo la relatività generale può essere perfezionata in modo *univoco,* a partire dalla relatività ristretta proiettiva.

Per costruire la nuova "relatività generale proiettiva", occorre introdurre una varietà di Riemann V_5 a 5 dimensioni, la cui geometria può essere interpretata in termini di geometria differenziale proiettiva di Cartan, su di una varietà X_4 a 4 dimensioni [14].

Se indichiano con $\bar{x}_A$ $(A = 1,2 \,.\,.\, 5)$ le coordinate proiettive nello spazio tangente in un punto di X_4, la legge di trasporto dei punti é rappresentata dal sistema differenziale

$$dx^A + \omega^A{}_B \, x^B = 0 \qquad \text{con} \qquad \omega^A{}_B = \pi^A_{BC} \, dx^C \tag{4,1}$$

dove π^A_{BC} é la connessione proiettiva.

Assegniamo poi un campo di quadriche Q, negli spazi tangenti di X_4, di equazioni

$$Q = \gamma_{AB} \, x^A \, x^B = 0 \tag{4,2}$$

e che reppresentano l'assoluto delle metriche non euclidee locali.

La connessione proiettiva ci dà una legge di traslazione proiettiva che conserva il campo di quadriche. In conseguenza dobbianmo avere

$$\nabla_A \gamma_{BC} = 0 \tag{4,3}$$

Ne segue che

$$\pi^A_{BC} = \left\{ {A \atop BC} \right\} = \frac{1}{2} \gamma^{AS} (\partial_C \gamma_{SB} + \partial_B \gamma_{SC} - \partial_S \gamma_{BC}) \tag{4,4}$$

che é la connessione proiettiva di Veblen [15].

Le equazioni di struttura dello spazio sono

$$\Omega^{AB} = d\omega^{AB} + \omega^A{}_C \wedge \omega^{BC} \tag{4,5}$$

dove Ω^{AB} é il tensore di "curvatura e torsione" di Cartan, perché in uno spazio a connessione proiettiva, alla curvatura é associata una torsione.

Infatti, se poniamo

$$\omega^i = \omega^{is}\,; \tilde{\Omega}^{ik} = d\omega^{ik} + \omega^i{}_s \wedge \omega^{ks} \tag{4,6}$$

(iks = 1,2. .4), dalla (4,5) segue che

$$\Omega^{ik} = \tilde{\Omega}^{ik} + \omega^i \wedge \omega^k\,; \omega^{is} = d\omega^i + \omega^i{}_s \wedge \omega^s \tag{4,7}$$

Nel sistema di riferimento naturale, e per $r \to \infty$, si ha $\omega^i = dx^i$. e ricordando che $ddx^i = 0$, si ottiene

$$\Omega^{is} = \omega^i{}_s \wedge dx^s = \Sigma^i \tag{4,8}$$

che é la torsione.

Il tensore di curvatura proiettiva é dato da

$$R_{A.CD}^{\ B} = \partial_C \pi^B_{AD} - \partial_D \pi^B_{AC} + \pi^S_{AD} \pi^B_{CS} - \pi^S_{AC} \pi^B_{DS} \tag{4,9}$$

Se questo tensore si annulla, lo spazio diventa "proiettivamente piano", cioé a curvatura costante. Ne segue che nella Relatività generale proiettiva. noi abbiamo un "substrato" dato dallo spazio-tempo di De Sitter a curvatura costante, come nella teoria bimetrica di Rosen [1].

Fatta questa premessa che chiarisce la struttura del tensore di curvatura e torsione, le equazioni di Einstein generalizzate sono le seguenti

$$\boxed{R_{AB} - \frac{1}{2}\gamma_{AB} R = \chi T_{AB}} \tag{4,10}$$

dove abbiamo posto

$$R_{AB} = R_{A.SB}^{\ \ S} \qquad ; \qquad R = \gamma^{AB} R_{AB} \tag{4,11}$$

e T_{AB} é il tensore energetico del campo magnetoidrodinamico H_{AB}, costruito a partire dalle equazioni di Maxwell generalizzate [16], cioé

$$T_{AB} = H_{AS} H_{SB} + \frac{1}{4} H_{RS} H_{RS} \delta_{AB} \tag{4,12}$$

Le equazioni (4,10). pur essendo simili a quelle delle teorie pentadimensionali, ne differiscono profondamente nel loro significato fisico. Infatti adesso le γ_{AB} sono 15 potenziali gravitazionali, strettamente connessi alla struttura del tensore energetico del fluido magnetoidrodinamico (plasma) che é la sorgente del campo gravitazionale. In conseguenza le nuove equazioni non si spezzano più in quelle elettromagnetiche e gravitazionali, ma esse ci descrivono un campo gravitazionale generalizzato, legato alla presenza di materia ed elettricità, ed espresso geometricamente in termini di curvatura e torsione. Più precisamente la torsione é legata alle interazioni tra materia ed elettricità espresse tramite il vettore di Poynting generalizzato

$$T_{\alpha 5} = C_0 H + \underline{E} \wedge C \qquad ; \qquad T_{45} = C \times H \tag{4,13}$$

dove (C_0, C) é il campo idrodinamico ed (E, H) il campo elettromagnetico.

5. La Metrica di Beltrami Generalizzata

Nella relatività ristretta proiettiva, abbiamo la metrica 5-dimensionale pitagorica

$$ds^2 = d\bar{x}_A \, dx_A \qquad \text{con} \qquad x_A x_A = r^2 \tag{5,1}$$

Dalla condizione di normalizzazione si deduce che le coordinate proiettive $\ddot{x}_A$ sono legate a quelle cartesiane x_i dalle formule

$$x_i = x_i/A \qquad ; \qquad x_5 = r/A \tag{5,2}$$

con $A^2 = 1 + \alpha_i \alpha_i$ ed $\alpha_i = x_i/r$. Sostituendo tali valore nella prima delle (5,1), otteniamo la metrica di Beltrami

$$\boxed{A^4 \, ds^2 = A^2 \, (dx_i \, dx_i) \quad (\alpha_i \, dx_i)^2} \tag{5,3}$$

che descrive la rappresentazione geodetica dell'Universo di De Sitter, e cioé il cronotopo di Castelnuovo.

Tale risultato può essere facilmente esteso alla relatività generale proiettiva, e ci fornisce la *metrica 4-dimensionale indotta.* La metrica della varietà riemanniana 5-dimensionale V_5 é data da

$$ds^2 = \gamma_{AB} \, d\ddot{x}^A \, dx^B \tag{5,4}$$

con la condizione di normalizzazione (poniamo nel seguito r = 1):

$$\gamma_{AB} \, x^A \, x^B = 1 \tag{5,5}$$

Dalla $x^i = \ddot{x}^i/\ddot{x}^5$ segue che $\ddot{x}^i = x^i \, x^5$, da cui si deduce

$$d\,\ddot{x}^i = x^i \, dx^5 + x^5 \, dx^i \tag{5,6}$$

Sostituendo nella (5,4) si deduce che

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (\gamma_{ik} \, x^i x^k)(x^5)^2 + 2(\gamma_{ik} x^k + \gamma_{i5}) \, dx^i (x^5 \, dx^5) + \\ & + (\gamma_{ik} \, x^i x^k + 2\gamma_{i5} x^i + \gamma_{55})(dx^5)^2 \end{aligned}$$

Ora osserviamo che dalla condizione di normalizzazione (5,5) segue

$$x^i = x^i/\mathcal{A} \qquad ; \qquad x^5 = 1/\mathcal{A} \tag{5,7}$$

dove abbiamo posto

$$\boxed{\mathcal{A}^2 = \gamma_{55} + 2\,\gamma_{i5}\,x^i + \gamma_{ik}\,x^i\,x^k} \tag{5,8}$$

Dalla seconda delle (5,7) si ricava

$$d\,x^5 = -\,\mathcal{A}^{-3}\,(X_i + Y_i)\,dx^i \tag{5,9}$$

dove abbiamo posto per brevità

$$\begin{cases} X_i = \gamma_{i5} + \gamma_{ik}\,x^k \\ 2\,Y_i = \partial_i\,\gamma_{55} + x^s\,\partial_i\,\gamma_{s5} + x^s\,x^k\,\partial_i\,\gamma_{sk} \end{cases} \tag{5,10}$$

Sostituendo nella espressione del ds^2 la (5,9), otteniamo la *metrica di Beltrami generalizzata*

$$\boxed{\mathcal{A}^4\,ds^2 = [\mathcal{A}^2\,\gamma_{ik} + (Y_i - X_i)\,(Y_k + X_k)]\,dx^i\,dx^k} \tag{5,11}$$

il cui tensore fondamentale non é simmetrico (come viene supposto nella teoria unitaria di Einstein). Infatti esso é dato da

$$\mathcal{A}^4\,g_{ik} = \mathcal{A}^2\,\gamma_{ik} + (Y_i - X_i)\,(Y_k + X_k) \tag{5,12}$$

e le due parti simmetrica ed antisimetrica sono

$$\begin{cases} g_{\underset{\cdot}{ik}} = \mathcal{A}^{-4}\,(\mathcal{A}^2\,\gamma_{ik} - X_i\,X_k + Y_i\,Y_k) \\ g_{\underset{\vee}{ik}} = \mathcal{A}^{-4}\,(X_i\,Y_k - X_k\,Y_i) \end{cases} \tag{5,13}$$

Nel caso particolare dell'Universo di De Sitter si ha

$$\gamma_{ik} = \delta_{ik} \quad ; \quad \gamma_{i5} = 0 \quad ; \quad \gamma_{55} = 1 \tag{5,14}$$

ed allora avremo

$$\mathcal{A} = A \quad ; \quad X_i = x_i \quad ; \quad Y_i = 0 \tag{5,15}$$

e la (5,11) si riduce alla metrica (simmetrica) di Beltrami, e cioé alla (5,3).

6. Studio delle metriche 4-dimensionali simmetriche

Ci proponiamo adesso si studiare in quali casi la metrica di Beltrami generalizzata (5,11) diventa simmetrica. Dalla seconda delle (5,13) si vede che questo accade in tre importanti casi

$$X_i = 0 \quad , \quad \text{ovvero} \quad Y_i = 0 \quad \text{oppure} \quad Y_i = \lambda X_i \tag{6,1}$$

dove λ é un fattore di proporzionalità. Per studiare nel modo più semplice questi casi, noi ci poniamo nel sistema di riferimento proprio, nel quale si ha $x^i = 0$, ed allora avremo

$$\boxed{\mathcal{A}^2 = \gamma_{55} \quad ; \quad X_i = \gamma_{i5} \quad ; \quad 2\, Y_i = \partial_i \gamma_{55}} \tag{6,2}$$

Se poi poniamo $\gamma_{55} = \phi^2$ e $\gamma_{i5} = \phi_i$, si deduce che

$$\mathcal{A} = \phi \quad ; \quad X_i = \phi_i \quad ; \quad Y_i = \phi\, \partial_i \phi \tag{6,3}$$

Otteniamo allora i seguenti tre casi particolari del campo gravitazionale generalizzato:

I CASO – *La teoria scalare-tensoriale*, nella quale si ha $X_i = 0$, ed in consequenza

$$\mathcal{A} = \phi \quad ; \quad X_i = 0 \quad ; \quad Y_i = \phi\, \partial_i \phi \tag{6,4}$$

Ne segue che la metrica 4-dimensionale indotta (5,13) si riduce alla

$$\boxed{g_{ik} = \phi^{-2} (\gamma_{ik} + \partial_i \phi\, \partial_k \phi) \quad ; \quad g_{\check{ik}} = 0} \tag{6,5}$$

La teoria scalare-tensoriale che cosí si ottiene é del tipo di quella di Brans-Dicke, ma con un diverso significato fisico.

II CASO *La teoria vettoriale-tensoriale.* Essa si ottiene per $Y_i = \partial_i \gamma_{55} = 0$. In conseguenza γ_{55} é costante. In particolare, per $\gamma_{55} = 1$, abbiamo

$$\mathcal{A} = 1 \quad ; \quad X_i = \phi_i \quad ; \quad Y_i = 0 \tag{6,6}$$

ed otteniamo la metrica 4-dimensionale di Veblen

$$\boxed{g_{\underline{ik}} = \gamma_{ik} \cdot \varphi_j\, \varphi_k \quad ; \quad g_{\check{ik}} = 0} \tag{6,5}$$

Abbiamo così una teoria di tipo vettoriale-tensoriale, analoga alla relatività proiettiva di Veblen, ma nella nostra teoria le ϕ_i non sono identificabili con i potenziali elettromagnetici, ma come nuovi potenziali gravitazionali, dovuti alla interazione materia-elettricità.

III CASO — *La teoria scalare-vettoriale-tensoriale.* Infine, per $Y_i = \lambda X_i$, abbiamo la condizione

$$\phi_i = \lambda \phi \partial_i \phi \qquad (6,6)$$

che lega tra loro il potenziale vettoriale γ_{i5} a quello scalare γ_{55}. Se ne deduce che

$$\mathcal{A} = \phi \quad ; \quad X_i = \phi \partial_i \phi \quad ; \quad Y_i = \lambda \phi \partial_i \phi \qquad (6,7)$$

e la metrica indotta diventa

$$\boxed{g_{\underline{ik}} = \phi^{-2} [\gamma_{ik} - (\lambda^2 - 1) \partial_i \phi \partial_k \phi] \; ; \; g_{\check{ik}} = 0} \qquad (6,7)$$

Si ottiene in tal modo una teoria del tipo di quella di Jordan-Thiry, però con la condizione (6,6) ed una interpretazione fisica del tutto diversa.

In particolare, se $\lambda^2 = 1$, otteniamo la metrica indotta conforme

$$g_{\underline{ik}} = \phi^{-2} \gamma_{ik} \quad ; \quad g_{\check{ik}} = 0 \qquad (6,8)$$

e per $\lambda = 0$, la metrica (6,7) si reduce alla (6,5).

In un successivo lavoro ci proponiamo di studiare la teoria di Einstein generalizzata, in questi tre semplici casi. Per adesso possiamo affermare che la nuova teoria, costruita a partire dalla relatività ristretta proiettiva, non solo ci fornisce una generalizzazione ***univoca*** delle equazioni di Einstein, ma ci dà pure, nel modo più semplice e naturale il loro significato fisico.

Essa poi ritrova, senza fare delle ipotesi più o meno arbitrarie, alcune delle caratteristiche delle precedenti teorie, come la non simmetria del tensore fondamentale, la comparsa di una torsione, la introduzione della quinta coordinata e della geometria proiettiva differenziale.

La teoria proposta introduce poi un "substrato" a curvatura costante, come nella teoria bimetrica, e chiarisce il legame tra la relatività ristretta proiettiva (basata sul gruppo di Fantappiè) e la relatività generale proiettiva (basata sugli spazi di Cartan) [17].

BIBLIOGRAFIA

[1] N. ROSEN, *A bimetric theory of gravitation*, Gen. Rel. Grav. *4*, 435 (1973); *Bimetric general relativity and cosmology*, Gen. Rel. Grav. *12*, 493 (1980)

[2] R. GOLDONI, *Bimetric Machian Gravitation*, Congreso Società Italiana di Fisica, Pisa, 1981.

[3] A. QUALE, *Inertia and Gravity*, Forts. der Physik, *21*, 265 (1973).

[4] C. BRANS, R.H. DICKE, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, Phys. Rev. *124*, 925 (1961).

[5] D.W. SCIAMA, *The unity of the Universe*, London 1959.

[6] H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, Berlin 1923.

[7] D.P. MASON, M. TSAMPARLIS, *Magnetohydrodynamics in a Riemannian-Cartan space time*, Gen. Rel. Grav. *13*, 123 (1981).

[8] A.H. KLOTZ, L.I. GREGORY, *The nonsymmetric unified field theory*, Gen. Rel. Grav. *13*, 155 (1981).

[9] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Masson, Paris, 1955.

[10] E. SCHMUTZER, *Projective Unified field theory*, Exp. Tech. Physik, 28, 305 (1980).

[11] G. ARCIDIACONO, Memorie su Collectanea Mathematica del 1958-82; *Relatività e Cosmologia*, 2° vol. Veschi, Roma, 3° ed. 1979.

[12] G. ARCIDIACONO, *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie*, Coll. Mathem. XVI, 149 (1964).

[13] G. ARCIDIACONO, *Relatività finale e cosmologia*, Coll. Math. XII, 3 (1960).

[14] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces a connexion projective*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[15] E. BORTOLOTTI, *Spazi a connessione proiettiva*, Roma, Ferri, 1941.

[16] G. ARCIDIACONO, *Magnetohydrodinamics and cosmology*, Gen. Rel. Grav. *9*, 949 (1978).

[17] Relazione tenuta al Congresso della Società Italiana di Fisica, Perugia 1982.

PROF. GIUSEPPE ARCIDIACONO
Via Acq. Peschiera 96
Italia 00135-ROMA