

SOBRE LA COMPOSICION DE LOS PUNTOS TRIPLES DE LAS CURVAS PLANAS

por

JUAN GOÑI

ABSTRACT.

In a previous paper [1]* we associated to each μ -uple point of an algebraic plane curve, $\mu-1$ natural numbers n_2, \dots, n_μ and we gave an algorithm which allows to calculate them from the equation of the curve. In the present work, already announced in [1] we show how, in the case of a triple point, the composition of the singularity is determined from the two corresponding integers n_2, n_3 .

INTRODUCCIÓN.

La clasificación de singularidades triples a partir de los dos enteros n_2, n_3 se desarrolla en la siguiente forma. En primer lugar se particularizan las fórmulas obtenidas en [1] al caso de multiplicidad $\mu = 3$. Se pasa luego a enumerar las seis posibles composiciones de un punto triple y al cálculo efectivo de los enteros n_2, n_3 para cada una de ellas. Los resultados se resumen en un teorema, que incluye las fórmulas con las que a partir de n_2, n_3 se obtienen tanto los órdenes de las ramas que constituyen la singularidad como el número de puntos dobles y triples infinitamente próximos situados sobre las ramas.

Importa señalar que los resultados establecidos en [1] permiten obtener la siguiente interpretación de los enteros n_2, n_3 asociados al punto triple, de la que en particular se deduce su invariancia proyectiva: Sean

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

* Cfr. Bibliografía.

las respectivas ecuaciones de una curva C dotada de un punto triple en $(0,0)$ y de sus dos primeras polares en una referencia genérica de P_2C . Entonces de [1] § 6 se deduce sin más que n_2 es la multiplicidad de la intersección de C y C_1 en el punto triple. Análogamente de las fórmulas (3) de [1] § 8 resulta que n_3 es el mínimo de las multiplicidades de intersección en el punto triple de C , de C y C_2 y de C_1 y C_2 ; pues tales fórmulas dan para $r = 3$:

$$e_1^0 = \left[f(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} y - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 \right]_{y=t}$$

$$e_3^1 = \left[\frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y \right]_{y=t}$$

donde t , de acuerdo con (5) de [1] § 7 es la única raíz de

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{y=t} = 0,$$

que se anula para $x = 0$.

Basta tener en cuenta que (7) y (8) de [1] § 7 dan para un punto triple:

$$n_3 = \min. \{ \text{ord. } e_3^0, \text{ord. } e_3^1 \}$$

para probar lo enunciado.

§ 1. FÓRMULAS RELATIVAS A LOS PUNTOS TRIPLES.

Con las mismas notaciones que en [1] §§ 1 y 9 sea C una curva plana algebraica de orden n del plano proyectivo complejo con un punto triple en el origen, cuya ecuación en coordenadas proyectivas absolutas se escriba $f(x, y) = 0$, con

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^n a_j(x) y^{n-j} = \sum_{i+1 \leq n} a_{ij} x^i y^j$$

Se supone elegida la referencia de modo que el eje Y no es tangente principal a C en el origen ($a_{03} \neq 0$).

Los enteros n_2, n_3 asociados al punto triple se obtienen mediante las fórmulas (7), (8) del § 7 y (2), (3) del § 9 de [1]. Sin embargo puesto que el valor de n_2 coincide con la disminución de la clase de C ocasionada por el punto triple, conocida la composición de la singularidad se puede calcular n_2 mediante la primera fórmula de Plucker generalizada por Noether,

$$n_2 = \sum s(s-1) + \sum (\alpha - 1);$$

en la que s es la multiplicidad de un punto múltiple (propio o no) y α el orden de una rama, con los sumatorios extendidos a las ramas con origen en el punto triple.

Así que sólo es necesario concretar las fórmulas citadas para el cálculo de n_3 , que se expresan así:

$$n_3 = \text{mín.} \{ \text{ord. } e_3^0, \text{ord } e_3^1 \}$$

siendo

$$e_3^0 = a_{30} x^3 + a_{40} x^4 + \dots + a_{n0} x^n + (a_{03} + a_{13} x + \dots + a_{n-3,3} x^{n-3}) t^3 + \\ + 3 (a_{04} + a_{14} x + \dots + a_{n-4,4} x^{n-4}) t^4 + \dots$$

$$e_3^1 = a_{21} x^2 + a_{31} x^3 + \dots + a_{n-1,1} x^{n-1} - 3 (a_{03} + a_{13} x + \dots + \\ + a_{n-3,3} x^{n-3}) t^2 - 6 (a_{04} + a_{14} x + \dots + a_{n-4,4} x^{n-4}) t^3 \dots$$

fórmulas en las que t es la raíz que se anula para $x = 0$, de la ecuación:

$$a_{12} x + a_{22} x^2 + \dots + a_{n-2,2} x^{n-2} + 3 (a_{03} + a_{13} x + \dots + a_{n-3,3} x^{n-3}) t + \\ + 6 (a_{04} + a_{14} x + \dots + a_{n-4,4} x^{n-4}) t^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a_{0n} t^{n-2} = 0.$$

De modo que la parte principal de t vendrá determinada por la ecuación:

$$a_{n-2}(x) + 3 a_{03} t = 0. \tag{1}$$

Y las de e_3^0, e_3^1 por:

$$e_3^0 \sim a_n(x) + a_{03} t^3 \\ e_3^1 \sim a_{n-1}(x) - 3 a_{03} t^2 \tag{2}$$

siempre que no haya cancelación de términos semejantes de grado mínimo, en cuyo caso habrían de tenerse en cuenta más términos tanto del desarrollo de t en potencias de x , como de las expresiones de e_3^0 y e_3^1 .

§ 2. CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS TRIPLES. CÁLCULO DE n_2 .

Los puntos triples pueden repartirse en seis tipos que se indican a continuación mediante sus diagramas de Enriques [2]:

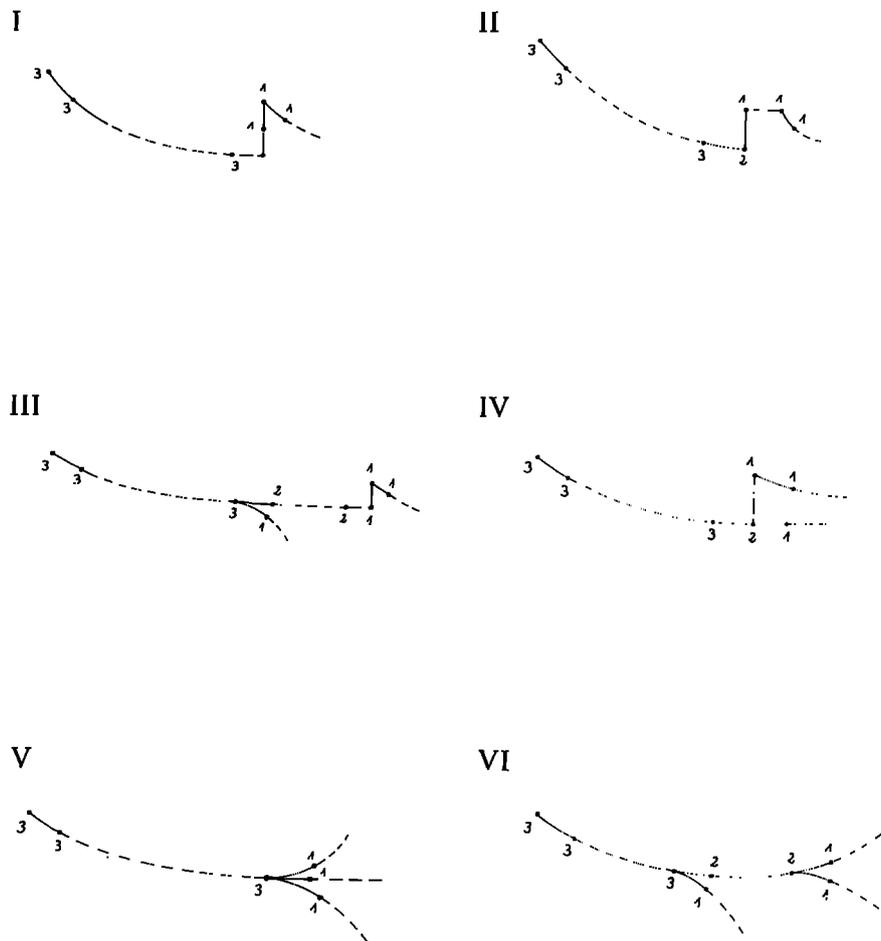


Fig. 1

En lo sucesivo designaremos por τ el número de puntos triples en los entornos del punto triple y por δ el número de puntos dobles.

El valor de n_2 los expresaremos en función de τ y δ ; y según resulta de la aplicación de la fórmula de Plücker-Noether indicada en el § 1, en cada uno de los seis tipos es como sigue:

Tipo I): La singularidad consiste en una rama de orden 3 sin puntos dobles. El valor de n_2 es:

$$n_2 = 6 \tau + 2$$

Tipo II): Se trata de una rama de orden 3 con un punto doble. Y se tiene:

$$n_2 = 6 \tau + 4$$

Tipo III): Se compone de una rama lineal y otra de orden dos cuyo primer punto simple no está sobre la rama lineal. Es:

$$n_2 = 6 \tau + 2 \delta + 1$$

Tipo IV): Hay una rama lineal y otra de orden dos con contacto máximo. Hay un solo punto doble. Se obtiene para n_2 :

$$n_2 = 6 \tau + 3$$

Tipo V): En este caso la singularidad se compone de tres ramas lineales sobre las que solamente hay puntos triples. Con lo cual:

$$n_2 = 6 \tau$$

Tipo VI): Consta de tres ramas lineales con puntos dobles y triples. Se obtiene:

$$n_2 = 6 \tau + 2 \delta.$$

§ 3. FORMA REDUCIDA DE LOS DESARROLLOS DE PUISEUX RELATIVOS AL PUNTO TRIPLE.

Para facilitar los cálculos posteriores llevaremos a cabo transformaciones analíticas del tipo:

$$\begin{cases} \bar{x}^* = x \\ \bar{y}^* = y + a x^h \end{cases} \quad (1)$$

que no modifican la multiplicidad de intersección en (0,0), y conservan las polares respecto del punto impropio del eje Y.

En efecto: Llamemos $\bar{f}^*(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ al transformado por (1) de $f(x, y)$:

$$\bar{f}^*(\bar{x}^*, \bar{y}^*) = f(\bar{x}^*, \bar{y}^* - a \bar{x}^{*h}).$$

Se tiene:

$$\frac{\partial \bar{f}^*}{\partial \bar{y}^*} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(\bar{x}^*, \bar{y}^* - a \bar{x}^{*h})} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^*$$

Por otra parte supongamos que $f(x, y)$, $g(x, y)$ se anulan en (0,0) y tienen polinomios de Weierstrass respectivamente

$$\prod_i [y - \Sigma_i(x)], \prod_j [y - \Sigma_j'(x)]$$

en los que Σ_i, Σ_j' son los desarrollos de Puiseux de las ramas con origen en (0,0). La multiplicidad de intersección en (0,0) de las curvas de ecuaciones $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ es el orden de infinitésimo respecto de x del producto

$$\prod_{i,j} [\Sigma_i(x) - \Sigma_j'(x)].$$

Los transformados por (1) de los polinomios de Weierstrass son

$$\prod_i [y^* - a \bar{x}^{*h} - \Sigma_i(\bar{x}^*)], \prod_j [y^* - a \bar{x}^{*h} - \Sigma_j'(\bar{x}^*)]$$

y la multiplicidad de intersección en (0,0) de las curvas transformadas es por lo tanto:

$$\text{ord}_x^* \prod_{i,j} [\Sigma_i(\bar{x}^*) - \Sigma_j'(\bar{x}^*)] = \text{ord}_x \prod_{i,j} [\Sigma_i(x) - \Sigma_j'(x)].$$

Luego la transformación (1) no modifica el valor de n_3 . En los puntos tri-

ples con una rama de orden dos o tres, efectuando sucesivas transformaciones del tipo (1) se puede conseguir que el desarrollo de Puiseux comience por el término de exponente característico; si sólo hay ramas lineales se puede conseguir que sean nulos los coeficientes que convenga de una cualquiera de las ramas [3].

§ 4. APROXIMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE C EN UN ENTORNO DEL PUNTO TRIPLE.

El cálculo de n_3 en el siguiente párrafo (§ 5) sólo utiliza algunos coeficientes de la ecuación de C, correspondientes a una aproximación en un entorno del punto triple. Por la elección hecha de la referencia, el punto triple es el origen y el eje Y no es tangente principal, con lo cual en la ecuación de C figura un término $a_{03} y^3$ cuyo coeficiente a_{03} supondremos igual a 1 sin que esto implique restricción. Los otros términos de la ecuación de C que se han de tener en cuenta son los términos en y^2 , en y, e independiente de y, que a su vez sean del menor grado posible respecto de x.

Partiremos de los desarrollos de Puiseux en su forma reducida (§ 3). Con los exponentes de los términos iniciales se tienen las pendientes de los lados del polígono de Newton correspondiente al punto triple de C. El punto (0,3) es en todo caso vértice del polígono de Newton. Si (α, β) , $0 \leq \beta \leq 3$, correspondiente a un término de la ecuación de C está sobre el lado que contiene a (0,3) entonces

$$\frac{\alpha}{3 - \beta}$$

viene dado por el menor de los exponentes del término inicial de los desarrollos de Puiseux de las ramas con origen en el punto triple. Sea (α_1, β_1) (correspondiente a un término de C) el punto sobre dicho lado con ordenada mínima β_1 . Si $\beta_1 \neq 0$ habrá otro lado del polígono con origen en dicho punto y para los puntos (α', β') correspondientes a términos de la ecuación de C, sobre dicho lado,

$$\frac{\alpha' - \alpha_1}{\beta_1 - \beta'}$$

iguala al exponente inicial del desarrollo de Puiseux, que sigue en orden creciente al anterior. Si (α_2, β_2) es el punto sobre dicho lado con ordenada mínima β_2 y fuese $\beta_2 \neq 0$ habría un tercer lado, etc.

De esta manera hallaremos sucesivamente, a partir de los desarrollos de Puiseux, los vértices del polígono de Newton correspondientes, para cada uno de los tipos I a VI.

Además hay que tener en cuenta que los términos de la ecuación de C de la forma $a_{\alpha 2} x^{\alpha} y^2$ son tales que el punto $(\alpha, 2)$ debe tener por abscisa α un número natural igual o mayor que la abscisa del punto en que la recta $y = 2$ corta al polígono de Newton; condición que se expresa mediante una desigualdad que también deduciremos oportunamente. Y lo mismo cabe decir de los términos de la forma $a_{\alpha 1} x^{\alpha}$ y sustituyendo $y = 2$ por $y = 1$.

Aplicando el proceso descrito se halla lo que sigue:

Tipo I). Hay una sola rama de orden 3, sobre la que a τ puntos triples sigue uno simple, y cuyo desarrollo será de la forma

$$y = x^{\tau + \frac{1}{3}} + \dots,$$

debiendo señalarse que no implica restricción suponer el coeficiente inicial igual a 1.

El vértice (α_1, β_1) del polígono de Newton debe cumplir

$$\frac{\alpha_1}{3} = \tau + \frac{1}{3};$$

que implica $\alpha_1 = 3\tau + 1; \beta_1 = 0$. Y el polígono de Newton tiene un solo lado de vértices $(0,3), (3\tau + 1, 0)$. Las rectas $y = 2$ e $y = 1$ cortan a dicho lado en los puntos

$$\left(\tau + \frac{1}{3}, 2\right) \text{ y } \left(2\tau + \frac{2}{3}, 1\right)$$

respectivamente, con lo que la ecuación de C será:

$$y^3 + a x^{\tau+i} y^2 + b x^{2\tau+j} y - x^{3\tau+1} + \dots = 0$$

con las condiciones para i, j : $i > 0, j > 0$.

Tipo II). Hay una rama de orden tres sobre la que a los puntos triples sigue uno doble. El desarrollo de la rama es ahora

$$y = x^{\tau + \frac{2}{3}} + \dots,$$

Los vértices del único lado del polígono de Newton son ahora $(0,3)$ y $(3\tau+2,0)$. Dicho lado es cortado por las rectas $y = 2$, $y = 1$ respectivamente en

$$\left(\tau + \frac{2}{3}, 2\right) \text{ y } \left(2\tau + \frac{4}{3}, 1\right)$$

Y la ecuación de C es:

$$y^3 + a x^{\tau+i} y^2 + b x^{2\tau+j} y - x^{3\tau+2} + \dots = 0$$

con las condiciones: $i > 0$, $j > 1$.

Tipo III). Hay una rama lineal y otra de orden dos de desarrollos respectivos

$$y = a x^{\tau} + \dots; \quad y = x^{\tau + \delta + \frac{1}{2}} + \dots,$$

donde $\delta \geq 0$. Como el menor exponente inicial es τ , la ecuación para el vértice (α_1, β_1) del polígono de Newton es ahora

$$\frac{\alpha_1}{3\beta_1} = \tau;$$

y para (α_2, β_2) :

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1} \frac{\alpha_1}{\beta_2} = \tau + \delta + \frac{1}{2};$$

y el polígono tiene dos lados de vértices $(0,3)$, $(\tau,2)$, $(3\tau + 2\delta + 1,0)$.

La recta $y = 1$ corta al segundo lado en el punto

$$\left(2\tau + \delta + \frac{1}{2}, 1\right).$$

Por lo tanto la ecuación de C es:

$$y^3 - a x^{\tau} y^2 + b x^{2\tau+\delta+i} + a x^{3\tau+2\delta+1} + \dots = 0$$

con $i > 0$.

Tipo IV). También hay una rama lineal y otra de orden dos, sólo que ahora el primer punto simple de la rama de orden dos está sobre la rama lineal. Los desarrollos de las ramas serán:

$$y = ax^{\tau+i} + \dots, \text{ con } i > 0; \quad y = x^{\tau + \frac{j}{2}} + \dots$$

El menor exponente inicial es

$$\tau + \frac{1}{2};$$

con lo que las ecuaciones para (α_1, β_1) y (α_2, β_2) son:

$$\frac{\alpha_1}{3 - \beta_1} = \tau + \frac{1}{2}; \quad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \beta_2} = \tau + i;$$

de donde resulta que el polígono de Newton tiene dos lados de vértices $(0,3)$, $(2\tau + 1, 1)$, $(3\tau + i + 1, 0)$. La recta $y = 2$ corta al primer lado en

$$\left(\tau + \frac{1}{2}, 2 \right),$$

y la ecuación de C es:

$$y^3 + bx^{\tau+j}y^2 - x^{2\tau+1}y + ax^{3\tau+i+1} + \dots = 0$$

con la condición: $j > 0$.

Tipo V). Hay tres ramas lineales cuyos desarrollos serán

$$y = ax^{\tau} + \dots, \quad y = bx^{\tau} + \dots, \quad y = x^{\tau+i} + \dots, \text{ con } a \neq b, a, b \neq 0 \text{ e } i > 0.$$

Las ecuaciones para (α_1, β_1) y (α_2, β_2) son:

$$\frac{\alpha_1}{3 - \beta_1} = \tau, \quad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \beta_2} = \tau + i,$$

con $\beta_1 = 1$ por haber dos ramas lineales correspondientes al primer lado. Los vér-

tices son $(0,3)$, $(2\tau, 1)$, $(3\tau + i, 0)$ y sobre el primer lado está también el punto $(\tau, 2)$. La ecuación de C es:

$$y^3 - (a + b)x^\tau y^2 + abx^{2\tau}y - abx^{3\tau+i} + \dots = 0.$$

Tipo VI). Hay tres ramas lineales de desarrollos $y = x^\tau + \dots$, $y = ax^{\tau+\delta} + \dots$, $y = a'x^{\tau+\delta+i} + \dots$, con $\delta \neq 0$, $i \neq 0$. Los exponentes iniciales son, ordenados de menor a mayor: $\tau < \tau + \delta < \tau + \delta + i$; por lo tanto para los vértices del polígono de Newton se tiene las ecuaciones:

$$\frac{\alpha_1}{3\beta_1} = \tau; \quad \frac{\alpha_2}{\beta_1} - \frac{\alpha_1}{\beta_2} = \tau + \delta; \quad \frac{\alpha_3}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_3} = \tau + \delta + i.$$

Y los vértices son $(0,3)$, $(\tau, 2)$, $(2\tau + \delta, 1)$, $(3\tau + 2\delta + i, 0)$.

La ecuación de C es ahora:

$$y^3 - x^\tau y^2 + ax^{2\tau+\delta}y + bx^{3\tau+2\delta+i} + \dots = 0.$$

§ 5. CÁLCULO DE n_3 .

Pasamos ahora al cálculo de n_3 aplicando las fórmulas (1), (2) del §1 a la ecuación de C, de cuyos términos sólo afectan al resultado los que figuran explícitamente en las aproximaciones obtenidas en el parágrafo §4, como se desprende de los cálculos que siguen para cada tipo de singularidad:

Tipo I). La raíz de t es:

$$t \sim -\frac{1}{3}ax^{\tau+i}$$

que sustituyendo en $c_3^{0,1}$ da:

$$e_3^0 \sim -x^{3\tau+1} - \frac{1}{27}a^3x^{3\tau+3i} \sim -x^{3\tau+1}$$

$$c_3^1 \sim bx^{2\tau+i} - \frac{1}{3}a^2x^{2\tau+2i}$$

por lo que resulta

$$2\tau + 1 \leq n_3 \leq 3\tau + 1.$$

Tipo II). Para este tipo se obtiene de modo totalmente análogo:

$$2\tau + 2 \leq n_3 \leq 3\tau + 2$$

Tipo III). Ahora se tiene:

$$t \sim \frac{1}{3} ax^\tau$$

$$e_3^0 \sim ax^{3\tau+2\delta+1} + \frac{1}{27} a^3 x^{3\tau} \sim \frac{1}{27} a^3 x^{3\tau}$$

$$e_3^1 \sim bx^{2\tau+\delta+i} - \frac{1}{3} a^2 x^{2\tau} \sim -\frac{1}{3} a^2 x^{2\tau}$$

y por lo tanto:

$$n_3 = 2\tau$$

Tipo IV). En este caso es:

$$t \sim -\frac{1}{3} bx^{\tau+j}$$

$$e_3^0 \sim ax^{3\tau+i+1} - \frac{1}{27} b^3 x^{3\tau+3j}$$

$$e_3^1 \sim -x^{2\tau+1} - \frac{1}{3} b^2 x^{2\tau+2j} \sim \dots x^{2\tau+1}$$

que da:

$$n_3 = 2\tau + 1.$$

Tipo V). Se tiene:

$$t \sim \frac{1}{3} (a+b)x^\tau$$

$$e_3^0 \sim -abx^{3\tau+i} + \frac{(a+b)^3}{27} x^{3\tau}$$

$$e_3^1 \sim abx^{2\tau} - \frac{(a+b)^2}{3} x^{2\tau}$$

y por ser $ab \neq 0$ resulta:

$$2\tau \leq n_3 \leq 3\tau$$

Tipo VI). Ahora es:

$$t \sim \frac{1}{3} x^\tau$$

$$c_3^0 \sim bx^{3\tau+2\delta+i} + \frac{1}{27} x^{3\tau} \sim \frac{1}{27} x^{3\tau}$$

$$e_3^1 \sim ax^{2\tau+\delta} - \frac{1}{3} x^{2\tau} \sim -\frac{1}{3} x^{2\tau}$$

y por lo tanto

$$n_3 = 2\tau$$

§ 6. RESUMEN DE LOS RESULTADOS.

El cuadro que sigue resume los resultados obtenidos. En él τ es el número de puntos triples y δ el número de puntos dobles situados en los entornos sucesivos, y $[q]$ designa la parte entera de q .

| | I | II | III | IV | V | VI |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---|--------------------------------|-----------------|----------------------------------|
| núm. de ramas de orden tres | 1 | 1 | | .. | | |
| núm. de ramas de orden dos | - | - | 1 | 1 | - | - |
| núm. de ramas lineales | - | - | 1 | 1 | 3 | 3 |
| n_2 | $6\tau+2$ | $6\tau+4$ | $6\tau+2\delta+1$ | $6\tau+3$ | 6τ | $6\tau+2\delta$ |
| n_3 | $\geq 2\tau+1$ | $\geq 2\tau+2$ | 2τ | $2\tau+1$ | $\geq 2\tau$ | 2τ |
| τ | $\left[\frac{n_2}{6} \right]$ | $\left[\frac{n_2}{6} \right]$ | $\frac{n_3}{2}$ | $\left[\frac{n_3}{2} \right]$ | $\frac{n_2}{6}$ | $\frac{n_3}{2}$ |
| δ | ... | 1 | $\left[\frac{n_2}{2} \right] - \frac{3n_3}{2}$ | 1 | | $\frac{n_2}{2} - \frac{3n_3}{2}$ |

Se puede describir el cuadro anterior mediante el

Teorema: Los enteros n_2, n_3 determinan la composición de un punto triple de la siguiente manera:

A) Si n_2 es impar se tiene una rama lineal y otra de orden dos, siendo el número de puntos triples

$$\tau = \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor ;$$

y el de puntos dobles

$$\delta = \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor - 3 \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor$$

El contacto de las ramas es el máximo posible cuando n_3 es impar.

B) Si n_2 es par y mayor que $3 n_3$ hay tres ramas lineales siendo

$$\tau = \frac{n_3}{2} ; \quad \text{y} \quad \delta = \frac{n_2}{2} - 3 \frac{n_3}{2} .$$

C) Si n_2 es par y menor o igual que $3 n_3$ se pueden dar tres casos:

1º) Si

$$\frac{n_2}{2} \equiv 0 \pmod{3}$$

hay tres ramas lineales y es

$$\tau = \frac{n_2}{6} ; \quad \delta = 0 .$$

2º) Si

$$\frac{n_2}{2} \equiv 1 \pmod{3}$$

se trata de una rama de orden tres y hay

$$\tau = \left[\frac{n_2}{6} \right]$$

puntos triples seguidos de puntos simples.

3º) Si

$$\frac{n_2}{2} \equiv 2 \pmod{3}$$

se trata también de una rama de orden tres con

$$\tau = \left[\frac{n_2}{6} \right]$$

puntos triples seguidos de un punto doble ($\delta = 1$).

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Goñi, Sobre los puntos múltiples de las curvas planas algebraicas, Coll. Math. Vol. 32 Frasc. 3^o, 1981.
- [2] F. Enriques-O. Chisini, Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Lib. IV Vol. II, Zanichelli, Bologna 1918.
- [3] O. Zariski, Le probleme des modules pour les branches planes. Cours donné au Centre de Mathematiques de l'Ecole Polytechnique. Paris, Octobre-Novembre 1973.

Dept. de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona-España.