UNA NOTA SOBRE LOS SUBESPACIOS K–COMPLEMENTADOS DE LOS ESPACIOS ESCALONADOS DE SUCESIONES

por

JUAN CARLOS DÍAZ ALCAIDE

ABSTRACT

In this paper, for any echelon sequence space $\lambda^p (a_n{}^k)$, $p \neq 2$, we give an echelon sequence space $\Gamma^p (b_n{}^k)$ isomorphic to λ^p and so that the only K–complemented subspaces of Γ^p are the sectional subspaces.

Con esta nota completamos en cierta forma los estudios sobre subespacios K–complementados de [1] y [6], en el marco particular de los espacios escalonados de sucesiones.

Dado un espacio medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ designamos por $\Omega(X)$ el conjunto de las funciones reales $\mathcal{A}$ medibles definidas en X. Identificando dos funciones que son iguales casi por todas partes respecto a la medida μ (en adelante abreviaremos esta frase escribiendo μ-cpd) se obtiene el conjunto cociente $\Omega_o(X)$. En general no haremos distinción entre un elemento g de $\Omega(X)$ y su clase $\hat{g}$ en $\Omega_o(X)$; esta ambiguedad no influye en las demostraciones ni en los resultados que se obtendrán. Dada $f \in \Omega(X)$, se define el soporte de f como el conjunto

$$S(f) = \{ x \in X;\ f(x) \neq 0 \}$$

Dada una sucesión $\{ g_k \}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega(X)$, tal que $g_k(x) \geqslant 0$, y $g_k(x) \leqslant g_{k+1}(x)$, para cada $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$, y verificando

$$\bigcup_{k \geqslant 1} S(g_k) = X\ ,\ \mu\text{-cpd}$$

y dado p perteneciente al conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con $p \geqslant 1$, definimos el espacio escalonado de Köthe de orden p y sistema de escalones $\{ g_k \}_k$ como

Nota: Este trabajo forma parte de la Tesis Doctoral del autor, realizada en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Córdoba bajo la dirección del Profesor Dr. D. Juan Antonio López Molina.

$\Lambda^p = \Lambda^p(X, \mathcal{A}, \mu, g_k) = \{ f \in \Omega_o(X); \| f \|_k^p = \int_X |f|^p g_k \, d\mu < \infty, \forall k \in \mathbb{N} \}$

al que consideramos dotado de la topología dada por la familia de seminormas $\{ \| \cdot \|_k ; k \in \mathbb{N} \}$. Si $A \in \mathcal{A}$, el subespacio seccional de Λ^p por A es

$$\Lambda^p/A = \{ f \in \Lambda^p \ ; \ S(f) \subset A \}$$

Los subespacios seccionales son además subretículos de Λ^p.

Si μ es la medida definida en la σ-álgebra de las partes de $\mathbb{N}$, tal que $\mu(\{n\}) = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos un espacio escalonado de sucesiones en el que el sistema de escalones viene dado por una matriz $(a_n^k)_{n,k \in \mathbb{N}}$ donde

$$0 \leqslant a_n^k \leqslant a_n^{k+1}, \quad \forall \ n,k \in \mathbb{N}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n^k \neq 0$. Denotaremos tales espacios por λ^p ó por $\lambda^p(a_n^k)$ y serán el centro de nuestro trabajo.

Dada una σ-álgebra en X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, diremos que β es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$ en Y, con $Y \subset X$, si es una σ-álgebra en Y y $\beta \subset \mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$, la restricción de $\mathcal{A}$ al conjunto A es la σ-álgebra en A

$$\mathcal{A}_A = \{ B \cap A \ ; \ B \in \mathcal{A} \}$$

que denotaremos por $\mathcal{A}$ si no hay lugar a confusión. Asimismo, dada una medida μ definida sobre $\mathcal{A}$, la restricción de μ a $\mathcal{A}_A$ se denotará por μ_A ó por μ.

Dado un espacio medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, se dice que $A \in \mathcal{A}$ es un átomo si $\mu(A) > 0$ y para toda parte $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, se tiene $\mu(B) = 0$, ó $\mu(B) = \mu(A)$. Diremos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es puramente atómico si todo elemento de $\mathcal{A}$ se puede poner como unión de átomos.

Dada dos funciones $\mathcal{A}$ medibles f y g, el cociente $f/g(t)$, se supone definido como 0 cuando $t \notin S(g)$. La función característica de un conjunto $A \subset X$ se denotará por χ_A.

Lema 1.— Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medida σ-finito y puramente atómico. Sea β una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$ para algún elemento $Y \in \mathcal{A}$. Entonces (Y, β, μ) es puramente atómico.

Demostración.

Claramente $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ es puramente atómico y σ-finito, luego se puede suponer desde el principio que $Y = X$. Sea entonces una sucesión $\{X_n\}$ de elementos de $\mathcal{A}$, con medida finita no nula, disjuntos dos a dos y tales que

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

Entonces, dado $E \in \mathcal{A}$, definimos

$$\upsilon(E) = \Sigma_{n \geqslant 1}\, \mu(E \cap X_n) / (\mu(X_n)\, 2^n) \quad , \quad \forall\, E \in \mathcal{A} \tag{1}$$

es fácil comprobar que $(X, \mathcal{A}, \upsilon)$ es un espacio medida con $\upsilon(X) = 1$.

Dado $A \in \mathcal{A}$, es inmediato. por (1), que

$$\mu(A) = 0 \qquad \text{sii} \qquad \upsilon(A) = 0 \tag{2}$$

Veamos además que A es un átomo en $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si y sólo si lo es en $(X, \mathcal{A}, \upsilon)$.

En efecto, sea A un átomo en $(X, \mathcal{A}, \mu)$, y sea $F \in \mathcal{A}$ con $F \subset A$ entonces $\mu(F) = 0$ ó $\mu(A\text{-}F) = 0$, luego es, por (2), $\upsilon(F) = 0$ ó $\upsilon(A\text{-}F) = 0$, de donde A es un átomo en $(X, \mathcal{A}, \upsilon)$. El recíproco es análogo. Se deduce, por ser $(X, \mathcal{A}, \mu)$ puramente atómico, que $(X, \mathcal{A}, \upsilon)$ es puramente atómico.

Sea ahora β una σ-álgebra en X. $\beta \subset \mathcal{A}$, y sea $C \in \beta$; como $\upsilon(C) < \infty$, es

$$C = A \cup B, \qquad A, B \in \beta$$

donde A es unión, a lo más numerable, de átomos de (X, β, υ), y B no contiene ningún átomo ([7], pág. 372). Veamos que $\upsilon(B) = 0$.

Si $\upsilon(B) > 0$, como $(X, \mathcal{A}, \upsilon)$ es puramente atómico existirá una familia de átomos de $(X, \mathcal{A}, \upsilon)$, sea $\{A_i\}_{i \in I}$, tal que B es la unión de los A_i, $i \in I$. Escogemos ahora (rf. [7]) dos conjuntos $B_1{}^1, B_1{}^2 \in \beta$, disjuntos, tal que

$$B = B_1{}^1 \cup B_1{}^2 \, , \quad \upsilon(B_1{}^1) = \upsilon(B_1{}^2) = \upsilon(B)/2$$

Escogemos un átomo cualquiera de la familia $\{A_i\}_i$, y lo llamamos A, y se tiene, como A es un átomo y $A = (A \cap B_1{}^1) \cup (A \cap B_1{}^2)$

$$\upsilon(A \cap B_1{}^1) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \upsilon(A \cap B_1{}^2) = 0$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \subset B_1{}^1$, υ-cpd. Supongamos que hemos encontrado un conjunto $B_n{}^1 \in \beta$, $B_n{}^1 \subset B$, con

$$\upsilon(B_n{}^1) = \upsilon(B)/2^n, \qquad A \subset B_n{}^1$$

y escogemos como antes dos conjuntos B^1_{n+1}, $B^2_{n+1} \in \beta$, disjuntos cuya unión sea $B_n{}^1$, y tal que

$$\upsilon(B^1_{n+1}) = \upsilon(B^2_{n+1}) = \upsilon(B_n{}^1)/2 = \upsilon(B)/2^{n+1}$$

Razonando como antes es

$$A \subset B^1_{n+1}\ \upsilon\text{-cpd} \quad , \quad \text{ó} \quad A \subset B^2_{n+1}\ \upsilon\text{-cpd}$$

Sin pérdida de generalidad suponemos que se da la primera posibilidad y continuamos el proceso inductivo. Concluimos que A está contenido en la intersección de los conjuntos B^1_n, $n \in \mathbb{N}$, que tiene υ-medida nula, luego $\upsilon(A) = 0$, contra la hipótesis de que es un átomo, luego debe ser $\upsilon(B) = 0$. Así, C es unión de átomos de (X, β, υ) para cada $C \in \beta$, de donde el espacio es puramente atómico, y razonando como al principio, se prueba que también (X, β, μ) es puramente atómico.

c.q.d.

Es sabido que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio medida σ-finito, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y β es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$ en X, existe por el Teorema de Radon-Nikodym una función β-medible, única salvo un conjunto de medida nula, que se denota por $\mathcal{E}(\beta, \mu)(f)$ tal que

$$\int_A f\, d\mu = \int_A \mathcal{E}(\beta,\mu)(f)\, d\mu \quad , \qquad \forall A \in \mathcal{A} \tag{*}$$

La función $\mathcal{E}(\beta, \mu)(f)$ se llama esperanza condicional de f respecto a la medida μ y la σ-álgebra β, (ver [3]).

Un subespacio M de un espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(X, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ se dice K complementado si existe una proyección P definida en Λ^p con rango M, tal que

$$\int_X |P(f)|^p g_k\, d\mu \leqslant \int_X |f|^p g_k\, d\mu \quad , \qquad f \in \Lambda^p \ , \ k \in \mathbb{N}$$

Es claro que los subespacios seccionales son K-complementados (rf. [6]). Hemos demostrado en [2] que si $p \neq 2$, M es un subespacio K-complementado en Λ^p y $f \in M$, entonces

$$\Sigma_f = \{ A \in \mathcal{A} ;\ \exists\, \hat{g} \in M \ \text{y} \ \exists\, g \in \hat{g} \ \text{tq} \ S(g) = A \} \tag{**}$$

es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$ en S (f); además, si denotamos por $|f|^p g_k$ la medida definida como

$$|f|^p g_k(A) = \int_A |f|^p g_k \, d\mu \quad , \; \forall A \in \mathcal{A}$$

se tiene (ver [2]), el siguiente resultado que necesitaremos más adelante.

Teorema A.— Sea M un subespacio K–complementado de $\Lambda^p(X, \mathcal{A}, \mu, g_k)$, $p \neq 2$, y sea $f \in M$; para cada $h \in \Lambda^p$, con $S(h) \subset S(f)$, y cada $k \in \mathbb{N}$, es

$$\mathcal{E}(\Sigma_f, |f|^p g_k)(h/f)\,\chi_{S(g_k)} = \mathcal{E}(\Sigma_f, |f|^p g_{k+1})(h/f)\,\chi_{S(g_k)}$$

Para nuestros siguientes resultados representaremos la sucesión $(a_n{}^k)$ por a^k, para cada $k \in \mathbb{N}$. $\mathcal{N}$ será la σ-álgebra de todas las partes de $\mathbb{N}$, y $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \mu)$ es el espacio medida sobre el que se construyen los espacios de sucesiones.

Lema 2.— Sea $\lambda^p(a_n{}^k)$ un espacio escalonado de sucesiones, $p \neq 2$, y $S \subset \lambda^p$ un subespacio K complementado. Entonces, para cada $f \in S$, la función $(a^k/a^{k+1})\,\chi_{S(f)}$ es Σ_f-medible.

Demostración.

Sea $f = (\alpha_n) \in S$; como $(\mathbb{N}, \mathcal{N}, \mu)$ es puramente atómico, entonces $(S(f), \Sigma_f, \mu)$ es puramente atómico por el Lema 1. Sea $B \in \Sigma_f$ un átomo en $(S(f), \Sigma_f, \mu)$; la función $(a^k/a^{k+1})\,\chi_{S(f)}$ será Σ_f-medible si es constante sobre B, para cada átomo $B \in \Sigma_f$; comprobemos que es así.

En primer lugar, si B es además un átomo en $(N, \mathcal{N}, \mu)$, será de la forma $B = \{n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, y claramente a^k/a^{k+1} es constante en B.

En otro caso, sea A un átomo de $(N, \mathcal{N}, \mu)$, $A = \{j\}$, con $j \in \mathbb{N}$, $A \subset B$, y veamos que el valor que toma a^k/a^{k+1} sobre A depende sólo de f y B.

Como S es K-complementado, por el Teorema A, es

$$\mathcal{E}(\Sigma_f, |f|^p a^k)(\chi_A/f)\,\chi_{S(a^k)} = \mathcal{E}(\Sigma_f, |f|^p a^{k+1})(\chi_A/f)\,\chi_{S(a^k)} \qquad (1)$$

Por otra parte, de la definición de esperanza condicional (*), es

$$\Sigma_{i \in B}\, \mathcal{E}(\Sigma_f, |f|^p a^k)(\chi_A/f)\,|\alpha_i|^p a_i^k = \Sigma_{i \in B}\, \chi_A\, |\alpha_i|^{p-1} a_i^k = |\alpha_j|^{p-1} a_j^k$$

$$\Sigma_{i\in B}\ \mathcal{E}(\Sigma_f,\ |f|^p\ a^{k+1})\ (\chi_A/f)\ |\alpha_i|^p\ a_i^{k+1} = \Sigma_{i\in B\ A} |\alpha_i|^{p-1}\ a_i^{k+1} =$$

$$= |\alpha_j|^{p-1}\ a_j^{k+1}$$

Además, la esperanza de una función es constante sobre B por ser Σ_f-medible y por ser B un átomo en Σ_f (ver [4]), luego, despejando de la anterior igualdad, es

$$\mathcal{E}(\Sigma_f,\ |f|^p\ a^k)\ (\chi_A/f) = ((|\alpha_j|^{p-1}\ a_j^k)/(\Sigma_{i\in B}\ |\alpha_i|^p\ a_i^k))\ \chi_B \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(\Sigma_f,\ |f|^p\ a^{k+1})\ (\chi_A/f) = ((|\alpha_j|^{p-1}\ a_j^{k+1})/(\Sigma_{i\in B}\ |\alpha_i|^p\ a_i^{k+1}))\ \chi_B$$

Si $a_j^k \neq 0$, despejando en las anteriores igualdades y aplicando (1), se tiene

$$(a^k/a^{k+1})\ (j) = (\Sigma_{i\in B}\ |\alpha_i|^p\ a_i^k)/(\Sigma_{i\in B}\ |\alpha_i|^p\ a_i^{k+1})$$

Si $a_j^k = 0$, escogemos $k' \in \mathbb{N}$ tal que $a_j^{k'} \neq 0$, con lo que será

$$\mathcal{E}(\Sigma_f,\ |f|^p\ a^{k'})\ (\chi_A/f) \neq 0 \tag{3}$$

y, de nuevo por el Teorema A, es, usando (2)

$$\mathcal{E}(\Sigma_f,\ |f|^p\ a^{k'})\ (\chi_A/f)\ \chi_{S(a^k)} = \mathcal{E}(\Sigma_f,\ |f|^p\ a^k)\ (\chi_A/f)\ \chi_{S(a^k)} = 0 \tag{4}$$

y, razonando como para (2), $\mathcal{E}(\Sigma_f,\ |f|^p\ a^{k'})\ (\chi_A/f)$ es una función con soporte en B y constante sobre el mismo, luego debe ser de (3) y (4)

$$B \cap S(a^k) = \emptyset$$

de donde $a_i^k\ /\ a_i^{k+1} = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$ con $\{\ i\ \} \subset B$. En cualquiera de los dos casos obtenemos que el cociente a^k/a^{k+1} es constante sobre B

c.q.d.

Usaremos el siguiente resultado demostrado por López Molina en [5].

Proposición B.– Sea M un subespacio cerrado de un espacio escalonado de Köthe separable. Entonces existe una función $f \in M$, tal que para cada $h \in M$, es $S(h) \subset S(f)$ μ-cpd.

Denotamos con e_j la sucesión con todos los términos núlos salvo el j-ésimo que vale uno, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Teorema.– Sea $\lambda^p (a_n^k)$, $p \neq 2$, un espacio escalonado de sucesiones tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $k_0, k_1 \geqslant k$ verificando

$$a_n^{k_0}/a_n^{k_1} \neq a_m^{k_0}/a_m^{k_1}, \quad \forall\, n,m \in S(a^k),\ n \neq m \tag{1}$$

Entonces los únicos subespacios K complementados de λ^p son los subespacios seccionales.

Demostración.

Supongamos que $S \subset \lambda^p$ es un subespacio K–complementado. S es cerrado luego existe, por la Proposición B, una función $f = (\alpha_n)$ perteneciente a S y de soporte máximo en S. Sea $k \in \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto $B_k = S(a^k) \cap S(f)$; veamos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, con $j \in B_k$ es $e_j \in S$.

En efecto, sean $k_0, k_1 \geqslant k$ verificando (1). Como S es K complementado, haciendo uso del Lema 2 anterior, el cociente a^{k_0}/a^{k_1} restringido a S (f) debe ser Σ_f-medible, y por la condición (1), la σ-álgebra que hace medible a dicho cociente debe contener a todos los átomos $\{ j \} \subset S(f) \cap S(a^k)$, $j \in \mathbb{N}$, así pués, para cada $j \in \mathbb{N}$, con $j \in B_k$, debe ser $\{ j \} \in \Sigma_f$. Ahora, por la definición de Σ_f. (**) dado $j \in B_k$, existirá una función $g = (\beta_n) \in S$, tal que $S(g) = \{ j \}$ luego (β_n) es una sucesión con todos los términos nulos salvo el j-ésimo, de donde $e_j \in S$.

Lo anterior es válido para cada $k \in \mathbb{N}$, y como $S(f) = \bigcup_{k \geqslant 1} B_k$ se tiene que $e_j \in S$ para cada $j \in \mathbb{N}$ con $j \in S(f)$; de aquí es fácil deducir, por ser S cerrado y f una función de soporte máximo en S, que S es el subespacio seccional $\lambda^p/S(f)$.

c.q.d.

Como consecuencia obtenemos el resultado anunciado.

Corolario.– Sea $\lambda^p (a_n^k)$, $p \neq 2$, un espacio escalonado de sucesiones. Existe un espacio escalonado $\Gamma^p (b_n^k)$ isomorfo a λ^p que no contiene ningún subespacio K complementado salvo los seccionales.

Demostración.

Definimos los siguientes escalones.

$$c_n{}^k = (k+1)\, a_n{}^k \ , \quad \forall\, n,k \in \mathbb{N}$$

Es claro que $\nabla^p\,(c_n{}^k)$ es isomorfo a $\lambda^p\,(a_n{}^k)$ y además se tiene

$$c_n{}^{k+1} = 0 \ , \ \text{ó} \ c_n{}^k < c_n{}^{k+1} \ , \ \forall\, n,k \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Construyamos ahora la familia de escalones $b^k = (b_n{}^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Para ello sean

$$b_n{}^{2k} = c_n{}^k \ , \ n,k \in \mathbb{N}$$

y vamos a intercalar los escalones impares de forma que se verifique la condición (1) del Teorema. Dado $k \in \mathbb{N}$, trabajaremos en primer lugar en el conjunto $S\,(b^{2k+2})$, que supondremos infinito (en el caso finito se razona igual) y ordenado en la forma $\sigma(\mathbb{N})$; sea un elemento cualquiera del intervalo $(b^{2k}_{\sigma(1)}, b^{2k+2}_{\sigma(1)}) \subset \mathbb{R}$, que no es vacio por (1), y lo llamamos $b^{2k+1}_{\sigma(1)}$. Supongamos escogidos $\left\{ b^{2k+1}_{\sigma(i)} \right\}_{i=1}^{n-1}$, tales que

$$b^{2k}_{\sigma(i)} / b^{2k+1}_{\sigma(i)} \neq b^{2k}_{\sigma(j)} / b^{2k+1}_{\sigma(j)} \ . \ i,j \in \{1, \ldots, n-1\} \ , \ i \neq j \qquad (2)$$

y sea $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$b^{2k}_{\sigma(n)} / (\xi b^{2k}_{\sigma(n)} + (1-\xi) b^{2k+2}_{\sigma(n)}) \neq b^{2k}_{\sigma(i)} / b^{2k+1}_{\sigma(i)} \ , \ \ i = 1, \ldots, n-1$$

y escogemos $\xi b^{2k}_{\sigma(n)} + (1-\xi) b^{2k+2}_{\sigma(n)}$ como el elemento $b^{2k+1}_{\sigma(n)}$. Si j no pertenece a $S(b^{2k+2})$, hacemos $b_j^{2k+1} = 0$. Queda sin construir b^1 que podemos suponerlo idénticamente nulo.

Es fácil comprobar que $\lambda^p(b_n{}^k)$ es isomorfo a $\nabla^p(c_n{}^k)$ y que verifica la condición (1) del Teorema, luego es isomorfo a λ^p y no contiene subespacios K complementados salvo los seccionales.

c.q.d.

Nota. Si $p = 2$, usando la caracterización de [6], y razonando de forma análoga al caso general, se pueden probar los resultados anteriores substituyendo los subespacios K complementados por subretículos K-complementados.

BIBLIOGRAFIA

[1] J.C. DIAZ: Subespacios de un espacio escalonado de Köthe K-isomorfos a un espacio de sucesiones. Collec. Math., Vol. XXXV, fasc. 2º.

[2] -: Subespacios y bases K-monótonas en los espacios escalonados de Köthe. Tesis Doctorales de Granada, pendiente de presentación.

[3] J.A. LOPEZ MOLINA: The dual and bidual of an echelon Köthe space. Collec. Math. 31, 2, (1980), 159-191.

[4] - : Reflexividad en los espacios escalonados de Köthe. Rev. Real Acad. Ciencias de Madrid, 75, 1º, (1981), 213-232.

[5] : Subespacios de un espacio escalonado de Köthe. Rev. Real Acad. Ciencias de Madrid, 75, 3º (1981), 597-624.

[6] -: Caracterización de los subretículos K complementados de un espacio escalonado de Köthe. Rev. Real Acad. Cien. Madrid, 75, 5º, (1981), 1133-1163.

[7] A.C. ZAANEN: Integration. North Holland, (1967).

Juan Carlos Díaz Alcaide
Cátedra de Matemáticas
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos
CORDOBA