UNICIDAD LOCAL EN EL EQUILIBRIO ELASTICO (PIEZAS LONGITUDINALES CON LEYES NO LINEALES)

por

E. GARBAYO* y M. A. PUIGVÍ**

ABSTRACT

Uniqueness of the equilibrium solution can be guaranteed for conservative rods provided that the external loads are sufficiently close to those of some initial (i.e. reference) configuration. This implies that, wherever the loads belong in such domain, branching phenomena will not take place.

1. INTRODUCCION

En nuestro desarrollo consideramos, en el espacio tridimensional, piezas longitudinales elásticas con leyes no lineales, bajo la acción de cargas que derivan de un potencial. La pieza elástica está definida por una curva alabeada, llamada directriz, no necesariamente la línea de centroides de las secciones transversales, y aceptamos la hipótesis clásica de que tales secciones se mantienen planas al deformarse la pieza, pero sin suponer que necesariamente permanezcan normales a la directriz deformada.

S. S. Antman ha demostrado con hipótesis más generales (3) que la de secciones planas, la existencia de configuraciones de equilibrio, expresando la energía elástica en función (invariante por movimientos rígidos) de los desplazamientos, todo ello para tipos especiales de cargas exteriores conservativas. En nuestro caso especial y eligiendo adecuadas "deformaciones" (4), se consigue un desarrollo matemático más simplificado (6), (5) y cierta generalidad en las cargas exteriores consideradas.

* E.T.S. de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid.
** E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Barcelona.

Seguimos ahora la notación de (5) para escribir el funcionamiento de energía elástica en la forma:

$$E(\bar{\gamma}) = \int_a^b U_i(\bar{\gamma}(s), s)\, ds + q \int_a^b U_e((\mathcal{T}(\bar{\gamma}))(s), \mathcal{Q}(\bar{\gamma})(s)\, \beta(a), s)\, ds \qquad [1]$$

en donde la primera integral corresponde a la energía interna de la pieza, y la segunda a la energía externa; q es un parámetro real y $\bar{\gamma}$: $[a, b] \to R^6$ es una función vectorial de "deformación", que depende del parámetro longitud de arco s (sobre la curva directriz indeformada), cuyas tres primeras componentes corresponden a deformaciones angulares, y las otras tres a deformaciones longitudinales.

En (6) y (5) se definen ciertos operadores no lineales $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$, cuyo argumento genérico es la función γ de deformación y cuyo resultado son unas funciones $\vec{u}(s)$, $B(s)$ que llamaremos de desplazamiento generalizado:

$$B(s) = (\mathcal{Q}(\gamma))(s) \qquad \vec{u}(s) = (\mathcal{T}(\gamma))(s)$$

donde $\vec{u}(s_0)$ representa el desplazamiento del punto de la directriz para el valor s_0 de $[a, b]$, y $B(s_0)$ es una matriz ortogonal directa 3 x 3, cuyas filas corresponden a las componentes de tres vectores, dos de ellos en el plano de la sección deformada que corresponden al valor s_0 de arco de directriz, y el tercero ortogonal a los dos anteriores en el sentido de valores crecientes del parámetro s.

Cuando $\gamma(s) = \vec{0}$ (pieza sin deformar) se debe obtener (según propiedades obligadas de los operadores $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$) $\vec{u}(s) = \vec{0}$, $B(s) = \beta(s)$, donde $\beta(s)$ es una función matricial (ortogonal) conocida a priori.

Se suponen ciertas condiciones de contorno:

i) los extremos de la curva permanecen fijos: $\vec{u}(a) = \vec{u}(b) = \vec{0}$

ii) empotramiento en $s = a$: $B(a) = \beta(a)$

iii) articulación en $s = b$: $B(b)\,\vec{h} = \vec{H} = \beta(b)\,\vec{h}$, donde $\vec{h}$ y $\vec{H}$ son vectores unitarios prefijados.

Se considera ahora el funcional:

$$W(\bar{\gamma}) = \int_a^b U_i(\bar{\gamma}(s), s)\, ds + q \int_a^b U_e((\mathcal{T}(\bar{\gamma}))(s), \mathcal{Q}(\bar{\gamma})(s)\, \beta(a), s)\, ds + \\ + \sum_{j=1}^{5} \nu^j \mathcal{F}_j(\bar{\gamma})$$

que abreviamos en la forma:

$$W(\bar{\gamma}) = E_i(\bar{\gamma}) + qE_e(\bar{\gamma}) + \sum_{j=1}^{5} \nu^j \mathcal{F}_j(\bar{\gamma}) \qquad [2]$$

en donde los ν^j son multiplicadores de Lagrange, y los $\mathcal{F}_j(\bar{\gamma})$ ciertos funcionales de contorno asociados a las condiciones i) ii) iii) cuya descripción detallada puede verse en (6) ó (5). El dominio de estos funcionales, así como el de E_e puede tomarse coincidente con el espacio de las funciones vectoriales (con seis componentes) continuas en el intervalo [a, b], espacio denotado C [a, b; 6].

Al exigir la llamada invertibilidad local de la deformación de la pieza, se encuenta (6) que el dominio de definición de E_i debe restringirse al conjunto:

$$\widetilde{\mathfrak{B}} = \{ \overline{\gamma} \in C[a,b;6] \mid \forall s \in [a,b],\ \overline{\gamma}(s) \in \Omega_s \}$$

siendo Ω_s un cierto conjunto abierto y convexo en R^6. En (6) se demuestra que toda "deformación" $\overline{\gamma}_*$ que proporcione un mínimo al funcional E_i pertenece al conjunto $\widetilde{\mathfrak{B}}$

2. UNICIDAD LOCAL DE SOLUCION DE EQUILIBRIO

Notaciones:

$$\overline{\mathfrak{C}} = (\overline{\gamma}(s), \nu^1, \ldots, \nu^5) \ ;\ \mathfrak{D} = C[a,b;6] \times R^5 \ ;\ \widetilde{\mathfrak{D}} = \widetilde{\mathfrak{B}} \times R^6 \qquad [3]$$

2.1. Lema. La derivada Frechet $W' : \widetilde{\mathfrak{D}} \to \mathcal{L}(\mathfrak{D}, R)$ del funcional [2] viene dada por:

$$\forall (\overline{\mathfrak{C}}_0, q_0) \in \widetilde{\mathfrak{D}} \ ; \forall\ \overline{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{D}$$

$$W'(\overline{\mathfrak{C}}_0, q_0 : \overline{\mathfrak{C}}) = \sum_{k=1}^{6} \int_a^b \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial \gamma_k} (\overline{\gamma}_0(s), s) + q_0 \sum_{p=1}^{3} \mathcal{H}_{kp}(\overline{\gamma}_0)(s) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{5} \sum_{l=1}^{3} \nu_0^j\, \mathcal{H}_{klj}(\overline{\gamma}_0)(s) \right\} \gamma_k(s)\, ds + \sum_{j=1}^{5} \nu^j \mathcal{F}_j(\overline{\mathfrak{F}}_0) \qquad [4]$$

en donde los $\mathcal{H}_{kp}$ son operadores definidos en detalle en (6), (5), que se expresan en función de los operadores $\mathcal{T}$ y $\mathcal{Q}$, y del funcional U_e. De forma similar los operadores $\mathcal{H}_{klj}$ son función de $\mathcal{T}$, $\mathcal{Q}$ y de los $\mathcal{F}_j$.

No efectuaremos la elemental (pero larga) prueba de este lema, la cual se limita a comprobar los requerimientos que se exigen por definición (7) a la derivada Frechet.

2.2. Definición. A partir de la anterior derivada, se define un operador W_1, de $\widetilde{\mathfrak{D}}$ en $\mathfrak{D}$.

$$\forall (\overline{\mathfrak{C}}_0, q_0) \in \widetilde{\mathfrak{D}}$$

$$W_1(\overline{\mathfrak{C}}_0, q_0) = (X_1(s), \ldots, X_6(s), k_1, \ldots, k_5) \qquad [5]$$

Siendo $\forall m = 1, \dots 6$, $\forall j = 1, \dots 5$

$$X_m(s) = \frac{\partial U_i}{\partial \gamma_m}(\overline{\gamma}_0(s), s) + q_0 \sum_{p=1}^{3} \mathcal{H}_{mp}(\overline{\gamma}_0)(s) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{5} \sum_{l=1}^{3} \nu_0^j \, \mathcal{H}_{mlpj}(\overline{\gamma}_0)(s)$$

$$k_j = \mathcal{F}_j(\overline{\gamma}_0) \qquad [6]$$

*2.3. **Propiedades.*** Se comprueba fácilmente

a) $\forall (\overline{\mathcal{T}}_0, q_0) \in \widetilde{\mathcal{D}}$; $\forall \overline{\mathcal{T}} \in \mathcal{D}$

$$W'(\overline{\mathcal{T}}_0, q_0; \overline{\mathcal{T}}) = \sum_{m=1}^{6} \int_a^b (W_1(\overline{\mathcal{T}}_0, q_0))_m (s) \mathcal{T}_m(s)\, ds +$$

$$+ \sum_{m=7}^{11} (W_1(\overline{\mathcal{T}}_0, q_0))_m \mathcal{T}_m$$

b) Para cada $(\overline{\mathcal{T}}_0, q_0)$ en $\widetilde{\mathcal{D}}$ es $W_1(\overline{\mathcal{T}}_0, q_0) = 0$ si, y sólo si, para cada índice $m = 1, \dots 6$ $(\overline{\mathcal{T}}_0)_m(s)$ verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange necesarias de mínimo, para el funcional $E_i + q_0 E_e$, con las condiciones isoperimétricas $\mathcal{F}_j(\overline{\mathcal{T}}_0) = 0, j = 1, \dots 5$.

2.4. Teorema.

$$\exists \delta > 0, \quad \exists ! \, T \in C(-\delta, \delta; \mathcal{D}) \quad , \quad \forall q \in (\delta, \delta) \quad , \quad W_1(T(q), q) = 0$$

Es decir, en palabras menos precisas, existe un entorno de $q = 0$, en que la configuración de equilibrio es única.

Para demostrar este teorema nos basaremos en el Teorema de función implícita (ver (7), pág. 219) aplicado al operador W_1 en el punto $(\overline{\mathcal{T}}_0 = \overline{0}, 0)$, siendo $\overline{\mathcal{T}}_0 = \overline{0}$ la configuración inicial, o de referencia, que suponemos de equilibrio, es decir:

$$W_1(\vec{\mathcal{T}}_0 = \vec{0}, 0) = 0$$

A continuación deberíamos justificar que se verifican todas las hipótesis de validez del mencionado teorema, pero nos limitaremos a la más difícil de biyectividad del operador lineal acotado $(\partial W_1 / \partial \overline{\mathcal{T}})(\vec{0}, 0)$, dado el carácter rutinario del resto de comprobaciones relativas a la existencia y continuidad de las derivadas Frechet involucradas.

Para el citado operador lineal, que aplica $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}$ (recordar las notaciones [4]), se comprueba fácilmente su acotación, lo que omitiremos y asimismo se constata:

$$\forall \delta \vec{\mathcal{C}} \in \mathcal{D}\ ,\ \partial W_1/\partial \vec{\mathcal{C}}(\vec{0}, 0; \delta\vec{\mathcal{C}}) = (\delta X_1(s), \ldots \delta X_6(s), \delta f_1, \ldots \delta f_5) \quad [7]$$

donde se han adoptado las notaciones:

$$\forall k = 1, \ldots 6$$

$$\delta X_k(s) = \sum_{r=1}^{6} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \gamma_k\, \partial \gamma_r}(\vec{0}, s)\, \delta\gamma_r(s) + \sum_{j=1}^{5} \sum_{l=1}^{3} \delta\nu^j\, \mathcal{K}_{klj}(\vec{0})(s)$$

$$\forall j = 1, \ldots 5$$

$$\delta f_j = \sum_{r=1}^{6} \sum_{l=1}^{3} \int_a^b \delta\gamma_r(s)\, \mathcal{K}_{rlzj}(\vec{0})(s)\, ds \quad [8]$$

Introducimos ahora notaciones matriciales:

$$\delta X(s) = \begin{bmatrix} \delta X_1(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta X_6(s) \end{bmatrix} \ ;\ \delta f = \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta f_5 \end{bmatrix} \ ;\ \Gamma(s) = \begin{bmatrix} \delta\gamma_1(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\gamma_6(s) \end{bmatrix} \ ;\ \delta\nu = \begin{bmatrix} \delta\nu^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\nu^5 \end{bmatrix}$$

$$M(s) = (m_{kr}(s)) \quad \forall k, r = 1, \ldots 6 \qquad m_{kr}(s) = \frac{\partial^2 U_i}{\partial\gamma_k \partial\gamma_r}(\vec{0}, s) \quad [9]$$

$$R(s) = (R_{kj}(s)) \quad \forall k = 1, \ldots 6 \quad \forall j = 1, \ldots 5 \qquad R_{kj}(s) = \sum_{l=1}^{3} \mathcal{K}_{klj}(\vec{0})(s)$$

Según las hipótesis sobre la naturaleza física de la energía interna U_i, expuestas en (4), o bien en (2), la matriz M(s) es, para cada valor de s en [a, b] definida positiva y, por tanto, asimismo invertible.

Con estas notaciones, las expresiones [8] se pueden escribir de forma compacta:

$$\delta X(s) = M(s)\, \Gamma(s) + R(s)\, \delta\nu$$

$$\delta f = \int_a^b R^T(s)\, \Gamma(s)\, ds \quad [10]$$

*2.5. **Lema.*** La matriz $R(b) \in M_R\,(6 \times 5)$ tiene rango máximo. Dicha afirmación se comprueba por escritura directa:

$$
R(b) = \left[\begin{array}{cc|ccc}
0 & H^3 & 0 & 0 & 0 \\
H^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
H^2 & -H^1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & & & \\
0 & 0 & & \beta(b) & \\
0 & 0 & & &
\end{array}\right]
$$

ya que al ser $\beta(b)$ una matriz ortogonal, y $\vec{H} = (H^1, H^2, H^3)$ un vector unitario, basta tomar un sistema de referencia en el que $H^3 \neq O$.

*2.6. **Lema.*** La matriz G de $M_R\,(5 \times 5)$, definida por

$$G = \int_a^b R^T(s)\, M^{-1}(s)\, R(s)\, ds$$

es una matriz definida positiva y, por tanto, invertible.

Sea $\vec{v}$ un vector cualquiera no nulo de R^5, y con la notación $\vec{w}(s) = R(s)\,\vec{v}$ escribamos:

$$\vec{v}^T G\, \vec{v} = \int_a^b \vec{v}^T R^T(s)\, M^{-1}(s)\, R(s)\, \vec{v}\, ds = \int_a^b \vec{w}^T(s)\, M^{-1}(s)\, \vec{w}(s)\, ds \qquad [11]$$

Por otra parte, el lema 2.5 permite afirmar que $\vec{w}(b) \neq \vec{O}$ ya que $\vec{v} \neq \vec{O}$ y dado que $\vec{w}(s)$ es una función vectorial continua, se deduce su no anulación en todo un semientorno de la forma $(b-\mu, b]$, con lo cual:

$$\vec{v}^T G\, \vec{v} = \int_a^{b-\mu} \vec{w}^T(s)\, M^{-1}(s)\, \vec{w}(s)\, ds + \int_{b-\mu}^b \vec{w}^T(s)\, M^{-1}(s)\, \vec{w}(s)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \int_{b-\mu}^b \vec{w}^T(s)\, M^{-1}(s)\, \vec{w}(s)\, ds > O$$

A partir de los dos lemas anteriores, no es ya difícil demostrar que el operador $\partial W_1/\partial \overline{\mathfrak{T}}(\vec{O}, O)$ es biyectivo de $\mathfrak{D}$ sobre sí mismo.

Reescribimos las expresiones [10] en la forma:

$$\Gamma(s) = M^{-1}(s)\,(\delta X(s) - R(s)\,\delta\nu)$$

$$\delta\nu = G^{-1}\left(\int_a^b R^T(s)\, M^{-1}(s)\, \delta X(s)\, ds - \delta\Gamma\right) \qquad [12]$$

y de ellas deducimos que si $\delta X(s) = \delta f = 0$, entonces y en primer lugar $\delta \nu = 0$, y como consecuencia $\Gamma(s) = 0$. Por otra parte, dados $\delta X(s)$ y δf arbitrarios en [12] obtenemos única $\delta \nu$ de la segunda de las [12] y luego única $\Gamma(s)$ de la primera de ellas. Se verifican así todos los requisitos para poder aplicar el teorema de la función implícita, y garantizar, por tanto, la unicidad local de solución.

BIBLIOGRAFIA

(1) Antman, S. S.: "The Theory of Rods". Handbuch der Physik, Vol VI a/n (1972). Springer Verlag, 641-703.

(2) Antman, S. S.: "Kirchhoff's problem for nonlinearly elastic rods". Quart. Appl. Math. 32, 221-240, 1974.

(3) Antman, S. S.: "Ordinary Differential Equations of Non-linear Elasticity I and II". Arch. for Rational Mec. and Analysis. 61 (1976) 307-393.

(4) Antman, S. S. and Jordan, K. B.: "Qualitative Aspects of the Spatial Deformation of Non-linearly Elastic Rods". Proc. of the Royal Society of Edimburgh-73A, 1974/75.

(5) Bertellotti, E.: "Pieza unidimensional hiperelástica. Estudio matemático del estado de solicitación con grandes deformaciones". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica. Barcelona 1983.

(6) Garbayo, E.: "The strain set for a class of spatial rods". (To appear).

(7) Kantorovitch, L. y Akilov, G.: "Analyse Fonctionelle". Editions Mir. Moscou, 1981.