SUBESPACIOS DE UN ESPACIO ESCALONADO DE KÖTHE K-ISOMORFOS A UN ESPACIO DE SUCESIONES

por

JUAN C. DIAZ ALCAIDE

ABSTRACT

In this paper we characterize the subspaces of an echelon Köthe space wich are K-isomorphic to a sequence space. From the above mentioned subspaces we characterize those wich are K-complemented sublattices.

En este artículo consideramos únicamente espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales R y espacios medida $(E, \mathcal{A}, \mu)$ localizables y con la propiedad de los subconjuntos finitos (ver [7]). Dado el espacio medida $(E, \mathcal{A}, \mu)$, se dice que $A \in \mathcal{A}$ es un atomo si $\mu(A) > 0$ y para toda parte $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, se tiene $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = \mu(A)$. Si el conjunto $A \in \mathcal{A}$ no contiene ningún átomo se llama puramente no atómico. Si todo conjunto de medida finita es una unión de átomos, el espacio se llama puramente atómico. Se denotará por Ω (E) el conjunto de las funciones reales $\mathcal{A}$ -medibles definidas en E. Identificando dos funciones que son iguales casi por todas partes respecto a la medida μ (en adelante abreviaremos esta frase poniendo μ-ctp) se obtiene el conjunto cociente Ω_0 (E). En general no se hará distinción entre un elemento de Ω (E) y su clase en Ω_0 (E).

Dada $f \in \Omega$ (E) se define el soporte de f como el conjunto

$$S(f) = \{ t \in E \; : \; f(t) \neq 0 \}$$

El soporte de $f \in \Omega_0$ (E) se define como el soporte de un representante de f. Por tanto dada $f \in \Omega_0$ (E), S(f) está bién definido salvo un conjunto de medida

Trabajo realizado en la Cátedra de Matemáticas I de la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos de Córdoba bajo la dirección del Profesor Dr. J.A. López Molina.

nula. Esta ambiguedad no influye en las demostraciones ni en los resultados que se obtendrán. Dadas dos funciones medibles f y g, el cociente $(f/g)(t)$ se supondrá definido como 0 cuando $t \notin S(g)$. La función característica de un conjunto $A \subset E$ se denotará por χ_A.

En un retículo vectorial F, el supremo (respectivamente el ínfimo) de dos elementos $x,y \in F$ se denotará por $x \vee y$, (respectivamente $x \wedge y$). Dado $x \in F$ se definen

$$x^+ = x \vee 0 \quad , \quad x^- = (x \wedge 0) \quad , \quad |x| = x^+ + x^-$$

Una seminorma P sobre un retículo vectorial F se llamará seminorma de retículo si $P(x) = P(|x|)$ para cada $x \in F$. Dicha seminorma se dirá p-aditiva si dados dos elementos $x,y \in F$ tales que $x \wedge y = 0$ se verifica $(P(x+y))^p = P(x)^p + P(y)^p$.

Denotaremos por N el conjunto de los números naturales.

Dado un espacio medida $(E, \mathcal{A}, \mu)$, sea $\{g_k\}_{k \in N}$ una sucesión creciente en $\Omega(E)$, tal que $g_k(t) \geqslant 0$ para todo $t \in E$, $k \in N$, y

$$\mu\Big(\bigcap_{k \in N} \{t \in E / \ g_k(t) = 0\}\Big) = 0$$

Para cada $p \in R$, $p \geqslant 1$, se define el espacio escalonado de Köthe de orden p como

$$\Lambda^p = \Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k) = \Big\{ f \in \Omega_0(E) / \ \|f\|_k^p = \int_E |f|^p g_k d\mu < \infty, \quad \forall \ k \in N \Big\}$$

Si dotamos a Λ^p de la topología definida por las seminormas $\|\cdot\|_k$, $k \in N$, y del orden definido por $f \leqslant g$ si y sólo si $f(t) \leqslant g(t)$ μ-ctp en E, $(\Lambda^p, \mathcal{T})$ es un retículo vectorial topológico de Frechet, orden completo, normal (para las demostraciones ver [2]), con seminormas de retículo p-aditivas.

Si μ es la medida definida en la σ-álgebra de todas las partes de N, tal que $\mu(\{n\}) = 1$. para cada $n \in N$, obtenemos un espacio escalonado de Köthe de sucesiones en el que el conjunto de los escalones $\{g_k\}_{k \in N}$ viene representado por una matriz $(a_n^k)_{n,k \in N}$ donde

$$0 \leqslant a_n^k \leqslant a_n^{k+1} \qquad \forall\, k,n \in N$$

Denotaremos tales espacios por λ^p o por $\lambda^p(a_n^k)$.

Los espacios escalonados de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ y $\Gamma^p(T, \beta, \nu, h_k)$ se dicen K-isomorfos si existe una biyección lineal $G: \Lambda^p \to \Gamma^p$ tal que

$$\int_T |G(f)|^p h_k d\nu = \int_E |f|^p g_k d\mu \qquad \forall\, f \in \Lambda^p, \quad k \in N$$

Un subespacio $M \subset \Lambda^p$ se dice K-isomorfo a un espacio escalonado de Köthe si existe un $l^p(T,\beta,\nu,h_k)$ y una biyección lineal $G: M \to l^p$ que cumple la igualdad anterior para cada $f \in M$ y cada $k \in N$.

Lema 1.– Sea el espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$. Para cada $B \in \mathcal{A}$ de medida finita, y para todo $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $\chi_A \in \Lambda^p$, $A \subset B$, y $\mu(B - A) < \varepsilon$.

Demostración: Sea $B_0 = B$. Para cada $n \in N$ sea $B_n = \{x \in B ; g_1(x) \leq n\}$. Entonces $B = \bigcup\limits_{n \in N} B_n$ y por ser $\mu(B) < \infty$ podemos escoger un B_{n_1} que llamaremos B_1 tal que $\mu(B - B_1) \leq \varepsilon/2$.

Supongamos construida una familia de conjuntos $\{B_i\}_{i=1}^m$ verificando para cada $i=1, \dots m$

$$B_i \subset B_{i-1} \quad \text{y} \quad \mu(B_{i-1} - B_i) \leq \varepsilon/2^i \tag{1}$$

y tal que

$$g_i(x) \leq n_i \qquad \forall\, x \in B_i \;,\; n_i \in N, i=1 \dots m \tag{2}$$

A partir de B_m construimos

$$B_m{}^n = \{x \in B_m : g_{m+1}(x) \leq n\} \qquad n \in N$$

Entonces $B_m = \bigcup\limits_{n \in N} B_m{}^n$ y escogemos un $B_m{}^{n_{m+1}}$ que llamamos B_{m+1} tal que $\mu(B_m - B_{m+1}) \leq \varepsilon/2^{m+1}$.

Se puede construir por tanto una sucesión de conjuntos $\{B_n\}_{n \in N}$ verificando (1) y (2) para cada $i \in N - \{0\}$.

Sea $A = \bigcap\limits_{n \geq 0} B_n$. Por ser $\{B_n\}_{n \in N}$ contractiva, se tiene

$$\mu(B - A) = \mu(B - \bigcap_{n \geq 0} B_n) = \mu(\bigcup_{n \geq 0} (B - B_n)) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu(B - B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{n} (B_{k-1} - B_k)) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} (\sum_{k=1}^{n} (\mu(B_{k-1} - B_k)) \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon/2^k) = \varepsilon$$

Veamos que $\chi_A \in \Lambda^p$. Para ello, tenemos por (2), para cada $k \in N$

$$\int_E \chi_A{}^p g_k d\mu = \int_A g_k d\mu \leqslant n_{k+1}\mu(A) < \infty$$

c.q.d.

Posteriormente se necesitará el siguiente resultado (rf. [6] para la demostración), que enunciamos solamente.

Lema 2.– Sean a y b números reales. Se tienen las siguientes desigualdades:

$$(2 \leqslant p < \infty) \qquad |a+b|^p + |a-b|^p \geqslant 2(|a|^p + |b|^p)$$
$$(0 < p \leqslant 2) \qquad |a+b|^p + |a-b|^p \leqslant 2(|a|^p + |b|^p)$$

En cualquiera de los dos casos, si $p \neq 2$, se da la igualdad sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

También se usará la siguiente observación. La p-aditividad de las seminormas en un espacio Λ^p implica la siguiente condición : si $fg = 0$ entonces $\| f+g \|_k^p = \| f \|_k^p + \| g \|_k^p$, para cada $k \in N$.

Para ello, basta observar que si $f \cdot g = 0$ entonces $| f+g | = | f | + | g |$ y $| f | \wedge | g | = 0$. Así, por ser $\| \cdot \|_k$ una seminorma de retículo p-aditiva se tiene, si $fg = 0$

$$\| f+g \|_k^p = \| \, | f+g | \, \|_k^p = \| \, | f | + | g | \, \|_k^p = \| \, | f | \, \|_k^p + \| \, | g | \, \|_k^p = \| f \|_k^p + \| g \|_k^p$$

Lema 3.– Sea el espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ y sean $f, g \in \Lambda^p$. Si $p \neq 2$, entonces $fg = 0$ si y sólo si $\| f+g \|_k^p + \| f - g \|_k^p = 2(\| f \|_k^p + \| g \|_k^p)$ para cada $k \in N$. Si $p = 2$, $f \geqslant 0$ y $g \geqslant 0$, se tiene $fg = 0$ si y sólo si $\| f+g \|_k^2 = \| f \|_k^2 + \| g \|_k^2$, para cada $k \in N$.

Demostración: Para una p cualquiera, la condición necesaria se cumple por ser p-aditivas las seminormas y por la observación previa al presenta Lema.

Para la condición suficiente, sea en primer lugar $p \neq 2$, supongamos $\mu(S(f) \cap S(g)) > 0$. Existirá un $k \in N$ tal que $\mu(S(f) \cap S(g) \cap S(g_k)) > 0$. Supongamos ahora que $1 \leqslant p < 2$ (la demostración es análoga para $2 < p < \infty$) y, aplicando la segunda parte del Lema 2, tendremos para cada $x \in S(f) \cap S(g)$

$$| f(x) + g(x) |^p + | f(x) - g(x) |^p < 2(| f(x) |^p + | g(x) |^p)$$

Si además $x \in S(g_k)$ entonces

$$(|f(x)+g(x)|^p + |f(x) - g(x)|^p) g_k(x) < 2(|f(x)|^p + |g(x)|^p) g_k(x)$$

de donde

$$\int_{S(f) \cap S(g)} (|f+g|^p + |f-g|^p) g_k d\mu < \int_{S(f) \cap S(g)} 2(|f|^p + |g|^p) g_k d\mu$$

Por tanto

$$\| f+g \|_k^p + \| f-g \|_k^p = \int_E (|f+g|^p + |f-g|^p) g_k d\mu =$$

$$= \int_{S(f)-S(g)} (|f+g|^p + |f-g|^p) g_k d\mu + \int_{S(g)-S(f)} (|f+g|^p + |f-g|^p) g_k d\mu +$$

$$+ \int_{S(f) \cap S(g)} (|f+g|^p + |f-g|^p) g_k d\mu <$$

$$< \int_{S(f)-S(g)} 2|f|^p g_k d\mu + \int_{S(g)-S(f)} 2|g|^p g_k d\mu +$$

$$+ \int_{S(f) \cap S(g)} 2(|f|^p + |g|^p) g_k d\mu = \int_{S(f) \cup S(g)} 2(|f|^p + |g|^p) g_k d\mu =$$

$$= 2\left(\int_E |f|^p g_k d\mu + \int_E |g|^p g_k d\mu \right) = 2(\| f \|_k^p + \| g \|_k^p)$$

obteniendose que existe un $k \in N$ tal que

$$\| f+g \|_k^p + \| f-g \|_k^p < 2(\| f \|_k^p + \| g \|_k^p)$$

en contra de la hipótesis, luego debe ser $\mu(S(f) \cap (S(g))) = 0$ y por tanto $fg = 0$.

Para $p = 2$. $\| f+g \|_k^2 = \int_E |f+g|^2 g_k d\mu = \int_E f^2 g_k d\mu + \int_E g^2 g_k d\mu + 2 \int_E f g g_k d\mu$. Esta expresión es igual por hipótesis a $\| f \|_k^2 + \| g \|_k^2$ de donde $\int_E f g g_k \, d\mu = 0$, $k \in N$. Por ser $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, se tiene $f g g_k = 0$ para todo $k \in N$, luego necesariamente $fg = 0$.

c.q.d.

Se usará con frecuencia el siguiente resultado (cf. [2]).

Lema 4.– Sea Λ^p un espacio escalonado de Köthe. Si $\{f_n\}_{n \in N}$ converge a f en la topología $\mathcal{T}$ de las seminormas, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\lim\limits_{n_k} f_{n_k}(x) = f(x)$ μ-ctp.

Proposición 5.– Sea $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe tal que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ no es una unión finita de atomos. Entonces existe un subretículo cerrado de Λ^p k-isomorfo a un espacio de Köthe de sucesiones $\lambda^p(a_i^j)$.

Demostración: Supongamos en primer lugar que el espacio medida contiene una parte $A \in \mathcal{A}$ puramente no atómica, que podemos suponer de medida finita por la propiedad de los subconjuntos finitos. Se construirá una sucesión $\{A_n\}_{n\in N}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que $A_n \subset A$, y $\mu(A_n) > 0$ para cada $n \in N$.

Para ello, sea A_0 un subconjunto de A tal que $\mu(A_0) > 0$ y $\mu(A - A_0) > 0$, y supongamos escogidos $A_0, A_1, \ldots A_r$ disjuntos dos a dos de medida no nula y tales que $\mu(A - \bigcup_{i=0}^{r} A_i) > 0$. Como A es puramente no atómico, entonces $A - \bigcup_{i=0}^{r} A_i$ lo será también, y podemos encontrar un conjunto, que llamamos A_{r+1} verificando $\mu(A_{r+1}) > 0$. $A_{r+1} \subset A - \bigcup_{i=0}^{r} A_i$ y $\mu(A - \bigcup_{i=0}^{r+1} A_i) > 0$, luego existe la sucesión anunciada. Podemos suponer además, por el Lema 1, que $\chi_{A_n} \in \Lambda^p$, para cada $n \in N$.

Consideremos el subespacio $M = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \chi_{A_i} \,/\, \alpha_i \in R, \ \forall \ i \in N \right\} \cap \Lambda^p$.

Veamos que es cerrado. Dada una sucesión de funciones de M $\{f_n\}_{n\in N}$ que converge a $f \in \Lambda^p$, podemos escoger una subsucesión que seguimos representando por $\{f_n\}_{n\in N}$ y que converge puntualmente μ-ctp a f. Si $f_n = \sum_{i\geqslant 0} \alpha_i^n \chi_{A_i}$ entonces, para cada $i \in N$ y para casi todo $x \in A_i$ se tiene

$$f(x) = \lim_n f_n(x) = \lim_n \alpha_i^n \chi_{A_i}(x) = \lim_n \alpha_i^n$$

con lo que $\{\alpha_i^n\}_{n\in N}$ converge a un valor que llamamos α_i y se tiene $f(x) = \sum_{i\geqslant 0} \alpha_i \chi_{A_i} \in M$.

Veamos que es un subretículo. Dadas $f,g \in M$, $f = \sum_{i\geqslant 0} \alpha_i \chi_{A_i}$, $g = \sum_{i\geqslant 0} \beta_i \chi_{A_i}$, se tiene, para cada $i \in N$ y para casi todo $x \in A_i$

$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) = \alpha_i \wedge \beta_i$, de donde $f \wedge g = \sum_{i\geqslant 0} (\alpha_i \wedge \beta_i) \chi_{A_i}$ que pertenece a Λ^p por ser normal, y por tanto a M. Sean $a_n^k = \int_{A_n} g_k d\mu$, $n,k \in N$, que existen por ser $\chi_{A_n} \in \Lambda^p$ $n \in N$. Consideramos el espacio de Köthe de sucesiones $\lambda^p(a_n^k)$ y sea $T: \lambda^p \to \Lambda^p$ definido por $T((\alpha_n)_n) = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \chi_{A_n}$. T es un operador lineal inyectivo, y si $(\alpha_n) \in \lambda^p$ se tiene, por ser los A_i disjuntos dos a dos

$$\| T((\alpha_n)) \|_k^p = \int_E \left| \sum_n \alpha_n \chi_{A_n} \right|^p g_k d\mu = \sum_n |\alpha_n|^p \int_E \chi_{A_n} g_k d\mu = \sum_n |\alpha_n|^p a_n^k$$

para todo $k \in N$, lo que demuestra que T es un K-isomorfismo sobre la imagen y $M=T(\lambda^p)$.

Supongamos ahora que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio puramente atómico. Como consecuencia de las hipótesis, podremos encontrar al menos una infinidad numerable de átomos $\{A_n\}_{n\in N}$. Consideramos el subretículo $S = \{f \in \Lambda^p; S(f) \subset \bigcup_{k\in N} A_k\}$. S es cerrado pues, si $\{f_n\}_{n\in N}$ converge a $f \in \Lambda^p$, existe una subsucesión que converge puntualmente a f μ-ctp y por ser $S(f_n) \subset \bigcup_{k\in N} A_k$ para cada $n \in N$, se tiene $S(f) \subset \bigcup_{k\in N} A_k$.

Es sabido (rf. [3]) que una función médible en un espacio medida cualquiera toma un valor constante sobre cada átomo, salvo un conjunto de medida nula. Considerando esta observación, la demostración a partir de ahora es análoga a la de la primera parte, sin más que notar que la definición del subretículo S coincide en este caso con la del subretículo M antes definido.

c.q.d.

Lema 6.-- Sean E un retículo de Fréchet, F un retículo vectorial topológico metrizable y $T:E \to F$ un operador positivo. En estas condiciones T es continuo.

Demostración: Si T no es continuo, por ser E bornológico, existirá un conjunto acotado con imagen no acotada. Notemos por $P_k(.)$ (respec. $Q_k(.)$) las seminormas que definen la topología de E (respec. F). Podemos escoger una sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ de elementos positivos tales que el conjunto $\{P_k(x_n); n \in N\}$ está acotado para todo $k \in N$ y tal que existe un $k_0 \in N$ verificando $|Q_{k_0}(Tx_n)| > n^3$.

Sea $z = \sum_{n=0}^{\infty} x_n/n^2$ que existe por ser E completo. Para cada $n \in N$ $z \geq x_n/n^2$, por tanto $T(z) \geq T(x_n/n^2) \geq 0$ con lo que llegamos a la contradicción $Q_{k_0}(T(z)) \geq Q_{k_0}(T(x_n/n^2)) > n$. $n \in N$. Luego T es un operador continuo.

c.q.d.

En el próximo teorema caracterizamos los subespacios de un espacio escalonado de Köthe que son K-isomorfos a un espacio de Köthe de sucesiones. Usaremos la siguiente notación: dado un subconjunto C de un espacio vectorial topológico, representaremos por $\bar{sp}(C)$ la adherencia del subespacio generado por C.

Teorema 7.– Sea $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe y $\lambda^p(a_i^j)$ un espacio de Köthe de sucesiones. Si $T: \lambda^p \to \Lambda^p$ $(1 \leq p < \infty, p\neq 2)$ es un K-isomorfismo sobre la imagen, entonces existe un sucesión $\{f_n\}_{n\in N} \subset \Lambda^p$

verificando $f_n f_m = 0$, $n \neq m$, tal que $T(\lambda^p) = \bar{sp}(\{f_n\})$. Para $p = 2$ se obtiene el mismo resultado siendo T un orden isomorfismo.

Demostración: Sea $e_j \in \lambda^p$ la sucesión cuyo término j-ésimo vale 1 y los demas son tódos nulos, Sean $f_n = T(e_n)$, $n \in N$.

Para $p \neq 2$, como $e_n e_m = 0$, $n \neq m$, se tiene por la p-aditividad de las seminormas,

$$\| e_n + e_m \|_k^p + \| e_n - e_m \|_k^p = 2(\| e_n \|_k^p + \| e_m \|_k^p) \qquad \forall\ k,n,m \in N\ ,\ n \neq m$$

Por ser T un K-isomorfismo conserva las seminormas, luego se tiene

$$\| T(e_n) + T(e_m) \|_k^p + \| T(e_n) - T(e_m) \|_k^p = 2(\| T(e_n) \|_k^p + \| T(e_m) \|_k^p) \qquad k \in N$$

y aplicando el Lema 3 se obtiene

$$T(e_n)\, T(e_m) = 0 \qquad \forall\ n,m \in N \qquad n \neq m$$

Cualquier otro elemento de $T(\lambda^p)$ será de la forma $T(\{\alpha_n\}) = T(\sum_n \alpha_n e_n) = \sum_n \alpha_n T(e_n) = \sum_n \alpha_n f_n \in \bar{sp}(\{f_n\})$.

Por último, dada $f \in \bar{sp}(\{f_n\})$, $f = \lim h_n$, siendo $\{h_n\}_{n \in N}$ de Cauchy en $sp(\{f_n\})$. Por ser T un K-isomorfismo se tiene que $T^{-1}(\{h_n\}_n)$ es de Cauchy en λ^p. Si llamamos $u = \lim T^{-1}(\{h_n\}_{n \in N})$ entonces $f = T(u) \in T(\lambda^p)$.

Para $p = 2$, únicamente hay que cambiar la demostración de que $T(e_n)T(e_m) = 0$. Por ser T un orden isomorfismo y $e_n \wedge e_m = 0$, $n \neq m$, se tiene $T(e_n) \wedge T(e_m) = 0$ y de aquí $T(e_n)T(e_m) = 0$. Aplicando el Lema 6, T es isomorfismo topológico. A partir de aquí la demostración se sigue como en el caso anterior.

c.q.d.

Nota 1: Para $p = 2$ se puede obtener un resultado algo más general. En efecto, supongamos que $T: \lambda^2 \to \Lambda^2$ es un isomorfismo topológico sobre la imagen, tal que $T(e_n)T(e_m) = 0$, para cada $n,m \in N$, $n \neq m$, y verifica en el $S(T(e_n))$, que $sg(T(e_n)) = (-1)^{k(n)}$ donde sg(.) representa la función signo y k(.) es una aplicación del conjunto N en $\{1,2\}$. Entonces se puede encontrar un orden isomorfismo $T_0: \lambda^2 \to \Lambda^2$ tal que $T_0(\lambda^2) = T(\lambda^2)$ con la que se obtiene para T el resultado del Teorema 7.

Para ello, considerese el operador $P: \lambda^2 \to \lambda^2$ definido por $P(\{\alpha_n\}) = \{(-1)^{k(n)}\alpha_n\}$. Es claro que P es un K-isomorfismo. Así pues, $T_0 = T \cdot P$ es un isomorfismo sobre la imagen tal que $T_0(\lambda^2) = T(\lambda^2)$ y si $\{\alpha_n\}_{n \in N} \geq 0$ se tiene

$$T_0\Big(\sum_n \alpha_n e_n\Big) = T\Big(P\Big(\sum_n \alpha_n e_n\Big)\Big) = \sum_n (-1)^{k(n)} \alpha_n T(e_n) \geqslant 0$$

con lo que T_0 es un orden isomorfismo.

Nota 2: Veamos con un ejemplo que no puede sustituirse, la hipótesis de orden isomorfismo por la de K-isomorfismo, en el caso $p = 2$. Sea el espacio de Lebesgue $L^2([0,2])$ con la norma $\| f \| = (\int_0^2 f^2 \, dm)^{1/2}$ donde m es la medida de Lebesgue. Sean las funciones

$$f_1(x) = x\,\chi_{[0,1]}(x) \; ; \; f_2(x) = (3x-2)\,\chi_{[0,1]}(x)$$

$$f_i(x) = \chi_{[1+1/(i+1),\,1+1/i]}(x) \qquad i \geqslant 3$$

por ser $\int_0^1 x(3x-2)\,dm = 0$, se tiene para cada $a,b \in R$

$$\| af_1 + bf_2 \|^2 = \int_0^1 (ax+b(3x-2))^2 \, dm = \int_0^1 (ax)^2 dm + \int_0^1 (b(3x-2))^2 dm +$$

$$+ 2ab \int_0^1 x(3x-2)\,dm = \| af_1 \|^2 + \| bf_2 \|^2 \qquad (1)$$

Se definen para cada $n \in N$, $g_n = f_n/\| f_n \|$, y el operador $T: l^2 \to L^2$ que aplica $\{ y_n \}_{n \in N}$ en $\sum_n y_n g_n$. Por ser las funciones g_i, $i \geqslant 3$, disjuntas dos a dos y disjuntas con g_1, g_2, y por la igualdad (1), se tiene

$$\| T(\{ y_n \}) \|^2 = \| \sum_n y_n g_n \|^2 = \int_0^2 \Big(\sum_n y_n g_n \Big)^2 dm = \int_0^2 (y_1 g_1 + y_2 g_2)^2 \, dm +$$

$$+ \int_0^2 \sum_{i=3}^{\infty} (y_i g_i)^2 dm = \int_0^2 (y_1 g_1)^2 dm + \int_0^2 (y_2 g_2)^2 dm + \sum_{i \geqslant 3} \int_0^2 (y_i g_i)^2 dm =$$

$$= \sum_{n \in N} \| y_n g_n \|^2 = \sum_{n \in N} | y_n |^2 = \| \{ y_n \} \|^2$$

lo que demuestra que T está bien definido y es una isometría, luego $\overline{sp}(\{ g_n \})$ es isométrico a un espacio de sucesiones, pero no existe una familia de funciones $\{ h_n \}_{n \in N}$ con soportes disjuntos dos a dos tal que $\overline{sp}(\{ g_n \}) = \overline{sp}(\{ h_n \})$. Si existiese dicha familia, entonces $f_1, f_2 \in \overline{sp}(\{ h_n \})$; por ser las h_n disjuntas y por la demostración de la Proposición 5 se deduce que $f_1 = \sum_n a_n h_n$, $f_2 = \sum_n b_n h_n$. Existirá un $k \in N$ tal que $A_k = S(h_k) \cap S(f_1) \cap S(f_2)$ tiene medida positiva; se tiene, para casi todo $x \in A_k$,

$$x = f_1(x) = a_k h_k(x) \quad , \quad 3x - 2 = f_2(x) = b_k h_k(x)$$

con lo que $x = (a_k/b_k)(3x-2)$ en un conjunto de medida positiva lo cual es absurdo.

Definición.– Sea $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe de orden p, $p \geqslant 1$. Se dice que un subespacio $M \subset \Lambda^p$ es K-complementado en Λ^p si existe una proyección P de Λ^p sobre M tal que

$$\int_E |P(f)|^p g_k d\mu \leqslant \int_E |f|^p g_k d\mu \qquad \forall\, k \in N, \qquad f \in \Lambda^p$$

Es claro que todo subespacio K-complementado es complementado. Es conocido que un espacio $L^p(\nu)$ contiene subespacios isomorfos a l^p que son complementados con proyección contractiva. Estudiaremos la generalización de esta propiedad para los tipos de subespacios con los que estamos trabajando. Necesitaremos usar el concepto de esperanza condicional y un resultado sobre K-complementación de subretículos de espacios escalonados de Köthe demostrado en [4].

Se sabe que si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio medida σ-finito y $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ y β es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, por el teorema de Radon-Nykodym existe una función β-medible, única salvo un conjunto de μ-medida nula, que notaremos $\mathcal{E}(\beta, \mu)(f)$ tal que

$$\int_A f d\mu = \int_A \mathcal{E}(\beta, \mu)(f) d\mu \qquad \forall A \in \beta$$

La función $\mathcal{E}(\beta, \mu)(f)$ recibe el nombre de esperanza condicional de f respecto a la medida μ y a la σ-álgebra β.

Dada $f \in \Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ notaremos por $\mathcal{A}'$ la σ-álgebra $\mathcal{A}$ restringida al S(f). Si M es un subretículo vectorial cerrado que contiene a f, se representara por $\beta_f(M)$, (o sólo por β_f cuando no haya lugar a posible confusión), la σ-álgebra de los conjuntos $A \subset S(f)$ tales que existe una función $h \in M$ con $S(h) = A$ (ver [5] para los detalles). Para cada $k \in N$ se considerará la medida $\nu_k(A) = \int_A f^p g_k d\mu$ $A \in \mathcal{A}'$, $f \geqslant 0$, así como el espacio medida $(S(f), \mathcal{A}', \nu_k)$ y la esperanza condicional $\mathcal{E}(\beta_f, f^p g_k)(h/f)$ de la restricción de la función h/f a S(f), respecto a la σ-álgebra β_f y la medida ν_k. Se prolonga la definición de esta función a E, haciéndola nula en $E - S(f)$.

Teorema 8.– Sea $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k), p \geqslant 1$, un espacio escalonado de Köthe. Un subretículo vectorial cerrado M de Λ^p es K-complementado en Λ^p si y sólo si para cada $f \in M$, $f \geqslant 0$ y cada $h \in \Lambda^p$ tal que $S(h) \subset S(f)$, se tiene que cada función $\mathcal{E}(\beta_f, f^p g_{k+1})(h/f)$ coincide μ-ctp en $S(g_k)$ con $\mathcal{E}(\beta_f, f^p g_k)(h/f)$, para cada $k \in N$.

Este Teorema se ha demostrado en [4].

Lema 9.-- Sea $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medida puramente no atómico y dos funciones medibles f y g con $\mu(S(f) \cap S(g)) > 0$ tales que para todo $r \in R$ existe un $A_r \in \mathcal{A}$, $A_r \subset S(f) \cup S(g)$, de medida no nula y verificando $f(x) \neq rg(x)$ para cada $x \in A(r)$. Entonces existen $C_0, C_1 \subset S(f) \cup S(g)$, $C_0, C_1 \in \mathcal{A}$ de medida no nula, tales que

$$\sup_{x \in C_0} (f/g)(x) < \inf_{x \in C_1} (f/g)(x)$$

Demostración: Se supone en primer lugar que $\mu((S(f)\ \ S(g)) \cup (S(g)\ \ S(f))) > 0$ y se consideran, para cada $n \in N- \{0\}$

$$A_n = \{x; f/g(x) \geq 1/n\} \qquad B_n = \{x; f/g(x) \leq \ 1/n\}$$

Se tiene que $S(f) \cap S(g) = \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cup B_n)$, luego existe un n_0 tal que $\mu(A_{n_0}) > 0$ ó $\mu(B_{n_0}) > 0$. Supongamos que sea $\mu(A_{n_0}) > 0$; se toma entonces $C_1 = A_{n_0}$ y $C_0 = (S(f) \Delta S(g))$. En caso contrario, se toma $C_0 = B_{n_0}$ y $C_1 = (S(f) \Delta S(g))$ con lo que se llegaría al resultado ya que $f/g(x) = 0$ para cada $x \in S(f) \Delta S(g)$.

Supongamos pues que $S(f) = S(g)$ y llamemos A_0 a este conjunto. Sean $A_0^+ = \{x; f/g(x) > 0\}$, $A_0^- = \{x; f/g(x) < 0\}$. Se tiene que $A_0 = A_0^+ \cup A_0^-$; si A_0^+ y A_0^- tienen medida positiva tomamos $C_0 = A_0^-$ y para encontrar C_1 se consideran, para cada $n \in N\ \ \{0\}$, $(A_0^+)_n = \{x; f/g(x) \geq 1/n\}$. Se tiene que $A_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_0^+)_n$ luego existe un conjunto $(A_0^+)_{n_1}$ de medida positiva; tomamos este conjunto como C_1 y quedaría demostrado el resultado.

Supongamos ahora que $\mu(A_0^-) = 0$, así pues, $A_0 = A_0^+$ μ-ctp.

Sean

$$A_0^n = \{x \in A_0 ; n \leq f/g(x) \leq n+1\} \qquad n \in N$$

y sea

$$n_0 = \inf\{n \in N; \quad \mu(A_0^n) > 0\}$$

Si existiera un $n_1 \in N$, con $n_1 \geq n_0 + 2$ y $\mu(A_0^{n_1}) > 0$, se toma $C_0 = A_0^{n_0}$ y $C_1 = A_0^{n_1}$ lo que concluiría la demostración. En caso contrario, $\mu(A_0^i) = 0$, $i \geq n_0 + 2$; si llamamos A_1 al conjunto $A_0^{n_0} \cup A_0^{n_0+1}$, se tendrá $A_1 \subset A_0$ y $\mu(A_0\ \ A_1) = 0$.

Se consideran en este caso

$$a_1 = \inf_{x\in A_1} f/g(x)\ ,\quad b_1 = \sup_{x\in A_1} f/g(x)$$

$$E_1 = \{ x\in A_1 ; f/g(x) = (a_1+b_1)/2 \}$$

$$I_1{}^n = \{ x\in A_1 ; f/g(x) \leqslant ((a_1+b_1)/2) - 1/n \} \qquad n \geqslant 1$$

$$D_1{}^n = \{ x\in A_1 ; f/g(x) \geqslant ((a_1+b_1)/2) + 1/n \} \qquad n \geqslant 1$$

Se tiene $A_1 = E_1 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} I_1{}^n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_1{}^n)$. Si fuese $\mu(E_1) > 0$, como no puede ser $\mu(A_1 - E_1) = 0$ ya que entonces se tendría $f(x) = ((a_1+b_1)/2)g(x)$ para casi todo x en A_1, siendo $A_1 = S(f) \cup S(g)$ μ-ctp en contra de la hipótesis, tendrá que existir $n \geqslant 1$ tal que $\mu(I_1{}^n) > 0$ y obtenerse el resultado tomando $C_0 = I_1{}^n$, $C_1 = E_1$.

Si fuese $\mu(E_1) = 0$ pueden darse dos casos:

a) Existen $n_0, n_1 \geqslant 1$ tales que $\mu(I_1{}^{n_0}) > 0$ y $\mu(D_1{}^{n_1}) > 0$, con lo cual se toma $C_0 = I_1{}^{n_0}$, $C_1 = D_1{}^{n_1}$.

b) $\mu(I_1{}^n) = 0$ para cada $n \geqslant 1$ ó $\mu(D_1{}^n) = 0$ para cada $n \geqslant 1$. En este caso se puede suponer, sin pérdida de generalidad que $\mu(I_1{}^n) = 0$, $n \geqslant 1$, y se definen

$$A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_1{}^n\ ,\quad a_2 = (a_1+b_1)/2\ ,\ b_2 = b_1$$

teniendose

$$\mu(A_0 - A_2) = \mu(A_0 - A_1) + \mu(A_1 - A_2) = 0 + \mu(E_1 \cup (\bigcup_{n\geqslant 1} I_1{}^n)) = 0$$

Vamos a seguir un proceso inductivo y veamos que se llegaría a una contradicción si se repitiera indefinidamente el caso b).

Supongamos pues construida una familia de conjuntos. $\{ A_j \}_{j=0}^{k}$ decreciente y tal que para cada $i \leqslant k$ se tenga

$$\mu(A_0 - A_i) = 0 \qquad i \geqslant 1 \tag{1}$$

$$A_i = \{ x ;\ f/g(x) \in [a_i,b_i] \} \qquad i \geqslant 1 \tag{2}$$

$$[a_i,b_i] \subset [a_{i-1},b_{i-1}]\ ,\quad b_i - a_i = (b_{i-1} - a_{i-1})/2. \qquad i \geqslant 2 \tag{3}$$

Definamos entonces, repitiendo el proceso,

$$E_k = \{ x \in A_k \, ; \quad f/g(x) = ((a_k + b_k)/2) \}$$

$$I_k{}^n = \{ x \in A_k : \; f/g(x) \leqslant ((a_k + b_k)/2) \;\; 1/n \} \qquad n \geqslant 1$$

$$D_k{}^n = \{ x \in A_k \, ; \; f/g(x) \geqslant ((a_k + b_k)/2) + 1/n \} \qquad n \geqslant 1$$

Por un razonamiento análogo al anterior, la conclusión se sigue si $\mu(E_k) > 0$ ó si existen n_0 , n_1 tales que $\mu(I_k{}^{n_0}) > 0$, $\mu(D_k{}^{n_1}) > 0$. En caso contrario, supongamos $\mu(I_k{}^n) = \mu(E_k) = 0$ para cada $n \geqslant 1$, y definamos

$$A_{k+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_k{}^n \;, \quad a_{k+1} = (a_k + b_k)/2 \;, \quad b_{k+1} = b_k$$

Es claro que $\mu(A_0 \;\; A_{k+1}) = 0$ teniendo en cuenta (1). Además se verifican (2) y (3) para $i = k+1$. Obtendríamos pues una sucesión decreciente de conjuntos $\{ A_n \}_{n \in N}$ verificando (1),(2) si $n \geqslant 1$, y (3) para $n \geqslant 2$. Llamamos B al conjunto intersección de los A_n, $n \in N$, y se tiene

$$\mu(A_0 \;\; B) = \mu(A_0 \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) = \mu(\cup (A_0 - A_n)) = \lim_n \mu(A_0 \cdot \; A_n) = 0$$

$$f/g(x) \in \bigcap_{n \in N} [a_n, b_n] = \rho \in R \;, \qquad x \in B$$

con lo que $f(x) = \rho g(x)$ para casi todo x en A_0 ($A_0 = S(f) \cup S(g)$ μ-ctp) en contradicción con la hipótesis del Lema, luego no puede construirse tal sucesión y hay un paso en el que se detiene el proceso inductivo

c.q.d.

Nota.– Si $(E, \mathcal{A}, \mu)$ tiene la propiedad de los subconjuntos finitos, entonces pueden tomarse C_0, C_1 de medida finita no nula. Para ello, si hemos encontrado C_0', C_1' verificando la tesis del Lema, tomamos $C_0 \subset C_0'$, $C_1 \subset C_1'$ ambos de medida finita no nula.
Entonces

$$\sup_{x \in C_0} f/g(x) \leqslant \sup_{x \in C_0'} f/g(x) < \inf_{x \in C_1'} f/g(x) \leqslant \inf_{x \in C_1} f/g(x)$$

Podemos enunciar ahora nuestro principal resultado.

Teorema 10.– Sea $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ un espacio escalonado de Köthe y sea $S = \overline{sp}(\{f_n\}_{n=1}^{\infty})$, con $f_n f_m = 0$, $n \neq m$, un subretículo cerrado de Λ^p. Sea $A_n = S(f_n)$ para cada $n \in N$. Entonces S es K-complementado si y sólo si los escalones g_k son proporcionales dos a dos sobre cada A_n, salvo un conjunto de medida nula.

Demostración: Para la condición necesaria, supongamos que no hay proporcionalidad sobre cada A_n, luego existiría un $n_o \in N$ y dos escalones, que podemos suponer consecutivos g_k, g_{k+1} tal que, para todo $r \in R$ se tiene $g_k\chi_{A_{n_0}} \neq r g_{k+1}\chi_{A_{n_0}}$ en un conjunto de medida no nula. Se verificará que $\mu(A_{n_0} \cap S(g_k)) > 0$ ya que en caso contrario podría ponerse $g_k(x) = 0 g_{k+1}(x)$ para casi todo x en A_{n_0} en contradicción con nuestra suposición. Por ser S un subretículo y tener las funciones f_n los soportes disjuntos, se tiene que el signo de f_j es constante sobre cada A_j, $j \in N$, luego $\overline{sp}(\{f_j\}) = \overline{sp}(\{sg(f_j)f_j\})$; así pues, podemos suponer que $f_j \geqslant 0$ para cada $j \in N$.

Para simplificar la notación sean $A = A_{n_0}$, $f = f_{n_0}$.

Obsérvese que β_f es la σ-álgebra generada por A y por los conjuntos de μ-medida nula de $\mathcal{A}$, ya que dada una función $g \in S$ con $S(g) \subset A$ se tiene necesariamente $S(g) = A$ μ-ctp. Luego las únicas funciones β_f-medibles son de la forma $r\chi_A$, $r \in R$, salvo un conjunto de medida nula. Se tiene, dada una función $h \in \Lambda^p$ con $S(h) \subset S(f)$

$$\mathcal{E}(\beta_f, f^p g_k)(h/f) = r_k(h)\chi_A \qquad r_k(h) \in R$$

$$\mathcal{E}(\beta_f, f^p g_{k+1})(h/f) = r_{k+1}(h)\chi_A \qquad r_{k+1}(h) \in R$$

Verificándose, por definición de esperanza condicional

$$\begin{aligned} \int_A hf^{p-1} g_k d\mu &= r_k(h) \int_A f^p g_k d\mu \\ \int_A hf^{p-1} g_{k+1} d\mu &= r_{k+1}(h) \int_A f^p g_{k+1} d\mu \end{aligned} \tag{1}$$

Por ser S K-complentado, aplicando el Teorema 8, se tiene $r_k(h)\chi_A = r_{k+1}(h)\chi_A$ en el conjunto $S(g_k)$, luego $r_k(h) = r_{k+1}(h)$. Despejando de (1), se tiene, para cada $h \in \Lambda^p$, $h \geqslant 0$, $h \neq 0$, con $S(h) \subset S(f)$

$$\left(\int_A hf^{p-1} g_k d\mu\right) / \left(\int_A f^p g_k d\mu\right) = \left(\int_A hf^{p-1} g_{k+1} d\mu\right) / \left(\int_A f^p g_{k+1} d\mu\right)$$

y si llamamos η a la constante $\left(\int_A f^p g_{k+1} d\mu\right) / \left(\int_A f^p g_k d\mu\right) > 0$, se tiene

$$\int_A hf^{p-1} g_{k+1} d\mu = \eta \int_A hf^{p-1} g_k d\mu \tag{2}$$

Ahora, por $g_{k+1}\chi_A$ no proporcional a $g_k\chi_A$, se pueden encontrar, por el Lema 9, conjuntos C_0, C_1 de medida finita no nula contenidos en $S(g_{k+1}\chi_A) \cup S(g_k\chi_A) = S(g_{k+1}\chi_A)$, verificándose

$$\sup_{x \in C_0} g_{k+1}/g_k = M < m = \inf_{x \in C_1} g_{k+1}/g_k$$

Puede suponerse, por el Lema 1, χ_{C_0}, $\chi_{C_1} \in \Lambda^p$. Llamamos h_i, $i = 0,1$, a las funciones χ_{C_0}, χ_{C_1}. Es claro que $S(h_i) \subset S(f)$, $h_i \geqslant 0$, $h_i \neq 0$, luego se tiene, por (2)

$$\int_A h_i f^{p-1} g_{k+1} d\mu = \eta \int_A h_i f^{p-1} g_k d\mu \qquad i = 0,1$$

Por ser $S(h_i) \subset S(g_{k+1}\chi_A)$ se tiene que $\int_A h_i f^{p-1} g_{k+1} d\mu > 0$, $i = 0,1$; como $\eta > 0$, debe ser también $\int_A h_i f^{p-1} g_k d\mu > 0$
Se consideran ahora las siguientes desigualdades

$$\eta \int_{C_0} f^{p-1} g_k d\mu = \eta \int_A h_0 f^{p-1} g_k d\mu = \int_A h_0 f^{p-1} g_{k+1} d\mu =$$
$$= \int_{C_0} f^{p-1} g_{k+1} d\mu \leqslant M \int_{C_0} f^{p-1} g_k d\mu$$
$$\eta \int_{C_1} f^{p-1} g_k d\mu = \eta \int_A h_1 f^{p-1} g_k d\mu = \int_A h_1 f^{p-1} g_{k+1} d\mu =$$
$$= \int_{C_1} f^{p-1} g_{k+1} d\mu \geqslant m \int_{C_1} f^{p-1} g_k d\mu$$

de donde se llega a la contradicción $\eta \leqslant M < m \leqslant \eta$ luego debe ser g_{k+1} proporcional a g_k sobre A_n.

Para la condición suficiente, podemos suponer, cambiando si fuese necesario la definición de las funciones g_k, $k \in N$, en un conjunto de medida nula, que para cada $n,k \in N$ existe $r_k^n \in R$ tal que $g_k\chi_{A_n} = r_k^n g_{k+1}\chi_{A_n}$

Sea una función $f \in S$, $f \geqslant 0$. Existirá un subconjunto de la familia $\{A_n\}_{n \in N}$ finito o infinito numerable cuya unión constituye el $S(f)$. Supondremos $S(f) = \bigcup_{n \in N} A_n$; la demostración es análoga en cualquier otro caso. β_f es la σ-álgebra generada por los conjuntos de μ-medida nula de $\mathcal{A}$ y por los A_n, $n \in N$. Luego las funciones β_f-medibles, por ser los A_n disjuntos dos a dos, son de la forma $\Sigma\ \alpha_n\chi_{A_n}$ salvo un conjunto de medida nula. Sea una función $h \in \Lambda^p$ con $S(h) \subset S(f)$; por la observación anterior, se tiene $\mathcal{E}(\beta_f, f^p g_{k+1})\ (h/f) =$
$= \Sigma\ \alpha_n\chi_{A_n}$, $\alpha_n \in R$ verificándose por definición

$$\int_A h f^{p-1} g_{k+1} d\mu = \int_A \mathcal{E}(\beta_f, f^p g_{k+1})(h/f) f^p g_{k+1} d\mu =$$
$$= \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \int_A \chi_{A_n} f^p g_{k+1} d\mu \qquad \forall A \in \beta_f \tag{3}$$

Tomamos un conjunto $A \in \beta_f$ cualquiera; A será, salvo un conjunto de medida nula, una unión finita o infinita numerable de elementos de la familia $\{A_n\}_{n\in N}$. Supongamos $A = \bigcup_{n\in N} A_{\sigma(n)}$ donde σ es una aplicación inyectiva de N en N ; la demostración es análoga en otro caso. Usando (3) y la hipótesis de proporcionalidad de los escalones g_k, se tiene.

$$\int_A hf^{p-1} g_k d\mu = \sum_n \int_{A\sigma(n)} hf^{p-1} g_k d\mu = \sum_n r^k_{\sigma(n)} \int_{A\sigma(n)} hf^{p-1} g_{k+1} d\mu =$$

$$= \sum_n r^k_{\sigma(n)} \alpha_{\sigma(n)} \int_{A\sigma(n)} f^p g_{k+1} d\mu = \sum_n \alpha_{\sigma(n)} \int_{A\sigma(n)} f^p r^k_{\sigma(n)} g_{k+1} d\mu =$$

$$= \sum_n \alpha_{\sigma(n)} \int_{A\sigma(n)} f^p g_k d\mu = \int_A \sum_n \alpha_{\sigma(n)} \chi_{A\sigma(n)} f^p g_k d\mu =$$

$$= \int_A \Big(\sum_n \alpha_{\sigma(n)} \chi_{A\sigma(n)} + \sum_{i\in N-\sigma(n)} \alpha_i \chi_{A_i}\Big) f^p g_k d\mu =$$

$$= \int_A \mathcal{E}(\beta_f, f^p g_{k+1})(h/f) f^p g_k d\mu$$

Con lo que se tiene, para cada $A \in \beta_f$

$$\int_A hf^{p-1} g_k d\mu = \int_A \mathcal{E}(\beta_f, f^p g_{k+1})(h/f) f^p g_k d\mu$$

y por definición y unicidad de esperanza condicional, debe ser, en el soporte de g_k

$$\mathcal{E}(\beta_f, f^p g_{k+1})(h/f) = \mathcal{E}(\beta_f, f^p g_k)(h/f) \qquad \forall\ h \in \Lambda^p, S(h) \subset S(f)$$

y aplicando el Teorema 8 se obtiene la K-complementación de S.

c.q.d.

Corolario 11.– Dado un espacio escalonado de sucesiones $\lambda^p(a_i^j)$ existe un espacio escalonado de Köthe $\Lambda^p(E, \mathcal{A}, \mu, g_k)$ con $(E, \mathcal{A}, \mu)$ puramente no atómico que contiene un subespacio K-complementado y K-isomorfo a λ^p.

Demostración: Se considera el espacio medida $([0,1], \mathcal{M}, dx)$, donde $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles y dx la medida usual de Lebesgue. Construimos en dicho espacio una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in N} \subset \mathcal{M}$ de medida no nula y disjuntos dos a dos. Sobre $[0,1]$ definimos los escalones

$$g_j(x) = \sum \Big(\int_{A_i} dx\Big)^{-1} a_i^j \chi_{A_i}(x) \qquad \forall\ j \in N$$

Consideramos el espacio $\Lambda^p([0,1], \mathcal{M}, dx, g_k)$ y se define la aplicación lineal T de λ^p en Λ^p que aplica $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ en la función $\sum_n \alpha_n \chi_{A_n}$

$$\| T(\{\alpha_n\}) \|_k^p = \int_0^1 (\sum_n \alpha_n \chi_{A_n})^p g_k dx = \sum_n \int_{A_n} |\alpha_n|^p g_k dx =$$

$$= \sum_n |\alpha_n|^p \int_{A_n} (\int_{A_n} dx)^{-1} a_n^k dx = \sum_n |\alpha_n|^p a_n^k \qquad \forall k \in N$$

Luego T es un K-isomorfismo. Es claro que es un orden isomorfismo; así, $T(\lambda^p)$ es un subretículo cerrado de Λ^p y por la forma en que se han definido los escalones, constantes sobre cada A_n, es inmediato comprobar las condiciones del Teorema 10 y por tanto la K-complementación de $T(\lambda^p)$.

c.q.d.

Como una segunda consecuencia se verá la existencia de un espacio escalonado de Köthe que no contiene ningún subretículo K-isomorfo a un espacio de sucesiones que sea K-complementado.

Ejemplo.– Con la notación del corolario 11, sea $\Lambda^p([0,1], \mathcal{M}, dx, h_k)$ donde $h_k(x) = x^{1/k}$. No se puede encontrar un $[0,1]$ un conjunto de medida positiva en el que dos escalones sean proporcionales.

Nota: Actualmente, el autor del artículo ha demostrado, si $p\neq 2$, que la hipótesis de subretículo es innecesaria en el Teorema 8, probando dicho Teorema para subespacios en general, si $p=2$, el Teorema 8 es cierto para subespacio generados por funciones de soportes disjuntos dos a dos. Esto permite probar (con algunas modificaciones en la demostración), que el Teorema 10 es cierto si se sustituye la palabra subretículo por subespacio. Todos estos resultados forman parte de la Tesis del autor (Tesis Doctorales de Granada. Granada. 1985).

BIBLIOGRAFIA

[1] LACEY. L. (1974). The isometric theory of classical Banach spaces. Springer

[2] LOPEZ MOLINA, J.A. (1980): "The dual and bidual of an echelon Köthe space" Collec Math. 31, 2º, 159-191

[3] LOPEZ MOLINA, J.A. (1981): "Reflexividad en los espacios escalonados de Köthe", Rev. Real Acad. Ci. Ex. LXXV, 1º, 213-232

[4] LOPEZ MOLINA, J.A.: "Caracterización de los subretículos K-complementados de un espacio escalonado de Köthe", Rev. Real Acad. Ci. Ex. LXXV, 5º, 1133-1163.

[5] LOPEZ MOLINA, J.A.: "Subespacios de un espacio escalonado de Köthe", Rev. Real Acad. Ci. Ex. LXXV, 3º, 598-624

[6] ROYDEN H.L. (1971). Real Analysis. Mac Millan

[7] ZAANEN, A.C. (1967). Integration. North Holland

Prof. Juan C. Díaz Alcaide.
E.T.S. Ingenieros Agrónomos
"Alameda del Obispo" CORDOBA.
Cátedra de Matemáticas