

RECHERCHES SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE NON RELATIVISTE DES SYSTÈMES

PAR

JEANNINE VIARD (PARIS)

INTRODUCTION

Dans ce travail nous avons étudié des propriétés de la mécanique ondulatoire non relativiste des systèmes, qui correspondent à des propriétés de la mécanique classique et nous avons examiné de quelle manière ces propriétés viennent imposer des conditions particulières à une théorie fondée sur les conditions générales des prévisions.

En admettant que le but d'une théorie physique était de permettre de calculer des prévisions concernant des résultats de mesures ultérieures à partir de données fournies par une mesure initiale, nous avons développé une théorie dite « *théorie générale des prévisions* » en utilisant la méthode des éléments initiaux et des éléments de prévisions due à M. J. L. DESTOUCHES. La condition de stabilité de ces prévisions conduit à définir des espaces abstraits et à associer aux grandeurs physiques des opérateurs opérant dans ces espaces.

Moyennant certaines conventions à chaque grandeur de la cinématique classique on peut associer un opérateur et considérer des opérateurs vectoriels et tensoriels. Ceci conduit à définir un *calcul vectoriel gauche* et un *calcul tensoriel gauche* dont nous avons indiqué les règles fondamentales au début du chapitre II. Ce calcul fournit la structure algorithmique sur laquelle la cinématique opératoire est construite. La plupart des différences qui s'introduisent entre la théorie classique et la théorie quantique des mouvements relatifs provient de ce qu'un produit vectoriel n'a pas de variance définie ; ce n'est ni un vecteur ni un tenseur.

L'introduction de la notion de masse nous permet ensuite de développer une cinétique opératoire symbolique.

La fin du second chapitre est consacrée à la définition de repères privilégiés pour un système de corpuscules ; en particulier nous avons pu, pour un système, déterminer un *solide principal*.

Le chapitre III traite de la théorie des changements de variables. Nous admettons d'abord à titre de postulat que la forme des opérateurs de position est fixée par la condition que l'opérateur coordonnée d'un corpuscule par rapport au trièdre fondamental défini au chapitre précédent, consiste en la multiplication par une variable indépendante et l'opérateur composante de la quantité de mouvement est $i\hbar$ * fois la dérivation partielle par rapport à cette variable, \hbar étant une constante universelle. C'est là un postulat extrêmement fort qui entraîne une grande partie des lois de la mécanique ondulatoire. Ce postulat admis, la théorie des changements de variables se développe sans difficulté pour les opérateurs cinétiques du premier ordre (opérateurs fonctions des coordonnées et des quantités de mouvement des corpuscules). Les résultats sont exprimés au moyen du formalisme de l'équicorrespondance qui permet d'obtenir des formules formellement semblables à celles de la mécanique classique. Le cas des paramètres surabondants et de variables surabondantes a été examiné.

La troisième partie du chapitre est consacrée à des applications d'importance pratique pour la mécanique ondulatoire. Nous avons étudié à quelles conditions un opérateur peut, par un changement de variables convenable, se mettre sous la forme $\bar{\omega}_k = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_k}$ ou sous la forme : $a\bar{\omega}_k^2 + b\bar{\omega}_k$.

Le chapitre IV est consacré à la théorie des intégrales premières. Comme en mécanique classique on doit distinguer des intégrales premières *distinctes* et *non distinctes*, mais des circonstances nouvelles apparaissent par suite de la non-commutation des opérateurs ; on est amené à envisager des intégrales premières *simultanément utilisables*, des intégrales premières *non simultanément utilisables* et enfin parmi celles-ci des intégrales premières *exceptionnellement utilisables simultanément*.

Le cinquième chapitre a trait à la *theorie des liaisons* en mécanique ondulatoire. Dans une première partie nous avons montré comment, malgré l'indéterminisme, des liaisons apparaissent en mécanique ondulatoire. Les liaisons peuvent avoir différentes origines mais elles s'expriment toujours par les mêmes conditions : on exprime d'abord que le point figuratif du système dans l'espace de configuration demeure sur

* Par manque du symbole \hbar brassée, communément employé dans Mécanique Quantique, nous écrivons \hbar' .

une certaine multiplicité, puis on exprime ensuite que les composantes normales à cette multiplicité de l'opérateur vectoriel quantité de mouvement du système sont nulles :

$$\vec{N} \cdot \vec{P} = 0$$

cela pour tout vecteur \vec{N} normal à la multiplicité.

La fin du chapitre est consacrée à la théorie du corps solide rigide. Les formules de la cinématique opératorielle permettent de calculer les différents opérateurs cinétiques liés au mouvement d'un tel système. Pour terminer, nous montrons que l'opérateur vectoriel moment cinétique d'un système quelconque peut être mis sous la forme du moment cinétique d'un corps rigide. Ce résultat a une importance pratique car il permet de calculer facilement les fonctions propres et valeurs propres du moment cinétique d'un système quelconque.

L'ordre d'exposition que nous avons suivi nous a paru le mieux adapté à l'ensemble des questions que nous avons à exposer ; il a l'avantage de mettre les principes de la mécanique ondulatoire sous une forme extrêmement condensée qui en fait bien ressortir les particularités.

En terminant je tiens à remercier M. Louis de Broglie et M. J. L. Destouches pour l'intérêt bienveillant avec lequel ils ont bien voulu suivre ces recherches et pour les conseils et directives qu'ils ont bien voulu me donner.

CHAPITRE I

LA THÉORIE GÉNÉRALE DES PRÉVISIONS

1. **But d'une théorie physique.** — Le développement d'une discipline scientifique que ou d'une théorie au sein d'une telle discipline ne se réalise pas sans qu'une certaine orientation préalable soit intervenue pour donner leur sens aux premières démarches et déterminer les directions essentielles de la pensée. A titre d'orientation préalable, nous admettons que le problème fondamental qui se pose au sein d'une théorie physique est le calcul de prévisions (en général incertaines et s'exprimant par des probabilités) concernant les résultats d'une mesure ultérieure à partir d'une mesure initiale. Ainsi on cherche à établir des enchainements entre différents résultats expérimentaux ; ces enchainements peuvent être soit des implications s'exprimant par les mots « si ... alors », soit des énoncés de probabilités exprimant la chance pour que si tel résultat est arrivé tel autre résultat soit obtenu.

La condition qui domine toutes les théories physiques est celle de l'*adéquation*, elle consiste en ceci : les prévisions calculées suivant la théorie considérée ne sont pas démenties par l'expérience. Pour toutes les théories physiques qui ont été jusqu'ici édifiées, l'adéquation n'a jamais été total et définitive; il est toujours apparu des inadéquations lorsqu'on a suffisamment élargi le domaine expérimental. Ainsi au mieux une théorie n'est adéquate que dans un certain domaine expérimental appelé *domaine d'adéquation de la théorie*. Ce domaine est déterminé par l'ensemble des résultats de mesures à partir desquels on peut calculer des prévisions adéquates dans ce même ensemble pris comme ensemble des résultats possibles. L'adéquation cesse d'être garantie pour des prévisions sortant de ce champ, ou pour des prévisions faites à partir de résultats de mesures n'en faisant pas partie.

D'une façon précise nous formulerons de la façon suivante le but de toute théorie physique :

« Un observateur Ob ayant effectué sur un système S , à l'instant t_{0A} de son horloge, la mesure d'une grandeur A dont le résultat a été \mathcal{E}_A , calculer des prévisions concernant le résultat r_B de la mesure d'une grandeur B faite par un observateur Ob' à l'instant t'_B de son horloge sur le système S ».

2. Problème préliminaire. — En général une grandeur physique ne peut pas prendre n'importe quelle valeur; par exemple déjà en mécanique classique, l'énergie cinétique T n'a pas pour famille de résultats possibles tous les nombres, mais seulement les nombres non-négatifs; en relativité, la vitesse a sa valeur absolue inférieure à la vitesse de la lumière c . Dans les théories quantiques, on a encore des restrictions supplémentaires.

Le problème de la quantification, c'est à dire celui de la détermination de la famille de tous les résultats de mesures possibles $\mathcal{A}(Ob, A, S, t_{0A})$ pour la mesure d'une grandeur A faite par un observateur Ob sur un système S à un instant t_{0A} , est un problème fondamental préliminaire au problème du calcul des prévisions. La famille $\mathcal{A}(Ob, A, S, t_{0A})$ est encore appelée *spectre* de la grandeur A . On peut toujours affirmer qu'une certaine famille $\mathcal{F}_{B,t}$ de résultats possibles sous des conditions initiales données est contenue dans le spectre de la grandeur B ; et il faut connaître le spectre avant de pouvoir calculer la probabilité pour que le résultat de la mesure d'une grandeur B à l'instant t'_B soit contenu dans une sous-famille \mathcal{E}_B de la famille $\mathcal{A}(Ob, B, S, t'_B)$.

3. **Décomposition du problème des prévisions.** — Le problème fondamental du calcul des prévisions, c'est à dire le calcul de la probabilité pour que le résultat d'une mesure d'une grandeur B soit contenu dans une sous-famille \mathcal{E}_B si un observateur Ob' effectue la mesure de B à t'_B sachant que la grandeur A a eu \mathcal{E}_A à t_{0A} comme résultat pour Ob , se résout par la décomposition en plusieurs problèmes successifs au moyen de l'introduction d'éléments auxiliaires (1). Dans le cadre de la seule physique du Solitaire, on a à calculer :

$$\text{Prob (Ré Mes } B \subseteq \mathcal{E}_B \text{ à } t \text{ sachant que } \mathcal{E}_A = \text{Ré Mes } A \text{ à } t_0)$$

Les probabilités peuvent dépendre de tous les éléments qui interviennent dans l'énoncé du problème, soit :

$$B, \mathcal{E}_B, t; A, \mathcal{E}_A, t_0; S.$$

Les probabilités seront donc des fonctions de ces arguments ; par suite, on aura à écrire que la fonction de probabilité

$$\mathfrak{P}(B, \mathcal{E}_B, t; A, \mathcal{E}_A, t_{0A}; S)$$

est égale à la fonction à calculer. Et le problème des prévisions revient ainsi à la détermination des fonctions \mathfrak{P} acceptables ; les lois physiques s'exprimeront alors par des règles sur la manière de calculer les fonctions \mathfrak{P} . Mais pour chaque paire de grandeurs A, B , on se trouve devant un problème particulier à résoudre, et il faut chercher à transformer chacun de ces problèmes particuliers en un type unique de problèmes. Pour cela, on introduit des éléments auxiliaires purement mathématiques indépendamment de toute hypothèse physique : à chaque famille \mathcal{E}_A , de résultats de mesures possibles pour la grandeur A , on fait correspondre un ensemble $\mathfrak{X}_{0,A}, \mathcal{E}_A, t_{0A}, S$ d'éléments abstraits X_0 , ensemble contenant au moins un élément. Cet ensemble est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{X}_{0,S}$ de tous les éléments initiaux pour toutes les grandeurs et pour tous les instants.

Le problème fondamental se décompose alors en deux problèmes :

I) Déterminer, à partir du résultat \mathcal{E}_A de la mesure de la grandeur A effectuée à l'instant t_0 sur le système S , l'ensemble $\mathfrak{X}_{0,A}, \mathcal{E}_A, t_0, S$ des éléments initiaux associés à la mesure ;

II) A partir de cet ensemble, calculer des prévisions.

(1) J. L. DESTOUCHES. — Principes fondamentaux de Physique Théorique.

Ce dernier problème peut à son tour être décomposé en deux problèmes successifs, d'après le théorème suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL DES PRÉVISIONS : *On peut définir à l'instant t des éléments X appartenant à un ensemble \mathfrak{X}_S dit « ensemble des éléments de prévisions » de telle manière que :*

- a) à chaque triple t, t_0, X_0 correspond un élément X ,
- b) pour t et t_0 fixés, X est une fonction biunivoque de X_0 ,
- c) les prévisions se calculent pour l'instant t , pour toute grandeur B à partir de l'élément X par des lois indépendantes du temps, soit

$$\mathfrak{F}(B, \mathfrak{E}_B, t; A, \mathfrak{E}_A, t_0; S) = F(B, \mathfrak{E}_B, X).$$

On démontre en outre que :

THÉORÈME : *La façon dont les éléments de prévision sont liés aux éléments initiaux peut être décrite par un opérateur $\mathfrak{A}(t, t_0)$ dit « opérateur d'évolution », soit :*

$$X = \mathfrak{A}(t, t_0) X_0$$

Cet opérateur \mathfrak{A} est défini par la condition que la forme de la fonction F doit demeurer invariante par un changement de conditions initiales X_0, t_0 . Cet opérateur admet un inverse $\mathfrak{A}^{-1}(t, t_0)$ qui transforme un X en X_0 .

On voit de quelle manière le second problème se décompose :

II,1) *Un élément initial acceptable X_0 étant donné, déterminer l'élément de prévision X qui lui est associé, ou, déterminer l'opérateur $\mathfrak{A}(t, t_0)$.*

II,2) *L'élément X étant fixé, déterminer les probabilités, c'est à dire la fonction $F(B, \mathfrak{E}_B, X)$.*

Les éléments X et X_0 jouissent d'un certain arbitraire et on montre que l'on peut les choisir par convention tels que :

$$X_0 = \mathfrak{A}(t_0, t_0) X_0$$

C'est à dire :

$$\mathfrak{A}(t_0, t_0) = 1$$

La détermination de la fonction F des probabilités va nous conduire tout naturellement à une décomposition plus poussée du problème des prévisions. Considérons une décomposition \mathfrak{D} de l'ensemble \mathfrak{A}_B des valeurs possibles d'une grandeur B en sous-familles \mathfrak{E}_i . En vertu du caractère additif des probabilités, si on se limite à la décomposition \mathfrak{D} , il suffit de faire des prévisions pour chaque famille \mathfrak{E}_i car on a :

$$F(B, \Sigma_i \mathfrak{E}_i, X) = \Sigma_i F(B, \mathfrak{E}_i, X)$$

On voit ainsi qu'il suffit de savoir calculer les probabilités pour chaque élément \mathcal{E}_i de la base associée à la décomposition \mathfrak{D} . Désignons alors par X_i un élément tel qu'il fournisse une prévision certaine pour la famille \mathcal{E}_i ; et si X est un élément quelconque, posons :

$$f_i = F(B, \mathcal{E}_i, X).$$

Pour la grandeur B et la décomposition \mathfrak{D} fixées, la donnée de l'ensemble des f_i équivaut à la donnée de la fonction F ; les éléments X_i considérés ci-dessus sont des éléments pris parmi les X qui fournissent des prévisions certaines, sur \mathfrak{D} pour la grandeur B à l'instant t .

A l'ensemble \mathfrak{X} des éléments de prévision, convenons d'adjoindre des éléments de façon à former une classe linéaire \mathfrak{Y} d'éléments Y telle que l'addition et la multiplication soient définies entre deux éléments de Y et que l'on ait :

1°) $aX \in \mathfrak{Y}$, pour tout nombre complexe a , si $X \in \mathfrak{X}$ et $1 \cdot X = X$.

2°) $X_1 \in \mathfrak{Y}$ et $X_2 \in \mathfrak{X} \rightarrow (X_1 + X_2) \in \mathfrak{Y}$

3°) tout élément Y de \mathfrak{Y} peut, au moins d'une façon être écrit sous la forme $\sum_i c_i X_i$, les X_i étant des éléments de \mathfrak{X} pouvant varier avec \mathfrak{D} .

On démontre alors le théorème suivant :

THÉORÈME DE LINÉARITÉ DES ÉLÉMENTS DE PRÉVISION. *L'ensemble des éléments de prévision ayant été complété par des éléments abstraits de façon à constituer une classe linéaire \mathfrak{Y} , pour une grandeur B et une décomposition \mathfrak{D} , un élément de prévision X peut toujours être regardé comme équivalent modulo B, \mathfrak{D} à une combinaison linéaire d'éléments X_i appartenant à \mathfrak{X} qui fourniraient des prévisions certaines pour les familles de la décomposition :*

$$X \equiv \sum_i c_i X_i \quad \text{mod. } B, \mathfrak{D} \quad \text{avec} \quad c_i = \varphi(f_i)$$

Des coefficients c_i on tire les probabilités f_i par une fonction $f(c_i)$:

$$F(B, \mathcal{E}_i, X) = f_i = f(c_i) \quad \text{et} \quad F(B, \mathcal{E}_i, X_i) = 1.$$

La fonction $f(c_i)$ reste à déterminer et l'on a maintenant la décomposition suivante du problème (II,2) :

II,2, A) Déterminer l'ensemble des éléments X_i pour la grandeur B et la décomposition \mathfrak{D} fixées : les X_i sont tels que :

$$F(B, \mathcal{E}_i, X_i) = 1$$

II,2, B) Déterminer l'ensemble des c_i pour B et \mathfrak{D} fixées : les c_i sont tels que

$$X = \sum_i c_i X_i \quad \text{mod. } B, \mathfrak{D}$$

II,2, C) Déterminer la fonction $f(z)$ telle que l'on ait

$$f(z) = f(c_i)$$

On peut se demander s'il est possible de choisir la fonction $f(z)$ indépendante de la décomposition \mathfrak{D} . Une telle fonction ne peut alors être quelconque et on montre que les seules fonctions $f(z)$ indépendantes de la décomposition \mathfrak{D} , continues, acceptables sous des conditions supplémentaires, sont de la forme :

$$f(x) = |x|^k \quad \text{avec} \quad k > 0.$$

À ce stade, on peut chercher s'il est possible de fixer la constante k de façon que la fonction $f(z)$ soit universelle, c'est à dire indépendante à la fois de la décomposition \mathfrak{D} et de la grandeur B considérées.

On démontre alors :

THÉORÈME DE L'UNIVERSALITÉ DE LA FONCTION F . *Si toutes les grandeurs sont simultanément mesurables (ce qui est le cas de la mécanique classique) toute valeur de k peut être acceptée pour définir une fonction universelle.*

Au contraire, s'il existe des paires de grandeurs incomposables, il n'existe qu'une seule valeur de k telle que l'on ait la même fonction $f(z)$ pour toutes les grandeurs : cette fonction $f(z)$ est dite universelle.

4. Stabilité des prévisions certaines. — La condition générale préalable selon laquelle une théorie physique a pour but de permettre de calculer des prévisions, doit être complétée par une seconde condition, dite de stabilité des prévisions. On sait en effet que le résultat d'une mesure ne peut être connu avec certitude que dans le cas d'une grandeur ayant un spectre discontinu, si l'erreur sur la mesure est inférieure à la distance entre deux valeurs spectrales. Dans le cas d'un spectre continu, du fait de l'erreur accidentelle sur toute mesure, ce qu'on détermine comme résultat de mesure ce n'est pas une valeur précise mais un ensemble de valeurs qui forme un certain intervalle défini par la précision de la mesure.

Il est nécessaire, pour que le calcul des prévisions ait une utilité pratique, que les prévisions soient peu modifiées si au lieu de les calculer à partir de une famille \mathfrak{E}_A on les calcule à partir d'une famille voisine \mathfrak{E}'_A , et dans le cas particulier où on peut analyser, c'est à dire distinguer une valeur r_A dans \mathfrak{E}_A si au lieu de les calculer à partir d'une valeur r_A , on les calcule à partir d'une valeur r'_A voisine. C'est ce qu'on peut

appeler la *stabilité des prévisions* par rapport aux résultats des mesures à partir desquelles elles sont calculées.

En particulier s'il s'agit de prévisions certaines qui demeurent certaines, il faut que le résultat r_B à t calculé à partir du résultat r_A à t_0 soit peut modifier si r_A est remplacé par un résultat r'_A ; sans cela la prévision r_B serait sans intérêt pratique; elle est la condition nécessaire à la vérification de l'existence d'une loi fonctionnelle: une instabilité se traduirait par une apparence de distribution au hasard.

Cette exigence de stabilité s'exprime par la continuité de la fonction f_B qui sert à calculer r_B à partir du résultat r_A :

$$r_B = f_B(r_A; t_0; t; S)$$

De même, par suite des erreurs accidentelles sur la mesure du temps, il est nécessaire d'avoir la stabilité des prévisions par rapport au temps; finalement la fonction f_B devra être une fonction continue des arguments r_A, t_0, t .

Cette condition de continuité de la fonction f_B n'est pas remplie d'elle-même et nous devons l'admettre comme un postulat ⁽¹⁾:

POSTULAT. *Si à partir d'un résultat de mesure r_A , appartenant à un ensemble continu de valeurs possibles d'une mesure effectuée à une époque t_0 , on peut faire des prévisions certaines pour une grandeur B , à un instant t dont le résultat sera r_B et appartiendra à un ensemble continu de valeurs possibles,*

$$r_B = f_B(t; r_A; t_0; S)$$

et si la prévision demeure certaine sur un ensemble de valeurs des éléments t, r_A, t_0 , la fonction f_B est une fonction continue de t, r_A, t_0 pour les valeurs de ces éléments pour lesquels la prévision demeure certaine. Si r_A appartient à un ensemble discontinu de valeurs possibles la fonction f_B est continue seulement par rapport à t et t_0 .

5. Stabilité des prévisions incertaines. Utilisation d'espaces abstraits. — D'après ce qui précède il n'y a pas de difficultés dans la définitions de la stabilité de prévisions certaines, car la notion de voisinage de deux valeurs r_B et r'_B est fixée par la proximité des nombres qui expriment les résultats de mesure; il n'en va plus de même dans le cas de prévisions incertaines. Etant donné l'ensemble \mathcal{F} des fonctions F qui servent à calculer les probabilités pour toutes les conditions in-

⁽¹⁾ J. L. DESTOUCHES. — Principes fondamentaux de Physique théorique. (Hermann 1942). t. II, p. 550.

tiales possibles, il faut, pour introduire la notion de stabilité, avoir défini ce que sont des fonctions voisines, c'est à dire avoir défini sur l'ensemble des fonctions F une topologie; ceci conduit à considérer cet ensemble comme un espace abstrait (\mathfrak{F}).

Définir la proximité d'un élément à un ensemble revient à fixer une règle pour adjoindre aux éléments de cet ensemble les éléments contigus; l'opération par laquelle cette adjonction se fait est l'opération de fermeture que l'on désigne par \mathfrak{F} . Si \bar{E} désigne l'ensemble formé de E et des points qui en sont contigus (ou infiniment voisins), on a;

$$\bar{E} = \mathfrak{F} E \quad (\text{avec } \bar{E} \supseteq E)$$

Cette opération de fermeture doit être choisie de façon à s'accorder avec la notion intuitive de prévision voisine; cette opération \mathfrak{F} étant jusqu'ici complètement arbitraire, on montre qu'on peut la choisir de telle façon que les fonctions soient continues par rapport aux trois arguments r_A, t, t_0 .

On peut imposer, dans le cas de prévisions incertaines la condition de stabilité des prévisions sans avoir besoin d'admettre un postulat comme dans le cas de prévisions certaines en raison de l'arbitraire dont jouit l'opération \mathfrak{F} .

Du fait que les fonctions de probabilité sont calculées par l'intermédiaire d'éléments de prévisions X , on a intérêt à considérer l'ensemble \mathfrak{X} des éléments de prévisions comme un espace abstrait en y définissant aussi une topologie (c'est à dire, une règle pour connaître les proximités). On montre qu'on peut sur \mathfrak{X} définir une opération de fermeture telle que dans l'espace (\mathfrak{X}) ainsi défini :

1^o) La fonction $F(B, \mathfrak{E}_B) = F(B, \mathfrak{E}_B, X)$ soit continue par rapport à X .

2^o) L'opérateur d'évolution $\mathfrak{Q}^l(t, t_0)$ qui lie X à X_0 , soit continu par rapport à t et t_0 , c'est à dire que l'on ait stabilité par rapport au temps: pour des instants infiniment voisins les prévisions seront infiniment voisines.

D'où le théorème suivant (1) :

THÉORÈME DE CONTINUITÉ. *La condition de stabilité des prévisions incertaines exige que dans l'ensemble \mathfrak{F} des fonctions de probabilité une topologie soit définie de telle manière que les fonctions F (c'est à dire les points de \mathfrak{F}) soient des fonctions continues de l'époque t pour laquelle on calcule des prévisions de l'époque t_0 de la mesure initiale, et du résultat de*

(1) J. L. DESTOUCHES. — Principes fondamentaux. T. II, p. 551 - 560.

cette mesure si ce résultat est contenu dans une famille continue \mathfrak{E}_A de valeurs possibles de la grandeur A .

Une topologie convenable étant fixée dans \mathfrak{F} on peut définir une topologie dans l'ensemble des éléments de prévisions \mathfrak{X} de telle manière que la fonction $F(B, \mathfrak{E}_B, X)$ soit continue par rapport à X et que $X(t, t_0, X_0)$ soit une fonction continue de t et t_0 .

Si la topologie dans l'ensemble \mathfrak{X} est choisie de telle façon que $X(t, t_0, X_0)$ soit une fonction continue de t et t_0 , les opérateurs d'évolution $\mathfrak{A}(t, t_0)$ peuvent être considérés comme des fonctions continues de t et t_0 à condition de définir une topologie convenable dans leur ensemble.

À l'ensemble \mathfrak{X} , des éléments abstraits ont été adjoints de façon à former une classe linéaire \mathfrak{A} . L'ensemble \mathfrak{X} se trouve dans \mathfrak{A} et comme une topologie y a été définie, il est naturel de la prolonger dans l'ensemble \mathfrak{A} de façon à former un espace abstrait (\mathfrak{A}).

On a donc été conduit dans le cours de la théorie à introduire trois types d'espaces abstraits :

- 1°) l'espace des fonctions de probabilité (\mathfrak{F}) ;
- 2°) l'espace (\mathfrak{X}) des éléments de prévisions ;
- 3°) l'espace (\mathfrak{A}) qui contient (\mathfrak{X}).

Cette introduction d'espaces abstraits n'est liée à aucune considération physique particulière, ce sont seulement des considérations de stabilité qui conduisent à faire intervenir des espaces abstraits dans la théorie des prévisions et par suite dans toute théorie physique (en particulier en mécanique ondulatoire) (1).

6. Association d'opérateurs aux grandeurs physiques. — Considérons d'abord le cas d'une grandeur simple, c'est à dire, d'une grandeur dont un résultat de mesure imprécis s'exprime par une famille d'ensembles d'un seul nombre. Pour une telle grandeur B et une décomposition \mathfrak{D} fixées, les valeurs de la fonction de probabilité peuvent se calculer par l'intermédiaire d'une décomposition des éléments de prévision en utilisant la fonction $f(z)$:

$$X \equiv \sum_i c_i X_i \quad \text{mod. } B, \mathfrak{D}; \quad F(B, \mathfrak{E}_B, X) = f(c_i)$$

Cette décomposition nécessite la connaissance des éléments de base X_i ;

(1) En mécanique ondulatoire (c'est à dire, quand on a admis pour principe fixant la valeur de la constante k le principe de décomposition spectrale qui pose $k=2$), le principe des interférences a pour conséquences que l'espace (\mathcal{Y}) est un espace de HILBERT (\hbar) (lié à l'espace des fonctions de carré sommable) et que l'espace (\mathfrak{X}) est formé par une partie de la surface sphérique de rayon unité centrée à l'origine de l'espace (\mathcal{Y}).

et leur détermination est un peu analogue à la fixation d'un repère dans un espace.

Or, une manière particulièrement commode de se fixer un repère dans un espace consiste à définir ses axes comme les axes principaux d'une quadrique ou comme les axes principaux d'une transformation linéaire. L'exemple de l'espace euclidien (R_3) fait particulièrement bien comprendre cette analogie. Un point M d'une sphère étant donné par

$$\overrightarrow{OM} = \sum_i x_i \vec{e}_i \quad \sum_i x_i^2 = R^2$$

un point de l'ellipsoïde sera déterminé par

$$\overrightarrow{OP} = \sum_i \lambda_i x_i \vec{e}_i$$

On passera donc de la sphère à l'ellipsoïde par une transformation auto-métrique et définissant le repère. On peut symboliser ce passage par une transformation T et écrire :

$$P = T.M$$

Les vecteurs de base \vec{e}_i déterminent les directions principales de la transformation et définissent le repère ; on a :

$$T \vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}_i$$

une telle équation est ce qu'on appelle une *équation aux valeurs propres*, les \vec{e}_i sont les *vecteurs propres* et les λ_i les *valeurs propres* de la transformation T . Les vecteurs propres sont donc des vecteurs particuliers sur lesquels la transformation T n'opère pas un changement de direction, mais simplement une multiplication par un nombre qui est la valeur propre. A une transformation T est ainsi attaché un certain ensemble de valeurs propres λ_i , et l'équation

$$T \vec{e} = \lambda \vec{e}$$

n'a de solution que si λ est l'une des valeurs propres de T ; dans ce cas, \vec{e} est un vecteur de base à un facteur multiplicatif près. Les vecteurs de base \vec{e}_i sont ainsi déterminés comme les vecteurs propres de la transformation T , convenablement choisie. Inversement, la donnée des vecteurs propres \vec{e}_i et des valeurs propres λ_i détermine la transformation T .

Nous pouvons étendre le même procédé à un espace abstrait affine du genre de l'espace (\mathfrak{Q}). Dans cet espace (à une certaine équivalence

près) les vecteurs de base sont les X_i qui donnent des prévisions certaines pour chaque famille \mathcal{E}_i ; il s'ensuit qu'à chaque grandeur B et chaque décomposition \mathfrak{D} , on peut associer une transformation B_D linéaire et qui a pour éléments propres les X_i donnant des prévisions certaines pour chaque famille \mathcal{E}_i déterminée par la décomposition \mathfrak{D} .

L'équation aux valeurs propres est alors :

$$B_D X_i = \lambda_i X_i$$

Les valeurs propres λ_i sont arbitraires (pourvu que les X_i ne soient pas modifiés). On peut alors les choisir telles qu'elles soient égales à la valeur moyenne $r_{B,i}$, de la famille \mathcal{E}_i :

$$B_D X_i = r_{B,i} X_i \quad \text{avec} \quad r_{B,i} \in \mathcal{E}_i$$

L'opérateur B_D ainsi défini (valeurs propres $r_{B,i}$, éléments propres X_i) sera appelé *opérateur associé à la grandeur B pour la décomposition \mathfrak{D}* .

Nous appellerons *opérateur associé à la grandeur B* , et nous noterons \mathbf{B} , l'opérateur associé à la décomposition à laquelle on est conduit en prenant l'intersection de toutes les décompositions possibles.

Un tel opérateur est *linéaire*, a des *valeurs propres réelles*, et tout *élément de prévision est décomposable suivant les éléments propres*, modulo B , \mathfrak{D} soit :

$$X \equiv \sum_i c_i X_i \quad \text{mod. } B, \mathfrak{D}$$

par définition de l'opérateur B_D . Si on considère un opérateur limite \mathbf{B} et qu'il y ait spectre continu, le signe Σ est remplacé par une intégrale abstraite et l'on a :

$$X \equiv \int_{\mathcal{A}_B} c(d \mathcal{E}_B) X(d \mathcal{E}_B) \quad \text{mod. } B, \mathfrak{D}$$

Enfin, toute valeur possible r_B est définie à un facteur constant près b , le même pour toutes les valeurs propres, permettant de laisser arbitraire le choix de l'unité. C'est ainsi que pour les opérateurs associés aux grandeurs : énergie, quantité de mouvement, moment cinétique, on trouve la constante de PLANCK en facteur.

Dans le cas où l'on peut effectuer la mesure simultanée de deux ou plusieurs grandeurs, on peut considérer l'ensemble de ces grandeurs comme une seule grandeur, dite *grandeur composée*.

Si la grandeur B de rang n est décomposable en n grandeurs simples B_i , on peut associer à chacune des grandeurs simples B_i un opé-

rateur suivant la méthode que nous venons d'indiquer ; à la grandeur composée B , on associe alors l'ensemble de ces n opérateurs.

Si la grandeur B est décomposable en grandeurs simples on démontre (1) le théorème suivant :

THÉORÈME. *On peut associer un opérateur à une grandeur de rang n d'une manière analogue à celle qui permet d'associer un opérateur à une grandeur simple. L'opérateur associé à une grandeur de rang n définit une transformation dans l'espace $(\mathfrak{E}^{(n)})$ formé par le produit cartésien de n espaces (\mathfrak{E}) . Cet opérateur transforme l'élément formé par le produit cartésien de l'élément de prévision X répété n fois, en un élément Y ; la transformation est linéaire, l'ensemble des valeurs possibles est identique au spectre de l'opérateur qui est réel, et tout élément de l'espace $(\mathfrak{E}^{(n)})$ est décomposable suivant les éléments propres de l'opérateur à une équivalence près.*

Si la grandeur est décomposable en n grandeurs simples, l'opérateur associé est formé par l'ensemble de n opérateurs de l'espace (\mathfrak{E}) ; son spectre est formé par le produit cartésien des n spectres.

L'association d'opérateurs aux grandeurs physiques permet de préciser davantage la forme de certains problèmes issus de la décomposition du problème fondamental du calcul des prévisions.

C'est ainsi que l'on est conduit à décomposer le problème I en quatre problèmes successifs :

I,1. *déterminer l'opérateur \mathbf{A} associé à la grandeur A .*

I,2. *déterminer la famille \mathfrak{E}_A des valeurs possibles de la grandeur A , c'est à dire son spectre.*

I,3. *déterminer l'ensemble des éléments propres de l'opérateur correspondant à la famille \mathfrak{E}_A (déterminée par la précision de la mesure).*

I,4. *parmi les éléments propres correspondant à \mathfrak{E}_A , déterminer ceux qui sont des éléments initiaux acceptables.*

En ce qui concerne le problème I,3 remarquons que, en pratique, pour un choix convenable des variables, il y a presque toujours décomposition en grandeurs simples de la grandeur A mesurée.

Une fois les X_{rA} déterminés, il faut encore parmi eux distinguer ceux qui sont acceptables comme éléments initiaux ; le problème I,4 se pose effectivement (cas d'éléments initiaux satisfaisant par exemple à des conditions de symétrie ou d'antisymétrie).

L'introduction d'opérateurs ne modifie le problème II,1 mais par contre le problème II,2 se décompose de la façon suivante :

(1) J. L. DESTOUCHES. — Corpuscules et systèmes de corpuscules, p. 285.

II,2, A, a) *déterminer l'opérateur B associé à la grandeur B pour laquelle on veut calculer des prévisions. C'est pour la grandeur B le même problème que I,1 pour la grandeur A.*

II,2, A, b) *déterminer les éléments propres X_{rB} de l'opérateur B. C'est le même problème que I,3 pour l'opérateur A.*

Enfin, les problèmes II,2,B et II,2,C ne sont pas modifiés. Pour résoudre chacun de ces problèmes, il faut admettre des postulats exprimant les lois physiques fondamentales.

CHAPITRE II

THÉORIE QUANTIQUE DES MOUVEMENTS RELATIFS

A. CALCUL VECTORIEL GAUCHE ET CALCUL TENSORIEL GAUCHE

§ 1. OPÉRATEURS VECTORIELS

1. **Opérateurs et grandeurs physiques.** — Nous venons de voir en théorie générale des prévisions qu'à toute grandeur effectivement mesurable nous pouvons associer un opérateur linéaire de l'espace (\mathfrak{E}) , d'où ce premier énoncé :

« Par rapport à un observateur Ob qui rapporte ses observations à un trièdre T_0 et à une échelle de temps $[t]$ à chaque grandeur effectivement mesurable correspond biunivoquement un opérateur linéaire de l'espace (\mathfrak{E}) ».

Nous avons également vu au chapitre précédent qu'un opérateur associé à une grandeur physique possédait certaines propriétés. Inversement on peut considérer qu'un opérateur qui possède ces propriétés définit une « grandeur en un sens élargi » car il est possible qu'à cet opérateur on ne puisse faire correspondre un appareil de mesure, si bien qu'une grandeur définie de cette façon pourra ne pas être effectivement mesurable. Dans le cours du développement d'une théorie on peut rencontrer un tel opérateur, le considérer comme constituant une grandeur en un sens élargi, puis démontrer dans la suite du développement que l'on peut indiquer un procédé de mesure de cette grandeur. Lorsqu'on a fait une telle démonstration, on a montré que la grandeur définie par l'opérateur est une grandeur effectivement mesurable, mais

une telle démonstration n'est pas toujours possible ⁽¹⁾. Nous poserons donc la convention suivante :

CONVENTION I : *Un opérateur qui satisfait aux conditions suivantes*

1. C'est un opérateur linéaire de l'espace (\mathfrak{A}) ;
2. Ses valeurs propres sont réelles ;
3. Tout élément de prévision X est décomposable suivant ses éléments propres à une certaine équivalence près ;
4. Toutes ses valeurs propres sont définies à un facteur constant près, le même pour toutes les valeurs propres (facteur qui permet de laisser arbitraire le choix de l'unité).

sera dit définir une grandeur au sens élargi.

Des résultats du chapitre précédent il résulte que la classe des grandeurs au sens élargi comprend la classe des grandeurs effectivement mesurables .

Dans les théories classiques nous avons un certain nombre de grandeurs physiques, parmi ces grandeurs, certaines peuvent être effectivement mesurables, ce sera le cas si l'on peut définir un dispositif de mesure valable à la fois à l'approximation classique et à l'approximation quantique .

Comme l'approximation classique est plus grossière que l'approximation quantique, toute grandeur effectivement mesurable en mécanique quantique la sera également en mécanique classique ; mais des grandeurs différentes en mécanique quantique peuvent se confondre en mécanique classique.

D'autre part certaines grandeurs des théories classiques peuvent n'être que des grandeurs au sens élargi à l'approximation quantique. On pourrait montrer d'une façon précise, une fois les principes des théories quantiques admis, que toute grandeur au sens élargi se réduit à l'approximation classique soit à la grandeur nulle, c'est à dire à la grandeur ayant toujours 0 pour valeur, soit à une grandeur classique.

Enfin, il existe des grandeurs des théories classiques qui ne sont pas mesurables à l'approximation quantique et auxquelles on ne peut faire correspondre aucun opérateur de l'espace (\mathfrak{A}) , ce sont des grandeurs non mesurables, nous les appellerons *grandeurs exclues* ⁽²⁾. Aux grandeurs

⁽¹⁾ Par exemple la grandeur spin est introduite au moyen de l'opérateur spin et on démontre (raisonnement de Bohr) que le spin n'est pas une grandeur effectivement mesurable. C'est donc seulement une grandeur au sens élargi et cependant elle joue un rôle important dans les considérations théoriques.

⁽²⁾ Par exemple une grandeur composée $x \& p_x$ formée par la mesure simultanée d'une coordonnée et de la composante suivant le même axe de la quantité de mouvement d'une corpuscule est une grandeur exclue en mécanique quantique et au contraire une grandeur mesurable à l'approximation classique.

exclues nous ne pouvons faire correspondre aucun résultat de mesure ni aucun élément de prévision. Comme l'élément 0 de l'espace (\mathfrak{E}) n'appartient pas à l'ensemble \mathfrak{E} nous pouvons convenir de faire correspondre l'élément 0 aux grandeurs exclues ; l'opérateur correspondant à ces grandeurs sera par convention l'opérateur consistant en la multiplication par 0, nous le désignerons par O . Tout élément de l'espace (\mathfrak{E}) est alors élément propre de l'opérateur associé à une grandeur exclue. Nous poserons la convention suivante :

CONVENTION II : *Les grandeurs intervenant dans les théories classiques auxquelles on ne peut pas faire correspondre en théorie quantique un opérateur satisfaisant aux conditions des grandeurs au sens élargi sont dites « grandeurs exclues », on convient de leur faire correspondre l'opérateur O .*

En résumé les grandeurs se divisent en théorie quantique en trois catégories :

1° *les grandeurs effectivement mesurables* auxquelles correspondent un opérateur et un appareil de mesure ;

2° *Les grandeurs au sens élargi* auxquelles correspond un opérateur mais pas d'appareil de mesure ;

3° *les grandeurs exclues* auxquelles on associe par convention l'opérateur O , (elles ne sont pas mesurables).

Grace à ces conventions, à toute grandeur de la mécanique classique correspond en théorie quantique un opérateur (pouvant éventuellement se réduire à l'opérateur O). Comme d'autre part la somme de deux opérateurs, le produit de deux opérateurs, le produit d'un opérateur par un nombre réel fournissent encore un opérateur de l'espace (\mathfrak{E}) , à condition que le domaine opérable correspondant ne soit pas vide, en peut donc considérer l'anneau des opérateurs de l'espace (\mathfrak{E}) engendré par les opérateurs associés aux grandeurs au sens élargi.

Nous pouvons alors définir une cinématique opératorielle en considérant les opérateurs coordonnées par rapport à un trièdre T , les opérateurs associés aux composantes des vitesses, les opérateurs associés aux composantes des accélérations ; les formes de ces opérateurs ne seront explicitées que plus tard.

2. Opérateurs vectoriels. — Considérons un observateur Ob qui étudie un ensemble de corpuscules et rapporte ses observations à une échelle de temps $[\gamma]$ et à un trièdre T lié à un système macroscopique (en abrégé référentiel). Désignons par \vec{I} , \vec{J} , \vec{K} les vecteurs unitaires de ce trièdre supposé trirectangle. Si l'on multiplie ces vecteurs unitaires par

les opérateurs associés aux coordonnées des corpuscules (opérateurs sur la forme analytique desquels aucune supposition n'a été faite jusqu'ici) et si on les additionne comme des vecteurs, on définit ainsi des *opérateurs vectoriels de position* des corpuscules. Ceci peut être fait non seulement pour les opérateurs de position mais aussi pour les opérateurs associés aux composantes des vitesses et aux composantes des accélérations plus généralement pour toutes les grandeurs qui en théorie classique ont un caractère vectoriel. De cette façon on définit des opérateurs vectoriels qui correspondent à des grandeurs de rang trois. D'une façon semblable, on définirait des opérateurs tensoriels.

Si l'on considère des trièdres dont les paramètres sont liés aux opérateurs attachés aux grandeurs relatives aux corpuscules d'un système (en abrégé trièdre en mouvement quantique) rapportés au trièdre fondamental introduit ci-dessus, on est amené à considérer pour les opérateurs vectoriels des composantes droites et gauches introduites par le fait que la multiplication entre opérateurs est en général non-commutative. Le calcul vectoriel classique est alors insuffisant et on doit utiliser un calcul vectoriel le *calcul vectoriel gauche*, dont les principales règles ont été énoncées par M. CAZIN (1).

On est ainsi conduit à diviser les repères en mouvement par rapport au repère fondamental en plusieurs classes:

1° *les repères commutatifs* pour lesquels le passage du repère fondamental à un repère de cette classe s'exprime au moyen des règles de calcul vectoriel classique. C'est le cas d'un repère T dont le mouvement par rapport au repère fondamental T_f est indépendant des opérateurs associés aux différentes grandeurs attachées au système envisagé; ce cas est réalisé si T est en repos par rapport à T_f ou si T est en mouvement classique par rapport à T_f ;

2° *les repères non-commutatifs holonomes*, ce sont ceux dont la position par rapport au repère fondamental est fonction des opérateurs associés aux positions des corpuscules et indépendant des opérateurs associés aux vitesses;

3° *les repères non-commutatifs non-holonomes*, ce sont les repères dont la position par rapport au repère fondamental peut dépendre à la fois des opérateurs associés aux grandeurs position et vitesse des corpuscules.

Pour les deux dernières catégories de repères en mouvement relatif par rapport au repère fondamental, il est nécessaire d'employer le calcul

(1) M. CAZIN. — Diplôme d'Etudes supérieures. Paris 1946.

vectorel gauche. Dans tous les développements qui suivent nous allons envisager le cas général des repères non-commutatifs non-holonomes sans fixer la forme analytique des opérateurs associés aux différentes grandeurs.

3. Définition des composantes droite et gauche d'un opérateur vectoriel et règles de calcul. — Nous désignerons par $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ les vecteurs unitaires du repère fondamental T_f et par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ceux du repère en mouvement quantique par rapport à T_f . Plus généralement nous désignerons par des majuscules les quantités relatives à T_f et par des minuscules les quantités correspondantes dans T .

Considérons un opérateur vectoriel \vec{V} défini suivant les procédés du paragraphe précédent par les opérateurs A, B, C , associés aux composantes A, B, C de la grandeur vectorielle classique \vec{V} . Faisons encore la convention de désigner par la même lettre que l'opérateur considéré, mais lettre grasse, l'opérateur associé à la grandeur X sans pour cela en avoir précisé la forme analytique. Ces définitions étant posées nous pouvons écrire

$$\vec{V} = A \vec{I} + B \vec{J} + C \vec{K} = \vec{I} A + \vec{J} B + \vec{K} C$$

les deux écritures sont ici indifférentes puisque les quantités $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ et A, B, C commutent, les composantes de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ étant constituées par les nombres 0 et 1 qui commutent avec tous les opérateurs.

Considérons maintenant le passage du trièdre fondamental T_f à un trièdre T en mouvement quantique par rapport à T_f ; le changement de système de référence se traduira par des relations de la forme :

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \alpha_{11} \vec{I} + \alpha_{12} \vec{J} + \alpha_{13} \vec{K} \\ \vec{j} &= \alpha_{21} \vec{I} + \alpha_{22} \vec{J} + \alpha_{23} \vec{K} \\ \vec{k} &= \alpha_{31} \vec{I} + \alpha_{32} \vec{J} + \alpha_{33} \vec{K} \end{aligned}$$

(les α_{ij} commutant avec $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$).

Les relations inverses que l'on suppose exister puisque tout vecteur a des composantes bien définies dans tout repère (par contre tout vecteur ne peut être un vecteur de base d'un repère) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \beta_{a,11} \vec{i} + \beta_{a,12} \vec{j} + \beta_{a,13} \vec{k} = \vec{i} \beta_{g,11} + \vec{j} \beta_{g,12} + \vec{k} \beta_{g,13} \\ \vec{J} &= \beta_{a,21} \vec{i} + \beta_{a,22} \vec{j} + \beta_{a,23} \vec{k} = \vec{i} \beta_{g,21} + \vec{j} \beta_{g,22} + \vec{k} \beta_{g,23} \\ \vec{K} &= \beta_{a,31} \vec{i} + \beta_{a,32} \vec{j} + \beta_{a,33} \vec{k} = \vec{i} \beta_{g,31} + \vec{j} \beta_{g,32} + \vec{k} \beta_{g,33} \end{aligned}$$

les paramètres α_{mn} , $\beta_{a,mn}$, $\beta_{g,mn}$ de la transformation dépendent dans le cas général envisagé ici des opérateurs associés aux positions et aux vitesses des différents corpuscules du système. Il s'ensuit que dans le trièdre T l'opérateur \vec{V} pourra être écrit sous l'une des deux formes suivantes :

$$\vec{V} = a_d \vec{i} + b_d \vec{j} + c_d \vec{k}$$

et

$$\vec{V} = \vec{i} a_g + \vec{j} b_g + \vec{k} c_g$$

Les quantités opératorielles a_d , b_d , c_d seront appelées les *composantes droites* de l'opérateur vectoriel \vec{V} dans le trièdre T , et a_g , b_g , c_g les *composantes gauches*. Pour les repères non-commutatifs les composantes droites et gauches d'un opérateur vectoriel sont différentes par suite de leur non commutation avec les coefficients de la transformation, donc avec les \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Pour les repères commutatifs au contraire on aura commutation (d'ou leur nom) et les composantes droites et gauches seront égales pour un vecteur quelconque. Remarquons que le fait que l'on ait égalité des composantes droites et gauches pour un vecteur particulier n'entraîne pas nécessairement que le trièdre T soit commutatif c'est à dire que l'on ait égalité pour tout vecteur.

Nous allons maintenant donner les principales règles du calcul vectoriel gauche en renvoyant au travail de M. CAZIN pour les démonstrations qui subsistent dans le cas général traité ici.

THÉOREME I. SOMME DE DEUX VECTEURS : *Les composantes gauches par rapport à un trièdre T non commutatif, non-holonome d'un opérateur vectoriel \vec{W} somme de deux opérateurs vectoriels \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont égales à la somme des composantes gauches des deux opérateurs vectoriels \vec{V}_1 et \vec{V}_2 par rapport à ce trièdre.*

Les composantes droites par rapport à un trièdre non-commutatif non-holonome d'un opérateur \vec{W} somme de deux opérateurs vectoriels \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont égales à la somme des composantes droites des deux opérateurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 par rapport à ce même trièdre.

Si

$$\vec{V}_1 = a_{1,d} \vec{i} + b_{1,d} \vec{j} + c_{1,d} \vec{k} = \vec{i} a_{1,g} + \vec{j} b_{1,g} + \vec{k} c_{1,g}$$

$$\vec{V}_2 = a_{2,d} \vec{i} + b_{2,d} \vec{j} + c_{2,d} \vec{k} = \vec{i} a_{2,g} + \vec{j} b_{2,g} + \vec{k} c_{2,g}$$

alors

$$\vec{W} = (a_{1,d} + a_{2,d}) \vec{i} + (b_{1,d} + b_{2,d}) \vec{j} + (c_{1,d} + c_{2,d}) \vec{k}$$

$$\vec{W} = \vec{i} (a_{1,g} + a_{2,g}) + \vec{j} (b_{1,g} + b_{2,g}) + \vec{k} (c_{1,g} + c_{2,g})$$

La somme est donc commutative et l'on a :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

THÉORÈME II. MULTIPLICATION D'UN OPÉRATEUR VECTORIEL PAR UN SCALAIRE. *L'opérateur vectoriel $\vec{W}_1 = \lambda \vec{V}$ produit à gauche d'un opérateur vectoriel \vec{V} par un opérateur scalaire λ , a pour composantes droites par rapport à un trièdre non commutatif non holonome T les produits des composantes droites de \vec{V} à gauche par λ .*

L'opérateur vectoriel $\vec{W}_2 = \vec{V} \lambda$ produit à droite d'un opérateur vectoriel \vec{V} par un opérateur scalaire λ a pour composantes gauches par rapport à un trièdre non-commutatif non-holonome T le produit des composantes gauches de \vec{V} à droite par λ .

Si

$$\vec{V} = a_d \vec{i} + b_d \vec{j} + c_d \vec{k} = \vec{i} a_g + \vec{j} b_g + \vec{k} c_g$$

alors

$$\vec{W}_1 = \lambda \vec{V} = (\lambda a_d) \vec{i} + (\lambda b_d) \vec{j} + (\lambda c_d) \vec{k}$$

$$\vec{W}_2 = \vec{V} \lambda = \vec{i} (a_g \lambda) + \vec{j} (b_g \lambda) + \vec{k} (c_g \lambda)$$

THÉORÈME III. PRODUIT SCALAIRE DE DEUX OPÉRATEURS VECTORIELS. *Les produit scalaire de deux opérateurs vectoriels \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est égal à la somme des produits des composantes droites du premier opérateur vectoriel par les composantes gauches correspondantes du second par rapport à un trièdre non-commutatif, non-holonome T pour un système de base orthonormé.*

Si

$$\vec{V}_1 = a_{1,d} \vec{i} + b_{1,d} \vec{j} + c_{1,d} \vec{k} = \vec{i} a_{1,g} + \vec{j} b_{1,g} + \vec{k} c_{1,g}$$

$$\vec{V}_2 = a_{2,d} \vec{i} + b_{2,d} \vec{j} + c_{2,d} \vec{k} = \vec{i} a_{2,g} + \vec{j} b_{2,g} + \vec{k} c_{2,g}$$

alors

$$(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = a_{1,d} a_{2,g} + b_{1,d} b_{2,g} + c_{1,d} c_{2,g}$$

$$(\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1) = a_{2,d} a_{1,g} + b_{2,d} b_{1,g} + c_{2,d} c_{1,g}$$

On voit sur ces expressions que le produit scalaire de deux opérateurs vectoriels n'est pas en général une opération commutative.

Le *produit vectoriel* peut être défini dans le calcul vectoriel gauche de la façon suivante :

a) c'est une *opération bilinéaire*

$$\begin{aligned}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{W} &= \vec{V}_1 \wedge \vec{W} + \vec{V}_2 \wedge \vec{W} \\ \vec{V} \wedge (\vec{W}_1 + \vec{W}_2) &= \vec{V} \wedge \vec{W}_1 + \vec{V} \wedge \vec{W}_2 \\ (\lambda \vec{V}) \wedge \vec{W} &= \lambda (\vec{V} \wedge \vec{W}) \\ \vec{V} \wedge (\vec{W}_\rho) &= (\vec{V} \wedge \vec{W})_\rho\end{aligned}$$

b) pour les vecteurs unitaires du repère fondamental orthonormé, on a :

$$\begin{aligned}\vec{I} \wedge \vec{I} &= 0 \\ \vec{I} \wedge \vec{J} &= -\vec{J} \wedge \vec{I} = \vec{K}\end{aligned}$$

Mais le produit vectoriel défini par ces conditions n'a pas la variance d'un vecteur ; en outre dans un trièdre non-commutatif même orthonormé on n'a pas en général :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = 0 \quad \text{ni} \quad \vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k}$$

de ce fait cette opération ne sera pas utile ; on établit facilement que :

THÉORÈME IV. PRODUIT VECTORIEL DE DEUX OPÉRATEURS VECTORIELS. *L'opérateur \vec{W} produit vectoriel de deux opérateurs vectoriels \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dont les composantes sont données par rapport à un trièdre non-commutatif non-holonyme T a pour expression :*

$$\begin{aligned}\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= a_{1,d} \vec{i} \wedge \vec{i} a_{2,g} + a_{1,d} \vec{i} \wedge \vec{j} b_{2,g} + a_{1,d} \vec{i} \wedge \vec{k} c_{2,g} \\ &+ b_{1,d} \vec{j} \wedge \vec{i} a_{2,g} + b_{1,d} \vec{j} \wedge \vec{j} b_{2,g} + b_{1,d} \vec{j} \wedge \vec{k} c_{2,g} \\ &+ c_{1,d} \vec{k} \wedge \vec{i} a_{2,g} + c_{1,d} \vec{k} \wedge \vec{j} b_{2,g} + c_{1,d} \vec{k} \wedge \vec{k} c_{2,g}.\end{aligned}$$

§ 2. CALCUL TENSORIEL GAUCHE

4. Composantes covariantes et contravariantes droites et gauches d'un vecteur. Cherchons maintenant comment va se transformer un opérateur vectoriel lorsqu'au lieu de le rapporter à un trièdre orthonormal en mouvement quantique par rapport au repère fondamental,

on le rapporte à un trièdre T non orthonormal, non-commutatif, non-holonyme et quand on passe du trièdre T à un autre trièdre T' qui est aussi un trièdre non-commutatif, non-holonyme mais qui n'est pas orthonormé. Dans tout ce qui suit nous ferons la convention d'Einstein suivant laquelle on devra sommer par rapport à tout indice répété une fois en haut et une fois en bas ; on écrira $A_i B^i$ pour $\sum_i A_i B^i$.

Désignons par \vec{e}_i les vecteurs de base dans le trièdre T et par \vec{E}_j les vecteurs de base de T' . On a les formules suivantes pour le changement de base, lorsqu'on peut exprimer les \vec{e}_i sur les \vec{E}_j :

$$\vec{e}_i = \alpha_{a_i}^j \vec{E}_j ; \quad \vec{e}_i = \vec{E}_j \alpha_{g_i}^j \quad (1)$$

$\alpha_{a_i}^j$ représente la $j^{\text{ème}}$ composante droite du vecteur \vec{e}_i dans le trièdre T' ; $\alpha_{g_i}^j$ représente la $j^{\text{ème}}$ composante gauche du vecteur \vec{e}_i dans le trièdre T' . On a de même les formules de la transformation inverse qui existe puisque T et T' sont supposés constituer des systèmes de base et que dans un tel système tout vecteur a des composantes bien définies :

$$\vec{E}_j = \beta_{a_j}^i \vec{e}_i ; \quad \vec{E}_j = \vec{e}_i \beta_{g_j}^i \quad (2)$$

Les formules (1) et (2) sont valables en vertu des hypothèses que T et T' peuvent être choisis comme repères, donc tout vecteur a des composantes bien définies sur les \vec{e}_i et les \vec{E}_j . Mais il n'en résulte pas qu'un vecteur quelconque \vec{V} puisse être pris comme vecteur de base d'un certain repère. En exprimant les \vec{E}_j dans la formule (1) en fonction des \vec{e}_i ou dans la formule (2) les \vec{e}_i en fonction des \vec{E}_j on obtient entre les α et les β les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_{a_i}^j \beta_{a_j}^k &= \delta_i^k ; & \beta_{a_j}^i \alpha_{a_i}^k &= \delta_j^k \\ \alpha_{g_i}^j \beta_{g_j}^k &= \delta_i^k ; & \beta_{g_j}^k \alpha_{g_i}^j &= \delta_i^k \end{aligned}$$

δ_i^k étant nul pour $i \neq k$ et égal à 1 pour $i = k$.

Un vecteur \vec{X} pourra s'exprimer par ses composantes droites ou gauches dans chacun des deux trièdres :

$$\begin{aligned} \vec{X} &= x_a^i \vec{e}_i = \vec{e}_i x_g^i & \text{dans } T \\ \vec{X} &= X_a^j \vec{E}_j = \vec{E}_j X_g^j & \text{dans } T' \end{aligned}$$

Si l'on considère les formules de changement de base, on obtient entre les composantes les relations :

$$\begin{aligned} x_d^i &= X_d^j \beta_{aj}^i; & x_g^i &= \beta_{gj}^i X_g^j \\ X_d^j &= x_d^i \alpha_{di}^j; & X_g^j &= \alpha_{gi}^j x_g^i \end{aligned} \quad (3)$$

Les composantes droites et gauches d'un vecteur se transforment donc dans un changement de base suivant les transformations inverses de celles valables pour les vecteurs de base. Les x_d^i et x_g^i sont dites *composantes droites et gauches contravariantes* du vecteur \vec{X} par rapport au trièdre T .

Posons :

$$x_{di} = (\vec{X} \cdot \vec{e}_i), \quad x_{gi} = (\vec{e}_i \cdot \vec{X})$$

et cherchons comment se transforment les quantités x_{di} et x_{gi} dans le changement de base précédemment défini par (1) et (2) :

$$\begin{aligned} x_{di} &= (\vec{X} \cdot \vec{e}_i) = (\vec{X} \cdot \vec{E}_j) \alpha_{gj}^i = X_{dj} \alpha_{gj}^i \\ x_{gi} &= (\vec{e}_i \cdot \vec{X}) = \alpha_{di}^j (\vec{E}_j \cdot \vec{X}) = \alpha_{di}^j X_{gj} \end{aligned}$$

Les x_{di} et x_{gi} sont dites *composantes droites et gauches covariantes du vecteur \vec{X} dans le trièdre T* , car dans un changement de base elles se transforment comme les vecteurs de base.

Cherchons à établir les relations qui existent entre les composantes covariantes et contravariantes d'un même vecteur. On a :

$$\begin{aligned} x_{di} &= (\vec{X} \cdot \vec{e}_i) = x_d^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) x_a^i g_{ji} & (4) \\ x_{gi} &= (\vec{e}_i \cdot \vec{X}) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) x_g^j = g_{ij} x_g^j & (4') \end{aligned}$$

en posant :

$$g_{ji} = (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)$$

On remarquera qu'en général on a :

$$g_{ij} \neq g_{ji}$$

On a ainsi déterminé les composantes covariantes droites en fonction des composantes contravariantes droites et les composantes covariantes gauches en fonction des composantes contravariantes gauches. On a un système de n équations linéaires à n inconnues dans laquelle les

coefficients g_{ij} sont des opérateurs; on ne pourra pas en général exprimer les composantes contravariantes en fonction des composantes covariantes parce que les g_{ij} n'ont pas toujours des inverses.

Considérons en particulier comme vecteurs, des vecteurs de base \vec{e}_i ou \vec{E}_k ; on a pour $(\vec{e}_i \cdot \vec{E}_k)$, en exprimant \vec{e}_i en fonction des \vec{E}_j , ou \vec{E}_k en fonction des \vec{e}_j et en vertu des relations (1) et (2) :

$$g_{ij} \beta_{gk}^j = (\vec{e}_i \cdot \vec{E}_k) = \alpha_{di}^s G_{sk}$$

en posant

$$G_{sk} = (\vec{E}_s \cdot \vec{E}_k)$$

de même on a pour $(\vec{E}_k \cdot \vec{e}_i)$ les relations

$$\beta_{dk}^j g_{ji} = (\vec{E}_k \cdot \vec{e}_i) = G_{kj} \alpha_{gi}^j$$

Au moyen des composantes covariantes et contravariantes des vecteurs le produit scalaire de deux vecteurs rapportés à une base quelconque s'exprime très simplement; considérons en effet deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} tels que :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_d^i \vec{e}_i = \vec{e}_i x_g^i \\ \vec{y} &= y_d^i \vec{e}_j = \vec{e}_j y_g^i \end{aligned}$$

Le produit scalaire est donné par :

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = x_d^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) y_g^j = x_d^i g_{ij} y_g^j$$

ce qui donne, si l'on tient compte de la définition des g_{ij} :

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = x_d^i \cdot y_{gi} = x_{di} \cdot y_g^i$$

d'où ce théorème :

THÉORÈME V. *Le produit scalaire de deux vecteurs exprimés dans une base quelconque est égal à la somme des produits d'une composante contravariante droite du premier par la composante covariante gauche du second. Ce produit scalaire est encore égal à la somme des produits d'une composante covariante droite du premier vecteur par la composante contravariante gauche correspondante du second.*

Si en particulier on considère une base orthonormée, les composantes covariantes et contravariantes sont égales. On retrouve alors l'expression donnée précédemment pour le produit scalaire de deux vecteurs.

5. **Produit tensoriel.** — Considérons deux espaces (E_n) et (F_p) à n et p dimensions. Désignons par \vec{e}_i les vecteurs de base de (E_n) et par \vec{f}_j les vecteurs de base de (F_p) . Soit \vec{x} un vecteur de base de (E_n) et \vec{y} un vecteur de (F_p) . A ces deux espaces (E_n) et (F_p) nous ferons correspondre un espace à np dimensions que nous désignons par :

$$(G_{np}) = (E_n) \odot (F_p)$$

L'espace (G_{np}) sera dit obtenu par *produit tensoriel* ou *produit krönerkerien* de (E_n) par (F_p) .

Au couple de vecteurs \vec{x}, \vec{y} on fait correspondre l'élément $\vec{x} \odot \vec{y}$ dans $(E_n) \odot (F_p)$ avec les propriétés suivantes :

a) distributivité par rapport à l'addition :

$$\vec{x} \odot (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \odot \vec{y}_1 + \vec{x} \odot \vec{y}_2$$

b) si α est un scalaire :

$$\begin{aligned} \alpha \vec{x} \odot \vec{y} &= \alpha (\vec{x} \odot \vec{y}) \\ \vec{x} \odot \vec{y} \alpha &= (\vec{x} \odot \vec{y}) \alpha \end{aligned}$$

c) les np vecteurs de base $\vec{\eta}_{ij}$ de l'espace (G_{np}) sont obtenus à partir des \vec{e}_i et \vec{f}_j par :

$$\vec{\eta}_{ij} = \vec{e}_i \odot \vec{f}_j$$

On généralise sans difficulté cette opération de produit tensoriel pour un nombre quelconque d'espaces au moyen de produits successifs.

Nous nous bornerons dans ce qui suit à considérer le produit tensoriel d'un espace (E_n) par lui-même (carré tensoriel de (E_n)).

Nous aurons alors :

$$(G_{n^2}) = (E_n)^2 = (E_n) \odot (E_n)$$

Les vecteurs de base \vec{e}_{ij} dans l'espace produit sont donnés par :

$$\vec{e}_{ij} = \vec{e}_i \odot \vec{e}_j$$

Un vecteur de l'espace produit $(E_n)^2$ sera défini à partir de deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de l'espace (E_n) par : $\vec{x} \odot \vec{y}$.

6. **Définition des tenseurs du second ordre covariants.** — Considérons un changement de base dans l'espace (E_n) défini par (1) et les for-

mules inverses (2) et cherchons comment vont être transformés les vecteurs de base dans l'espace carré tensoriel $(E_n)^2$:

$$\vec{e}_{ij} = \vec{e}_i \odot \vec{e}_j = \alpha_{di}^k \vec{E}_k \odot \vec{E}_n \alpha_{gj}^n = \alpha_{di}^k \vec{E}_{kn} \alpha_{gj}^n \quad (5)$$

le changement de base pourra aussi s'exprimer par :

$$\vec{e}_{ij} = \vec{e}_i \odot \vec{e}_j = \vec{E}_k \alpha_{gi}^k \odot \alpha_{di}^n \vec{E}_n \quad (6)$$

et les formules inverses :

$$\vec{E}_{kn} = \beta_{dk}^i \vec{e}_{ij} \beta_{gn}^j = \vec{e}_i \beta_{gk}^i \odot \beta_{dn}^j \vec{e}_j$$

La transformation d'un vecteur de base de l'espace produit dans un changement de base peut donc s'exprimer dans deux écritures différentes suivant la façon dont on exprime les vecteurs de base de l'espace composant. Ces modes d'écriture différents se retrouvent pour les tenseurs.

Cherchons suivant quelle règle va se transformer dans le changement de base précédent, le produit des composantes covariantes de vecteurs de l'espace composant. Examinons d'abord le cas du produit d'une composante covariante gauche de l'un par une composante covariante droite de l'autre, c'est à dire, un produit de la forme : $x_{gi} y_{dj}$; on a alors :

$$\begin{aligned} x_{gi} y_{dj} &= g_{ik} x_g^k y_d^n g_{nj} = g_{ik} \beta_{gs}^k X_g^s Y_d^t \beta_{dt}^n g_{nj} \\ x_{gi} y_{dj} &= \alpha_{di}^s X_{gs} Y_{dt} \alpha_{gj}^t \end{aligned}$$

Le produit $x_{gi} y_{dj}$ se transforme donc comme le vecteur de base \vec{e}_{ij} dans le premier mode d'écriture. Nous dirons qu'il constitue un *tenseur vrai du second ordre deux fois covariant*. Plus généralement nous poserons la définition suivante :

DÉFINITION I. *Un ensemble d'éléments t_{ij} à deux indices est dit former un « tenseur vrai » du second ordre deux fois covariant si dans un changement de vecteur de base défini par l'équation (5) ces éléments se transforment d'après la règle :*

$$t_{ij} = \alpha_{di}^k T_{kn} \alpha_{gj}^n$$

Considérons maintenant le produit d'une composante droite covariante du premier vecteur par une composante gauche covariante du second ; c'est à dire une expression de la forme $x_{di} y_{gj}$ et examinons

comment elle va se transformer dans un changement de base. Utilisons les formules (4) et (4'), elles nous donnent :

$$x_{di} y_{gj} = x_d^k g_{ki} g_{jn} y_g^n = X_d^l G_{lk} \alpha_{gi}^k \alpha_{dj}^p G_{ps} Y_g^s$$

revenons aux variables covariantes, nous obtenons facilement :

$$x_{di} y_{gj} = X_{dk} \alpha_{gi}^k \alpha_{dj}^p Y_{gp}$$

Une quantité de la forme $x_{di} y_{gj}$ se transforme dans un changement de base comme le font les vecteurs de base dans la seconde écriture (6) ; nous dirons qu'elle forme une *quantité tensorielle du second ordre deux fois covariante*. Cette définition ne s'applique qu'au cas d'un produit. Nous poserons la définition suivante :

DÉFINITION II. *Un ensemble de produits $v_i w_j$ sera dit former « une quantité tensorielle » du second ordre deux fois covariante si dans un changement de vecteurs de base ces produits se transforment selon la règle :*

$$v_i w_j = V_k \alpha_{gi}^k \alpha_{dj}^n W_n$$

Revenons à la formule (5) de transformation des vecteurs de base elle peut encore s'écrire en supposant effectués les commutations

$$\vec{e}_{ij} = \alpha_{di}^{kn} E_{kn} = \vec{E}_{kn} \alpha_{gj}^{kn}$$

ou inversement :

$$\vec{E}_{kn} = \beta_{dkn}^{ij} \vec{e}_{ij} = \vec{e}_{ij} \beta_{gn}^{ij}$$

Nous poserons alors la définition suivante :

DÉFINITION III. *Nous appellerons « tenseur vectoriel » deux fois covariant un vecteur de l'espace produit, c'est à dire un ensemble d'éléments à deux indices qui dans le changement de base défini par (5') se transforment suivant :*

$$\begin{aligned} t_{dij} &= T_{dkn} \alpha_{gj}^{kn} \\ t_{gij} &= \alpha_{di}^{kn} T_{gkn} \end{aligned}$$

Les différentes expressions tensorielles ainsi introduites se ramènent lorsqu'il y a commutation aux tenseurs du second ordre deux fois covariants de la théorie classique des tenseurs.

7. Définition des tenseurs du second ordre deux fois contravariants. Examinons maintenant comment va se transformer, toujours dans le

changement de base précédent, le produit des composantes contravariantes de deux vecteurs.

Soit une expression de la forme $x_g^i y_a^j$, elle se transforme dans le changement de base suivant la formule :

$$x_g^i y_a^j = \beta_{gk}^i X_g Y_a \beta_{an}^j$$

DÉFINITION IV. *Un ensemble d'éléments à deux indices t^{ij} est dit former un « tenseur vrai » du second ordre deux fois contravariant si dans un changement de base ces éléments se transforment suivant la règle :*

$$t^{ij} = \beta_{gk}^i T^{kn} \beta_{an}^j$$

Soit maintenant un ensemble d'expressions de la forme $x_a^i y_g^j$, examinons ce qu'il devient dans un changement de système de base ; on a :

$$x_a^i y_g^j = X_a^k \beta_{ak}^i \beta_{gn}^j Y_g^n$$

nous dirons que les $x_a^i y_g^j$ forment une « quantité tensorielle » deux fois contravariante. Plus généralement posons la définition suivante :

DÉFINITION V. *Un ensemble de produits $v^i w^j$ sera dit former une « quantité tensorielle du second ordre deux fois contravariante » si dans un changement de système de base ces produits se transforment selon la règle :*

$$v^i w^j = V^k \beta_{ak}^i \beta_{gn}^j W^n$$

De même qu'on a défini des tenseurs vectoriels deux fois covariants, on définit des tenseurs vectoriels deux fois contravariants par :

DÉFINITION VI. *Nous appellerons « tenseur vectoriel » deux fois contravariant, un ensemble d'éléments à deux indices se transformant dans un changement de base comme les composantes droites ou gauches contravariantes d'un vecteur de l'espace produit :*

$$\begin{aligned} t_a^{ij} &= T_a^{kn} \beta_{kn}^{ij} \\ t_g^{ij} &= \beta_{gkn}^{ij} T_g^{kn} \end{aligned}$$

8. **Définition des tenseurs du second ordre mixtes.** — Cherchons comment va se transformer le produit d'une composante covariante d'un vecteur par une composante contravariante de l'autre. Considérons pour cela les quatre expressions suivantes :

$$x_{gi} y_a^j, \quad x_g^i y_{aj}, \quad x_{ai} y_g^j, \quad x_a^i y_{gj}$$

on a :

$$\begin{aligned}x_{g i} y_d^j &= \alpha_{d i}^k X_{g k} Y_d^n \beta_{d n}^j \\x_g^i y_{d j} &= \beta_{g k}^i X_g^k Y_{d n} \alpha_{g j}^n\end{aligned}$$

d'où la définition :

DÉFINITION VII. *Un ensemble d'éléments à deux indices t_i^j (ou t_j^i) sera dit former un « tenseur vrai » du second ordre une fois covariant et une fois contravariant (ou une fois contravariant et une fois covariant), si ces éléments se transforment dans un changement de système de base selon la règle :*

$$\begin{aligned}t_i^j &= \alpha_{d i}^k T_k^n \beta_{d n}^j \\t_j^i &= \beta_{g k}^i T_n^k \alpha_{g j}^n\end{aligned}$$

Il faut faire attention que par suite de la non-commutation on a $t_j^i \neq t_i^j$.

De même :

$$\begin{aligned}x_{d i} y_g^j &= X_{d k} \alpha_{g i}^k \beta_{g n}^j Y_g^n \\x_d^i y_{g j} &= X_d^k \beta_{d k}^i \alpha_{d j}^n Y_{g n}\end{aligned}$$

d'où la définition :

DÉFINITION VIII. *Un ensemble de produits $v_i w^j$ (ou $v^i w_j$) sera dit former une « quantité tensorielle » du second ordre une fois covariante et une fois contravariante (ou une fois contravariante et une fois covariante) si ces produits se transforment dans un changement de base selon la règle :*

$$v_i w^j = V_k \alpha_{g i}^k \beta_{g n}^j W^n$$

ou

$$v^i w_j = V^k \beta_{d k}^i \alpha_{d j}^n W_n$$

On remarquera que :

$$v_i w^j \neq w^j v_i$$

9. Opérations sur les tenseurs.

a) Somme ou différence de deux tenseurs.

THÉORÈME VI. *La somme (ou la différence) de deux tenseurs vrais de même variance est un tenseur vrai de même variance.*

Ceci se voit immédiatement sur les formules suivantes :

$$\begin{aligned}t^{ij} + s^{ij} &= \beta_{g k}^i (T^{kn} + S^{kn}) \beta_{d n}^j \\t_{ij} + s_{ij} &= \alpha_{d i}^k (T_{kn} + S_{kn}) \alpha_{g j}^n \\t_i^j + s_i^j &= \alpha_{d i}^k (T_k^n + S_k^n) \beta_{d n}^j \\t_j^i + s_j^i &= \beta_{g k}^i (T_n^k + S_n^k) \alpha_{g j}^n\end{aligned}$$

Les mêmes formules subsistent dans le cas de la différence de deux tenseurs avec des signes — à la place de signes +.

Exprimons maintenant comment s'ajoutent deux quantités tensorielles de même variance.

$$\begin{aligned} v_i w_j + t_i u_j &= V_k \alpha_{g_i}^k \alpha_{d_j}^n W_n + T_k \alpha_{g_i}^k \alpha_{d_j}^n U_n \\ v^i w^j + t^i u^j &= V^k \beta_{d_k}^i \beta_{g_n}^j W^n + T^k \beta_{d_k}^i \beta_{g_n}^j U^n \\ v_i w^j + t_i u^j &= V_k \alpha_{g_i}^k \beta_{g_n}^j W^n + T_k \alpha_{g_i}^k \beta_{g_n}^j U^n \\ v^i w_j + t^i u_j &= V^k \beta_{d_k}^i \alpha_{d_j}^n W_n + T^k \beta_{d_k}^i \alpha_{d_j}^n U_n \end{aligned}$$

On voit en général qu'une somme ou une différence de quantités tensorielles n'a pas la variance d'une quantité tensorielle.

b) *Multiplication d'un tenseur par un opérateur scalaire.* Etudions comment se comporte le produit d'une quantité tensorielle par un opérateur scalaire K. Nous avons différents cas à considérer suivant la nature du tenseur.

$$\begin{aligned} K \cdot t_{ij} &= K \alpha_{d_i}^k T_{kn} \alpha_{g_j}^n \neq \alpha_{d_i}^k (K \cdot T_{kn}) \alpha_{g_j}^n \\ t_{ij} \cdot K &= \alpha_{d_i}^k T_{kn} \alpha_{g_j}^n K \neq \alpha_{d_i}^k (T_{kn} \cdot K) \alpha_{g_j}^n \\ K \cdot t^{ij} &= K \beta_{g_k}^i T^{kn} \beta_{d_n}^j \neq \beta_{g_k}^i (K \cdot T^{kn}) \beta_{d_n}^j \\ t^{ij} \cdot K &= \beta_{g_k}^i T^{kn} \beta_{d_n}^j K \neq \beta_{g_k}^i (T^{kn} \cdot K) \beta_{d_n}^j \\ K \cdot t_i^j &= K \alpha_{d_i}^k T_k^n \beta_{d_n}^j \neq \alpha_{d_i}^k (K \cdot T_k^n) \beta_{d_n}^j \\ t_i^j \cdot K &= \alpha_{d_i}^k T_k^n \beta_{d_n}^j K \neq \alpha_{d_i}^k (T_k^n \cdot K) \beta_{d_n}^j \\ K \cdot t_j^i &= K \beta_{g_k}^i T_n^k \alpha_{g_j}^n \neq \beta_{g_k}^i (K \cdot T_n^k) \alpha_{g_j}^n \\ t_j^i \cdot K &= \beta_{g_k}^i T_n^k \alpha_{g_j}^n K \neq \beta_{g_k}^i (T_n^k \cdot K) \alpha_{g_j}^n \end{aligned}$$

de ces égalités on tire le théorème suivant :

THÉORÈME VII. *Le produit à droite ou à gauche d'un tenseur vrai par un opérateur scalaire n'est pas un tenseur.*

Etudions maintenant le produit d'une quantité tensorielle par un opérateur scalaire.

$$\begin{aligned} K \cdot (v_i \cdot w_j) &= (K \cdot v_i) \cdot w_j = (K \cdot V_k) \alpha_{g_i}^k \alpha_{d_j}^n W_n \\ (v_i \cdot w_j) \cdot K &= v_i \cdot (w_j \cdot K) = V_k \alpha_{g_i}^k \alpha_{d_j}^n (W_n \cdot K) \\ K \cdot (v^i \cdot w^j) &= (K \cdot v^i) \cdot w^j = (K \cdot V^k) \beta_{d_k}^i \beta_{g_n}^j W^n \\ (v^i \cdot w^j) \cdot K &= v^i \cdot (w^j \cdot K) = V^k \beta_{d_k}^i \beta_{g_n}^j (W^n \cdot K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K \cdot (v_i \cdot w^j) &= (K \cdot v_i) \cdot w^j = (K \cdot V_k) \alpha_{g^i}^k \beta_{g^n}^j W^n \\
(v_i \cdot w^j) \cdot K &= v_i \cdot (w^j \cdot K) = V_k \alpha_{g^i}^k \beta_{g^n}^j (W^n \cdot K) \\
K \cdot (v^i \cdot w_j) &= (K \cdot v^i) \cdot w_j = (K \cdot V^k) \beta_{d^k}^i \alpha_{d^j}^n W_n \\
(v^i \cdot w_j) \cdot K &= v^i \cdot (w_j \cdot K) = V^k \beta_{d^k}^i \alpha_{d^j}^n (W_n \cdot K)
\end{aligned}$$

d'où ce théorème :

THÉORÈME VIII. *Le produit d'une quantité tensorielle du second ordre, de variance quelconque, à droite ou à gauche par un opérateur scalaire est une quantité opératorielle du second ordre de même variance.*

c) **Opération de contraction.** Soit un tenseur mixte t_j^i ou t_i^j ; on appelle *contraction* l'opération qui consiste à égaler les deux indices et à sommer sur cet indice; la quantité obtenue par contraction à partir de t_j^i ou t_i^j sera t_i^i ou t_i^i . Faisons un changement de base :

$$\begin{aligned}
t_i^i &= \alpha_{d^i}^k T_k^n \beta_{d^n}^i \\
t_i^i &= \beta_{g^k}^i T_n^k \alpha_{g^i}^n
\end{aligned}$$

d'où ce théorème :

THÉORÈME IX. *L'opération de contraction appliquée aux composantes d'un tenseur mixte, c'est à dire t_i^i et t_i^i ne fournissent pas des invariants par un changement de base.*

Considérons maintenant l'opération de contraction appliquée à une quantité tensorielle mixte du second ordre et faisons un changement de base, il vient :

$$\begin{aligned}
v_i w^i &= V_k \alpha_{g^i}^k \beta_{g^n}^i W^n = V_k \delta_n^k W^n = V_n W^n \\
v^i w_i &= V^k \beta_{d^k}^i \alpha_{d^i}^n W_n = V^k \delta_k^n W_n = V^n W_n
\end{aligned}$$

THÉORÈME X. *Les quantités obtenues en appliquant l'opération de contraction à des quantités tensorielles mixtes sont des invariants.*

Si une expression tensorielle est symétrique dans un certain système de référence, on constate en effectuant un changement de base quelconque que cette propriété ne se maintient pas en général. *La symétrie n'est donc pas ici une propriété intrinsèque.*

B. LES MOUVEMENTS RELATIFS.

1. CINÉMATIQUE OPÉRATORIELLE EN THÉORIE GÉNÉRALE
DES PRÉVISIONS

10. **Dérivée opératorielle.** — Pour pouvoir définir une cinématique opératorielle il est nécessaire d'avoir introduit la notion de dérivée d'un opérateur par rapport au temps. Nous allons introduire cet élément nouveau dans la théorie des opérateurs développée au chapitre précédent. Nous poserons d'abord la définition générale suivante :

DÉFINITION I. *Un opérateur est dit « dérivable symboliquement » si à cet opérateur \mathbf{A} correspond univoquement par une certaine loi de correspondance qui sera précisée ultérieurement, un opérateur \mathbf{A}' de (\mathfrak{A}) : cette loi étant telle que :*

1° à \mathbf{A} correspond un \mathbf{A}' unique et si $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ alors $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$,

2° si deux opérateurs \mathbf{A} et \mathbf{B} sont tous deux dérivables par rapport à cette loi de correspondance, alors :

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \mathbf{B})' &= \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \\ (\mathbf{AB})' &= \mathbf{A}'\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B}'\end{aligned}$$

3° si k est une constante numérique complexe, sa dérivée est nulle :

$$(k)' = 0$$

On voit en particulier en vertu de ces règles, que si $\mathbf{B} = \mathbf{A} + k$, alors $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$, ce qui montre qu'on n'a pas la réciproque de la condition 1°. Si $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$, il n'en résulte donc pas que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, mais en vertu des conditions précédentes il en résulte que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + Cte$$

Cte désignant un opérateur dont la dérivée symbolique est nulle (ce n'est pas nécessairement un opérateur de la forme k).

Une loi de correspondance définissant une opération de dérivation symbolique satisfaisant aux trois conditions précédentes peut être définie de bien des manières. Par exemple \mathbf{A}' pourra être défini par :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}$$

\mathbf{L} étant un opérateur de (\mathfrak{A}) ; la condition pour qu'un opérateur \mathbf{A} soit dérivable est alors que $\mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}$ soit un opérateur de (\mathfrak{A}) ayant un domaine opérable non-vide.

Λ' peut être encore défini, si Λ est une fonction $\Lambda(t)$ de la variable numérique t par :

$$\Lambda' = \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} [\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)]$$

Enfin on peut encore poser pour Λ' une combinaison linéaire des deux procédés précédents :

$$(d) \quad \Lambda' = \alpha \lim_{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} [\Lambda(t + \Delta t) - \Lambda(t)] + (\Lambda L - L \Lambda)$$

DÉFINITION II. Un opérateur Λ est dit « dérivable symboliquement par rapport au temps » pour une échelle $[t]$, s'il est dérivable au sens de la définition I et si t désignant la variable temporelle, on a en outre :

$$4^\circ \quad (t)' = 1$$

Au lieu de Λ' nous emploierons également la notation :

$$\frac{d\Lambda}{dt} = d\Lambda'$$

Avec cette convention supplémentaire la constante (α) de la formule (d) est égale à l'unité.

Pour que cette notion ait une signification cinématique il faut que cette notion de dérivation subsiste lorsqu'on change d'échelle de temps. Comme si on passe de l'échelle $[t]$ à l'échelle $[\tau]$ la quantité :

$$\frac{dt}{d\tau} = t' = 1$$

se transforme, si $t = f(\tau)$, en $\frac{dt}{d\tau} = f'(\tau)$ (dérivée numérique). Nous poserons en outre :

Si $\frac{d\Lambda}{dt}$ est défini et si on change d'échelle de temps cinématique, passant de l'échelle $[t]$ à l'échelle $[\tau]$ alors on a :

$$5^\circ \quad \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{d\Lambda}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{d\Lambda}{d\tau}$$

Le facteur $\frac{d\tau}{dt}$ étant numérique et indépendant des opérateurs associés aux corpuscules considérés, la commutation est assurée et la condition

5° peut être posée. Elle a pour conséquence d'imposer une condition à l'opérateur L dans le cas où la dérivée s'explique par la formule (d).

L'univocité de l'opération de dérivation symbolique par rapport au temps est fixée en posant la condition supplémentaire que la dérivée numérique de la valeur moyenne sera égale à la valeur moyenne de la dérivée symbolique, soit :

$$(\bar{A})' = \bar{A}'$$

Cette condition a pour conséquence que la dérivée symbolique est nécessairement de la forme (d) avec un opérateur L déterminé. Mais dans ce chapitre nous n'aurons à utiliser que les conditions 1° à 4° indépendamment de la forme explicite des l'opération symbolique.

Nous avons vu au paragraphe précédent que tout opérateur vectoriel \vec{V} peut s'exprimer, par rapport à un trièdre non-commutatif, non-holonome T soit en fonction des composantes droites soit en fonction des composantes gauches ; on a en effet :

$$\begin{aligned}\vec{V}' &= \mathbf{a}'_d \vec{i} + \mathbf{b}'_d \vec{j} + \mathbf{c}'_d \vec{k} \\ \vec{V}' &= \vec{i} \mathbf{a}'_g + \vec{j} \mathbf{b}'_g + \vec{k} \mathbf{c}'_g\end{aligned}$$

D'où le théorème suivant :

THÉORÈME I. *On a deux expressions différentes égales entre elles de la dérivée d'un opérateur vectoriel relativement à un repère non-commutatif non-holonome, suivant que ce vecteur est exprimé en fonction de ses composantes droites ou gauches.*

11. Dérivée des vecteurs de base d'un trièdre. — Examinons maintenant quelle est la signification des opérateurs \vec{e}_i dérivées symboliques par rapport au temps relativement au trièdre fixe des opérateurs vectoriels e_i vecteurs unitaires du trièdre T ; ces opérateurs vectoriels ont été définis par leurs composantes α_{mn} sur les axes du repère fondamental par des formules de la forme :

$$\vec{e}_1 = \alpha_{11} \vec{I} + \alpha_{12} \vec{J} + \alpha_{13} \vec{K}$$

et les analogues pour e_2 et e_3 .

Par suite les $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ étant des constantes, on a :

$$\vec{e}'_1 = \alpha'_{11} \vec{I} + \alpha'_{12} \vec{J} + \alpha'_{13} \vec{K}$$

Les opérateurs vectoriels $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ dérivées relatives au trièdre fondamental sont donc des opérateurs ayant pour composantes sur les axes fixes les quantités α'_{mn} dérivées symboliques des cosinus directeurs des axes du repère T .

En écrivant $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ en fonction de leurs composantes sur les axes mobiles on aura pour les opérateurs vectoriels $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ en projection ces axes :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \omega_{d1}^1 \vec{e}_1 + \omega_{d1}^2 \vec{e}_2 + \omega_{d1}^3 \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= \omega_{d2}^1 \vec{e}_1 + \omega_{d2}^2 \vec{e}_2 + \omega_{d2}^3 \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= \omega_{d3}^1 \vec{e}_1 + \omega_{d3}^2 \vec{e}_2 + \omega_{d3}^3 \vec{e}_3\end{aligned}$$

avec

$$\omega_{d^u}^v = \alpha'_{v1} \beta_{d^u1} + \alpha'_{v2} \beta_{d^u2} + \alpha'_{v3} \beta_{d^u3}$$

de même on peut exprimer $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ en fonction de leurs composantes gauches, on a alors :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \omega_{g1}^1 + \vec{e}_2 \omega_{g1}^2 + \vec{e}_3 \omega_{g1}^3 \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_1 \omega_{g2}^1 + \vec{e}_2 \omega_{g2}^2 + \vec{e}_3 \omega_{g2}^3 \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_1 \omega_{g3}^1 + \vec{e}_2 \omega_{g3}^2 + \vec{e}_3 \omega_{g3}^3\end{aligned}$$

en posant :

$$\omega_{g^u}^v = \beta_{g^u1} \alpha'_{v1} + \beta_{g^u2} \alpha'_{v2} + \beta_{g^u3} \alpha'_{v3}$$

Posons :

$$\begin{aligned}A_{d^u}^v &= \frac{1}{2} (\omega_{d^u}^v - \omega_{d^v}^u) \\ A_{d^v}^u &= \frac{1}{2} (\omega_{g^u}^v - \omega_{g^v}^u) \\ B_{d^u}^v &= \frac{1}{2} (\omega_{d^u}^v + \omega_{d^v}^u) \\ B_{g^u}^v &= \frac{1}{2} (\omega_{g^u}^v + \omega_{g^v}^u)\end{aligned}$$

Il vient alors pour les \vec{e}'_j :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \vec{e}_2 A_{g1}^2 + \vec{e}_3 A_{g1}^3 + S_u \vec{e}_u B_{g1}^u \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_1 A_{g2}^1 + \vec{e}_3 A_{g2}^3 + S_u \vec{e}_u B_{g2}^u \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_1 A_{g3}^1 + \vec{e}_2 A_{g3}^2 + S_u \vec{e}_u B_{g3}^u\end{aligned}$$

ou en fonction des quantités droites :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= A_{d1}^2 \vec{e}_2 + A_{d1}^3 \vec{e}_3 + S B_{d1}^u \vec{e}_u \\ \vec{e}'_2 &= A_{d2}^1 \vec{e}_1 + A_{d2}^3 \vec{e}_3 + S B_{d2}^u \vec{e}_u \\ \vec{e}'_3 &= A_{d3}^1 \vec{e}_1 + A_{d3}^2 \vec{e}_2 + S B_{d3}^u \vec{e}_u\end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned}p_d &= A_{d2}^3 = -A_{d3}^2; & p_g &= A_{g3}^2 = -A_{g2}^3 \\ q_d &= A_{d3}^1 = -A_{d1}^3; & q_g &= A_{g1}^3 = -A_{g3}^1 \\ r_d &= A_{d1}^2 = -A_{d2}^1; & r_g &= A_{g2}^1 = -A_{g1}^2\end{aligned}$$

les opérateurs vectoriels \vec{e}'_i se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= r_d \vec{e}_2 - q_d \vec{e}_3 + \mathcal{S} B_{d1}^u \vec{e}_u \\ \vec{e}'_2 &= p_d \vec{e}_3 - r_d \vec{e}_1 + \mathcal{S} B_{d2}^u \vec{e}_u \\ \vec{e}'_3 &= q_d \vec{e}_1 - p_d \vec{e}_2 + \mathcal{S} B_{d3}^u \vec{e}_u\end{aligned}$$

ou en fonction des quantités gauches :

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \vec{e}_3 q_g - \vec{e}_2 r_g + \mathcal{S} e_u B_{g1}^u \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_1 r_g - \vec{e}_3 p_g + \mathcal{S} \vec{e}_u B_{g2}^u \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_2 p_g - \vec{e}_1 q_g + \mathcal{S} \vec{e}_u B_{g3}^u\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où le trièdre T est orthonormé on a :

$$r_d = -r_g; \quad q_d = -q_g; \quad p_d = -p_g$$

les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur sont alors égales ; un ω_{dv}^u qui représente la $u^{ème}$ composante contravariante du vecteur \vec{v}' est alors égal à $(\vec{v}' \cdot \vec{u})$. On retrouve alors les expressions données par M. Cazin.

Étudions maintenant les variances des différentes quantités que nous avons été amenés à introduire. Les formules (1) peuvent se résumer sous la forme :

$$(1') \quad \vec{e}'_v = \omega_{dv}^u \vec{u} = \omega_{dv}^u \vec{e}_u = \vec{e}_u \omega_{gv}^u$$

Effectuons le changement de base précédemment défini :

$$\vec{e}_v = \alpha_{dv}^s \vec{E}_s$$

dérivons symboliquement cette expression, il vient :

$$\vec{e}'_v = \alpha'_{dv}{}^s \vec{E}_s + \alpha_{dv}^s \vec{E}'_s$$

or

$$\vec{E}'_s = \Omega_{ds}{}^r \vec{E}_r$$

d'où

$$\begin{aligned} \vec{e}'_v &= \alpha'_{dv}{}^s \vec{E}_s + \alpha_{dv}^s \Omega_{ds}{}^r \vec{E}_r \\ (2) \quad \vec{e}'_v &= (\alpha'_{dv}{}^s \beta_{ds}{}^m + \alpha_{dv}^s \Omega_{ds}{}^r \beta_{dr}{}^m) \vec{e}_m \end{aligned}$$

identifions les deux expressions (1') et (2) de \vec{e}'_v il vient :

$$(3) \quad \omega_{dv}{}^u = \alpha_{dv}^s \Omega_{ds}{}^r \beta_{dr}{}^u + \alpha'_{dv}{}^s \beta_{ds}{}^u$$

Cette formule montre que les $\omega_{dv}{}^u$ ne se transforment pas dans un changement de base quelconque comme les composantes d'un tenseur mais forment un tableau de 9 quantités n'ayant pas une variance définie (en raison du fait qu'elles sont liées à deux trièdres: passage d'un repère à un repère infiniment voisin). On montrerait par un raisonnement analogue qu'il en est de même pour les $\omega_{gv}{}^u$.

La formule (3) permet de montrer que les $A_{dv}{}^u$ et les $B_{dv}{}^u$ ne sont pas non plus les composantes d'une quantité tensorielle ayant une variance bien définie ; on a en effet :

$$2 A_{dv}{}^u = \omega_{dv}{}^u - \omega_{dv}{}^v = \alpha_{dv}^m \Omega_{dm}{}^n \beta_{dn}{}^u - \alpha_{dv}^n \Omega_{dn}{}^m \beta_{dm}{}^v + \alpha'_{dv}{}^m \beta_{dm}{}^u - \alpha'_{dv}{}^m \beta_{dm}{}^v$$

et une formule identique pour $B_{dv}{}^u$ en remplaçant tout les signes — par des signes +.

Les $A_{dv}{}^u$ ne se transforment pas dans un changement de base comme les composantes d'un vecteur ; on peut cependant définir dans le système de base \vec{e}_v considéré, un vecteur par ses composantes. Par définition nous poserons par analogie avec la théorie classique :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_d &= p_d \vec{i} + q_d \vec{j} + r_d \vec{k} \\ \vec{\Omega}_g &= \vec{i} p_g + \vec{j} q_g + \vec{k} r_g \end{aligned}$$

et nous appellerons respectivement les vecteurs $\vec{\Omega}_d$ et $\vec{\Omega}_g$ *vecteur rotation droite* et *vecteur rotation gauche*.

12. **Opérateurs vectoriels vitesses.** — Considérons un trièdre en mouvement quantique par rapport au trièdre fondamental T_f et désignons par M_1, \dots, M_n les n corpuscules d'un système.

Soit O l'origine du trièdre T_f et soit O_1 l'origine du trièdre T . D'après ce que nous avons vu pour un opérateur vectoriel quelconque l'opérateur associé au vecteur classique \overrightarrow{OM} définissant la position d'un point M peut s'exprimer sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} \\ \overrightarrow{O_1M} &= X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} = \vec{I}X + \vec{J}Y + \vec{K}Z\end{aligned}$$

L'opérateur $\overrightarrow{O_1M}$ représente l'opérateur associé à la position relative du point M dans le trièdre T .

Suivant la méthode générale exposée pour un vecteur quelconque nous sommes amenés à définir pour l'opérateur vectoriel $\overrightarrow{O_1M}$ des composantes droites et gauches relatives au repère T :

$$\overrightarrow{O_1M} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} = \vec{i}x_g + \vec{j}y_g + \vec{k}z_g$$

Rappelons que les notations telles que x_a et les analogues désignent les opérateurs associés suivant la méthode générale exposée plus haut aux grandeurs classiques coordonnées du corpuscule sans qu'il soit fait aucune hypothèse sur la forme de ces opérateurs.

Nous allons maintenant introduire par des définitions les opérateurs vectoriels associés aux composantes classiques des vitesses des différents corpuscules.

DÉFINITION III. Nous appellerons par définition « vecteur vitesse d'un corpuscule par rapport au trièdre fondamental T_f » la dérivée au sens de la définition II de l'opérateur vectoriel \overrightarrow{OM} .

Par dérivation on obtient :

$$(\overrightarrow{OM})' = (\overrightarrow{OO_1})' + (\overrightarrow{O_1M})'$$

L'opérateur vectoriel $(\overrightarrow{OO_1})'$ sera appelé la *vitesse de l'origine* du trièdre T prise par rapport au repère fondamental T_f . Étudions le second terme qui intervient dans l'expression de $(\overrightarrow{O_1M})'$, on a suivant la règle donnée pour un opérateur vectoriel :

$$(\overrightarrow{O_1M})' = \mathcal{S}_{xyz} (x'_a \vec{e}_1 + x_a \vec{e}'_1) = \mathcal{S}_{xyz} (\vec{e}'_1 x_g + \vec{e}_1 x'_g)$$

DÉFINITION IV. On appelle « vecteur vitesse relative droite » de M par rapport au trièdre non-commutatif non-holonyme T l'opérateur vectoriel :

$$\vec{V}_{r,d} = x'_d \vec{e}_1 + y'_d \vec{e}_2 + z'_d \vec{e}_3$$

On appelle « vecteur vitesse relative gauche » de M par rapport au trièdre non-commutatif non-holonyme T l'opérateur vectoriel :

$$\vec{V}_{r,g} = \vec{e}_1 x'_g + \vec{e}_2 y'_g + \vec{e}_3 z'_g$$

DÉFINITION V. On appelle « vecteur vitesse d'entraînement droite » de M dû au mouvement relatif du trièdre non-commutatif non-holonyme T par rapport au repère fondamental T_f , l'opérateur vectoriel

$$\vec{V}_{e,d} = (\vec{O}\vec{O}_1)' + x_d \vec{e}'_1 + y_d \vec{e}'_2 + z_d \vec{e}'_3$$

On appelle « vecteur vitesse d'entraînement gauche » de M dû au mouvement du repère non-commutatif non-holonyme T par rapport au repère fondamental T_f , l'opérateur vectoriel :

$$\vec{V}_{e,g} = (\vec{O}\vec{O}_1)' + \vec{e}'_1 x_g + \vec{e}'_2 y_g + \vec{e}'_3 z_g$$

Ces définitions étant posées on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. La vitesse absolue d'un corpuscule M par rapport au repère fondamental T_f peut être exprimée de deux façons différentes :

1° La vitesse absolue est la somme de la vitesse relative droite de M par rapport au trièdre T en mouvement quantique par rapport à T_f et de la vitesse d'entraînement droite de T dans son mouvement par rapport à T_f .

2° La vitesse absolue de M est la somme de la vitesse relative gauche de M par rapport au trièdre T en mouvement quantique par rapport à T_f et de la vitesse gauche d'entraînement de T par rapport à T_f .

$$\vec{V}_a = {}_a(\vec{O}\vec{M})' = \vec{V}_{r,d} + \vec{V}_{e,d} = \vec{V}_{r,g} + \vec{V}_{e,g}$$

13. **Opérateurs vectoriels accélérations.** — Nous allons maintenant d'une manière analogue à celle que nous avons utilisée pour introduire la notion de vitesse en théorie générale des prévisions définir un nouvel opérateur vectoriel que nous appellerons par analogie avec la mécanique classique *accélération*. Nous poserons d'abord la définition suivante :

DÉFINITION VI. Par définition, on appelle « accélération » d'un corpuscule par rapport au repère fondamental T_f , l'opérateur vectoriel $(\vec{O}\vec{M})''$

obtenu en dérivant une seconde fois l'opérateur vectoriel vitesse de M ; c'est à dire :

$$(\overrightarrow{OM})'' = (\overrightarrow{OM}')'$$

Suivant les règles données pour l'opération de dérivation, on peut écrire :

$$(\overrightarrow{OM})'' = (\overrightarrow{OO_1})'' + (\overrightarrow{O_1M})''$$

L'opérateur vectoriel $(\overrightarrow{OO_1})''$ sera appelé *accélération de l'origine O_1* du trièdre T dans son mouvement par rapport à T_f .

Considérons maintenant l'opérateur vectoriel $(\overrightarrow{O_1M})''$, on a :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{O_1M})'' &= \mathcal{S}_{xyz} (x'_d \vec{e}_1 + x_d \vec{e}'_1)' = \mathcal{S}_{xyz} (x''_d \vec{e}_1 + 2x'_d \vec{e}'_1 + x_d \vec{e}''_1) = \\ &= \mathcal{S}_{xyz} (\vec{e}_1 x' + \vec{e}'_1 x_g)' = \mathcal{S}_{xyz} (\vec{e}_1 x''_g + 2\vec{e}'_1 x'_g + \vec{e}''_1 x_g) \end{aligned}$$

Nous poserons les définitions suivantes :

DÉFINITION VII. On appelle par définition « *accélération relative droite* » de M par rapport au trièdre T en mouvement quantique par rapport au repère fondamental T_f , l'opérateur vectoriel :

$$\vec{\Gamma}_{r,d} = x''_d \vec{e}_1 + y''_d \vec{e}_2 + z''_d \vec{e}_3$$

On appelle par définition « *accélération relative gauche* » de M par rapport au trièdre T en mouvement quantique, l'opérateur vectoriel

$$\vec{\Gamma}_{r,g} = \vec{e}_1 x''_g + \vec{e}_2 y''_g + \vec{e}_3 z''_g$$

DÉFINITION VIII. Par définition on appelle « *accélération d'entraînement droite* » de M due au mouvement du trièdre T par rapport au repère fondamental T_f , l'opérateur vectoriel :

$$\vec{\Gamma}_{e,d} = \overrightarrow{OO_1}'' + x_d \vec{e}''_1 + y_d \vec{e}''_2 + z_d \vec{e}''_3$$

On appelle par définition « *accélération d'entraînement gauche* » de M due au mouvement du trièdre T par rapport à T_f , l'opérateur vectoriel :

$$\vec{\Gamma}_{e,g} = \overrightarrow{OO_1}'' + \vec{e}''_1 x_g + \vec{e}''_2 y_g + \vec{e}''_3 z_g$$

Avec ces définitions nous avons interprété deux des termes qui entrent dans l'expression de l'opérateur vectoriel \overrightarrow{OM}'' . Considérons maintenant les termes de la forme $x'_d \vec{e}'_1$ et $\vec{e}'_1 x'_g$.

Si nous nous reportons aux expressions obtenues pour les \vec{e}'_1 on a en remplaçant ces opérateurs par leurs valeurs :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{xyz}(\vec{x}'_d \vec{e}'_1) &= \mathcal{S}_{xyz} \left[x'_d (r_d \vec{e}_2 - q_d \vec{e}_3) + \sum_{u=1}^3 x'_d B_{d1}^u \vec{u} \right] \\ \mathcal{S}_{xyz}(\vec{e}'_1 x'_g) &= \mathcal{S}_{xyz} \left[(\vec{e}_3 q_g - \vec{e}_2 r_g) x'_g + \sum_{u=1}^3 \vec{u} B_{g1}^u x'_g \right]\end{aligned}$$

Ainsi chacun des termes $\mathcal{S}(\vec{x}'_d \vec{e}'_1)$ et $\mathcal{S}(\vec{e}'_1 x'_g)$ se décompose en une somme de deux termes.

DÉFINITION IX. On appelle « accélération de Coriolis droite » l'opérateur vectoriel :

$$\vec{\Gamma}_{c,d} = 2 \mathcal{S}_{xyz} x'_d (r_d \vec{e}_2 - q_d \vec{e}_3)$$

On appelle « accélération de Coriolis gauche » l'opérateur vectoriel :

$$\vec{\Gamma}_{c,g} = 2 \mathcal{S}_{xyz} (\vec{e}_3 q_g - \vec{e}_2 r_g) x'_g$$

DÉFINITION X. On appelle par définition « accélération quantique de Cazin droite » l'opérateur vectoriel :

$$\vec{\Gamma}_{q,d} = 2 \mathcal{S}_{xyz} [x'_d (\sum B_{d1}^u \vec{e}_u)]$$

On appelle par définition « accélération quantique de Cazin gauche » l'opérateur vectoriel :

$$\vec{\Gamma}_{q,g} = 2 \mathcal{S}_{xyz} [(\sum \vec{e}_u B_{g1}^u) x'_g]$$

Ces définitions étant posées, on peut énoncer le théorème de composition des accélérations pour un mouvement quantique quelconque.

THÉORÈME III. L'accélération absolue d'un corpuscule par rapport au trièdre fondamental T_f est la somme de l'accélération relative droite de M par rapport à un trièdre T en mouvement quantique quelconque par rapport à T_f , de l'accélération d'entraînement droite de M due au mouvement de ce même trièdre T par rapport à T_f , de l'accélération de Coriolis droite et de l'accélération quantique de Cazin droite.

L'accélération absolue d'un corpuscule M par rapport au trièdre fondamental T_f est la somme de l'accélération relative gauche de M par rapport à un trièdre T en mouvement quantique quelconque par rapport

à T_f , de l'accélération d'entraînement gauche de M due au mouvement de T par rapport à T_f de l'accélération de Coriolis gauche et de l'accélération quantique de Cazin gauche.

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_a &= \vec{\Gamma}_{r,d} + \vec{\Gamma}_{c,d} + \vec{\Gamma}_{c,d} + \vec{\Gamma}_{q,d} \\ \vec{\Gamma}_a &= \vec{\Gamma}_{r,g} + \vec{\Gamma}_{c,g} + \vec{\Gamma}_{c,g} + \vec{\Gamma}_{q,g}\end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un trièdre commutatif T on retrouve le théorème classique de composition des accélérations ; en effet dans ce cas les opérateurs vectoriels accélération quantique de Cazin droite et gauche sont identiquement nuls.

§ 2. CINÉTIQUE OPÉRATORIELLE SYMBOLIQUE

14. **Masse abstraite.** — En mécanique classique on passe de la cinématique à la cinétique en adjoignant aux notions cinématiques la notion de masse ; un passage semblable peut s'effectuer en théorie générale des prévisions : on passera de la cinématique opératorielle à la cinétique opératorielle en adjoignant aux notions cinématiques la notion de masse.

Mais aussi bien en mécanique classique qu'en théorie générale des prévisions, la notion physique de masse d'inertie ne peut être introduite (à moins d'admettre un concept superflu) qu'une fois introduits les principes de la dynamique ; si bien qu'en cinétique la masse n'apparaît que comme un coefficient numérique abstrait sans signification physique associé à chaque point figuratif d'un corpuscule ; pour marquer la différence avec la masse d'inertie (douée de signification physique) nous conviendrons de lui donner le nom de *masse abstraite*.

Nous appellerons alors « grandeurs cinétiques », « opérateurs cinétiques », « quantités cinétiques » des grandeurs, des opérateurs, des quantités formées respectivement à partir de grandeurs, d'opérateurs, de quantités cinématiques et de masses abstraites. Dans ce qui suit nous allons définir un certain nombre de tels éléments et étudier leurs propriétés.

Par exemple nous appellerons *opérateur énergie cinétique d'un corpuscule relativement au trièdre fondamental T_f* , l'opérateur $\frac{1}{2} m V^2$, où m désigne la masse abstraite associée à ce corpuscule et \vec{V} son opérateur vitesse par rapport au trièdre fondamental T_f . De même nous appe-

lions *centre de gravité* G d'un système le point défini par la relation :

$$\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{OM}_i}{\sum m_i}$$

où m_i est la masse abstraite associée au corpuscule M_i . Si \vec{OM}_i désigne l'opérateur position du $i^{\text{ème}}$ corpuscule du système, \vec{OG} sera par définition l'opérateur position du centre de gravité du système.

Quand on considère un repère constitué par un trièdre équipollent au repère fondamental T_f ayant son origine au point G (trièdre qui est comme T_f commutatif), on voit que l'on a, en vertu de la définition de G ;

$$\sum m_i \vec{GM}_i = 0$$

par suite en dérivant symboliquement par rapport au temps :

$$\sum m_i \vec{V}_{r,d,i} = \sum m_i \vec{V}_{r,g,i} = 0$$

15. **Opérateurs cinétiques du mouvement relatif.** — Dans ce paragraphe nous allons chercher à exprimer les opérateurs cinétiques lorsque l'on fait intervenir un trièdre relatif non-commutatif non-holonomie

a) **Force vive.** Par définition l'opérateur force vive absolue d'un système est :

$$T_a = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{V}_{a,i}^2$$

ce qui peut s'écrire, si l'on tient compte du théorème de composition des vitesses :

$$T_a = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}_{r,d,i} + \vec{V}_{e,d,i}) (\vec{V}_{r,g,i} + \vec{V}_{e,g,i})$$

ou

$$T_a = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}_{r,d,i} \cdot \vec{V}_{e,g,i} + \vec{V}_{e,d,i} \cdot \vec{V}_{r,g,i}) + T_r + T_e$$

en posant :

$$T_r = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}_{r,d,i} \cdot \vec{V}_{r,g,i})$$

$$T_e = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}_{e,d,i} \cdot \vec{V}_{e,g,i})$$

Les opérateurs scalaires T_r et T_e ainsi définis sont appelés : *opérateurs force vive relative et force vive d'entraînement du système.*

Si en particulier on considère comme trièdre relatif T un trièdre ayant son origine au centre de gravité et équipollent au repère fondamental, on obtient immédiatement, en tenant compte de la condition:

$$\begin{aligned}\Sigma m_i \vec{V}_{r,d,i} &= 0; & \Sigma m_i \vec{V}_{r,g,i} &= 0 \\ T_a &= T_{r,g} + T_e\end{aligned}$$

d'où le théorème :

THÉORÈME IV. THÉORÈME DE KÖNIG POUR LA FORCE VIVE. *La force vive d'un système est égale à la somme de la force vive de ce système dans son mouvement autour de son centre de gravité et de la force vive du centre de gravité doué de la masse totale dans son mouvement par rapport au repère fondamental.*

b) **Energie d'accélération.** Par définition l'énergie d'accélération absolue S_a , est :

$$S_a = \frac{1}{2} \Sigma m_i \vec{F}_{a,i}^2$$

Ce qui peut s'écrire, si l'on tient compte du théorème de composition des accélérations :

$$S_a = \frac{1}{2} m_i (\vec{F}_{r,d,i} + \vec{F}_{e,d,i} + \vec{F}_{c,d,i} + \vec{F}_{q,d,i}) (\vec{F}_{r,g,i} + \vec{F}_{e,g,i} + \vec{F}_{c,g,i} + \vec{F}_{q,g,i})$$

ou :

$$S_a = S_r + S_e + S_q + S_c + C$$

en posant :

$$S_r = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\vec{F}_{r,d,i} \cdot \vec{F}_{r,g,i})$$

$$S_e = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\vec{F}_{e,d,i} \cdot \vec{F}_{e,g,i})$$

$$S_c = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\vec{F}_{c,d,i} \cdot \vec{F}_{c,g,i})$$

$$S_q = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\vec{F}_{q,d,i} \cdot \vec{F}_{q,g,i})$$

$$C = \frac{1}{2} \Sigma m_i (\vec{F}_{rdi} \vec{F}_{egi} + \vec{F}_{rdi} \vec{F}_{cgi} + \vec{F}_{rdi} \vec{F}_{qgi} + \vec{F}_{cdi} \vec{F}_{rgi} + \vec{F}_{cdi} \vec{F}_{cgi} + \vec{F}_{cdi} \vec{F}_{qgi} + \vec{F}_{qdi} \vec{F}_{rgi} + \vec{F}_{qdi} \vec{F}_{cgi} + \vec{F}_{qdi} \vec{F}_{qgi} + \vec{F}_{qdi} \vec{F}_{rgi} + \vec{F}_{qdi} \vec{F}_{egi} + \vec{F}_{qdi} \vec{F}_{cgi})$$

S_r est appelée *opérateur d'énergie d'accélération relative*, S_e *opérateur d'énergie d'accélération d'entraînement*, S_c *opérateur d'énergie d'accéléra-*

tion de Coriolis, S_q opérateur d'accélération *quantique*, enfin C est l'opérateur formé avec les termes rectangles.

Si en particulier nous considérons comme trièdre T , un trièdre animé d'un mouvement de translation par rapport au repère fondamental T_f , la formule précédente se réduit à :

$$S_a = S_r + S_e + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\Gamma}_{r,i} \cdot \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_e \cdot \vec{\Gamma}_{r,i})$$

si de plus l'origine du trièdre relatif est au point G centre de gravité du système, on a, si on tient compte de la condition obtenue en dérivant $\sum m_i \vec{V}_{r,i} = 0$:

$$S_a = S_{r,G} + S_e$$

d où ce théorème :

THÉORÈME V. THÉORÈME DE KÖNIG POUR L'ÉNERGIE D'ACCÉLÉRATION. *L'énergie d'accélération d'un système quelconque est la somme de l'énergie d'accélération de ce système dans son mouvement autour du centre de gravité et de l'énergie d'accélération qu'aurait un point matériel doué de la masse totale située au centre de gravité.*

c) **Moment cinétique.** En mécanique classique le moment cinétique d'un corpuscule pris par rapport à l'origine se définit comme étant le moment de la quantité de mouvement par rapport à ce point. Il s'exprime donc par un produit vectoriel; le produit vectoriel même en théorie classique n'est pas un véritable vecteur, mais un bi-vecteur et c'est la forme associée à ce bi-vecteur qui dans le cas particulier d'un espace à trois dimensions se trouve être un vecteur. En étudiant l'opération de produit vectoriel nous avons vu que l'opérateur obtenu en faisant le produit vectoriel de deux opérateurs vectoriels n'avait pas de variance définie, (ce n'est ni un tenseur ni un vecteur). La grandeur classique vecteur moment cinétique doit être considérée comme un cas de grandeur exclue, c'est à dire de grandeur classique qui n'est pas mesurable à l'approximation quantique (1). Suivant la convention que nous avons adoptée l'opérateur que nous associerons à la grandeur classique vecteur moment cinétique sera donc l'opérateur O de l'espace (2f).

En théorie quantique nous pourrions considérer les opérateurs associés aux grandeurs classiques composantes du moment cinétique; ces

(1) Lorsque la forme analytique des opérateurs aura été fixée on verra qu'il est légitime de considérer la grandeur classique vecteur moment cinétique comme une grandeur exclue; en effet la forme fixée aura pour conséquence qu'un observateur ne pourra pas en général connaître simultanément les trois composantes du moment cinétique d'un corpuscule par rapport à aucun système de référence.

grandeurs seront nécessairement définies relativement à un système de référence.

On définit des composantes droites et gauches du moment cinétique d'un corpuscule relativement à un système de référence quelconque par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{d,X} &= {}_d Y_d P_{g,Z} - Z_d P_{g,Y}; & \sigma_{g,X} &= P_{d,Z} Y_g - P_{d,Y} Z_g \\ \sigma_{d,Y} &= {}_d Z_d P_{g,X} - X_d P_{g,Z}; & \sigma_{g,Y} &= P_{d,X} Z_g - P_{d,Z} X_g \\ \sigma_{d,Z} &= {}_d X_d P_{g,Y} - Y_d P_{g,X}; & \sigma_{g,Z} &= P_{d,Y} X_g - P_{d,X} Y_g\end{aligned}$$

Envisageons à titre d'exemple la façon dont va se transformer une composante du moment cinétique dans le changement de base le plus général défini précédemment. Les formules de transformation donnent immédiatement la relation :

$$\sigma_{d,X} = x_d^i (\alpha_d^2 \alpha_g^3 - \alpha_d^3 \alpha_g^2) p_{x,g}^j$$

on vérifie que la composante $\sigma_{d,X}$ ne se transforme pas comme une composante contravariante d'un vecteur.

A partir des composantes droites et gauches du moment cinétique on peut définir un opérateur carré du moment cinétique défini par

$$\sigma^2 = \sigma_{d,X} \cdot \sigma_{g,X} + \sigma_{d,Y} \cdot \sigma_{g,Y} + \sigma_{d,Z} \cdot \sigma_{g,Z}$$

Cet opérateur sera parfaitement défini et correspondra à une grandeur mesurable. En effectuant toujours le même changement de base on vérifie que σ^2 n'est pas un invariant, ce qui est évident a priori puisque σ n'est pas un vecteur. On obtient :

$$\sigma^2 = \mathcal{S} [x_d^i (\alpha_d^2 \alpha_g^3 - \alpha_d^3 \alpha_g^2) p_{x,g}^j] [p_{x,d}^i (\alpha_d^3 \alpha_g^2 - \alpha_d^2 \alpha_g^3) x_g^j]$$

Par rapport au repère fondamental, on définit les trois opérateurs

$$\begin{aligned}\sigma_{a,X} &= Y P_Z - Z P_Y \\ \sigma_{a,Y} &= Z P_X - X P_Z \\ \sigma_{a,Z} &= X P_Y - Y P_X\end{aligned}$$

qui seront appelées *composantes sur les axes fixes du moment cinétique absolu*.

Cherchons à exprimer ces quantités en fonction des positions et quantités de mouvement relatives à un trièdre en mouvement relatif

par rapport au repère fondamental. Il vient pour une des composantes

$$\sigma_{u,x} = m \left\{ \sum x_{d,i} (\alpha_d^2 \alpha'_{g,j}{}^3 - \alpha_d^3 \alpha'_{g,j}{}^2) x_{g,j} + \sum x_{d,i} (\alpha_d^2 \alpha_{g,j}{}^3 - \alpha_d^3 \alpha_{g,j}{}^2) x'_{g,i} \right\}$$

Une composante du moment cinétique absolu se décompose donc en une somme de deux termes lorsque on l'exprime en fonction des quantités relatives à un repère en mouvement relatif.

Posons :

$$\begin{aligned} \sigma_{e,x} &= m \sum x_{d,i} (\alpha_d^2 \alpha'_{g,j}{}^3 - \alpha_d^3 \alpha'_{g,j}{}^2) x_{g,j} \\ \sigma_{r,x} &= m \sum x_{d,i} (\alpha_d^2 \alpha_{g,j}{}^3 - \alpha_d^3 \alpha_{g,j}{}^2) x'_{g,i} \end{aligned}$$

Par définition nous appellerons les opérateurs $\sigma_{e,x}$, $\sigma_{e,y}$ et $\sigma_{e,z}$ les *composantes sur les axes fixes du moment cinétique d'entraînement* et les opérateurs $\sigma_{r,x}$, $\sigma_{r,y}$ et $\sigma_{r,z}$ seront dits *composantes sur les axes fixes du moment cinétique relatif*.

Avec ces définitions on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VI. *Chaque composante au moment cinétique absolu sur les axes fixes est égale à la somme des composantes correspondantes sur les mêmes axes du moment cinétique d'entraînement et du moment cinétique relatif.*

CHAPITRE III

CINÉTIQUE OPÉRATORIELLE ANALYTIQUE ET THÉORIE DES CHANGEMENTS DE VARIABLES

§ 1. FORME DES OPÉRATEURS CINÉTIQUES

1. La cinétique opératorielle analytique. — Au chapitre II, (cinématique et cinétique opératorielle) nous avons obtenu toute une série de propriétés cinématiques et cinétiques des systèmes de corpuscules. Mais pour aller plus loin il est nécessaire de connaître la forme analytique des opérateurs. Cette forme résulte des lois physiques générales, notamment du principe de l'inertie. Ici nous ne discutons pas les raisons physiques qui conduisent à adopter ces formes d'opérateurs, et nous les introduirons au moyen d'un postulat. Ce postulat ajouté à la cinétique opératorielle permet de constituer une autre théorie partielle de la mécanique ondulatoire que nous appellerons *cinétique opératorielle analytique*, parce que elle portera sur la forme analytique des opérateurs.

Par opposition la cinétique envisagée au chapitre II sera appelée *cinétique opératorielle symbolique* parce qu'elle est construite en n'utilisant que la notion de dérivation symbolique indépendamment de la forme analytique des opérateurs.

On peut encore distinguer une théorie partielle de la cinétique opératorielle analytique, c'est la théorie des changements de variables dans les opérateurs, considérée comme une question de pure analyse.

Tous les résultats obtenus en cinétique opératorielle symbolique vont subsister ici, mais en outre on aura le moyen de calculer la forme analytique des opérateurs cinétiques.

2. Le postulat fondamental. — Il suffit de connaître la forme des opérateurs cinétiques attachés à un système de corpuscules quand on rapporte le mouvement du système à un trièdre T_j dit *trièdre fondamental*, pour que au moyen de la théorie des mouvements relatifs, cette forme soit fixée par rapport à tout autre trièdre T , en fonction des opérateurs cinétiques rapportés à T_j .

D'autre part tous les opérateurs cinétiques du premier ordre c'est à dire tous ceux s'exprimant en fonction des positions et des vitesses auront leur forme analytique définie sitôt que la forme analytique des opérateurs position par rapport à T_j et quantité de mouvement par rapport à T_j sera donnée, les masses étant supposées connues. Il nous suffit donc de connaître la forme des opérateurs position et quantité de mouvement des corpuscules dans leur mouvement par rapport à un certain trièdre T_j , pour que la forme de tout opérateur cinétique dans un mouvement rapporté à un trièdre T quelconque soit déterminée.

Un point de l'espace euclidien (R_3) est fixé par rapport au trièdre T_j par 3 coordonnées. Un point considéré comme une *variable libre* sera défini par 3 *variables libres* (ou *variables indépendantes*) qui seront ses coordonnées par rapport à T_j . Les coordonnées de ce point par rapport à un trièdre T quelconque s'exprimeront comme des fonctions linéaires de ces trois variables libres.

Nous admettrons alors ce postulat :

Postulat de la cinétique opératorielle analytique. *Il existe au moins un trièdre trirectangle T_j «dit repère fondamental» qui est un trièdre commutatif et une échelle de temps $[t]$ tels que :*

1°) *Les opérateurs coordonnées X, Y, Z d'un corpuscule par rapport au trièdre T_j sont les opérateurs multiplication par des variables libres X, Y, Z soit :*

$$\mathbf{X} = X \cdot \quad , \quad \mathbf{Y} = Y \cdot \quad , \quad \mathbf{Z} = Z \cdot$$

2°) Les opérateurs composantes de la quantité de mouvement de ce corpuscule dans son mouvement par rapport au trièdre T_f sont :

$$p_X = ih' \frac{\partial}{\partial X} \quad , \quad p_Y = ih' \frac{\partial}{\partial Y} \quad , \quad p_Z = ih' \frac{\partial}{\partial Z}$$

le symbole $\frac{\partial}{\partial X}$ signifiant « dérivation partielle par rapport à X » et h' étant une constante universelle.

Ces opérateurs \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} , p_X , p_Y , p_Z du mouvement rapporté à T_f seront dits *opérateurs cinétiques fondamentaux*.

A partir de ce postulat on peut calculer tout opérateur cinétique du premier ordre dans le mouvement par rapport à un trièdre T quelconque commutatif ou non, holonome ou non. En particulier par rapport à T_f , on a :

$$v_X = \frac{1}{m} p_X = ih' \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial X}$$

et des formules analogues pour v_Y et v_Z . Par contre ce postulat ne nous donne pas le moyen de calculer la forme analytique des opérateurs du second ordre, c'est à dire la forme des opérateurs liés aux accélérations.

3. Problèmes fondamentaux de cinétique opératorielle analytique. —

Les problèmes fondamentaux qui se posent en cinétique opératorielle analytique sont :

1°) Déterminer, en effectuant des changements de variables les trièdres qui ont la même propriété que T_f , c'est à dire déterminer les trièdres T_c pour lesquels dans le mouvement par rapport à T_c , après un changement de variable convenable, les opérateurs coordonnées d'un corpuscule pourront être mis sous la forme :

$$x' = x' \cdot \quad , \quad y' = y' \cdot \quad , \quad z' = z' \cdot$$

et

$$p_{x'} = ih' \frac{\partial}{\partial x'} \quad , \quad p_{y'} = ih' \frac{\partial}{\partial y'} \quad , \quad p_{z'} = ih' \frac{\partial}{\partial z'}$$

Les trièdres définis par ces conditions seront dits : *trièdres cinétiques*.

2^o) Déterminer la forme d'un opérateur cinétique \mathbf{A} du premier ordre du mouvement relatif à un trièdre T en fonction des opérateurs fondamentaux d'un trièdre cinétique T_c .

Pour résoudre ces problèmes, il faut d'abord examiner la théorie des changements de variables.

§ 2. CHANGEMENTS DE VARIABLES

4. **Equicorrespondance de deux opérateurs.** — Souvent la résolution d'un problème est facilitée par le choix d'un système de coordonnées convenablement adapté (par exemple respectant des symétries). Cette remarque valable en mécanique classique s'applique aussi bien dans une mécanique plus générale, c'est pourquoi nous devons examiner de quelle façon vont se transformer les opérateurs cinétiques lorsqu'on fera un changement de variables. Ces relations vont résulter des lois générales du changement de variables, mais pour que les énoncés des théorèmes aient une forme correspondante à celle des théorèmes classiques, nous allons d'abord définir une pseudo-égalité entre opérateurs.

On fait le changement de variables qui consiste à passer des n variables x_1, x_2, \dots, x_n aux n variables y_1, y_2, \dots, y_n défini par :

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_n)$$

ce qu'on peut noter sous forme condensée par $Y = F(X)$ en désignant par X l'ensemble de toutes les variables x_i et par Y l'ensemble de toutes les variables y_j .

On suppose que le changement de variables est réversible, c'est à dire que le déterminant fonctionnel de la transformation est différent de zéro :

$$\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$$

on peut alors exprimer les x_i en fonction des y_j par $x_i = g_i(y_1, \dots, y_n)$.

Considérons une fonction de point $\varphi(X)$, elle est transformée par le changement de variables en une fonction $\psi(Y)$ et en des points correspondants on a égalité des fonctions φ et ψ .

Soit alors un opérateur \mathbf{A} opérant sur $\varphi(X)$

$$\chi(X) = \mathbf{A} \varphi(X)$$

le changement de variables précédemment défini transforme la fonction $\varkappa(X)$ en une fonction $\Phi(Y) = \varkappa(X)$; on peut alors dire que $\Phi(Y)$ est déduit de $\psi(Y)$ par un certain opérateur \mathbf{B} , on a donc :

$$\mathbf{A} \varphi(X) = \mathbf{B} \psi(Y)$$

Quand une relation telle que $\mathbf{A} \varphi = \mathbf{B} \psi$ est valable quelle que soit la fonction φ considérée à la seule condition que ψ soit son correspondant, on convient de l'écrire sans faire figurer les fonctions opérées. Il faut cependant bien faire attention qu'il ne s'agit pas là d'une égalité entre opérateurs; en effet $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ signifie :

$$\mathbf{A} \varphi(x) = \mathbf{B} \varphi(x)$$

quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ écrite pourvu que ce soit la même dans les deux membres. Pour distinguer la relation qui nous intéresse de l'égalité, nous la désignerons par le signe $\stackrel{\circ}{=}$; nous écrirons donc $\mathbf{A} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{B}$ et nous dirons alors que les deux opérateurs \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des *opérateurs équicorrespondants*. Donc

$$\mathbf{A} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{B} =_a (\psi). \quad Y = F(X) \quad \& \quad \psi(Y) = \varphi(X) \quad \& \quad \mathbf{A} \varphi = \mathbf{B} \psi$$

On vérifie immédiatement que la relation $\stackrel{\circ}{=}$ d'équicorrespondance est une *relation d'équivalence* : en effet :

- 1° elle est *réflexive*, car $x_j = y_j$ entraîne $\mathbf{A} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{A}$,
- 2° elle est *symétrique*, $\mathbf{A} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{B}$ entraîne $\mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{A}$ en vertu de l'inversabilité supposée du changement de variables
- 3° elle est *transitive*, $\mathbf{A} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{B}$ & $\mathbf{B} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{D}$ entraîne $\mathbf{A} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{D}$.

On montre de plus que cette équivalence est régulière et simplifiable.

5. Passage de n variables à n variables indépendant du temps. — Supposons que l'on passe des n variables x_i aux n variables y_j . Désignons par X l'ensemble des variables x_i et par Y l'ensemble des variables y_j . Une fonction quelconque $\varphi(X)$ se transforme par le changement de variables en une fonction $\psi(Y)$ qui lui est égale en des points X et Y correspondants, employant la même notation que pour les opérateurs, nous noterons cette égalité :

$$\varphi \stackrel{\circ}{=} \psi$$

en omettant de spécifier les arguments. Le changement étant toujours supposé réversible on a, pour déterminer les x_i , la relation inverse $x_i = g_i(y_1, \dots, y_n)$ qu'on notera sous la forme abrégée $X = G(Y)$.

Pour pouvoir déterminer la forme des différents opérateurs après le changement de variables, il faut d'abord que nous cherchions la forme de l'opérateur transformé de l'opérateur quantité de mouvement $p_{x,i} = ih' \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Pour avoir la transformée d'une dérivée prenons successivement les deux fonctions φ et ψ en deux points infiniment voisins; on a d'après ce qui précède les deux égalités :

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \psi(Y) \\ \varphi(X + \delta X) &= \psi(Y + \delta Y)\end{aligned}$$

On obtient en soustrayant :

$$\delta \varphi = \delta \psi$$

Calculons alors $\delta \varphi$ et $\delta \psi$ avec les deux choix de variables :

$$\delta \varphi = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \delta x_k$$

$$\delta \psi = \sum_j \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \delta y_j$$

Mais les δy_j ne sont pas indépendants et s'expriment en fonction des δx_k par différentiation de la formule de transformation :

$$\delta y_j = \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \delta x_k$$

en reportant cette valeur de δy_j dans l'expression de $\delta \psi$ et en égalant les coefficients de chaque δx_i dans chacun des deux membres il vient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec nos conventions en supprimant les fonctions opérées :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

en multipliant les deux membres par ih' on peut encore écrire :

$$p_{xk} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \bar{\omega}_{y,i}$$

avec

$$\bar{\omega}_{y,i} = ih' \frac{\partial}{\partial y_i}$$

De cette dernière relation et de celle donnant les x_i en fonction de y_j , on déduit immédiatement les transformés de la résultante cinétique, des composantes du moment cinétique et du moment cinétique résultant. Pour la force vive, il faut auparavant calculer l'opérateur équivalent à $p_{x,k}^2$. Cet opérateur s'obtient en appliquant au cas particulier envisagé ici les propriétés du signe $\bar{=}$.

$$p_{x,k}^2 = \sum_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \bar{\omega}_{y,i} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \bar{\omega}_{y,j}$$

6. Remarques sur la notion de temps. — En mécanique classique on peut mesurer le temps par le mouvement choisi à l'avance d'un point matériel ou d'un système de points matériels dépendant d'un paramètre; ceci n'est plus possible dans une théorie indéterministe puisqu'il n'y a plus liaison fonctionnelle entre la position d'un corpuscule et le temps, mais seulement liaison stochastique; c'est à dire que les lois de la mécanique permettent seulement de connaître à un instant la probabilité des diverses grandeurs attachées à un corpuscule et en particulier de sa position mais non de calculer une seule position bien déterminée et fixée avec certitude. Réciproquement de la position observée d'un corpuscule, même en excluant l'erreur qui est attachée à tout résultat de mesure, on ne peut en déduire à quel instant cette mesure a été faite. Mais la propriété qu'a le centre de gravité d'un système lourd de se comporter très approximativement comme un point matériel soumis aux lois de la mécanique classique permet de pouvoir appliquer, dans une théorie où les corpuscules obéissent à des lois différentes de celles de la mécanique classique certaines considérations issues de la mécanique classique comme les raisonnements qui emploient des horloges. Il est essentiel de remarquer que ces objets n'ont qu'une réalité statistique et ne peuvent être construits à l'échelle atomique.

On pourrait suivant la voie proposée par Eddington définir le temps à partir de l'entropie; mais l'entropie n'est pas directement liée à la me-

sure quantitative du temps car elle dépend en outre de nombreuses conditions pour le système, seul le sens de variation est le même. L'entropie ne permet qu'une mesure qualitative du temps.

Il est un phénomène qui semble mieux adapté pour servir de dispositif chronométrique, c'est celui de la désintégration radioactive; la probabilité de la désintégration d'un atome radioactif pendant un temps très court Δt est indépendante de la présence d'autres atomes et ne dépend que de la grandeur de cet intervalle. Une horloge radioactive est un dispositif chronométrique meilleur qu'une horloge mécanique puisqu'il permet de mesurer quantitativement le temps tout en marquant la flèche du temps, ce que ne fait pas l'horloge mécanique. Mais cette méthode comme celle basée sur l'entropie n'a de sens que si l'on se trouve en présence d'un grand nombre de corpuscules ou plus précisément d'un grand nombre de noyaux radioactifs; on montre en effet qu'une horloge radioactive est d'autant plus précise qu'elle est plus lourde, la précision augmentant comme la racine carrée de la masse.

On peut prévoir en vertu des lois quantiques que n'importe quel autre processus pour la mesure du temps nécessitera aussi la considération d'un grand nombre de corpuscules, Ceci montre que la notion *de temps pour un corpuscule isolé ou pour un système formé d'un petit nombre de corpuscules n'a aucun sens intrinsèque*. Seul le temps repéré par un observateur au moyen de son horloge a une signification. Par suite le mouvement d'un corpuscule qui fait intervenir la notion de temps ne peut être définie que par rapport à un certain système pris comme système de référence comprenant un grand nombre de corpuscules et pouvant par suite contenir un dispositif chronométrique.

Un système de référence répondant à ces conditions est le repère fondamental que nous avons introduit en cinématique opératorielle et qui coïncide en fait avec un repère fondamental de la cinématique classique.

7. Changement de paramètres dépendant du temps. — La notion de temps ainsi introduite va nous permettre d'étendre les règles de transformation établies, au cas où le temps figure dans la transformation.

Soit donc x_1, \dots, x_n les n paramètres fixant la position du système considéré, soit y_1, \dots, y_n les n paramètres nouveaux définis par :

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_n; t)$$

A une fonction $\varphi(X, t)$ opérable par un opérateur cinétique exprimé avec le premier choix de variables, X désignant l'ensemble de celles ci, corres-

pond une fonction $\psi(Y, t)$, la lettre Y désignant encore l'ensemble des variables y_j . En deux points correspondants, les deux fonctions φ et ψ sont égales, ce que nous notons :

$$\varphi(X, t) = \psi(Y, t)$$

Considérons maintenant les points correspondants $X + \delta X$ et $Y + \delta Y$ à l'instant $t + \delta t$. Nous aurons encore puisque les points sont correspondants :

$$\varphi(X + \delta X, t + \delta t) = \psi(Y + \delta Y, t + \delta t)$$

En soustrayant les deux égalités précédentes membre à membre, on obtient à un infiniment petit du second ordre près :

$$\delta \psi = \delta \varphi$$

Explicitons cette dernière égalité, nous avons :

$$\sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta t$$

Mais les y_i ne sont pas indépendants et s'expriment en fonction de x_j par :

$$\delta y_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} \delta t$$

Par suite de l'indépendance des variations, en employant le signe d'équivalence \equiv on obtient :

$$p_{x,k} \equiv \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \bar{\omega}_{y,i}$$

Introduisons l'opérateur \mathbf{E} défini par :

$$\mathbf{E}_x \varphi = -ih' \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_y \psi = -ih' \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

L'opérateur \mathbf{E} ainsi introduit correspond à la constante des forces vives et n'est pas un opérateur cinétique, mais un opérateur que nous appellerons *opérateur temporel* ; par suite de la dérivation par rapport à t cet opérateur joue un rôle différent de celui des autres opérateurs déjà introduits dans la théorie. Des relations précédente il résulte immédia-

tement qu'entre les opérateurs E_x et E_y , on a la relation d'équicorrespondance suivante :

$$E_x = - \sum \frac{\partial f_i}{\partial t} \bar{\omega}_{y,i} + E_y$$

Pour rester dans le cas d'un changement de variables indépendant du temps il suffirait de poser dans toutes les formules précédents que toutes les dérivées partielles des fonctions f_i par rapport à t sont nulles. Il n'y a pas alors lieu de faire intervenir l'opérateur E qui dans ce cas demeure toujours inchangé.

Les relations précédentes permettent immédiatement d'avoir les opérateurs équicorrespondants aux opérateurs résultante cinétique, composantes du moment cinétique, résultante du moment cinétique.

8. Paramètres surabondants. — Soient x_1, \dots, x_n les n paramètres fixant la position d'un système à n degrés de liberté, supposons que l'on passe du système des x_i à q_1, \dots, q_p nouvelles variables en nombre surabondant ($p > n$) définies par les formules de transformation:

$$q_j = f_j(x_1, \dots, x_n) \quad j = 1, \dots, p.$$

Les relations précédentes sont équivalentes au système constitué par n d'entre elles et $p - n$ équations de liaisons de la forme :

$$h_k(q_1, \dots, q_p) = 0 \quad k = 1, \dots, p - n$$

que l'on obtient en éliminant les x_i entre les p équations précédentes.

Passer des n variables x_1, \dots, x_n aux p variables q_1, \dots, q_p revient géométriquement à considérer un point M d'un espace à n dimensions comme un point d'une multiplicité \mathfrak{M}_n à n dimensions plongée dans un espace à p dimensions. Il faut remarquer que dans ce changement, à une fonction quelconque des n variables anciennes correspond une fonction des nouvelles variables qui n'est définie que sur la multiplicité \mathfrak{M}_n et est arbitraire en dehors de \mathfrak{M}_n .

Toutes les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ s'expriment linéairement en fonction des p

dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial q_j}$ mais la réciproque n'est pas vraie, on ne peut exprimer les

p dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$ de ψ en fonction des n dérivées de φ par rapport aux x_i .

Le problème qui se pose est le même que dans le cas précédent de changement de variables : trouver les opérateurs équicorrespondants aux opérateurs $p_{x,i}$ puisque la connaissance de cette équicorrespondance suffit pour déterminer les opérateurs équicorrespondants aux autres opérateurs cinétiques.

Pour résoudre le problème précédent on procède de la manière suivante :

Aux anciennes variables x_1, \dots, x_n on adjoint $p - n$ variables u_1, \dots, u_{p-n} fonction des q_1, \dots, q_p et telles que les équations

$$u_k = 0 \quad k = 1, \dots, p - n$$

redonne l'espace des anciennes variables c'est à dire la multiplicité \mathfrak{N}_n . On passe ainsi au moyen de ces variables auxiliaires de p variables à p variables. On obtient alors par la méthode déjà exposé d'égalisation des différentielles $\delta \varphi$ et $\delta \psi$ l'expression des opérateurs de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sans tenir compte des liaisons ; on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial u_k} = \sum_j \frac{\partial h_j}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

ceci si l'on définit le changement de variables inverse, que l'on suppose toujours exister, par :

$$q_j = h_j(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_{p-n})$$

Les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ sont les composantes du vecteur grad φ défini sur la multiplicité \mathfrak{N}_n ; les $\frac{\partial \psi}{\partial q_j}$ sont les composantes de grad ψ exprimées avec le nouveau choix de variables. Or les équations provenant de l'équicorrespondance ne sont autres que celles qui identifient les projections sur la multiplicité \mathfrak{N}_n , de grad φ et de grad ψ ; des relations n'existent que sur cette multiplicité. La fonction ψ étant arbitraire en dehors de \mathfrak{N}_n l'est sur toute direction prise à partir d'un point M de \mathfrak{N}_n et contenue dans la multiplicité \mathfrak{N}_{p-n} normale en M à \mathfrak{N}_n . Le gradient pris en un point quelconque de \mathfrak{N}_n se décompose donc en deux vec-

teurs l'un contenu dans \mathfrak{N}_n bien déterminé et égal à grad φ et l'autre orthogonal à \mathfrak{N}_n et arbitraire. Si nous faisons choix de valeurs pour ces composantes normales les indéterminations disparaissent. Les relations entre opérateurs que l'on déduit de cette réduction du nombre des paramètres sont de deux sortes :

1° celles indépendantes du choix des valeurs des composantes normales, ce sont les relations d'équicorrespondance déjà définies elles ont lieu entre opérateurs sur \mathfrak{N}_n ;

2° celles qui dépendent du choix des composantes normales qui doivent être distinguées des précédentes puis qu'en changeant le système des valeurs arbitrairement choisi elles sont remplacées par d'autres. Nous les représenterons par le signe $\overline{\cdot}$. Nous appellerons ces relations des *relations de semi-équicorrespondance*.

9. **Changement de variables. Cas général.** — Nous avons envisagé successivement le passage de n variables x_i à n variables y_j , la transformation pouvant ou non dépendre du temps, puis le passage de n variables x_i à p variables q_j avec $p > n$, les variables q_j étant définie par des fonctions des x_i , soit :

$$q_j = f_j(x_1, \dots, x_n) \quad j = 1, \dots, p > n$$

En éliminant les x_i entre les p équations il reste $p - n$ relations entre les q_j qui sont des équations de liaisons : on a des paramètres surabondants. Il nous faut maintenant étudier le passage de n variables x_i à p variables q_i avec $p \geq n$ quelconques, les x_i pouvant s'exprimer en fonction des q_j sans que l'inverse soit supposé avoir lieu.

Aux variables x_i nous pouvons adjoindre $p - n$ variables u_k convenablement choisies de telle façon que l'on puisse transformer les p variables q_j en les variables x_i, u_k et inversement (Jacobien de la transformation non identiquement nul) ; nous aurons alors :

$$(1) \quad T \begin{cases} x_i = f_i(q_1, \dots, q_p; t) & i = 1, \dots, n \geq p \\ u_k = f_{n+k}(q_1, \dots, q_p; t) & k = 1, \dots, p - n \end{cases}$$

La donnée des fonctions $f_1, \dots, f_n; f_{n+1}, \dots, f_p$ définit le changement de variables (ces fonctions étant supposées continues et dérivables). Le Jacobien étant supposé non identiquement nul nous pouvons par inversion de la transformation T obtenir les q_j en fonction des x_i et u_k , soit :

$$(2) \quad T^{-1} \quad q_j = g_j(x_1, \dots; u_1, \dots, u_{p-n}; t)$$

(les fonctions g_j sont aussi supposées continues et dérivables). L'ensemble des variables x_i définit un espace (\mathcal{E}_x) à n dimensions et l'ensemble des x_i, t un espace $(\mathcal{E}_{x,t})$ à $n + 1$ dimensions; l'ensemble des u_k définit un espace (\mathcal{E}_u) à $p - n$ dimensions et l'ensemble des u_k, t un espace $(\mathcal{E}_{u,t})$ à $p - n + 1$ dimensions; l'ensemble des q_j définit un espace à p dimensions (\mathcal{E}_q) et l'ensemble des q_j, t un espace à $p + 1$ dimensions. L'ensemble des x_i et u_k définit un espace $(\mathcal{E}_{x,u})$ produit direct de (\mathcal{E}_x) et (\mathcal{E}_u) qui est à p dimensions. Le passage des variables x_i, u_k aux q_j définit une transformation ponctuelle inversable de $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ en $(\mathcal{E}_{q,t})$ qui est continue.

Une fonction de point Ψ dans $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ est transformée en une fonction de point Φ dans $(\mathcal{E}_{q,t})$ et les dérivées de Ψ sont transformées en des expressions linéaires des dérivées de Φ . Si nous désignons par P l'ensemble des x_i, u_k, t et par Q l'ensemble des q_j, t ; on voit que P est un point de $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ et Q un point de $(\mathcal{E}_{q,t})$. Le point Q est transformé en le point P par la transformation définie par les formules (1) et le point P est transformé en le point Q par la transformation définie par les formules (2). Les points P et Q seront dits correspondants. Une fonction de point $\Psi(P)$ exprimée avec les variables x, u, t sera transformée en une fonction $\Phi(Q)$ avec égalité en des points correspondants :

$$P = T Q \quad \rightarrow \quad \Psi(P) = \Phi(Q)$$

(pour toute paire de points correspondants).

Si on considère deux paires de points P, Q et $P + \delta P, Q + \delta Q$ de points correspondants infiniment voisins, on aura :

$$\delta \Psi(P) = \delta \Phi(Q)$$

en calculant les différentielles totales de $\delta \Psi$ et $\delta \Phi$, en égalant les termes facteurs des mêmes différentielles indépendantes, on obtient les relations entre opérateurs de dérivation. On a comme expression des différentielles totales :

$$\delta \Psi = \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_k \frac{\partial \Psi}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \delta t$$

$$\delta \Phi = \sum_j \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta t$$

quant aux différentielles $\delta x_i, \delta u_k$ et δq_j elles sont liées par

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial t} \delta q_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} \delta t \\ \delta u_k &= \sum_j \frac{\partial f_{n+k}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial f_{n+k}}{\partial t} \delta t \\ \delta q_j &= \sum_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_k \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial g_j}{\partial t} \delta t \end{aligned}$$

En égalant terme à terme dans les différentielles totales et en omettant d'écrire la fonction opérée, on obtient les relations suivantes entre opérateurs de dérivation :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{n+k}}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial u_k} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i,k} \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{n+k}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_k} \end{cases}$$

et les relations inverses :

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial q_j} \\ \frac{\partial}{\partial u_k} &= \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial q_j} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

Les formules précédentes nous permettent d'exprimer les dérivées de la fonction $\Psi (P)$ en fonction des dérivées de $\Phi (Q)$ et inversement. Mais ces ne sont pas des fonctions $\Psi (P)$ que nous devons considérer mais des fonctions $\psi (X)$ définies dans l'espace $(\mathcal{E}_{x,t})$. L'espace $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ sur lequel se déplace P est le produit direct de $(\mathcal{E}_{x,t})$ et de (\mathcal{E}_u) . L'espace $(\mathcal{E}_{x,t})$ est une multiplicité à $n + 1$ dimensions plongée dans l'espace $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ à $p + 1$ dimensions. Elle se trouve définie dans l'espace $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ par les équations :

$$u_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p - n$$

Par la transformation T l'espace $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ est transformé en l'espace $(\mathcal{E}_{q,t})$, la multiplicité $(\mathcal{E}_{x,t})$ sera transformée en une multiplicité $\mathfrak{N}_{x,t}$ à

$n + 1$ dimensions dont les équations se déduisent immédiatement des expressions des u_k , soit :

$$f_{n+k}(q_1, \dots, q_p; t) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p - n$$

En dehors de $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ la fonction $\psi(X)$ n'est pas définie ; il lui correspond dans $(\mathcal{E}_{q,t})$ une fonction de point $\varphi(M)$ définie sur $\mathfrak{N}_{x,t}$ et l'on a en deux points correspondants la relation :

$$X \in (\mathcal{E}_{x,u,t}). \ \&. \ M = T^{-1}X \quad \rightarrow \quad \psi(X) = \varphi(M). \ \&. \ M \in \mathfrak{N}_{x,t}$$

en des points correspondants infiniment voisins on aura :

$$\delta_T X \in (\mathcal{E}_{x,u,t}). \ \&. \ \delta_T M \in \mathfrak{N}_{x,t} \quad \rightarrow \quad \delta \psi(X) = \delta \varphi(M)$$

en désignant par $\delta_T X$ (variation tangentielle) et par $\delta_T M$ des variations de points X et M qui satisfont à la condition précédente, c'est à dire qui font passer de points de $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ ou de $\mathfrak{N}_{x,t}$ à des points de la même multiplicité. Désignons au contraire par $\delta_N X$ des variations de l'espace $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ ne faisant varier que les u_k qui passent de 0 à δu_k à partir de points de la multiplicité $\mathfrak{N}_{x,t}$. Les variations correspondantes du point M seront notées $\delta_N M$ (variations normales). Une variation quelconque δX dans l'espace $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ est la somme des variations $\delta_T X$ et $\delta_N X$ et de même pour une variation δM dans l'espace $(\mathcal{E}_{q,t})$, soit :

$$\delta X = \delta_N X + \delta_T X \quad ; \quad \delta M = \delta_N M + \delta_T M$$

En dehors de la multiplicité $(\mathcal{E}_{x,t})$ la fonction $\psi(X)$ n'est pas définie ; on peut la prolonger arbitrairement sur tout l'espace $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ par une fonction $\Psi(P)$ qui prend des valeurs arbitraires hors de $(\mathcal{E}_{x,t})$ et qui sur $(\mathcal{E}_{x,t})$ est égale à $\psi(X)$, soit

$$P \in (\mathcal{E}_{x,t}) \quad \rightarrow \quad \Psi(P) = \psi(X)$$

cette condition entraîne que :

$$\delta_T \Psi = \delta \psi$$

et par suite :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Par contre $\delta_N \Psi$ est arbitraire et les dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial u_k}$ peuvent prendre des valeurs arbitraires; les dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial u_j}$ sont nulles puisque $\psi(X)$ est une fonction indépendante des u_k . Puisque les $\frac{\partial \Psi}{\partial u_k}$ sont arbitraires on est libre de fixer leur valeur et nous conviendrons de les évaluer toujours aux valeurs de $\frac{\partial \psi}{\partial u_k}$ c'est à dire zéro. Suivant la notation opératoire définie plus haut une telle condition au lieu d'être écrite :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p-n$$

sera notée en omettant d'écrire la fonction opérée (puisque les relations auront lieu pour toute fonction opérée) et en utilisant le signe \equiv soit :

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \equiv 0$$

De telles relations annulent les opérateurs dérivation par rapport aux variables qui ne figurent pas dans $\psi(X)$. Elles expriment une condition sur le prolongement de $\psi(X)$ par $\Psi(P)$ au voisinage de la multiplicité $(\mathcal{E}_{x,t})$. Nous les appellerons conditions d'élimination car elles ont pour effet d'éliminer les variables u_k qui ne figurent pas dans $\psi(X)$.

Dans la transformation résultant du passage des variables x_i, u_k, t aux variables q_j, t , la multiplicité $\mathcal{E}_{x,t}$ est transformée en la multiplicité $\mathcal{N}_{x,t}$; à la fonction $\psi(X)$ il correspond la fonction $\varphi(M)$ définie sur $\mathcal{N}_{x,t}$. Cette fonction $\varphi(M)$ peut être prolongée arbitrairement dans tout $\mathcal{E}_{x,t}$ par une fonction $\Phi(Q)$ assujettie seulement à être égale à $\varphi(M)$ sur $\mathcal{N}_{x,t}$, soit :

$$M \in \mathcal{N}_{x,t} \rightarrow \Phi(M) = \varphi(M)$$

mais hors de $\mathcal{N}_{x,t}$ la fonction $\Phi(Q)$ est arbitraire, et la variation $\delta_N \Phi$ est arbitraire, on a seulement la condition :

$$\delta_T \Phi(M) = \delta \varphi(M)$$

La fonction $\Phi(M)$ est arbitraire hors de $\mathcal{N}_{x,t}$ et n'est pas assujettie à correspondre à la fonction $\Psi(P)$ qui prolongue $\psi(X)$ dans $(\mathcal{E}_{x,u,t})$ hors de $(\mathcal{E}_{x,t})$, on n'est donc pas obligé de poser qu'à

$$\delta_N \Psi(X) = 0$$

résultant des conditions d'élimination, correspond $\delta_N \Phi(M) = 0$ on peut au contraire donner telle valeur que l'on veut aux expressions correspondant aux opérateurs $\frac{\partial}{\partial u_k}$ (système 4). On aura d'une part des relations indépendantes de la valeur fixée à ces expressions (notées avec le signe $\overleftarrow{=}$), d'autre part des relations résultant du choix fait pour ces expressions (notées avec le signe $\overrightarrow{=}$). On voit que lors d'un tel changement de variables on ne pose pas la conservation des conditions d'élimination.

Les variables x_i , u_k ou q_j ont été jusqu'ici supposées indépendantes et c'est ainsi que nous avons obtenu les systèmes (3) et (4). Envisageons maintenant le cas où une variable u_k est liée aux variables x_m et à t (ce cas comprend en particulier celui où une variable q_k serait liée aux x_i et à t ; il suffirait de prendre comme variable u_k la variable q_k elle-même, puisque les u_k ont été choisies arbitrairement pour compléter le nombre des variables). Une variation δu_k est alors liée aux variations δx_m et δt . On aura :

$$\delta u_k = \sum \lambda_{ki} \delta x_i + \lambda_{kt} \delta t$$

Si la liaison peut « être exprimée en termes finis (liaisons holonomes) les λ sont des dérivées partielles d'une fonction; dans le cas contraire on a une *liaison non-holonyme* : les λ_{ki} sont appelés *coefficients de liaison*. Si on a une telle liaison l'équation en u_k du système (4) disparaît, et, multipliée par les λ_{ki} , ses termes viennent s'ajouter dans les équations en x_i du système (4). En effet on a, en n'introduisant que les différentielles de variables indépendantes :

$$\delta \Psi = \sum \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \delta x_i + \sum \frac{\partial \Psi}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial \Psi}{\partial u_k} (\sum \lambda_{ki} \delta x_i + \lambda_{kt} \delta t)$$

d'où on a les relations :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_{ki} \frac{\partial}{\partial u_k} \overleftarrow{=} \sum \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \lambda_{ki} \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \overleftarrow{=} \sum \frac{\partial g_j}{\partial u_m} \frac{\partial}{\partial q_j} \quad m = 1, \dots, p-n; m \neq k$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{kt} \frac{\partial}{\partial u_k} \overleftarrow{=} \sum \left(\frac{\partial g_j}{\partial t} + \lambda_{kt} \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t}$$

S'il y avait plusieurs équations de liaisons, des équations s'élimineraient et les autres équations contiendraient des termes complémentaires. La liaison entre u_k et les x_i, t , si elle s'exprime en termes finis, définit une multiplicité \mathfrak{N}_k dans l'espace $(\mathfrak{E}_{x,u,t})$. La fonction $\Psi(P)$ se trouve alors définie sur la multiplicité \mathfrak{N}_k on peut la prolonger hors de \mathfrak{N}_k d'une manière arbitraire par une fonction $\Psi(P)$.

Si on passe de l'espace $(\mathfrak{E}_{x,u,t})$ à l'espace $(\mathfrak{E}_{p,t})$, la multiplicité \mathfrak{N}_k est transformée en une multiplicité \mathfrak{N}'_k . Si nous avons comme équation de liaison en termes finis :

$$u_k = h_k(x_1, \dots, x_n; t)$$

qui définit la multiplicité \mathfrak{N}'_k , la multiplicité \mathfrak{N}'_k aura pour équation :

$$f_{n+k}(q_1, q_2, \dots, q_p; t) = h_k[f_1(q_1, \dots, q_p; t), \dots, f_n(q_1, \dots, q_p; t)]$$

Si la liaison est non holonome, la liaison dans l'espace $(\mathfrak{E}_{q,t})$ s'exprimera par :

$$\sum \frac{\partial f_{n+k}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial f_{n+k}}{\partial t} \delta t = \sum \lambda_{ki} \sum \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \delta q_j + \lambda_{kt} \delta t$$

Les variables q_1, \dots, q_p ne sont pas indépendantes; si les liaisons sont holonomes, à la fonction $\Psi(P)$ définie sur \mathfrak{N}_k correspond $\Phi(Q)$ définie sur \mathfrak{N}'_k . La fonction $\Phi(Q)$ peut être prolongée hors de \mathfrak{N}'_k par une fonction $\Phi'(Q)$; sa valeur hors de \mathfrak{N}'_k est arbitraire, par suite une variation $\delta_N \Phi'$ correspondant à un déplacement $\delta_N Q$ normal à \mathfrak{N}'_k est arbitraire, d'où des relations supplémentaires exprimées par le signe \equiv entre les opérateurs de dérivation si l'on fixe la valeur de $\delta_N \Phi'$.

Si l'on considère une fonction $\psi(X)$ fonction des x_i et de t définie sur $(\mathfrak{E}_{x,t})$, on peut la prolonger sur \mathfrak{N}_k par $\Psi(P)$ et sur $(\mathfrak{E}_{x,u,t})$ par $\psi'(P)$. Comme dans le cas de l'élimination des variables u_j examiné plus haut, si on se limite à des fonctions $\psi(X)$ on aura des conditions d'élimination comme s'il n'y avait pas de liaison pour les u_k :

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \equiv 0 \quad j \neq k \text{ \& } j = 1, 2, \dots, p-n$$

à la fonction $\psi(X)$ il correspond $\varphi(M)$ sur $\mathfrak{N}_{x,t}$ dans l'espace $(\mathfrak{E}_{q,t})$. On peut prolonger $\varphi(M)$ arbitrairement sur \mathfrak{N}'_k ou sur $(\mathfrak{E}_{q,t})$ par $\Phi(Q)$ ou $\Phi'(Q)$.

Les relations entre les $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial}{\partial q_j}$ seront de deux types celles exprimées avec le signe $\overline{=}$ qui seront indépendantes des choix faits pour les valeurs des variations normales δ_N et celles exprimées avec le signe $\overline{=}$ qui dépendent du choix fait.

Si l'on annule les $\frac{\partial}{\partial u_j}$ on a à la place du système (5) les relations :

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &\overline{=} \sum_j \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \lambda_{ki} \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\overline{=} \sum_j \left(\frac{\partial g_j}{\partial t} + \lambda_{kt} \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \right) \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

A partir des résultats précédents on peut énoncer la théorème suivant :

THÉORÈME I. *Toute introduction de liaison supprime une relation liant les opérateurs de dérivation et introduit un terme supplémentaire dans chaque membre des équations restantes qui n'est autre qu'un membre de l'équation supprimée multiplié par le coefficient de liaison correspondant.*

THÉORÈME II. *Toute élimination de variable supprime les opérateurs de dérivation par rapport aux variables correspondantes dans le membre de gauche de chaque équicorrespondance.*

THÉORÈME III. *Chaque introduction de liaison et chaque élimination introduisent une relation arbitraire avec le signe $\overline{=}$ entre les opérateurs de dérivation par rapport aux nouvelles variables.*

CHAPITRE IV

INTEGRALES PREMIERES

§ I. LA NOTION D'INTÉGRALE PREMIÈRE

1. **Intégrales premières en mécanique classique.** — En mécanique classique on appelle intégrale première, au sens mathématique, toute fonction uniforme ou multiforme $f(q_i, p_i, t)$, des coordonnées q_i , des moments conjugués p_i et du temps qui reste constante au cours du temps en vertu des équations du mouvement :

$$f(q_i, p_i, t) = a.$$

C'est là une définition mathématique qui ne peut être adoptée telle quelle en mécanique ondulatoire, car par suite des relations d'incerti-

tude, les paramètres de position q_i et les moments conjugués p_i n'ont pas à chaque instant des valeurs déterminées d'une façon précise, et de ce fait, une fonction de ces arguments ne peut avoir en général de valeur bien déterminée. On pourrait songer à former l'opérateur correspondant à la fonction f en remplaçant les q_i et p_i par les opérateurs correspondants, mais pour cela il faut que la fonction $f(q_i, p_i, t)$ donne un opérateur bien défini, ce qui n'a lieu que pour certaines formes de fonctions; de plus il faut avoir défini la constance d'un opérateur. Ce n'est donc pas d'une manière formelle que l'on peut parvenir à une définition satisfaisante des intégrales premières; il faut se placer sur le plan physique et non sur le plan mathématique.

En mécanique classique, parmi les intégrales premières au sens mathématique, on peut distinguer une classe particulière: ce sont celles correspondant à des grandeurs physiques pour lesquelles on peut définir des appareils de mesure; pour les caractériser, nous les appellerons *intégrales premières au sens physique*. Une intégrale première au sens physique est donc en mécanique classique, une grandeur s'exprimant par une fonction $f(q_i, p_i, t)$, dont la valeur est constante au cours du temps en vertu des équations du mouvement; (on remarquera qu'une intégrale première au sens physique est nécessairement uniforme ou uniformisable, car si on effectue une mesure on trouve un résultat unique bien déterminé; par suite les intégrales premières essentiellement multiformes ne peuvent être des intégrales premières au sens physique).

Cette définition de la mécanique classique se laisse transposer en mécanique ondulatoire et y prend une forme précise. Les intégrales premières qu'on définit jouissent alors de propriétés analogues à celles de la mécanique classique. On a vu plus haut qu'à toute grandeur physique est associé un opérateur, d'après ce qui précède c'est donc finalement à partir des propriétés des opérateurs que l'on définira les intégrales premières en mécanique ondulatoire.

2. Opérateurs intégrales premières. — Si l'on appelle opérateur « auto-prévisible » tout opérateur associé à une grandeur physique $A(t)$ tel que si à un instant t_0 on connaît la valeur $r_A(t_0)$ de la grandeur A , la valeur de cette grandeur est connue exactement pour tout instant t ultérieur, (1) on voit qu'une intégrale première en mécanique classique peut être définie comme une grandeur auto-prévisible à valeurs possibles indépendantes du temps. On montre que ces deux caractères sont

(1) J. L. DESTOUCHES. — Principes fondamentaux de Physique théorique; t. III. p. 606.

compatibles et peuvent être conservés en mécanique ondulatoire; nous poserons donc la définition suivante :

DÉFINITION. *Un opérateur sera dit « intégrale première » si : 1°) il est associé à une grandeur physique au sens élargi ; 2°) il est à valeurs propres indépendantes du temps ; 3°) il est auto-prévisible.*

La grandeur associée à un opérateur intégrale première sera dite « grandeur intégrale première ».

La condition à laquelle doit satisfaire l'opérateur associé à une grandeur $A(t)$ pour qu'il soit à la fois auto-prévisible et à valeurs propres indépendantes du temps se traduit par la relation :

$$A(t) \mathcal{Q}^l(t, t_0) X_{r_A}(t_0) = \mathcal{Q}^l(t, t_0) A(t_0) X_{r_A}(t_0)$$

Les grandeurs intégrales premières que nous venons de définir correspondent bien aux intégrales premières au sens physique de la mécanique classique; elles en ont en effet les propriétés caractéristiques : 1°) les valeurs possibles d'une intégrale première sont les mêmes à tous les instants, ce qui se traduit ici par les valeurs propres indépendantes du temps ; 2°) si à l'instant initial t_0 on connaît la valeur d'une intégrale première, on connaît de ce fait sa valeur à tous les instants ultérieurs, il y a autoprévisibilité.

§ 2. AIDE FOURNIE PAR LES INTÉGRALES PREMIÈRES DANS LE CALCUL DES PRÉVISIONS

3. Utilisation d'intégrales premières. — Le problème des prévisions qui se décompose en problèmes successifs, comprend un problème d'évolution qui est le seul dans lequel le temps intervient: le problème de la détermination des éléments de prévision à partir des éléments initiaux, c'est à dire trouver les $X(t)$ qui sont les transformés par $\mathcal{Q}^l(t, t_0)$ des X_0 associés au résultat de la mesure initiale. Si $X(t)$ s'exprime symboliquement sous la forme :

$$X(t) = \mathcal{Q}^l(t, t_0) X_0$$

ceci ne détermine la forme explicite de $X(t)$ que pour autant que la forme de \mathcal{Q}^l est explicitée et qu'on a su effectuer la transformation de X_0 d'une manière effective.

Or la connaissance d'une intégrale première fournit dans certains cas des conditions auxquelles $X(t)$ doit satisfaire, ce qui apporte une aide dans la détermination effective de $X(t)$.

En effet si l'on sait que la mesure initiale a pour conséquence que la valeur à t_0 d'une grandeur physique au sens élargi de rang l et intégrale première correspondant à un opérateur $p_A(t)$ est contenu dans un ensemble \mathfrak{E}_0 de valeurs, on peut affirmer que tout $X(t)$ acceptable sous cette condition initiale appartient à la multiplicité déterminée par les éléments propres $X_{r_A}(t)$ tels que :

$$p_A(t) X_{r_A}(t) = r_A X_{r_A}(t) \quad \text{avec } r_A \in \mathfrak{E} \quad (1)$$

Ceci fournit une condition à laquelle les $X_{r_A}(t)$ doivent satisfaire. Il faut en outre qu'ils appartiennent à l'ensemble \mathfrak{X} des éléments de prévisions. Si la mesure initiale équivaut à la mesure de la grandeur associée à $p_A(t_0)$ avec la précision \mathfrak{E} , tout élément de \mathfrak{X}_0 satisfaisant à l'équation précédente pour $t = t_0$ et $r_A \in \mathfrak{E}$ est acceptable comme élément initial. Si au contraire la mesure initiale est telle que seuls certains des $X_{r_A}(t_0)$ soient acceptables comme éléments initiaux, seuls certains $X_{r_A}(t)$ seront acceptables. Mais en général, dans l'un et l'autre cas, l'équation (1) ne suffit pas à déterminer complètement les $X_{r_A}(t)$; par exemple si $p_A(t)$ est indépendant du temps, l'évolution des $X_{r_A}(t)$ au cours du temps n'est pas déterminée par l'équation (1).

D'où ce théorème :

THÉORÈME. *Si à l'instant initial la valeur d'une intégrale première définie par un opérateur $p_A(t)$ est fixée avec une certaine approximation \mathfrak{E} , tout élément de prévision $X(t)$ acceptable sous les conditions initiales appartient à la multiplicité $\mathfrak{X}_{\mathfrak{E},t}$ engendrée par les éléments $X_{r_A}(t)$ qui*

- 1°) *sont des éléments de prévision c'est à dire des éléments de \mathfrak{X} ,*
- 2°) *sont des solutions de l'équation aux valeurs propres :*

$$p_A(t) X_{r_A}(t) = r_A X_{r_A}(t)$$

pour l'ensemble des valeurs r_A qui appartiennent à la famille \mathfrak{E} caractérisant la valeur initiale de $p_A(t)$.

Si en outre l'opérateur d'évolution est linéaire (cas de la mécanique ondulatoire), d'une part à toute mesure initiale on peut associer une intégrale première, d'autre part si la mesure initiale permet d'affirmer que tout élément initial est de la forme :

$$X_0 = \sum c_i X_{i,0} \quad \text{avec } p_A(t_0) X_{i,0} = r_A X_{i,0} \quad \text{et } r_A \in \mathfrak{E}_i$$

alors tout élément de prévision sera de la forme :

$$X(t) = c_i X_i(t) \quad \text{avec } p_A(t) X_i(t) = r_A X_i(t) \quad \text{et } r_A \in \mathfrak{E}_i$$

avec des valeurs c_i indépendantes du temps et les mêmes qu'à l'instant initial.

Donc dans le cas d'un opérateur d'évolution \mathcal{Q} linéaire, une intégrale première fournit une aide encore plus importante que dans le cas général.

4. Limitation à l'évolution introduite par une intégrale première. —

Si le système physique étudié admet une intégrale première $A(t)$ et si sa valeur initiale est fixée avec une certaine approximation \mathcal{E} , l'élément $X(t)$ figuratif du système dans l'espace des éléments de prévisions ne peut être quelconque; nécessairement il est dans un certain ensemble d'éléments de prévisions. En effet $X(t)$ est dans l'espace (\mathcal{X}) d'une part, d'autre part il est dans la multiplicité $\mathfrak{N}_{\mathcal{E},t}$ définie ci-dessus. Il est donc nécessairement dans l'ensemble \mathbf{S} défini par :

$$\mathbf{S} = \mathfrak{N}_{\mathcal{E},t} \cap \mathcal{X}$$

On voit que comme en mécanique classique, une intégrale première entraîne une limitation à l'étalement du domaine dans lequel se trouve le point figuratif du système.

En mécanique classique, si la valeur d'une intégrale première uniforme $f(q_i, p_i, t)$ est fixée, le point figuratif M du système étudié est assujéti dans l'extension en phase (Ω) à se trouver sur la multiplicité $M_{a,t}$ d'équation :

$$f(q_i, p_i, t) = a$$

Si d'autre part on sait que le point figuratif M est dans un domaine D de (Ω) , il sera nécessairement sur la partie commune à D et à $M_{a,t}$; soit sur l'intersection $D \cap M_{a,t}$.

En théorie générale des prévisions on retrouve des circonstances analogues : le système est figuré par un élément de prévision $X(t)$ qui est assujéti à se trouver sur l'espace (\mathcal{X}) des éléments de prévisions [(\mathcal{X}) joue un peu un rôle semblable à celui de l'extension en phase].

Si la valeur d'une intégrale première est fixée avec précision le point figuratif X sera sur la multiplicité $\mathfrak{N}_{r_A,t}$ associée à la valeur de cette intégrale première et par suite sur l'intersection $(\mathcal{X}) \cap \mathfrak{N}_{r_A,t}$. La multiplicité non-linéaire joue le rôle de la multiplicité $\mathfrak{N}_{a,t}$ de la mécanique classique.

5. Règle pratique. — On peut énoncer la règle pratique suivante :
PREMIÈRE RÈGLE PRATIQUE. *Si les conditions initiales d'un problème de*

prévisions sont telles que la valeur d'une intégrale première dont on connaît l'expression de l'opérateur $p_A(t)$ associé, se trouve fixée soit avec précision soit avec imprécision pour déterminer les éléments de prévisions, on cherche d'abord les fonctions qui satisfont à l'équation aux valeurs propres de l'opérateur $p_A(t)$ pour la valeur fixée r_A , ou pour l'ensemble \mathcal{E} de valeurs défini par la mesure initiale, soit :

$$p_A(t) X_{r_A}(t) = r_A X_{r_A}(t) \quad \text{avec} \quad r_A \in \mathcal{E}$$

DEUXIÈME RÈGLE PRATIQUE. Si l'opérateur d'évolution \mathfrak{U} est linéaire et si l'on connaît une intégrale première $p_A(t)$ et si enfin on sait qu'un élément initial X_0 acceptable sous les conditions initiales est de la forme :

$$X_0 = c_i X_{i0} \quad \text{avec} \quad p_A(t) X_{i0} = r_A X_{i0} \quad \text{et} \quad r_A \in \mathcal{E}_i$$

alors cet X_0 donne lieu à un élément de prévision $X(t)$ qu'on déterminera de la façon suivante : 1°) on calculera les solutions de l'équation :

$$p_A(t) X_{r_A}(t) = r_A X_{r_A}(t)$$

qui appartiennent à l'ensemble \mathfrak{X} et qui sont telles que :

$$X_{r_A}(t_0) = X_{i0}$$

et cela pour chaque valeur de l'indice i .

2°) à un X_{i0} correspondrait plusieurs solutions distinctes $X_i(t)$ appartenant à \mathfrak{X} ; on posera :

$$X_i(t) = \sum_j a_{ij} X_{r_A,ij}(t) \quad \text{avec} \quad X = X_{r_A,ij} = X_{i0}$$

les a_i étant laissés arbitraires sous la seule condition que $X_i(t)$ appartienne à \mathfrak{X} .

3°) Les $X_i(t)$ étant ainsi déterminés on aura :

$$X(t) = \sum_i c_i X_i(t)$$

les c_i étant les mêmes que ceux qui figurent dans X_0 .

4°) Les probabilités de la grandeur $p_A(t)$ se déterminent immédiatement : on aura :

$$p_i = f(c_i) = |c_i|^k$$

6. Utilisation de plusieurs intégrales premières. — Examinons d'abord le cas où l'on connaît deux opérateurs intégrales premières $A(t)$ et $B(t)$; plusieurs cas sont à distinguer suivant que les grandeurs co-

respondantes A et B seront composables (c'est à dire simultanément mesurables) ou non.

Si les deux grandeurs A et B sont composables, il n'y a pas de difficultés : comme en mécanique classique on pourra connaître simultanément les valeurs des deux grandeurs au moyen de mesures ; par suite on peut donner des valeurs \mathcal{E}_a et \mathcal{E}'_b de ces grandeurs fixées avec une certaine imprécision comme conditions initiales d'un problème (soit que l'on ait mesuré à la fois A et B , soit que l'on ait mesuré une grandeur C dont elles dérivent). Dans un tel cas les éléments de prévision acceptables devront satisfaire aux deux équations aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} A(t) X_a(t) &= a X_a(t) && \text{avec } a \in \mathcal{E}_a \\ B(t) X_b(t) &= b X_b(t) && \text{avec } b \in \mathcal{E}'_b \end{aligned}$$

où \mathcal{E}_a et \mathcal{E}'_b sont les valeurs données des intégrales premières A et B .

La détermination des éléments de prévision acceptables sous les conditions initiales données sera plus précise que dans le cas d'une seule intégrale première, puisque nous avons deux équations à satisfaire simultanément au lieu d'une. Nous dirons alors que A et B sont des intégrales premières « simultanément utilisables ».

Si nous reprenons la représentation géométrique dans l'espace (\mathfrak{Q}) on voit de suite que les deux multiplicités linéaires $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}_a, t}$ et $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}'_b, t}$ définies respectivement par l'ensemble des $X_a(t)$ et $X_b(t)$ auront des vecteurs communs et par suite leur intersection forme une multiplicité $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}_a, \mathcal{E}'_b, t}$ non réduite à zéro. Le point figuratif du système $X(t)$ se trouvera sur l'intersection de la multiplicité $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}_a, \mathcal{E}'_b, t}$ avec l'ensemble \mathfrak{X} . Ce raisonnement se généralise immédiatement au cas d'un nombre quelconque d'opérateurs intégrales premières correspondant à des grandeurs toutes composables entre elles deux à deux. On voit sur le schéma géométrique que si l'on connaît un nombre suffisant d'intégrales premières avec des valeurs suffisamment précises pour chacune d'elles, la position du point X peut être entièrement déterminée lorsque l'intersection des multiplicités associées à toutes les intégrales premières est à une dimension.

Dans ce cas particulier le problème posé se trouve complètement résolu, chaque intégrale première venant réduire l'ensemble des positions possibles du point $X(t)$ sur l'ensemble \mathfrak{X} de l'espace (\mathfrak{Q}) .

7. Intégrales premières incomposables. — Cependant ce cas toujours réalisé en mécanique classique de grandeurs toutes composables entre

elles est exceptionnel dans une théorie générale des prévisions et en particulier en théorie quantique. En général, parmi les intégrales premières que l'on a déterminées il existe des paires incomposables.

Supposons d'abord que l'on ait deux opérateurs intégrales premières $A(t)$ et $B(t)$ correspondant à des grandeurs incomposables A et B ; ceci signifie que l'on ne peut connaître simultanément des valeurs \mathcal{E}_a et \mathcal{E}_b des grandeurs. Si l'on connaît la valeur \mathcal{E}_a de la grandeur A , les éléments de prévision acceptables devront vérifier l'équation aux valeurs propres de $A(t)$ pour les valeurs de \mathcal{E}_a :

$$A(t) X_a(t) = a X_a(t) \quad \text{avec} \quad a \in \mathcal{E}_a$$

La multiplicité $\mathfrak{N}_{\mathcal{E}_a, t}$ est parfaitement déterminée et le point $X(t)$ sera situé dessus; mais n'ayant pas la valeur de la grandeur B , au même instant (par suite de l'incomposabilité), on n'aura aucune relation permettant de préciser $X(t)$ davantage, de sorte que les deux intégrales premières $A(t)$ et $B(t)$ n'apportent pas une limitation supplémentaire à celle qu'apportait l'intégrale première A seule.

En général le choix de l'intégrale première à utiliser pour faciliter la détermination des éléments de prévision est fixé par la donnée des conditions initiales et, s'il reste une certaine liberté, par des raisons de commodité.

La condition pour que deux grandeurs A et B soient mesurables simultanément est que tout élément propre de l'une soit élément propre de l'autre, c'est à dire que tout X_a soit un X_b et inversement. Nous avons vu au chapitre précédent que des fonctions propres communes peuvent n'exister que pour des valeurs propres particulières; les deux intégrales premières A et B ne seront alors simultanément utilisables que pour ce système de valeurs.

8. Intégrales premières distinctes. — On notera que si $A(t)$ est un opérateur intégrale première, il en est de même de $A^n(t)$ (quel que soit n) et de polynômes en $A(t)$; mais $A^n(t)$ et ces polynômes ont mêmes éléments propres que $A(t)$, et par suite ne fournissent aucune aide supplémentaire à celle apportée par A à la détermination des éléments de prévision.

Nous dirons d'une façon générale que deux intégrales premières *ne sont pas distinctes* si elles admettent les mêmes éléments propres.

Si A et B sont les opérateurs associés, ces intégrales premières sont telles que tout X_a est un X_b et réciproquement.

Dans le cas contraire, si A et B sont simultanément mesurables, A et B seront dits *intégrales premières distinctes*, il y aura des éléments propres $X_{r_A, r_B}(t)$ communs aux deux opérateurs, mais tout élément propre de l'un n'est pas un élément propre de l'autre. Ce sont de telles intégrales premières qui fournissent simultanément une aide effective à la détermination des éléments de prévision.

§ 3. APPLICATIONS

9. **Application du changement de variables à la résolution de l'équation aux valeurs propres d'un opérateur.** — Nous avons vu que la connaissance d'intégrales premières fournit une aide théorique à l'intégration d'un problème ; mais pour que cette aide soit effective il faut savoir déterminer les valeurs propres et les fonctions propres des opérateurs associées aux grandeurs intégrales premières. Cette détermination sera dans de très nombreux cas facilitée ou même rendue possible par un changement de variables permettant de mettre l'opérateur considéré sous une forme analytique convenable.

Nous allons chercher ici la forme la plus générale d'un opérateur quelconque pouvant se ramener par un changement de variables à une forme telle que l'équation aux valeurs propres se résolve facilement.

a) Cherchons à quelles conditions doit satisfaire un opérateur J pour pouvoir se ramener par un changement de variables convenable à la forme particulièrement simple :

$$J \stackrel{=}{{\bar{\omega}}_{q,k}} ; \quad \bar{\omega}_{q,k} \stackrel{=}{{\bar{\omega}}_a} ih' \frac{\partial}{\partial q_k}$$

Soit donc x_1, \dots, x_n les anciennes variables et q_1, \dots, q_n les nouvelles. Considérons le changement de variable qui fait passer des x_i aux q_j :

$$x_i = g_i(q_1, \dots, q_n; t)$$

$$q_j = f_j(x_1, \dots, x_n; t)$$

D'après les résultats généraux obtenus au paragraphe précédent l'opérateur $\bar{\omega}_{q,k}$ a pour équicorrespondant :

$$\bar{\omega}_{q,k} \stackrel{=}{{\bar{\omega}}_a} ih' \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Par suite la forme la plus générale d'un opérateur J qui se met après

le changement de variable sous la forme envisagée avait pour expression en fonction des variables primitives :

$$J = \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial q_k} p_{x,i} = \sum_i A_i p_{x,i}$$

en posant $A_i = \frac{\partial g_i}{\partial q_k}$

Si les coefficients A_i sont des fonctions continues et dérivables on a un système différentiel qui détermine les fonctions g_i du changement de variables. On remarque que le changement de variables ne se trouve pas entièrement déterminé, il subsiste en effet un certain arbitraire du fait que la façon dont les x_i dépendent des q_i n'est pas fixée pour $j \neq k$.

THÉORÈME I. *La forme la plus générale d'un opérateur $J(x_i, p_{x,i})$ qui par un changement de variable convenable se laisse mettre sous la forme $J = \sum \bar{\omega}_{q,k}$ est :*

$$J = \sum_i A_i p_{x,i}$$

De plus le changement de variable est partiellement déterminé par :

$$A_i = \frac{\partial g_i}{\partial q_k}$$

EXEMPLES. Nous allons donner deux exemples où ce cas est réalisé effectivement.

1°) On sait que la composante M_z du moment cinétique d'un corpuscule a pour expression :

$$M_z = x p_y - y p_x$$

L'opérateur M_z est donc bien de la forme envisagée pour l'opérateur J . On doit donc, par un changement de variable convenable pouvoir le mettre sous la forme $M_z = \bar{\omega}_{q,l}$.

Avec les notations précédentes le changement de variables est déterminé par :

$$-y = \frac{\partial x}{\partial q_1}; \quad x = \frac{\partial y}{\partial q_1}$$

Dérivons la deuxième équation, il vient :

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}$$

D'où en reportant dans la première :

$$y + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} = 0$$

Cette équation s'intègre immédiatement et donne :

$$y = C(q_2) \sin q_1$$

$$x = C(q_2) \cos q_1$$

On peut donc en particulier prendre des coordonnées polaires dans le plan comme on le fait habituellement dans ce cas et poser :

$$C(q_2) = C(r) = r \quad \text{et} \quad q_1 = \theta$$

mais ceci n'est pas nécessaire car la fonction $C(q_2)$ est entièrement arbitraire.

2°) Une autre application concerne une *composante du moment cinétique d'un système constitué de n corpuscules*. On a pour la composante z du moment cinétique :

$$\sigma_z = \sum M_{z,i} = \sum_i \bar{\omega}_{\theta,i}$$

L'opérateur σ_z est encore de la forme générale définie dans le théorème I. On peut donc trouver un changement de variables faisant passer des n variables θ_i aux n nouvelles variables α_i , telles que

$$\sigma_z = \bar{\omega}_{\alpha,k}$$

Ce changement est déterminé avec les notations précédentes par :

$$A_i = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

d'où

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha_k} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

On doit donc faire le changement de variables défini par :

$$\theta_i = \alpha_k + B_i(\alpha, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$$

où les fonctions B_i sont indéterminées.

b) Une autre forme simple pour un opérateur permet encore de résoudre facilement l'équation aux valeurs propres ; c'est celle qui conduit à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, c'est à dire un opérateur de la forme :

$$K = a \bar{\omega}_{q,k}^2 + b \bar{\omega}_{q,k}$$

où a et b sont des constantes.

Ce que nous voulons chercher c'est la forme la plus générale d'un opérateur qui par changement de variables se laisse mettre sous la forme ci-dessus. Soit encore x, \dots, x_n les anciennes variables et q_1, \dots, q_n les nouvelles ; désignons par :

$$\begin{aligned} x_i &= g_i(q_1, \dots, q_n; t) \\ q_j &= f_j(x_1, \dots, x_n; t) \end{aligned}$$

le changement de variables.

On a d'après les résultats généraux obtenus dans la théorie des changements de variables :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{q,k} &= \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial q_k} p_{x,i} \\ \bar{\omega}_{q,k}^2 &= -h'^2 \sum_{ij} \left(\frac{\partial g_j}{\partial q_k} \frac{\partial g_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial q_k} \frac{\partial^2 g_i}{\partial q_k \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Si après le changement de variables considéré, K se réduit à la forme ci-dessus c'est qu'il s'exprimait dans le premier choix de variables par :

$$(1) \quad K = \sum_{ij} B_{i,i} p_{x,j} p_{x,i} + \sum_m B_m p_{x,m}$$

avec :

$$(2) \quad B_{i,i} = a \frac{\partial g_j}{\partial q_k} \frac{\partial g_i}{\partial q_k}$$

$$(3) \quad B_m = b \frac{\partial g_m}{\partial q_k} + ih' a \sum_r \frac{\partial g_r}{\partial q_k} \frac{\partial^2 g_m}{\partial q_k \partial x_r}$$

Ces deux dernières égalités déterminent le changement de variables d'où ce théorème :

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur se laisse mettre sous la forme $a \bar{\omega}_{q,k}^2 + b \bar{\omega}_{q,k}$ est qu'il soit de la forme (1) les coefficients $B_{i,i}$ et B_m satisfaisant aux équations (2) et (3) ci-dessus.*

10. Exemple de deux grandeurs non commutables qui peuvent être utilisées simultanément. — Nous avons vu (Chap. I) que la condition pour que deux grandeurs puissent toujours être mesurées simultanément est que toute fonction propre de l'une soit fonction propre de l'autre dans ce cas quels que soient a et b , on a une fonction φ_{ab} solution à la fois des deux équations :

$$A \varphi_{ab} = a \varphi_{ab}$$

$$B \varphi_{ab} = b \varphi_{ab}$$

On voit que dans ce cas pour tout φ_{ab} on a $(AB - BA) \varphi_{ab} = 0$.

Il peut arriver que la fonction φ_{ab} solution commune des deux équations aux valeurs propres n'existe que pour certaines valeurs des valeurs propres a et b soit a_i et b_j . Dans ce cas A et B seront utilisables simultanément si, et seulement si, on a obtenu pour résultat de mesures les valeurs a_i et b_j pour lesquelles

$$\varphi_{a_i} = \varphi_{b_j} = \varphi_{ab}$$

Mais ce cas est exceptionnel.

Nous allons cependant donner un exemple où il est réalisé. Considérons deux composantes du moment cinétique d'un corpuscule, par exemple M_x et M_y ; on a entre ces composantes la relation de non-commutation suivante :

$$M_x M_y - M_y M_x = i M_z$$

Les deux opérateurs ne commutent pas, il sera donc impossible en général de mesurer deux composantes du moment cinétique simultanément. Cependant M_x et M_y pourront exceptionnellement être connues simultanément s'il existe une fonction φ_1 telle qu'elle soit solution à la fois des deux équations aux valeurs propres :

$$M_x \varphi_1 = m_x \varphi_1 \tag{1}$$

$$M_y \varphi_1 = m_y \varphi_1 \tag{2}$$

Montrons qu'une telle solution φ_1 existe effectivement.

Multiplions (1) à gauche par M_y et (2) à gauche par M_x et soustrayant membre à membre, il vient :

$$M_y M_x \varphi_1 - M_x M_y \varphi_1 = M_y m_x \varphi_1 - M_x m_y \varphi_1$$

m_x et m_y étant des nombres c'est à dire commutant avec tout opérateur, on a :

$$(M_y M_x - M_x M_y) \varphi_1 = (m_x m_y - m_y m_x) \varphi_1$$

ce qui s'écrit, si l'on tient compte de la relation de non-commutation entre les opérateurs M_x et M_y :

$$M_z \varphi_1 = 0 \quad (3)$$

Passons en coordonnées cylindriques r, θ, z autour de Oz ; M_z a pour expression avec le nouveau choix de variables :

$$M_z = -ih' \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Par suite (3) s'écrit :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = 0$$

Si elle existe la fonction φ_1 doit donc être indépendante de l'azimuth θ autour de Oz . Les opérateurs M_x et M_y ont pour expression avec les nouvelles variables :

$$M_x = \sin \theta (r p_z - z \bar{\omega}_r) + \frac{z}{r} \cos \theta \bar{\omega}_\theta$$

$$M_y = -\cos \theta (r p_z - z \bar{\omega}_r) + \frac{z}{r} \sin \theta \bar{\omega}_\theta$$

Remplaçons dans les équations aux valeurs propres (1) et (2), M_x et M_y par leurs expressions en coordonnées cylindriques ; en tenant compte du fait que φ_1 est indépendante de θ il vient :

$$\begin{aligned} \sin \theta (r p_z - z \bar{\omega}_r) \varphi_1 &= m_x \varphi_1 \\ -\cos \theta (r p_z - z \bar{\omega}_r) \varphi_1 &= m_y \varphi_1 \end{aligned}$$

Les premiers membres de ces équations étant fonction de θ et les seconds indépendants ils sont par suite chacun égaux à zéro. Par suite puisque $\varphi_1 \neq 0$ comme fonction propre ; on doit donc avoir :

$$m_x = m_y = 0$$

La fonction φ_1 correspondant à ces valeurs propres est déterminée par l'équation différentielle :

$$(r p_z - z \bar{\omega}_r) \varphi_1 = 0$$

d'où on tire :

$$\varphi_1 = k(t) \cdot f(r^2 + z^2) + Cte.$$

Considérons maintenant le cas des grandeurs incompatibles x et p_x et cherchons si exceptionnellement elles pourront être déterminées simultanément. Pour que ceci puisse être réalisé, il faut d'après ce que nous avons vu, que l'on puisse trouver une fonction φ telle que :

$$(p_x x - x p_x) \varphi = 0$$

Or d'après la relation de non-commutation qui existe entre x et p_x on est ramené à chercher une fonction φ qui vérifie :

$$i h' \cdot \varphi = 0$$

excepté $\varphi = 0$, physiquement inacceptable il n'y a pas de fonction satisfaisant à cette équation. Par suite les *grandeurs x et p_x ne pourront jamais, même dans un cas exceptionnel, être connues simultanément.*

CHAPITRE V

THEORIE DES LIAISONS. APPLICATION AU CORPS SOLIDE RIGIDE

§ 1. NOTION DE LIAISON

1. **Liaisons en mécanique ondulatoire.** — La notion de liaison ne peut pas être introduite en mécanique ondulatoire de la même façon qu'en mécanique classique à cause de l'indéterminisme quantique qui ne permet pas de connaître simultanément position et vitesse : on ne peut pas sans considérations préalables fixer qu'une coordonnée est constante et que la composante correspondante de la quantité de mouvement est nulle, or c'est ce que l'on fait en mécanique classique pour exprimer une liaison. Cependant cette notion de liaison apparaît en mécanique ondulatoire de plusieurs manières.

Nous distinguerons d'une part les *liaisons au sens large* qui ont pour effet d'imposer aux corpuscules d'un système de demeurer à l'intérieur d'une enceinte ; géométriquement le point figuratif du système dans l'espace de configuration devra se trouver à l'intérieur d'un domaine D . La probabilité de présence devra être nulle au dehors de D , la condition

de liaison large s'exprimera en posant que les fonctions d'ondes sont nulles en dehors de D et par suite nulles sur la frontière de D .

D'autre part les *liaisons strictes*. Ce sont celles qui assujettissent le point figuratif à demeurer sur une certaine multiplicité \mathfrak{R} de l'espace de configuration. Ce sont seulement de ces liaisons qu'il sera question ici. Les liaisons au sens strict apparaissent de différentes manières que nous allons examiner maintenant.

2. Liaisons et séparation de variables. — Soit un système mécanique ayant H pour hamiltonien. Si par un choix convenable des variables q_1, \dots, q_n fixant la position du système, l'hamiltonien se met sous la forme d'une somme de deux termes dont chacun dépend d'un groupe de variables et des moments correspondants, soit :

$$H = H_1(q_1, \dots, q_k; \bar{\omega}_{q_1}, \dots, \bar{\omega}_{q_k}; t) + H_2(q_{k+1}, \dots, q_n; \bar{\omega}_{q_{k+1}}, \dots, \bar{\omega}_{q_n}; t)$$

alors il existe des solutions de l'équation d'ondes

$$H \Psi = -i h' \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

qui sont de la forme

$$\Psi = \varphi \cdot \psi$$

avec

$$H_1 \varphi = -i h' \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad H_2 \psi = -i h' \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Dans ce cas le système S est séparable en deux systèmes S_1 et S_2 . En effet on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi \psi}{\partial t} &= \varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ H \varphi \psi &= \varphi H_1 \psi + \psi H_2 \varphi \end{aligned}$$

φ ne dépendant que des variables intervenant dans H_1 et ψ que des variables intervenant dans H_2 .

Quand les conditions initiales imposées au système S sont telles que l'on peut poser :

$$\Psi = \varphi \cdot \psi$$

ou telles que l'on peut poser :

$$\Psi = \sum c_{ij} \varphi_i \psi_j$$

les φ_i et ψ_j étant des solutions des équations (2) et (3), l'étude du système est ramenée à celle de deux systèmes S_1 et S_2 qui auraient pour hamiltoniens H_1 et H_2 .

Or S_1 a un point figuratif dans l'espace de configuration (C) qui ne parcourt que le domaine de variation des variables q, \dots, q_k ; ce point est donc situé sur une multiplicité (C_1) plongée dans (C) . De même S_2 a un point figuratif dans l'espace (C) qui ne parcourt que le domaine de variation des variables q_{k+1}, \dots, q_n ; ce point est donc situé sur une multiplicité (C_2) plongée dans (C) . On voit alors que :

$$(C) = (C_1) \times (C_2)$$

Considérons le système S_1 comme ayant son point figuratif dans (C) ; il faut alors exprimer que ce point demeure dans (C_1) , donc pour S_1 on a les conditions de liaison :

$$q_{k+1} = 0, q_{k+2} = 0, \dots, q_n = 0 \quad (\text{I})$$

L'hamiltonien H_1 se déduit de H en annihilant ces variables et leurs moments conjugués; pour passer de H à H_1 il faut encore poser :

$$\bar{\omega}_{q_{k+1}} = 0, \bar{\omega}_{q_{k+2}} = 0, \dots, \bar{\omega}_{q_n} = 0 \quad (\text{II})$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que : 1°) le point figuratif de S_1 demeure dans (C_1) ; et 2°) l'hamiltonien H se réduise à H_1 .

La condition (II) s'obtiendrait encore en dérivant symboliquement la condition (I) et en remplaçant les vitesses par leurs expressions en fonction des $\bar{\omega}_{q_k}$ (expression linéaire) puis en résolvant le système par rapport aux moments.

Exprimons géométriquement ces conditions. La condition (I) exprime que le point figuratif M_1 appartient à (C_1) , d'où :

$$M_1 \in (C_1) \quad (\text{I}')$$

c'est à dire que M_1 satisfait aux équations définissant (C_1) , soit

$$P_j(M_1) = 0 \quad j = k+1, k+2, \dots, n \quad (\text{I}'')$$

La condition (II) exprime que les composantes normales à (C_1) de l'opérateur dérivation sont nulles. Désignons par \vec{N}_1 un vecteur unitaire normal à (C_1) , les conditions (II) expriment que le produit scalaire $\vec{N}_1 \cdot \vec{P}_1$ est nul pour tout \vec{N}_1 normal à (C_1) , soit :

$$\vec{N}_1 \perp (C_1) \rightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{P}_1 = 0 \quad (\text{II}''')$$

On doit bien remarquer que le produit scalaire est pris dans le sens $\vec{N}_1 \cdot \vec{P}_1$ et non pas $\vec{P}_1 \cdot \vec{N}_1$ qui lui n'est en général pas nul.

Les conditions (I') et (II') expriment les conditions (I) et (II) indépendamment du choix des variables q_1, \dots, q_n .

On établit le résultat correspondant pour S_2 . D'où ce théorème :

THÉORÈME. *Si pour un choix convenable de variables un système S se sépare en deux systèmes S_1 et S_2 , les systèmes S_1 et S_2 peuvent être considérés comme des systèmes du type de S soumis à des liaisons, avec comme condition de liaisons, d'une part celles qui expriment que le point figuratif appartient à une certaine multiplicité (C_1) ou (C_2) de l'espace de configuration de S : d'autre part celles qui expriment que les composantes normales à (C_1) ou à (C_2) du vecteur quantité de mouvement sont nulles.*

On comprend de cette façon comment on peut annuler à la fois une coordonnée q_k et le moment conjugué $\bar{\omega}_{q_k}$ sans que cela soit contraire aux conditions d'indétermination ; ceci vient de ce que S_1 et S_2 apparaissent comme des systèmes partiels.

3. *Liaisons et intégrales premières.* — Soit un système S d'hamiltonien H , qui admet une intégrale première quadratique indépendante du temps, A . Cette intégrale première peut être considérée comme un hamiltonien d'un système fictif S_A . Si φ est une fonction d'ondes de ce système on aura :

$$A \varphi = -i \hbar' \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Si la valeur de A est fixée, on aura :

$$A \varphi_a = a \varphi_a$$

et

$$\varphi = \varphi_a \exp. \left(\frac{i}{\hbar' a (t - t_0)} \right)$$

et la fonction d'ondes du système devra satisfaire à l'équation aux valeurs propres de A si sa valeur est initialement fixée. Alors on aura à porter la valeur de φ ou de φ_a dans l'hamiltonien en posant :

$$\Psi = f \varphi_a \exp. \left(\frac{i}{\hbar' a (t - t_0)} \right)$$

f dépendant de t et des variables dont ne dépend pas A .

Le système fictif S_A peut être considéré comme un système assujéti à des liaisons, les conditions (I') et (II') étant remplies pour les variables qui ne figurent pas dans A .

Si on part d'un hamiltonien H_A , en exprimant que le point figuratif du système S_A appartient à la multiplicité \mathfrak{N}_A et que les composantes normales de la quantité de mouvement \vec{P} sont nulles on n'obtient pas le même opérateur que si on annule d'abord ces composantes puis que l'on calcule l'hamiltonien lié qui sera A , ou bien si on annule seulement après le calcul de l'hamiltonien les composantes normales de \vec{P} , car on aura des termes supplémentaires dûs aux non-commutations. Pour retrouver exactement l'opérateur A , on doit annuler avant calcul de H_A les composantes normales des quantités de mouvement. On arrive ainsi au théorème suivant:

THÉORÈME. *Si un système S admet une intégrale première quadratique A , cette intégrale peut être déduite d'un opérateur hamiltonien H_A quand on a tenu compte de liaisons convenables qu'on a imposées au système fictif d'hamiltonien H_A , liaisons exprimées par les conditions (I') et (II') du paragraphe précédent, H_A lié se calculant une fois tenu compte des conditions de liaison.*

Voici donc un second type de système à liaisons introduit par la considération d'intégrales premières, et les conditions sont les mêmes que dans le cas précédent.

Un exemple du cas envisagé ici est celui d'un corpuscule admettant pour intégrale première le carré du moment cinétique. A cette intégrale première correspond le mouvement d'un corpuscule assujetti à demeurer sur une sphère (rotateur sphérique).

4. Liaisons physiques. — Des liaisons peuvent apparaître d'une manière physique quand on considère des champs de force \vec{F} extrêmement intenses dès qu'un corpuscule s'écarte d'une ligne ou d'une surface. Soit H_0 l'hamiltonien du système s'il n'y avait pas de tels champs et soit H l'hamiltonien compte tenu de ces champs, on aura :

$$H = H_0 + K$$

Faisons choix d'un système de coordonnées $q_1, q_2, \dots, q_k, r_{k+1}, \dots, r_n$ dans l'espace de configuration tel que les q_i paramétrisent la multiplicité \mathfrak{N} sur laquelle un point peut se déplacer librement et les r_j des directions orthogonales à cette multiplicité. Si un point M est déplacé de δM de telle façon que tous les δr_j soient nuls, les forces \vec{F} ne travaillent pas, au contraire si des δr_j sont non nuls les forces \vec{F} travaillent. Le terme K de l'hamiltonien dû à ces forces ne dépend pas des q_1, \dots, q_k , et dépend au contraire des r_{k+1}, \dots, r_n . L'hamiltonien H peut

être décomposé en une somme de termes dépendant des divers groupes de variables :

$$H = H_1(q_1, \dots, q_k; \bar{\omega}_{q_1}, \dots, \bar{\omega}_{q_k}; t) + H_2(r_{k+1}, \dots, r_n; \bar{\omega}_{r_{k+1}}, \dots, \bar{\omega}_{r_n}; t) + H_3(q_i, r_j; \bar{\omega}_{q_i}, \bar{\omega}_{r_j}; t)$$

et H_2 peut lui-même être décomposé en deux termes :

$$H_2 = H_{2'}(r_1, \dots, r_b; \bar{\omega}_{r_1}, \dots, \bar{\omega}_{r_b}; t) + H_{2''}(r_1, \dots, r_k)$$

le terme $H_{2'}$, dépendant effectivement des $\bar{\omega}_{r_j}$ et ayant la forme d'un terme d'énergie potentielle.

Si le terme H_3 est nul alors système d'hamiltonien H est séparable en deux systèmes S_1 et S_2 , S_1 apparaissant comme un système lié. Le système S_2 a alors pour hamiltonien $H_2 + K$; comme les forces correspondant à K sont supposées très grandes, si l'énergie du système S n'est pas très grande, le système S_2 se trouvera dans les bas niveaux d'énergie.

Si un système est séparable, soit :

$$H = H_1 + H_2$$

alors il y a des fonctions d'ondes de la forme $\varphi_1 \psi_2$; la fonction φ_1 correspondant au système S_1 , la fonction ψ_2 correspondant au système S_2 , mais en outre il y a des solutions de la forme $a \varphi_1$ et $b \psi_2$ où la fonction correspondant à l'un des sous-systèmes est une constante.

Si l'énergie du système n'a pas une valeur suffisamment grande pour que l'on atteigne le niveau fondamental de S_2 , alors nécessairement la fonction d'ondes du système S est de la forme $b \varphi_1$, donc correspond au mouvement lié du système S_1 . Ainsi, si un corpuscule d'un système, ou plus généralement le point figuratif d'un système dans l'espace de configuration, est soumis à des forces extrêmement grandes dès que le point figuratif quitte une multiplicité \mathfrak{M} sur laquelle ces forces sont nulles, dans le cas de séparation, le mouvement du système (si l'énergie n'atteint pas le niveau fondamental pour le sous-système soumis à ces forces), se réduit au mouvement lié où le point figuratif est assujéti à demeurer sur la multiplicité.

S'il n'y a pas séparation le terme H_3 n'est pas nul. Il peut se décomposer en :

$$H_3 = H_{3'}(q_i, r_j, \bar{\omega}_{q_i}, \bar{\omega}_{r_j}; t) + H_{3''}(q_i, r_j; t)$$

Le terme $H_{3'}$ correspond à un terme de force vive du système S , le terme $H_{3''}$ à un potentiel. Devant K qui est extrêmement grand dès que les r_j sont non nuls (en supposant les r_j tels que $r_j = 0$ sur \mathfrak{N}) on peut négliger $H_{3''}$. Le terme $H_{3'}$ peut alors être considéré comme une perturbation ; on étudiera d'abord S_1 et S_2 séparément, puis $H_{3'}$ sera un terme perturbateur. Si l'énergie de S est inférieure au niveau fondamental de S_1 , alors la perturbation correspondant à des fonctions non perturbées de la forme $b \varphi_1$ sera faible et le point figuratif du système restera pratiquement sur \mathfrak{N} , d'où finalement ce théorème :

THÉORÈME. *Si un système S est soumis à des forces extrêmement grandes dès que le point figuratif du système dans l'espace de configuration s'écarte d'une multiplicité \mathfrak{N} ces forces étant nulles sur \mathfrak{N} , alors si l'énergie du système S est inférieure au niveau fondamental d'un système soumis à ces forces, le système S se comporte comme un système assujéti à avoir son point figuratif qui demeure sur \mathfrak{N} .*

Ce théorème montre comment des forces très grandes apparaissent dès que le point figuratif s'écarte d'une multiplicité équivalant comme en mécanique classique à des liaisons.

5. Liaisons introduites par la représentation sommaire d'un système. Considérons un système S d'hamiltonien H . On peut se faire une représentation sommaire du système S en adoptant un système S' d'hamiltonien H' convenablement choisi et plus simple que H . Dans certains cas H' peut être déduit de H en introduisant des liaisons. Dans ce cas on obtient une représentation sommaire de S au moyen d'un système S' déduit de S par introduction de certaines liaisons. Ce cas se produit, par exemple, quand on représente S par son solide principal.

Un exemple du même genre est celui d'une molécule adsorbée par une paroi et qu'on figure sommairement par un corps rigide ayant un point fixe et soumis à certaines forces, corps rigide obéissant aux lois de la mécanique ondulatoire.

Un autre exemple est celui où le point figuratif du système S est soumis à des forces importantes, mais non infiniment grandes, quand le point figuratif s'écarte d'une multiplicité \mathfrak{N} . Le système S peut être représenté sommairement par le système S' obtenu en exprimant que le point figuratif doit demeurer sur \mathfrak{N} ; on applique la méthode des forces infiniment grandes du paragraphe précédent pour des forces qui sont seulement importantes mais finies.

6. Liaisons introduites accessoirement par la méthode de résolution. Ces liaisons sont celles qui apparaissent quand on introduit des varia-

bles ou de des paramètres surabondants et qui s'expriment par des relations entre ces paramètres surabondants. Le caractère accessoire de ces liaisons apparaît tout de suite si l'on considère que ses liaisons ne sont introduites que par le procédé de calcul employé. Un des exemples les plus simples de ce cas est celui du théorème de KÖNIG qui peut être démontré soit par l'introduction de variables surabondantes, soit directement dans la théorie des mouvements relatifs. On voit sur cet exemple particulier que les liaisons du type envisagé ici n'ont rien d'essentiel puisqu'elles disparaissent lorsqu'on change de procédé de calcul.

Les méthodes de changement de variables surabondantes exposées au chapitre III font bien ressortir de quelle manière les liaisons apparaissent. nous n'y reviendrons pas ici.

7. **Liaisons et fonctions d'ondes.** — Dans l'espace (\mathfrak{E}) la présence de liaisons vient limiter le mouvement du point figuratif de l'élément de prévision $X(t)$ (ou fonction d'ondes) concernant le système étudié. En effet si les fonctions d'ondes du système S peuvent se trouver sur (\mathfrak{E}) , les fonctions d'ondes du système S' déduit de S par introduction de liaisons ne pourront pas être n'importe quel point de (\mathfrak{E}) . Elles devront satisfaire à certaines conditions. Par exemple dans le cas de la séparation, si le système est assujéti à n'avoir que H_1 comme hamiltonien, les éléments de prévisions seront dans un certain domaine D_1 de (\mathfrak{E}) : à une liaison dans l'espace de configuration correspond une liaison dans l'espace des fonctions d'ondes.

Des liaisons au sens large, ou la présence d'une intégrale première ou la fixation de conditions initiales, viennent imposer des conditions de limitation analogues au domaine sur lequel des éléments de prévision acceptables peuvent se trouver dans l'espace (\mathfrak{Q}_f) .

Imposer une liaison à un système revient à fixer la valeur de certaines grandeurs mécaniques attachées au système. Donc revient à fixer une multiplicité linéaire \mathfrak{N}_x de l'espace (\mathfrak{Q}_f) . Ainsi à chaque multiplicité \mathfrak{N} de l'espace de configuration (C) correspond une multiplicité linéaire de l'espace (\mathfrak{Q}_f) . La condition pour que deux liaisons soient compatibles c'est à dire puissent être imposées simultanément au système est la suivante : il faut et il suffit que l'intersection des multiplicités qu'elles déterminent chacune dans l'espace (C) soit non-vide.

§ 2. EXPRESSION DES LIAISONS

8. Condition exprimant des liaisons. — Ainsi en mécanique ondulatoire des raisons très diverses peuvent conduire à considérer des systèmes soumis à des liaisons.

En généralisant les différentes formes de liaisons que nous avons rencontrées dans les exemples précédents nous pouvons poser cette définition générale :

Nous appellerons « *équation de liaison* » imposée à un système mécanique toute relation de la forme :

$$f(q, \dots, q_n; \bar{\omega}_{q_1}, \dots, \bar{\omega}_{q_n}; t) = 0$$

Si les moments $\bar{\omega}_{q_i}$ ne figurent pas explicitement dans l'expression de l'équation de liaison, la liaison sera dite *holonome* : si t ne figure pas explicitement dans l'expression de l'équation de la liaison, celle-ci sera dite *indépendante du temps*.

Cette définition d'une liaison est tout a fait générale et suivant l'origine et la nature de la condition $f = 0$, on distingue les différentes sortes de liaisons.

9. Expression des liaisons. — En raison des théorèmes du § 1 de ce chapitre une liaison holonome, assujettissant le point figuratif d'un système mécanique à demeurer sur une multiplicité \mathfrak{N} s'exprimera par les conditions (I) et (II). On doit d'abord exprimer que le point figuratif demeure sur \mathfrak{N} .

Ceci s'exprimera par p équations de liaisons holonomes :

$$f_j(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p < n \quad (\text{I}''')$$

s'il y a n degrés de liberté et p équations de liaisons.

Dans l'espace de configuration les p relations $f_j = 0$ déterminent p multiplicités à $n - 1$ dimensions, soit \mathfrak{N}_p leur intersection qui est à $n - p$ dimensions.

Dans tous les cas on pourra toujours passer des n anciennes variables q_1, \dots, q_n à n nouvelles variables r_1, \dots, r_n telles que l'équation de la multiplicité \mathfrak{N}_p s'exprime par des relations de la forme :

$$r_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

Le changement de variables qui permet de passer des q_i aux r_j dépendra

ou non du temps suivant que les liaisons elles-mêmes sont fonctions ou non du temps.

Il faut encore exprimer le fait que les composantes normales à celles de la vitesse ou de la quantité de mouvement sont nulles. Avec le choix de variables r_k on aura :

$$\frac{dr_k}{dt} = 0 \quad \text{ou ce qui revient au même} \quad \bar{\omega}_{r_k} = 0$$

avec un choix quelconque de variables q_1, \dots, q_n ces conditions reviennent à annuler les composantes normales ou encore à annuler les produits scalaires $\vec{N} \cdot \vec{P}$; c'est ce que nous allons établir maintenant.

Considérons un système de N corpuscules dont les coordonnées cartésiennes sont x_1, x_2, \dots, x_n . On suppose que ce système est soumis à k liaisons et on effectue le changement de variables faisant passer des x, y, z , aux variables $r, \dots, r_k, s_1, \dots, s_p$ avec $k + p = 3N$ et telles qu'avec ces nouvelles variables les liaisons s'expriment par des relations de la forme :

$$r_1 = \dots = r_k = 0$$

Il s'ensuit que les $\bar{\omega}_{r_1}, \dots, \bar{\omega}_{r_k}$ sont nuls. On a les formules suivantes de changement de variables :

$$\begin{aligned} x_j &= X_j(r_1, \dots, r_k; s_1, \dots, s_p) \\ y_j &= Y_j(r_1, \dots, r_k; s_1, \dots, s_p) \\ z_j &= Z_j(r_1, \dots, r_k; s_1, \dots, s_p) \end{aligned}$$

La méthode des changements de variables nous donne l'expression des $\bar{\omega}_{r_i}$ en fonction des composantes des quantités de mouvement :

$$\bar{\omega}_{r_i} = \sum \frac{\partial X_j}{\partial r_i} p_{x_j} + \frac{\partial Y_j}{\partial r_i} p_{y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial r_i} p_{z_j}$$

La condition $\bar{\omega}_{r_i} = 0$ s'exprime donc par le fait que le produit scalaire des deux vecteurs \vec{V}_i et \vec{P} de l'espace de configuration euclidien (C) définis par :

$$\vec{V}_i = \frac{\partial X_1}{\partial r_i} \vec{e}_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial r_i} \vec{e}_2 + \frac{\partial Z_1}{\partial r_i} \vec{e}_3 + \dots + \frac{\partial Z_N}{\partial r_i} \vec{e}_{3N}$$

et

$$\vec{P} = \vec{e}_1 p_{x_1} + \vec{e}_2 p_{x_2} + \vec{e}_3 p_{x_3} + \dots + \vec{e}_{3N} p_{z_N}$$

est nul ; c'est à dire que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

La signification du vecteur \vec{P} est immédiate. Etudions le vecteur \vec{V}_i défini ci-dessus ; pour cela considérons dans l'espace de configuration le vecteur

$$\vec{OM} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3 + \dots + z_N \vec{e}_{3N}$$

Après le changement de variables les x_i, \dots, z_N sont des fonctions des r_i et s_j ; on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r_i} = \frac{\partial X_1}{\partial r_i} e_1 + \frac{\partial Y_1}{\partial r_i} e_2 + \dots + \frac{\partial Z_N}{\partial r_i} e_{3N}$$

La dérivée du vecteur \vec{OM} par rapport à r_i n'est autre que le vecteur \vec{V}_i . Considérons maintenant un déplacement infinitésimal du point représentatif du système :

$$d\vec{OM} = \sum \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r_i} dr_i + \sum \frac{\partial \vec{OM}}{\partial s_j} ds_j$$

Le terme $\sum \frac{\partial \vec{OM}}{\partial s_j} ds_j$ représente le déplacement sur la multiplicité \mathfrak{N}_p à p dimensions déterminée par les conditions de liaison.

Le terme $\sum \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r_i} dr_i$ représente le déplacement sur la multiplicité à k dimensions orthogonale à \mathfrak{N}_p ; par suite les vecteurs $\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r_i}$ sont des vecteurs de cette multiplicité orthogonale à \mathfrak{N}_p . D'où le théorème suivant :

THÉORÈME. *Les k relations $\bar{\omega}_{r_i} = 0$ conséquences du fait que les liaisons imposées à un système s'exprime par les k relations $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 0$ sont équivalentes aux k relations :*

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r_i} \cdot \vec{P} = 0$$

exprimant le fait que le vecteur quantité de mouvement du point représentatif du système est orthogonal à k vecteurs indépendents de la multiplicité à k dimensions orthogonale à la multiplicité $3N - k$ dimensions déterminée par les équations de liaisons.

10. **Conséquence de l'annulation des $\bar{\omega}_{r_i}$.** — Supposons encore que l'on passe d'un certain système de coordonnées cartésiennes x_1, \dots, x_n à un nou-

veau système $r_1, \dots, r_k; s_1, \dots, s_p$ ($k + p = n$) tel que les $\bar{\omega}_{r_i}$ sont nuls par suite des liaisons. Cherchons la condition qui va en résulter pour les r'_i . Soient

$$x_j = f_j(r_1, \dots, r_k; s_1, \dots, s_p)$$

et

$$\begin{aligned} r_u &= g_u(x_1, \dots, x_n) & u &= 1, 2, \dots, k \\ s_v &= h_v(x_1, \dots, x_n) & v &= 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

les formules exprimant le changement de variables.

La méthode des changements de variables donne:

$$p_{x_j} = \sum \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \bar{\omega}_{r_i} + \sum \frac{\partial h_m}{\partial x_j} \bar{\omega}_{s_m}$$

Si l'on tient compte de la condition $\bar{\omega}_{r_i} = 0$, il vient :

$$p_{x_j} = \sum_m \frac{\partial h_m}{\partial x_j} \bar{\omega}_{s_m}$$

D'où pour expression de la force vive absolue

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \frac{1}{m_j} \sum_{uv} \frac{\partial h_u}{\partial x_j} \bar{\omega}_{s_u} \frac{\partial h_v}{\partial x_j} \bar{\omega}_{s_v}$$

D'après la définition de la dérivée symbolique, r'_i aura pour expression

$$r'_i = H r_i - r_i H = T r_i - r_i T = 0$$

car r_i est une variable ne dépendant pas explicitement ni du temps ni des variables s_k .

Par suite la condition $\bar{\omega}_{r_i} = 0$ entraîne $r'_i = 0$; les r_i étant des coordonnées quelconques.

11. **Opérateur force vive d'un système soumis à des liaisons.** — Reprenons le calcul qui a été fait au paragraphe précédent; on a obtenu pour l'opérateur quantité de mouvement d'un corpuscule d'un système soumis à des liaisons, si on tient compte de ces liaisons :

$$p_{x_j} = \sum_m \frac{\partial h_m}{\partial x_j} \bar{\omega}_{s_m}$$

ce qui donne pour $p_{x_j}^2$:

$$p_{x_j}^2 = \sum_{uv} \frac{\partial h_u}{\partial x_j} \frac{\partial h_v}{\partial x_j} \bar{\omega}_{s_u} \bar{\omega}_{s_v} + i h' \sum_{uv} \frac{\partial h_u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h_v}{\partial x_j \partial s_u} \bar{\omega}_{s_v}$$

L'expression obtenue ainsi pour le carré d'une composante de la quantité de mouvement est différente de celle que l'on aurait obtenu si on avait tenu compte de la liaison après avoir élevé au carré. Avec cette seconde manière on aurait dans l'expression de $p_{x_j}^2$ un terme supplémentaire qui s'écrirait :

$$\sum \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h_v}{\partial x_j \partial s_u} \bar{\omega}_{s_v}$$

On voit sur cet exemple l'importance qu'il y a à introduire convenablement les conditions de liaison.

Revenons à l'expression correcte obtenue pour $p_{x_j}^2$, on en déduit immédiatement l'expression de l'opérateur force vive absolue du système en fonction des nouvelles variables :

$$2T = \sum_i \frac{1}{m_i} \mathcal{S}_{xyz} \sum_{jn} \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial h_n}{\partial x_i} \bar{\omega}_{s_j} \bar{\omega}_{s_n} + i h' \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 h_n}{\partial x_i \partial s_j} \bar{\omega}_{s_n} \right)$$

Posons :

$$g^{jn} = \mathcal{S}_{xyz} \sum_i \frac{1}{h'} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial h_n}{\partial x_i}$$

il vient :

$$2T = \sum_{jn} g^{jn} \bar{\omega}_{q_j} \bar{\omega}_{q_n} + i h' \sum_{ijn} \frac{1}{m_i} \mathcal{S}_{xyz} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 h_n}{\partial x_i \partial s_n} \bar{\omega}_{s_n}$$

§ 3. DÉFINITION DUN CORPS RIGIDE

12. **Définition d'un corps rigide.** — En théorie classique un système de corpuscules est dit former un corps solide rigide lorsque les coordonnées des différents corpuscules du système sont des constantes au cours du temps relativement à un repère de référence auxiliaire lié au corps. Nous conserverons ici cette définition en tenant compte du fait que les coordonnées relatives ne sont plus des fonctions d'un même paramètre mais sont des variables indépendantes. Un système de corpuscules sera dit « former un corps solide rigide » si par rapport à un trièdre relatif lié au mouvement du système les coordonnées sont des constantes.

Considérons un système de corpuscules dont les coordonnées par rapport au repère fondamental sont X_i, Y_i, Z_i ; les coordonnées par rapport à un repère en mouvement relatif lié au système seront désignées par

x_i, y_i, z_i . D'après la définition précédente pour un corps solide on aura :

$$x_i = Cte; \quad y_i = Cte; \quad z_i = Cte;$$

c'est à dire que les coordonnées relatives sont constantes au cours du mouvement.

13. Opérateurs cinétiques d'un corps rigide. — Reprenons les formules obtenues dans l'étude des mouvements relatifs. L'opérateur quantité de mouvement relatif a pour expression :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{r, d, i} &= x'_i \vec{i} + y'_i \vec{j} + z'_i \vec{k} \\ \vec{p}_{r, g, i} &= \vec{i} x'_i + \vec{j} y'_i + \vec{k} z'_i \end{aligned}$$

les coordonnées relatives étant des constantes, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles d'après les règles de la dérivation symbolique; par suite on a :

$$p_{r, d, i} = p_{r, g, i} = 0$$

Un corps rigide peut donc être considéré comme un système de corpuscules soumis à des liaisons.

14. Force vive absolue d'un corps rigide. — Remarquons avant de commencer le calcul, que le trièdre en mouvement relatif lié au corps est nécessairement un trièdre holonome; par suite, les composantes droites et gauches du vecteur \vec{OM} sur les axes mobiles sont égales.

La formule générale de composition des vitesses nous permet d'écrire la force vive absolue d'un système quelconque sous la forme :

$$2T_a = \Sigma m_i (\vec{V}_{e, d, i} + \vec{V}_{r, d, i}) \cdot (\vec{V}_{e, g, i} + \vec{V}_{r, g, i})$$

formule qui se simplifie si l'on tient compte de la condition (II) et qui devient dans le cas d'un corps rigide :

$$2T_a = \Sigma m_i \vec{V}_{e, d, i} \cdot \vec{V}_{e, g, i}$$

en reprenant les notations du chapitre II, ceci peut encore se mettre sous la forme :

$$2T_a = \Sigma_s m_s S_{uvw} (x_s \omega_{di}^u + y_s \omega_{dj}^u + z_s \omega_{dk}^u) (\omega_{gi}^u x_s + \omega_{gj}^u y_s + \omega_{gk}^u z_s)$$

On retrouve la force vive classique d'un corps rigide à laquelle vient s'ajouter un terme purement quantique dû aux non-commutations.

Si on compare la force vive d'un corps solide avec le terme complémentaire qu'il faut ajouter à la force vive d'un système quelconque par rapport à son solide principal pour avoir la force vive relative à un repère quelconque, on retrouve, comme il fallait s'y attendre, que les termes transposés des termes classiques sont semblables, mais on constate que les termes purement quantiques ne sont pas les mêmes. Le théorème classique n'est donc valable qu'en première approximation et n'a plus lieu en mécanique ondulatoire.

15. **Composantes du moment cinétique d'un corps solide rigide.** — Soit T_r le trièdre relatif lié à la position du système ; ce trièdre étant holonome on a (toujours avec les notations du chapitre II) :

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \alpha_1 \vec{I} + \alpha_2 \vec{J} + \alpha_3 \vec{K} & X_i &= \mathcal{S} x_i \alpha_1 = \mathcal{S} \alpha_1 x_i \\ \vec{j} &= \beta_1 \vec{I} + \beta_2 \vec{J} + \beta_3 \vec{K} & Y_i &= \mathcal{S} y_i \alpha_2 = \mathcal{S} \alpha_2 y_i \\ \vec{k} &= \gamma_1 \vec{I} + \gamma_2 \vec{J} + \gamma_3 \vec{K} & Z_i &= \mathcal{S} z_i \alpha_3 = \mathcal{S} \alpha_3 z_i \end{aligned}$$

les x_i, y_i, z_i étant des constantes, on passe des $3N$ variables X_i, Y_i, Z_i aux 9 variables α, β, γ . La méthode du changement de variables donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} &= \sum \frac{\partial}{\partial X_k} x_k = \sum x_k \frac{\partial}{\partial X_k}; & \frac{\partial}{\partial \beta_1} &= \sum \frac{\partial}{\partial X_k} y_k = \sum y_k \frac{\partial}{\partial X_k}; \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_1} &= \sum \frac{\partial}{\partial X_k} z_k = \sum z_k \frac{\partial}{\partial X_k}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} &= \sum \frac{\partial}{\partial Y_k} x_k = \sum x_k \frac{\partial}{\partial Y_k}; & \frac{\partial}{\partial \beta_2} &= \sum \frac{\partial}{\partial Y_k} y_k = \sum y_k \frac{\partial}{\partial Y_k}; \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_2} &= \sum \frac{\partial}{\partial Y_k} z_k = \sum z_k \frac{\partial}{\partial Y_k}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_3} &= \sum \frac{\partial}{\partial Z_k} x_k = \sum x_k \frac{\partial}{\partial Z_k}; & \frac{\partial}{\partial \beta_3} &= \sum \frac{\partial}{\partial Z_k} y_k = \sum y_k \frac{\partial}{\partial Z_k}; \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_3} &= \sum \frac{\partial}{\partial Z_k} z_k = \sum z_k \frac{\partial}{\partial Z_k}; \end{aligned}$$

Considérons les composantes du moment cinétique absolu ; elles s'écrivent en fonction des nouvelles variables si on effectue le changement de variables.

$$\begin{aligned}\sigma_X &= (\alpha_2 \bar{\omega}_{\alpha_2} + \beta_2 \bar{\omega}_{\beta_2} + \gamma_2 \bar{\omega}_{\gamma_2}) - (\alpha_3 \bar{\omega}_{\alpha_3} + \beta_3 \bar{\omega}_{\beta_3} + \gamma_3 \bar{\omega}_{\gamma_3}) \\ \sigma_Y &= (\alpha_3 \bar{\omega}_{\alpha_1} + \beta_3 \bar{\omega}_{\beta_1} + \gamma_3 \bar{\omega}_{\gamma_1}) - (\alpha_1 \bar{\omega}_{\alpha_3} + \beta_1 \bar{\omega}_{\beta_3} + \gamma_1 \bar{\omega}_{\gamma_3}) \\ \sigma_Z &= (\alpha_1 \bar{\omega}_{\alpha_2} + \beta_1 \bar{\omega}_{\beta_2} + \gamma_1 \bar{\omega}_{\gamma_2}) - (\alpha_2 \bar{\omega}_{\alpha_1} + \beta_2 \bar{\omega}_{\beta_1} + \gamma_2 \bar{\omega}_{\gamma_1})\end{aligned}$$

Exprimons les coefficients de direction des axes du repère relatif en fonction des angles d'EULER fixant la position de ce repère par rapport au repère fondamental ; on a :

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \cos \theta \sin \psi ; \\ \beta_1 &= \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi ; \\ \gamma_1 &= \sin \theta \sin \psi ; \\ \alpha_2 &= \cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi ; \\ \beta_2 &= \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi ; \\ \gamma_2 &= -\sin \theta \cos \psi ; \\ \alpha_3 &= -\sin \varphi \sin \theta ; \\ \beta_3 &= \cos \varphi \sin \theta ; \\ \gamma_3 &= \cos \theta .\end{aligned}$$

En appliquant à nouveau la méthode des changements de variables on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \beta_1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \beta_2 - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \beta_3 + \frac{\partial}{\partial \beta_1} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial \beta_3} \alpha_3 ; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \left(\frac{\partial}{\partial \beta_1} \gamma_1 + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \gamma_2 + \frac{\partial}{\partial \beta_3} \gamma_3 \right) \cos \varphi - \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \gamma_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \gamma_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \gamma_3 \right) \sin \varphi \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \gamma_3 \cos \psi - \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \gamma_3 \sin \psi - \frac{\partial}{\partial \gamma_3} \sin \theta ; \\ \frac{\partial}{\partial \psi} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \alpha_1 - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \beta_1 - \frac{\partial}{\partial \beta_1} \beta_2 + \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \gamma_1 - \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \gamma_2 ;\end{aligned}$$

La troisième des égalités précédentes donne immédiatement :

$$\sigma_z = \bar{\omega}_\psi$$

Formons l'expression $\cos \psi \sigma_X + \sin \psi \sigma_Y$ et $\sin \psi \sigma_X - \cos \psi \sigma_Y$; il vient :

$$\cos \psi \sigma_X + \sin \psi \sigma_Y = \bar{\omega}_\theta$$

$$\cos \psi \sigma_Y - \sin \psi \sigma_X = \frac{1}{\sin \theta} \bar{\omega}_\varphi + \cotg \theta \bar{\omega}_\psi$$

Nous retrouvons ainsi un résultat établi par SOMMERFELD à partir de considérations d'invariance (1).

Les relations précédentes donnent :

$$\sigma_X + i \sigma_Y = e^{i\psi} \left(\bar{\omega}_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \bar{\omega}_\varphi + i \cotg \theta \bar{\omega}_\psi \right)$$

$$\sigma_X - i \sigma_Y = e^{-i\psi} \left(\bar{\omega}_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \bar{\omega}_\varphi - i \cotg \theta \bar{\omega}_\psi \right)$$

À partir de ces expressions, on peut calculer le carré du moment cinétique d'un corps rigide, on a :

$$\sigma^2 = \bar{\omega}_\theta^2 + ih' \cotg \psi \bar{\omega}_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\bar{\omega}_\varphi^2 - 2 \cos \theta \bar{\omega}_\varphi \bar{\omega}_\psi + \bar{\omega}_\psi^2)$$

Opérateur dont SOMMERFELD a déterminé les valeurs propres et les fonctions propres.

16. Moment cinétique d'un système quelconque. — Le carré du moment cinétique d'un système quelconque étant une grandeur simultanément mesurable avec une composante quelconque du moment cinétique, grandeur dont on sait déterminer les fonctions propres et les valeurs propres, il est utile de savoir le mettre sous une forme telle qu'on sache résoudre l'équation aux valeurs propres.

Les composantes du moment cinétique d'un système de n corpuscules exprimées en coordonnées cylindriques ont pour expressions :

$$\sigma_X = \sum_j \cotg \theta_j \cos \varphi_j \bar{\omega}_{\varphi_j} + \sin \varphi_j \bar{\omega}_{\theta_j};$$

$$\sigma_Y = \sum_j \cotg \theta_j \sin \varphi_j \bar{\omega}_{\varphi_j} - \cos \varphi_j \bar{\omega}_{\theta_j};$$

$$\sigma_Z = \sum_j \bar{\omega}_{\varphi_j}$$

ce qui donne pour les expressions de $\sigma_X + i \sigma_Y$ et $\sigma_X - i \sigma_Y$

$$\sigma_X + i \sigma_Y = \sum_j [\cotg \theta_j (\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j) \bar{\omega}_{\varphi_j} + (\sin \varphi_j - i \cos \varphi_j) \bar{\omega}_{\theta_j}]$$

$$\sigma_X - i \sigma_Y = \sum_j [\cotg \theta_j (\cos \varphi_j - i \sin \varphi_j) \bar{\omega}_{\varphi_j} + (\sin \varphi_j + i \cos \varphi_j) \bar{\omega}_{\theta_j}]$$

(1) SOMMERFELD. — *Atombau und Spektrallinien*; Springer, Berlin (1939).

Nous allons comparer ces expressions avec celles obtenues plus haut pour un corps solide rigide et chercher à déterminer un changement de variables

$$\varphi_i = g_{\varphi_i}(q_1, \dots, q_{2n}), \quad \theta_j = g_{\theta_j}(q_1, \dots, q_{2n})$$

faisant passer des $2n$ variables φ_i, θ_j aux $2n$ variables q_k et telles qu'en fonctions des nouvelles variables on ait :

$$\begin{aligned} \sigma_X + i \sigma_Y &= e^{iq_1} \left[\bar{\omega}_{q_2} - \frac{1}{\sin q_2} (\bar{\omega}_{q_3} - \cos q_2 \bar{\omega}_{q_1}) \right] \\ \sigma_X - i \sigma_Y &= e^{-iq_1} \left[\bar{\omega}_{q_1} + \frac{i}{\sin q_2} (\bar{\omega}_{q_3} - \cos q_2 \bar{\omega}_{q_1}) \right] \\ \sigma_Z &= \bar{\omega}_{q_1} \end{aligned}$$

La théorie des changements de variables nous donne pour déterminer ce changement de variables le système suivant, obtenu en identifiant et en posant :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \varphi_j - q_1 \\ \frac{\partial g_{\theta_j}}{\partial q_1} &= 0; \quad \frac{\partial g_{\theta_j}}{\partial q_1} = 1; \\ \frac{\partial g_{\theta_j}}{\partial q_2} &= \sin \alpha_j; \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_2} = \cos \alpha_j \cotg \theta_j; \\ \frac{\partial g_{\theta_j}}{\partial q_3} &= \sin q_2 \cos \alpha_j; \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_3} = \cos q_2 - \sin q_2 \cotg \theta_j \sin \alpha_j. \end{aligned}$$

Ce système s'intègre, et donne :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= q_1 + \text{Arc sin} \frac{A_j \sin q_2 - K_j \cos q_3 \cos q_2 - L_j \sin q_3 \cos q_2}{[1 - (A_j \cos q_2 + K_j \cos q_3 \sin q_2 + L_j \sin q_3 \sin q_2)^2]^{1/2}} \\ \theta_j &= \text{Arc cos} (A_j \cos q_2 + K_j \cos q_3 \sin q_2 + L_j \sin q_3 \sin q_2) \end{aligned}$$

où les A_j, K_j, L_j sont des fonctions arbitraires des nouvelles variables q_4, q_5, \dots, q_{2n} indépendantes des variables q_1, q_2, q_3 .

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Les composantes du moment cinétique d'un système quelconque de corpuscules peut être mis par un changement de variables con-*

venable sous la forme des composantes du moment cinétique d'un corps rigide. En particulier le carré du moment cinétique d'un système quelconque de corpuscules se met sous la forme du carré du moment cinétique d'un corps rigide.

Ce théorème montre l'intérêt physique que présente l'étude du corps rigide en mécanique ondulatoire : le corps rigide permet de représenter sommairement un système de corpuscules de telle façon que ce corps rigide ait même moment cinétique que le système considéré et même centre de gravité. Mais un tel solide ne s'identifie pas avec le solide principal défini précédemment car le moment cinétique n'est pas ici un vecteur.
