PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ENTERAS REPRESENTADAS POR SERIES DE TAYLOR LAGUNARES (ORDEN FINITO)

POR

F. SUNYER BALAGUER

RÉSUMÉ

Dans le chapitre 1 je donne des résultats dèjá connus, le premier de ces résultats est, à vrai dire, une extension du résultat publié antérieurement.

Dans le chapitre 2, à l'aide des propiétés des fonctions représentées par des séries de Taylor lacunaires, nous étudions, dans l'espace fonctionnel des fonctions entières d'ordre précise équivalent à ρ (r), l'ensemble des fonctions qui ont une valeur exceptionnelle et l'ensemble des fonctions qui appartiennent à la classe sinusoidal, classe que nous définissons dans le même chapitre.

Dans le chapitre 3 nous démontrons en premier lieu, que l'introduction d'une condition lacunaire fait disparaître la possible exception dans le théorème de Nevanlinna que, d'une forme abrégée, on peut énoncer comme suit : deux fonctions qui prennent quatre valeurs dans les mêmes points, sont identiques. En deuxième lieu nous démontrons que moyennant une condition lacunaire, un autre théorème d'unicité, dû aussi à Nevanlinna, peut s'étendre au cas de l'ordre entier, mais uniquement pour les fonctions entières.

Finalement, dans le chapitre 4 j'etablis une classification des valeurs asymptotiques d'après la courbe décrite par la variable et d'après la rapidité avec laquelle la fonction tend vers la valeur asymtotique ; je donne ensuite des conditions lacunaires suffisantes pour affirmer l'imposibilité de l'existence de valeurs asymtotiques de classe et de type déterminés.

INDICE

INTRODUCCION

En unas Notas anteriores [**9a**] (1), enunciamos unos resultados que indican que ciertas condiciones lagunares impuestas a las series de TAYLOR, imposibilitan la existencia de valores excepcionales. En una memoria posterior [**9 b**] extendí algunos de aquellos resultados a las funciones meromorfas. Pero la desaparición de los valores excepcionales es más bien un caso particular de un hecho que, me parece, tiene un carácter muy general; así, en el capítulo 3, veremos la desaparición de las posibles excepciones en algunos teoremas de unicidad, mediante la introducción de hipótesis que imponen una condición lagunar a las series de TAYLOR que representan las funciones que intervienen en dichos teoremas.

El lema 1,3 (2) que da una propiedad de las funciones representadas

(1) Los números en negritas y entre paréntesis angulares remiten a la lista bibliográfica que figura al final de la memoria.

(2) En la numeración de párrafos, teoremas, lemas y fórmulas hemos seguido el sistema decimal; asi n.° 2,3 indica el n.° 3 del Cap. 2, y la fórmula (2,31) indicará la primera fórmula numerada contenida en el n.° 3 del Cap. 2; como en un número solamente existe un teorema o un lema, estos tendrán la numeración del número en que se hallan.

por series de TAYLOR lagunares, y que nos ha permitido demostrar los resultados más arriba mencionados, nos permite, en el capítulo 4, demostrar la desaparición de los valores asintóticos por medio de la imposición de condiciones lagunares. Esta desaparición había sido constatada ya, al menos implícitamente, por PÓLYA [7 a]. Nosotros precisamos los resultados de PÓLYA y damos unos resultados semejantes utilizando la densidad superior, en lugar de la densidad máxima.

En realidad, en el capítulo 2, no estudiamos ninguna propiedad de las funciones representadas por series lagunares, pero como dichas propiedades, son las que nos permiten demostrar los resultados sobre las propiedades de los conjuntos de las funciones, de orden precisado equivalente a $\rho(r)$, que admiten una excepción o que pertenecen a la clase sinusoidal (que definimos en este mismo capítulo), la relación con el contenido del resto de la memoria es evidente; y, por lo tanto, hemos creído podía incluirse bajo el título que encabeza el presente trabajo.

Para algunos de los resultados contenidos en esta memoria, tenemos unas demostraciones generalizándolos para el caso del orden infinito, y para otros creemos que es posible asimismo lograrlo. No obstante, en este artículo me limitaré a tratar, tal como indica el título, de funciones enteras de orden finito; únicamente cuando las demostraciones y los enunciados puedan darse sin necesidad de extensas explicaciones, daremos los resultados para el orden infinito o bien para funciones meromorfas.

CAPITULO I

PRELIMINARES

1,1. — La función $\rho(r)$ será llamada, como habitualmente, un orden precisado, si satisface a las dos igualdades

$$\lim_{r=\infty} \rho(r) = \rho_0, \qquad \lim_{r=\infty} \rho'(r)\, r \log r = 0,$$

donde ρ_0 es un número finito. En la totalidad del presente trabajo la función $r^{\rho(r)}$ vendrá representada por $U(r)$.

Sea $f(z)$ una función meromorfa en todo el plano finito y sea $T(r, f)$ su función característica de NEVANLINNA; escribamos

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r, f)}{U(r)} = b,$$

entonces distinguiremos tres casos:

1.° $b = 0$, en este caso diremos que $f(z)$ es de orden precisado inferior a $\rho(r)$.

2.° $0 < b < \infty$; $f(z)$ será llamada de orden precisado equivalente a $\rho(r)$.

3.° $b = \infty$, entonces $f(z)$ será de orden precisado superior a $\rho(r)$.

Evidentemente en el 2.° caso $f(z)$ será de orden ρ_0, pero además, dado un orden precisado $\rho(r)$, si C_1 y C_3 representan respectivamente los conjuntos formados por las funciones que se hallan en el 1.° y 3.° caso, lo mismo C_1 que C_3 contienen funciones de orden ρ_0.

Si además suponemos que $f(z)$ es entera, representando por $M(r, f)$ el máximo de $|f(z)|$ en la circunferencia $|z| = r$, según NEVANLINNA, tendremos

$$T(r, f) \leqslant \log M(r, f) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\, T(R, f) \qquad (r<R)$$

y, por consiguiente, si $f(z)$ es de orden precisado equivalente a $\rho(r)$, resultará

$$0 < \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{U(r)} < \infty,$$

e inversamente estas dos desigualdades imponen que la función sea de orden precisado equivalente a $\rho(r)$. Si se cumple, además, la

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{U(r)} = 1,$$

siguiendo una denominación semejante a la usada por PÓLYA [**7** a], diremos que la función entera $f(z)$ es de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ (3)

Durante el curso de esta memoria aparecerán frecuentemente expresiones de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^{l_k} \qquad (4)$$

(3) En mis notas [**9a**] esta clase de funciones las llamaba simplemente de orden precisado igual a $\rho(r)$, pero como en [**9b**] al tratar de funciones meromorfas utilicé la misma expresión para denominar una clase distinta de funciones, he creído conveniente utilizar la expresión tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$ mucho más teniendo que citar repetidamente la memoria [**9b**].

(4) Generalmente en lugar de l_k se emplea λ_n no obstante, utilizo l_k por dos razones, la primera para señalar que se trata de números enteros, mientras que λ_n se emplean en las series de Dirichlet, pudiendo representar números reales cualesquiera; y en segundo lugar substituyo el subíndice n, generalmente utilizado, por el k, a fin de dejar la n para la representación de los números de ceros y de polos de las funciones contenidos en determinados círculos e indicar el orden en otras sucesiones.

en ellas se entenderá siempre que los l_k son enteros que verifican las desigualdades

$$0 = l_0 < l_1 < \dots < l_k < \dots,$$

la igualdad $0 = l_0$ no introduce ninguna restricción, puesto que algunos, e incluso una infinidad, de los a_k pueden ser nulos.

Representando por $K(x)$ el mayor valor de k que verifica $l_k \leq x$, siguiendo a Pólya [7 a], definiremos la densidad máxima D de los l_k de la siguiente manera

$$D = \lim_{\theta = 1-0} \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{K(x) - K(\theta x)}{x - \theta x}$$

y la densidad superior D_0 de la siguiente:

$$D_0 = \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{K(x)}{x}$$

Por otra parte, representaremos, siguiendo a Nevanlinna, por $n\left(r, \frac{1}{f}\right)$ el número de ceros de la función $f(z)$ contenidos en el círculo $|z| \leq r$, contándose cada cero tantas veces como su orden de multiplicidad indica; por consiguiente, la expresión $n(r, f)$ representará el número de polos, teniendo en cuenta sus órdenes de multiplicidad, de la función $f(z)$ en el mismo círculo $|z| \leq r$.

Finalmente, siguiendo una costumbre sumamente extendida, emplearemos las notaciones

$$\max[a, b] \qquad\qquad \min[a, b]$$

para representar respectivamente la mayor y la menor de las cantidades reales a y b. Asimismo, representaremos por $\varepsilon(r)$ las cantidades positivas que tiendan hacia cero cuando r tienda al infinito, debiendo tenerse en cuenta que la expresión $\varepsilon(r)$ puede representar cantidades diferentes en el curso de una misma demostración, e incluso en una misma fórmula; teniendo, dichas cantidades la única propiedad común de tender hacia cero cuando la variable crece indefinidamente. Sin embargo, cuando sea necesario, algunas cantidades con esta propiedad vendrán representadas por otras notaciones. Contrariamente ε representará cantidades positivas arbitrariamente pequeñas pero fijas.

1,2. — En un trabajo anterior [**9 b** lema 1] demostramos un lema que no era más que una precisión de un resultado de Wiman, en el presente nos interesa aun una mayor precisión; vamos pues a demostrar el

Lema 1,2. — *Sea $f(z)$ una función meromorfa de orden entero $\rho_0 \geq 1$ y de orden precisado equivalente o superior a $\rho(r)$, si*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n\left(r, \frac{1}{f}\right)}{U(r)} \leq B\,C(\rho_0), \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, f)}{U(r)} \leq B'\,C(\rho_0),$$

de toda sucesión (si existe) r_n ($\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$) tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{T(r_n, f)}{U(r_n)} = b > B + B' + 2 \min[B, B']$$

puede extraerse una sucesión parcial R_n para la cual existe un $b_0 > B + B'$ de modo que, para $z = r\,e^{i\alpha}$ y $\Omega^{-1} R_n < r < \Omega R_n$, y cualesquiera que sean las cantidades positivas η y $\theta < 1$, se cumplan las desigualdades

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} -(B + B' + \varepsilon(R_n))\,\Omega^{\rho_0+1}\,U(R_n) - (2B + \varepsilon(R_n))\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho_0} C(\eta, \theta)\,U(R_n) < \\ < \log|f(z)| - \left(\frac{r}{R_n}\right)^{\rho_0} \psi_2(R_n, f)\, b_0\, U(R_n) \cos(\rho_0 \alpha - \rho_0 \alpha(R_n, f)) < \\ < (B + B' + \varepsilon(R_n))\,\Omega^{\rho_0+1}\,U(R_n) + (2B' + \varepsilon(R_n))\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho_0} C(\eta, \theta)\,U(R_n), \end{cases}$$

excepto en un conjunto de pequeños círculos la suma de cuyos radios es inferior a $2\,\frac{\Omega}{\theta}\,\eta\,R_n$ y donde $\psi_2(R_n, f)$ verifica

$$\text{(II)} \quad \left(1 - \frac{B + B'}{b_0}\right)(1 - \varepsilon(R_n)) < \psi_2(R_n, f) < (1 + \varepsilon(R_n))\,\beta\left(\frac{B + B'}{b_0}\right)$$

donde $\beta(x) > 1$ y $\lim\limits_{x=0} \beta(x) = 1$.

Demostración. — Para la demostración de este lema nos serviremos del resultado de nuestro trabajo citado al principio de este número (donde puede hallarse el significado de la expresión $C(\rho_0)$) y de un lema de Bernstein [1 lema II, pág. 179], pero, al emplear este lema, lo haremos empleando las notaciones con que lo enunciamos, para evitar confusiones con las nuestras, en mi trabajo repetidamente citado [**9b** pág. 4 y 5] (donde se hallará el significado de $C(\eta, \theta)$).

Sea $h_1(z)$ el producto canónico formado con los polos de $f(z)$; según un resultado clásico (véase por ej. [**9b** pág. 6]), si r es suficientemente grande, tendremos

$$\log |h_1(z)| < \Re[\psi(z, h_1)] + \varphi(r, h_1),$$

donde $\Re[Z]$ representará siempre la parte real de Z.

Puesto que, según la definición,

$$n\left(r, \frac{1}{h_1}\right) = n(r, f)$$

y, por consiguiente, según las hipótesis,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n\left(r, \frac{1}{h_1}\right)}{U(r)} \leq B' C(\rho_0)$$

resultará [**9b** pág. 6 - 8] si $\Omega^{-1} R < r < \Omega R$ y $z = r e^{i\alpha}$

$$\varphi(r, h_1) < (1 + \varepsilon(R)) \Omega^{\rho_0 + 1} B' U(R),$$

$$\Re[\psi(z, h_1)] = \left(\frac{r}{R}\right)^{\rho_0} \psi_1(R, h_1) \cos(\rho_0 \alpha - \rho_0 \alpha(R, h_1)),$$

donde $\psi_1(R, h_1)$ es una cantidad positiva y $\alpha(R, h_1)$ una cantidad real que dependen únicamente de R y de h_1. Poniendo

$$g_1(z) = h_1(z) h_1(z e^{i\pi/\rho_0}),$$

puesto que Ω es arbitraria, de lo que antecede se deduce

$$\log |g_1(z)| < 2(1 + \varepsilon(R)) B' U(R) \tag{1,21}$$

que toda vez que $g_1(z)$ es entera, se cumplirá en la totalidad del círculo $|z| \leq R$.

Ahora bien, formemos el producto canónico $h_2(z)$ con los ceros de $f(z)$, del mismo modo podremos demostrar que, si

$$g_2(z) = h_2(z) h_2(z e^{-i\pi/\rho_0}),$$

tendremos

$$\log |g_2(z)| < 2(1+\varepsilon(R))\, B\, U(R) \tag{1,22}$$

en $|z| \leq R$. Además, fácil es convencerse de que definiendo $f_1(z)$ y $f_2(z)$ por

$$f_1(z) = f(z)\, g_1(z), \qquad f_2(z) = \frac{g_2(z)}{f(z)},$$

la función $q(z)$ que verifica

$$e^{q(z)} f_1(z) \equiv f_2(z\, e^{i\pi/\rho_0}) \tag{1,23}$$

es un polinomio de grado $\rho_0 - 1$ como máximo, y, puesto que $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son enteras, resultará finalmente

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, f_1) - \log M(r, f_2)}{U(r)} = 0. \tag{1,24}$$

Según Nevanlinna

$$T(r,f) \leq T(r, g_1) + T(r, f_1) + O(1) \leq \log M(r, g_1) + \log M(r, f_1) + O(1),$$
$$T(r,f) \leq T(r, g_2) + T(r, f_2) + O(1) \leq \log M(r, g_2) + \log M(r, f_2) + O(1),$$

y si r_n ($\lim r_n = \infty$) es una sucesión para la cual

$$\lim_{n=\infty} \frac{T(r_n, f)}{U(r_n)} > B + B' + 2\min[B, B'],$$

recordando (1,21), (1,22) y (1,24) resulta

$$\varliminf_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, f_1)}{U(r_n)} = \varliminf_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, f_2)}{U(r_n)} > B + B',$$

por tanto, de la sucesión r_n podrá extraerse una sucesión parcial, que representaremos por R_n, de modo que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, f_1)}{U(R_n)} = \lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, f_2)}{U(R_n)} = b_0 > B + B'.$$

Por otra parte, de las definiciones de $f_1(z)$ y $f_2(z)$, resulta fácilmente que

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{n\left(r, \frac{1}{f_1}\right)}{U(r)} = \varlimsup_{r=\infty} \frac{n\left(r, \frac{1}{f_2}\right)}{U(r)} \leq (B+B')\, C(\rho_0),$$

por consiguiente, lo mismo $f_1(z)$ que $f_2(z)$ cumplen las condiciones impuestas en el lema 1 de nuestra memoria citada [**9b** pág. 10] y, en consecuencia, para $\frac{R_n}{\Omega} < r < \Omega R_n$ y $z = r e^{i\alpha}$, tendremos

$$(1,25) \quad \log|f_s(z)| < \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{\rho_0} \psi_2(R_n, f_s) \cos(\rho_0 \alpha - \rho_0 \alpha(R_n, f_s)) + \right.$$

$$\left. + \frac{B + B' + \varepsilon(R_n)}{b_0} \Omega^{\rho_0+1}\right] b_0 U(R_n) \qquad (s = 1, 2)$$

(hemos escrito $B + B' + \varepsilon(R_n)$ en lugar de $(B + B')(1 + \varepsilon(R_n))$ como estaba en nuestra memoria anterior a fin de tener en cuenta la posibilidad $B + B' = 0$).

Ahora bien, la identidad (1,23) nos permite, dada la definición [**9b** página 6-7] de $\psi_2(R, f_s)$ y $\alpha(R, f_s)$, escribir $\psi_2(R, f_1) = \psi_2(R, f_2)$ y por tanto, cuando $f(z)$ es meromorfa, podremos definir $\psi_2(R, f)$ por

$$(1,26) \qquad \psi_2(R, f) = \psi_2(R, f_1) = \psi_2(R, f_2),$$

y del mismo modo

$$(1,27) \qquad \alpha(R, f) = \alpha(R, f_1) = \alpha(R, f_2) - \frac{\pi}{\rho_0},$$

definición de $\alpha(R, f)$ cuando $f(z)$ es meromorfa.

Por otra parte, las fórmulas (1,21) y (1,22), aplicando el lema de Bernstein, nos darán en el círculo $|z| \leq \Omega R_n$ excepto en un conjunto de pequeños círculos la suma de cuyos radios es inferior a $2\frac{\Omega}{\theta}\eta R_n$;

$$(1,28) \qquad \log|g_1(z)| > -(2B' + \varepsilon(R_n))\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho_0} C(\eta, \theta)\, U(R_n)$$

$$(1,29) \qquad \log|g_2(z)| > -(2B + \varepsilon(R_n))\left(\frac{\Omega}{\theta}\right)^{\rho_0} C(\eta, \theta)\, U(R_n)$$

Expresando $f(z)$ como el cociente de $f_1(z)$ y $g_1(z)$ la (1,25) (para $s = 1$) las (1,26), (1,27) y (1,28) nos darán la segunda desigualdad de las contenidas en (I); y si expresamos $f(z)$ como el cociente de $g_2(z)$ y $f_2(z)$, la (1,25) (para $s = 2$), las (1,26), (1,27) y (1,29) nos darán la primera de las desigualdades contenidas en la misma fórmula (I). Finalmente las (1,26) nos dan ya por sí solas las (II). [**9b** lema 1].

Un caso interesante de este lema es cuando $B = 0$ y $B' = 0$, en el capítulo 3 veremos una aplicación de este caso.

Observación. — Cuando $f(z)$ es entera, la desigualdad entre el segundo y el tercer miembro de la (I) se cumple sin excepción; es decir, en este caso para la validez de dicha desigualdad, es innecesaria la condición de que z sea exterior a los pequeños círculos que intervienen en el enunciado.

En efecto, si $f(z)$ es entera, $g_1(z) \equiv 1$ y, en consecuencia, la desigualdad (1,28) se cumplirá en la totalidad del círculo $|z| \leq \Omega R_n$; ello demuestra que la segunda desigualdad de las (I) se verifica en todas las coronas $\Omega^{-1} R_n < r < \Omega R_n$.

Del mismo modo, si $f(z)$ es una función meromorfa sin ceros, la primera de las desigualdades (I) se cumplirá sin excepción en la totalidad de las coronas.

1,3. — Al lema 2 de [**9 b**] le daremos aquí un nuevo enunciado y una nueva demostración, que si bien, en el fondo, son equivalentes a los que dábamos en [**9 b**], en algunos aspectos me parecen mejores.

Este resultado no es más, como ya hicimos constar en [**9 b**], que una precisión de un teorema de Pólya [**7 a** Cap. III teorema IV].

He aquí el nuevo enunciado:

Lema 1, 3. — Sea

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}$$

una función entera, representemos por D la densidad máxima de la sucesión de los l_k, cualquiera que sea la función $\theta(r)$, para todo valor de r puede encontrarse un punto z_r que satisface a

$$\frac{r}{1+\eta(r)} < |z_r| < (1+\eta(r))\, r, \qquad |\arg z_r - \theta(r)| < \pi D + \eta(r),$$

$$\log |f(z_r)| > (1-\eta(r)) \log M(r, f),$$

donde $\eta(r)$ es una cantidad que tiende a cero con $\frac{1}{r}$ y que es independiente de la función $\theta(r)$.

Demostración. — Sea n un entero positivo dado, y pongamos, para simplificar las fórmulas,

$$\gamma = \frac{2\pi}{n}.$$

Empleando, como habitualmente, la notación $\bar{f}(z)$ para representar la función cuya serie de TAYLOR, alrededor del origen, tiene los coeficientes conjugados a los de la serie de TAYLOR, alrededor del origen, de $f(z)$; podremos construir las $2n$ funciones

$$\left.\begin{aligned} f_{m,1}(z) &= f(e^{im\gamma} z) + \bar{f}(e^{-im\gamma} z), \\ f_{m,2}(z) &= i\,[f(e^{im\gamma} z) - \bar{f}(e^{-im\gamma} z)], \end{aligned}\right\} \quad (m = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Evidentemente los coeficientes de los desarrollos en series de TAYLOR alrededor del origen, de estas funciones, son reales; por consiguiente, según los resultados de PÓLYA, se podrán formar $2n$ funciones $\Phi_{m,\lambda}(x)$ $(\lambda = 1, 2, m = 0, 1, \ldots n-1)$ tales que

$$\log\left[\frac{1}{2\pi i}\int \Phi_{m,\lambda}(x)\, f_{m,\lambda}\left(\frac{1+\varepsilon(r))\,r}{x}\right)\frac{dx}{x}\right] > \\ > (1-\varepsilon(r))\log M(r, f_{m,\lambda}),$$

la integral siendo calculada a lo largo de la frontera, descrita en sentido negativo, del dominio definido por

$$\frac{1}{1+\gamma} < |x| < 1+\gamma, \qquad |\arg x| < \pi D + \gamma.$$

Por otra parte de la definición de las funciones $f_{m,\lambda}(z)$ resulta que, para todo valor de r y para cualquier valor de m,

$$\max\left[\log M(r, f_{m,1}), \log M(r, f_{m,2})\right] > \log M(r, f)$$

De todo cuanto precede resulta fácilmente que es posible hallar una r_n independiente de m tal que, para $r > r_n$, existe un punto función de r y m que representaremos por $z'_{n,m,r}$ que verifica

$$\frac{r}{1+2\gamma} < |z'_{n,m,r}| < (1+2\gamma)\cdot r, \qquad |\arg z'_{n,m,r}| < \pi D + \gamma$$

y que al mismo tiempo cumple la desigualdad

$$\max\left[\log|f_{m,1}(z'_{n,m,r})|, \log|f_{m,2}(z'_{n,m,r})|\right] > \\ > (1-\varepsilon(r))\log M(r, f).$$

Por lo tanto, se deduce fácilmente la existencia de unos puntos $z_{n,m,r}$ función de r que verifican

$$(1,31) \qquad \frac{r}{1+2\gamma} < |z_{n,m,r}| < (1+2\gamma)\, r, \qquad |\arg z_{n,m,r} - m\gamma| < \pi D + \gamma,$$

$$\log |f(z_{n,m,r})| > (1 - \eta_n(r)) \log M(r, f),$$

donde $\eta_n(r)$ es una función positiva que tiende a cero cuando r tiende al infinito, y, puesto que los valores que m puede tomar son en número finito, podremos suponer que esta función es independiente de m.

Sea pues r'_n un valor tal que, para $r > r'_n$, se cumpla

$$\eta_n(r) < 2\gamma$$

y sea $R_n = \max[r_n, r'_n]$, entonces, cuando $r > R_n$, existirán unos puntos $z_{n,m,r}$ que verificarán las (1,31) y la

$$\log |f(z_{n,m,r})| > (1 - 2\gamma) \log M(r, f).$$

Estos razonamientos pueden repetirse para cualquier valor de n, hemos definido pues una sucesión R_n que podemos suponer que verifica $R_n \leq R_{n+1}$ y

$$\lim_{n=\infty} R_n = \infty;$$

a partir de esta sucesión puede definirse una función $\eta(r)$ que tenga las propiedades siguientes:

a). $\lim_{r=\infty} \eta(r) = 0$

b). para $r \leq R_{n+1}$ satisface a $\eta(r) > \dfrac{4\pi}{n}$.

Una vez establecido lo que antecede, para cualquier valor de r, podremos elegir n igual al mayor valor que cumple $R_n < r$ y m de modo que

$$|m\gamma - \theta(r)| < \gamma = \frac{2\pi}{n}.$$

Con estas elecciones $z_{n,m,r}$ quedará completamente determinado por r; en consecuencia, podremos representarlo abreviadamente por z_r, y verificará

$$\frac{r}{1+\eta(r)} < |z_r| < (1+\eta(r))\, r, \qquad |\arg z_r - \theta(r)| < \pi D + \eta(r),$$

$$\log |f(z_r)| > (1 - \eta(r)) \log M(r, f);$$

y como en la definición de $\eta(r)$ no ha intervenido la función $\theta(r)$, el lema queda demostrado.

1,4. — A continuación daremos el enunciado del teorema de MILLOUX en la forma precisa que resulta de los razonamientos expuestos por R. NEVANLINNA [6a pág. 96 - 100].

LEMA 1,4. — *La función $f(z)$ holomorfa en el círculo $|z| < R$ verifica en este mismo círculo, la desigualdad*

$$\log |f(z)| \leq M$$

y si, además, en una curva continua que partiendo del origen llega hasta la circunferencia $|z| = R$, la función viene acotada por

$$\log |f(z)| \leq m \qquad (m < M),$$

tendremos en todo el círculo

$$\log |f(z)| \leq M - (M - m) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{R - |z|}{R + |z|}.$$

CAPITULO II

FUNCIONES QUE ADMITEN UNA FUNCIÓN EXCEPCIONAL

2,1. — Sea $F(z)$ una función entera de orden finito ρ_0 y de orden precisado equivalente a $\rho(r)$, diremos que $F(z)$ admite una función excepcional, o más brevemente, admite una excepción, si existe una función meromorfa $f(z)$ de orden precisado inferior a $\rho(r)$ y diferente de la constante infinita, tal que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\mathrm{n}\left(r, \dfrac{1}{F - f}\right)}{U(r)} = 0. \tag{2,11}$$

Es sumamente conocido el hecho que la igualdad (2,11) solamente puede ser satisfecha por una sola función $f(z)$ (5), y aun la existencia de esta función está ya subordinada al hecho de que el orden ρ_0 sea entero; Por lo tanto, en cierto sentido, puede afirmarse ya que las funciones que admiten una excepción son excepcionales en la clase de las funciones enteras de orden finito positivo.

---

(5) Excepto si $F(z)$ es de orden cero, pues entonces la (2,11) queda satisfecha cualquiera que sea $f(z)$.

El estudio directo de las propiedades del conjunto de las funciones de orden precisado equivalente a $\rho(r)$ que admiten una excepción resultaría complicado; a fin de simplificar estudiaremos, pues, las propiedades del conjunto de las funciones que llamaremos pertenecientes a la clase sinusoidal, la cual definiremos a continuación, luego, antes de estudiar dichas propiedades, daremos un lema que nos permitirá deducir algunas propiedades del primero de los conjuntos citados a partir de las del segundo.

Por todo cuanto antecede en la totalidad de este capítulo supondremos ρ_0 entero $\geqq 1$.

DEFINICIÓN. — *Una función $F(z)$ entera de orden ρ_0 y de orden precisado equivalente a $\rho(r)$, será considerada como perteneciente a la clase sinusoidal, si, dados $b > 0$ y $\Omega > 1$ cualesquiera, para toda sucesión R_n $(\lim R_n = \infty)$, tal que*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, F)}{U(R_n)} = b,$$

es posible determinar otra sucesión α_n de modo que, para $z = r e^{i\alpha}$ y $\frac{R_n}{\Omega} < r < \Omega R_n$,

$$\frac{\log |F(z)|}{U(R_n)} < \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{\rho_0} b \cos(\rho_0 \alpha - \rho_0 \alpha_n)\right]^+ + \varepsilon(R_n),$$

donde $[X]^+ = \dfrac{X + |X|}{2}$.

Con esta definición puede enunciarse el resultado siguiente:

LEMA 2,1. — *Toda función de orden equivalente a $\rho(r)$ que admite una excepción, pertenece a la clase sinusoidal.*

DEMOSTRACIÓN. — En primer lugar, es fácil comprobar [**9 b** n.° 3] que, si $f(z)$ es una función meromorfa de orden precisado inferior a $\rho(r)$, podremos representarla en la forma

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{h_0(z)},$$

donde $h_0(z)$ y $h_1(z)$ son dos funciones enteras de orden precisado inferior a $\rho(r)$, y además que, si se supone que $f(z)$ es distinta de la constante infinita, tenemos que $h_0(z)$ no es idénticamente nula.

Sea pues $F(z)$ una función de orden precisado equivalente a $\rho(r)$ y que admite la función

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{h_0(z)},$$

como función excepcional, y pongamos

$$h_0(z) F(z) - h_1(z) \equiv H(z);$$

entonces resulta casi inmediatamente que

$$\lim_{r=\infty} \frac{n\left(r, \frac{1}{H}\right)}{U(r)} = 0. \tag{2,12}$$

Además, aplicando el lema citado de BERNSTEIN [1 lema II, pág. 179], es posible demostrar la existencia de una sucesión r_n tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{r_n}{R_n} = 1, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, H)}{U(r_n)} = b.$$

Por tanto, del lema 1,2, al que puede añadirse la observación del final del número 1,2, puesto que $H(z)$ es entera, y de (2,12), resulta, para $z = r e^{i\alpha}$ y $\Omega^{-1} r_n < r < \Omega r_n$

$$\frac{\log|H(z)|}{U(r_n)} < \left(\frac{r}{r_n}\right)^{\rho_0} b \cos(\rho_0 \alpha - \rho_0 \alpha(r_n, H)) + \varepsilon(r_n)$$

Por otra parte, una nueva aplicación del lema de BERNSTEIN nos permite demostrar que, dada ε positiva fija pero arbitrariamente pequeña y cualquiera que sea r, existirá un r' tal que

$$(1+\varepsilon) r < r' < (1 + 2\varepsilon) r$$

y que en todo punto de la circunferencia $|z| = r'$ resulte

$$\log\left|\frac{1}{h_0(z)}\right| < \varepsilon(r) U(r), \tag{2,13}$$

y del mismo modo se demuestra la existencia de un r'' que verifica

$$\frac{r}{1+2\varepsilon} < r'' < \frac{r}{1+\varepsilon},$$

y tal que en los puntos de $|z| = r''$ sea satisfecha la (2,13).

Asimismo, para α cualquiera existirán dos valores α' y α'' que verifican respectivamente

$$\varepsilon < \alpha' - \alpha < 2\,\varepsilon, \qquad \varepsilon < \alpha - \alpha'' < 2\,\varepsilon$$

y tales que, en los puntos

$$\frac{r}{1+2\,\varepsilon} < |\,z\,| < (1+2\,\varepsilon)\,r, \qquad \arg z = \alpha',$$

y en los puntos

$$\frac{r}{1+2\,\varepsilon} < |\,z\,| < (1+2\,\varepsilon)\,r, \qquad \arg z = \alpha'',$$

sea satisfecha la (2,13).

En consecuencia, si $\dfrac{R_n}{\Omega} < r < \Omega\, R_n$, en la frontera del dominio cerrado definido por

$$r'' \leq |\,z\,| \leq r', \qquad \alpha'' \leq \arg z \leq \alpha',$$

se cumplirá

$$\frac{\log |\,F(z)\,|}{U(R_n)} = \frac{\log |\,H(z) + h_1(z)\,| - \log |\,h_0(z)\,|}{U(R_n)} <$$

$$< \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{\rho_0} (1+2\,\varepsilon)^{\rho_0}\, b\,(\cos(\rho_0\,\alpha - \rho_0\,\alpha\,(r_n\,, H)) + 2\,\varepsilon)\right]^+ + \varepsilon\,(R_n)\,;$$

por la arbitrariedad de ε y por el hecho de que $F(z)$ es holomorfa, el principio del máximo nos permite afirmar finalmente que

$$\frac{\log |\,F(r\,e^{i\alpha})\,|}{U(R_n)} < \left[\left(\frac{r}{R_n}\right)^{\rho_0} b\,\cos(\rho_0\,\alpha - \rho_0\,\alpha\,(r_n\,, H))\right]^+ + \varepsilon(R_n)\,,$$

que es la afirmación del lema 2,1.

2,2. — Es sumamente conocido el resultado siguiente:

A. *Dada al azar una serie de* Taylor *cuyo círculo de convergencia es de radio finito, en general la función por ella representada no podrá prolongarse más allá del círculo citado.*

Según Hadamard y Mandelbrojt [3 Cap. IV, n.° 4], Pringsheim (6)

---

(6) Pringsheim. Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränkten Existenzbereiche (Sitzungsberichte der Münchener Academie, 7 mai 1892). Esta memoria no me ha sido posible consultarla, por este motivo no figura en la lista bibliográfica del final del trabajo.

emplea para demostrar el resultado A un procedimiento que, con pequeñas variantes, podríamos emplear para intentar la demostración del resultado siguiente:

B. *Dada al azar una serie de* Taylor *que representa una función entera de orden precisado equivalente a* $\rho(r)$, *en general dicha función no pertenecerá a la clase sinusoidal.*

Pero a esta demostración podrían hacerse las mismas objeciones que Hadamard y Mandelbrojt hacen a la de Pringsheim. No obstante, probablemente, por otros procedimientos podría precisarse el significado de la expresión: *dada al azar,* de forma que el enunciado B resultase válido; pero en este capítulo hemos creído más conveniente estudiar el conjunto de las funciones que pertenecen a la clase sinusoidal mediante un método semejante al que usa Pólya [**7 b**] para estudiar el conjunto de las series de Taylor prolongables más allá de su círculo de convergencia.

2,3. — Antes de estudiar las propiedades del conjunto de las funciones pertenecientes a la clase sinusoidal, debemos, siguiendo los pasos de Pólya, dar algunas nociones sobre las ideas de entorno, punto de acumulación, conjunto derivado, etc., en un espacio de un número infinito de dimensiones.

Sean las funciones

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

enteras y de orden precisado equivalentes a $\rho(r)$. La totalidad de estas funciones las consideraremos como los puntos de un espacio a infinidad de dimensiones, y tan pronto hablaremos de la función $\Sigma\, a_n z^n$ como del punto $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Como es sabido la condición necesaria y suficiente para que la función $\Sigma\, a_n z^n$ sea de orden precisado equivalente a $\rho(r)$, o sea, para que esta función sea un punto del espacio últimamente definido, es que se cumpla

$$0 < \overline{\lim_{n=\infty}} \, | a_n |^{1/n} \, v\left(\frac{n}{\rho_0}\right) < \infty,$$

donde $v(x)$ es la función inversa de $x = U(r)$.

Sea $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ una sucesión de cantidades no negativas tales que

$$0 < \overline{\lim_{n=\infty}} \, \varepsilon_n^{1/n} \, v\left(\frac{n}{\rho_0}\right) < \infty,$$

entonces los puntos $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$, que verifican

$$|c_n - a_n| \leq \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

forman un entorno del punto $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ Si además

$$0 < \varliminf_{n=\infty} \varepsilon_n^{1/n}\, v\left(\frac{n}{\rho_0}\right),$$

el entorno será denominado entorno completo; mientras que, si

$$0 = \varliminf_{n=\infty} \varepsilon_n^{1/n}\, v\left(\frac{n}{\rho_0}\right),$$

el entorno será denominado entorno incompleto.

Si la función $\Sigma\, c_n z^n$ es tal que

$$\lim_{n=\infty} |c_n - a_n|^{1/n}\, v\left(\frac{n}{\rho_0}\right) = 0,$$

la función $\Sigma\, (a_n - c_n)\, z^n$ es de orden precisado inferior a $\rho(r)$. En este caso consideraremos las funciones

$$\Sigma\, a_n z^n, \qquad \Sigma\, c_n z^n,$$

como representativas del mismo punto de nuestro espacio. Esto es posible en nuestro caso puesto que las dos funciones admitirán o no admitirán, pero ambas al mismo tiempo, una función excepcional y, del mismo modo, si una de ellas es de la clase sinusoidal la otra también pertenecerá a esta misma clase.

Ahora se comprende, sin más explicaciones, que al hablar de un conjunto de funciones de nuestro espacio indicaremos siempre un conjunto que contenga, al mismo tiempo que una función, todas las funciones que, según la convención anterior, representen el mismo punto.

Tampoco ofrece ninguna dificultad la definición del conjunto complementario de un conjunto determinado.

Pasemos ahora a la definición de punto de acumulación:

El punto $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, llámase punto de acumulación del conjunto G, o lo que es lo mismo, punto perteneciente al conjunto derivado G' de G, cuando y solo cuando, en cualquier entorno completo del punto $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, es posible encontrar un punto perteneciente a G, que no sea el mismo punto $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, según la convención anterior.

Fácil es constatar que estos conjuntos derivados tienen las mismas propiedades que en la clásica teoría de los conjuntos.

Sea G un conjunto cualquiera de puntos de nuestro espacio, G' su conjunto derivado, G_1 el complementario de G y G_1' el derivado de G_1; como habitualmente daremos las siguientes definiciones:

G será llamado cerrado, si todos los puntos de G' pertenecen a G, y perfecto, si además se cumple la condición inversa, es decir, si todo punto de G pertenece a G'.

Un punto será llamado punto interior de G, si pertenece a G y a G' y no pertenece a G_1'.

G será un conjunto abierto, si todos sus puntos son interiores.

Finalmente, G será denso en todo el espacio y en todas direcciones si en un entorno cualquiera (completo o incompleto) de todo punto del espacio existe siempre un punto de G distinto del punto dado.

2,4. — Actualmente podemos ya enunciar y demostrar el teorema siguiente:

Teorema 2,4. — *Sea G el conjunto de las funciones de orden precisado equivalente a $\rho(r)$ que no pertenecen a la clase sinusoidal, puede afirmarse*

(I) *G es denso en todo el espacio y en todas direcciones.*

(II) *G es abierto.*

Demostración. — Empezaremos por demostrar (I). Sea

$$F(z) = \Sigma\, a_n z^n$$

una función dada cualquiera de orden precisado equivalente a $\rho(r)$ y $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, un entorno (completo o incompleto) cualquiera. Evidentemente es posible determinar una sucesión de números enteros l_k tal que $l_k < l_{k+1}$ y

$$0 < \lim_{k=\infty} \varepsilon_{l_k}{}^{1/l_k}\, v\left(\frac{l_k}{\rho_0}\right) < \infty$$

y que la densidad máxima de la sucesión de los l_k sea nula. Poniendo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{l_k} z^{l_k},$$

demostraremos que, al menos una de las funciones

$$H_1(z) = F(z) + f(z), \qquad H_2(z) = F(z) - f(z),$$

no es de la clase sinusoidal.

En efecto, supongamos contrariamente que las dos sean de la clase sinusoidal y consideremos una sucesión R_n ($\lim R_n = \infty$) tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, f)}{U(R_n)} = b > 0,$$

de la igualdad

$$2\, f(z) = H_1(z) - H_2(z) \tag{2,41}$$

resulta que

$$b \leqq \max \left[\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log M(R_n, H_1)}{U(R_n)}, \ \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log M(R_n, H_2)}{U(R_n)} \right].$$

Por lo tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe una sucesión r_n que verifica

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, f)}{U(r_n)} = b \leqq \lim_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, H_1)}{U(r_n)} = b_1,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, H_2)}{U(r_n)} = b_2 \leqq b_1;$$

y puesto que $H_1(z)$ y $H_2(z)$ son, según suponemos, de la clase sinusoidal, si representamos por θ el valor que cumple la igualdad

$$b = 2\, b_1 \cos \rho_0\, \theta$$

y si α_n y $\alpha_n{}'$ son las sucesiones correspondientes a $H_1(z)$ y $H_2(z)$ (7), para Ω suficientemente próxima a la unidad y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, en los puntos que verifican

$$\Omega^{-1} r_n < |z| < \Omega\, r_n,$$

$$\left| \arg z - \alpha_n - \frac{2\pi m}{\rho_0} \right| > \theta + \varepsilon \qquad (m = 0, 1, \ldots, \rho_0 - 1).$$

$$\left| \arg z - \alpha_n{}' - \frac{2\pi m}{\rho_0} \right| > \theta + \varepsilon \qquad (m = 0, 1, \ldots, \rho_0 - 1),$$

a partir de un valor de n, tendremos

$$\log |H_1(z)| < \frac{b}{2} U(r_n), \qquad \log |H_2(z)| < \frac{b}{2} U(r_n),$$

---

(7) Si $b_2 = 0$, la sucesión de las α'_n es indeterminada, pero en este caso la sucesión de las α'_n no tiene importancia.

y en consecuencia,

$$\log |f(z)| < \frac{b}{2} U(r_n),$$

lo cual, según el lema 1,3, es imposible; puesto que según hemos supuesto, la sucesión de los l_k tiene la densidad máxima igual a cero.

Pasemos seguidamente a la demostración de la afirmación (II) del teorema 2,4, o sea demostremos que G es abierto.

Sea $f(z)$ una función que no pertenece a la clase sinusoidal, existirán, pues, cuatro sucesiones r_n, α_n, θ_n y q_n tales que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, f)}{U(r_n)} = \lim_{n=\infty} \frac{\log |f(r_n e^{i\alpha_n})|}{U(r_n)} = b > 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \theta_n = \theta, \qquad 0 < \lim_{n=\infty} q_n = q < \infty,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |f(r_n q_n e^{i(\alpha_n+\theta_n)})|}{U(r_n)} = q^{\rho_0} b' > b\, q^{\rho_0} [\cos \rho_0 \theta]^+ .$$

Por otra parte, si

$$0 < \lim_{n=\infty} \varepsilon_n^{1/n}\, v\left(\frac{n}{\rho_0}\right) = d < (e \min [b, b'])^{1/\rho_0},$$

toda función

$$\varphi(z) = \Sigma\, c_n z^n,$$

tal que $|c_n| \leq \varepsilon_n$, satisface a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, \varphi)}{U(r)} < \min [b, b'],$$

por lo tanto, escribiendo $F(z) = f(z) + \varphi(z)$, tendremos

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(r_n, F)}{U(r_n)} = \lim_{n=\infty} \frac{\log |F(r_n e^{i\alpha_n})|}{U(r_n)} = b,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |F(r_n q_n e^{i(\alpha_n+\theta_n)})|}{U(r_n)} = b' q^{\rho_0},$$

lo cual demuestra que todas las funciones del entorno $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, de la función $f(z)$ no pertenecen a la clase sinusoidal.

El lema 2,1 nos permite deducir del teorema 2,4 el siguiente:

COROLARIO. *El conjunto de las funciones de orden precisado equivalente a $\rho(r)$ que no admiten una excepción, es denso en todo el espacio y en todas direcciones. Además el conjunto formado por sus puntos interiores tiene la misma propiedad.*

2,5. TEOREMA 2,5. — *El conjunto de las funciones de orden precisado equivalente a $\rho(r)$ y que pertenecen a la clase sinusoidal es perfecto y carece de puntos interiores.*

Este teorema tiene una demostración sumamente simple pero creemos interesante dar su enunciado y su demostración, pues con él, queda totalmente señalado el paralelismo entre los resultados de PÓLYA, sobre las series que no pueden prolongarse más allá de su círculo de convergencia, y el tema que tratamos en este capítulo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f(z)$ una función de la clase sinusoidal, evidentemente toda función

$$f(z) + f(qz) \qquad (0 < q < 1)$$

será asimismo de la clase sinusoidal; además, dado un entorno completo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, cualquiera, es posible siempre determinar el número q suficientemente pequeño para que $|a_n| q^n < \varepsilon_n$, es decir, para que la función

$$F(z) = f(z) + f(qz)$$

sea una función perteneciente al entorno $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, de $f(z)$; lo cual, teniendo en cuenta que, según el teorema 2,4, el complementario del conjunto de las funciones de la clase sinusoidal es abierto y denso en todas partes, completa la demostración.

2,6. — Finalmente, demostraremos un teorema que, por su enunciado, nos recordará un teorema dado por FATOU y demostrado por PÓLYA.

TEOREMA 2,6. *Dada una función entera*

$$F(z) = \Sigma\, a_n z^n$$

de orden precisado equivalente a $\rho(r)$, es suficiente cambiar el signo a lo sumo de una infinidad de coeficientes a_n elegidos convenientemente, para que la función $F_1(z)$ representada por la nueva serie, no admita una excepción.

En realidad, mediante un método de demostración semejante al empleado en una de mis memorias [9 b n.° 6], podría obtenerse un resultado algo más preciso, a saber, podría afirmarse la existencia de una cantidad $B > 0$ que depende únicamente de F, y tal que, cualesquiera que sean $f_0(z)$ (no idénticamente nula) y $f_1(z)$ enteras y de orden precisado inferior a $\rho(r)$, se cumpla

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n\left(r, \dfrac{1}{f_0 F_1 - f_1}\right)}{U(r)} \geq B\, C(\rho_0),$$

donde $C(\rho_0)$ es la misma constante que interviene en el enunciado del lema 1,2. Sin embargo nos limitaremos a dar la demostración del enunciado menos preciso que hemos dado.

Demostración. Si $F(z)$ no admite una excepción la demostración del teorema es innecesaria, pues basta con no cambiar el signo de ningún coeficiente o de un número finito de ellos, para ver que el teorema se cumple.

Si $F(z)$ admite una excepción la demostración puede obtenerse del modo siguiente. Evidentemente es posible determinar una sucesión l_k de números enteros, de modo que su densidad máxima sea nula y que

$$0 < \lim_{k=\infty} \left| a_{l_k} \right|^{1/l_k} \nu\left(\frac{l_k}{\rho_0}\right)$$

y, por lo tanto cambiando el signo de todos los a_{l_k}, obtendremos para $F_1(z)$ la expresión

$$F_1(z) = F(z) - 2\, f(z),$$

donde

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{l_k} z^{l_k}.$$

Si $F(z)$ y $F_1(z)$ admiten una excepción, por el lema 2,1, resultará que ambas serán de la clase sinusoidal, y, por lo tanto, razonado sobre la igualdad

$$2\, f(z) = F(z) - F_1(z)$$

como lo hemos hecho a partir de (2,41) llegaremos a un absurdo; queda, pues, demostrado el teorema.

CAPITULO III

TEOREMAS DE UNICIDAD

3,1. — En el año 1921 PÓLYA [8] obtuvo un teorema para las funciones enteras de orden finito, teorema que, posteriormente, R. NEVANLINNA generalizó a las funciones meromorfas de orden cualquiera [6 b teorema 5]. Este teorema fué generalizado a su vez por CARTAN [2]. Finalmente, es fácil, siguiendo los procedimientos de NEVANLINNA, obtener la generalización del resultado de CARTAN ; generalización que daremos seguidamente sin demostración, pero antes de dar el enunciado es necesario definir lo que entendemos por conjuntos equivalentes.

DEFINICIÓN. *Sea $E_1(a)$ el conjunto de los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, donde $f_1(z)$ toma el valor a y $E_2(a)$ el de los $z_1', z_2', z_n' \ldots$, donde $f_2(z)$ toma, asimismo, el valor a. Representemos por E_0 el conjunto de los puntos que pertenecen a E_1 sin pertenecer a E_2 más los puntos que pertenecen a E_2 sin pertenecer a E_1 ; y sea $n_0(r)$ el número de puntos de E_0 interiores al círculo $|z| \leq r$. Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de orden finito y se verifica*

$$n_0(r) < \varepsilon(r)\,[T(r, f_1) + T(r, f_2)] \quad (^9),$$

o bien si una de las $f_1(z)$ y $f_2(z)$ es de orden infinito y se verifica,

$$\log n_0(r) < \theta(r) \log [T(r, f_1) + T(r, f_2)] \qquad (\lim \theta(r) < 1)$$

diremos que E_1 y E_2 son equivalentes.

Con esta definición podremos (tal como acabamos de indicar) enunciar la generalización mencionada en la forma siguiente :

Sea $E_1(a)$ el conjunto de puntos donde la función $f_1(z)$ toma el valor a y $E_2(a)$ el mismo conjunto para la función $f_2(z)$. Si por cuatro valores diferentes a_1, a_2, a_3 y a_4 los conjuntos $E_1(a_1)$, $E_1(a_2)$, $E_1(a_3)$ y $E_1(a_4)$ son respectivamente equivalentes a los $E_2(a_1)$, $E_2(a_2)$, $E_2(a_3)$ y $E_2(a_4)$, las funciones verifican

$$f_1(z) \equiv f_2(z),$$

solamente existe una excepción cuando simultáneamente se cumplen.

---

(8) PÓLYA (G) Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen (Mathematisk Tidskrift, B, 1921). Esta memoria, lo mismo que la citada en (6), no me ha sido posible consultarla, por lo tanto, no figura en la lista bibliográfica.

(9) Cuando $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son de orden cero esta condición debe substituirse por otra muy fácil de deducir.

1.° *Dos valores, por ejemplo* a_1 y a_3, *son excepcionales en el sentido de* Borel - Lindelöf *por las dos funciones.*

2.° *Los cuatro valores* a_1, a_2, a_3, a_4 *son anarmónicos.*

En este caso las funciones $f_1(z)$ *y* $f_2(z)$ *pueden ser diferentes.*

En este número nos proponemos demostrar que, si $f_1(z)$ se puede representar en la forma

$$f_1(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)},$$

donde $F_1(z)$ y $F_2(z)$ son dos funciones enteras que no se anulan simultáneamente, y además los desarrollos Taylor alrededor del origen de las funciones $F_1(z)$ y $F_2(z)$ cumplen ciertas condiciones lagunares, desaparece la posibilidad de la excepción prevista en el teorema anterior.

Antes de enunciar nuestro teorema, a fin de simplificar su enunciado, daremos una definición.

Definición. *Sea*

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)}$$

una función meromorfa de orden ρ_0 *y de orden precisado equivalente a* $\rho(r)$, *si las funciones* $F_1(z)$ *y* $F_2(z)$ *son enteras de orden* ρ_0, *no tienen ceros en común y son representables en la forma*

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}, \qquad F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^{l'_k},$$

donde las densidades máximas D *de los* l_k *y* D' *de los* l'_k *verifican la condición*

$$q(\rho, F_1)\left[\frac{1}{\rho_0} - (q(\rho, F_2) + 1)D\right]^+ + q(\rho, F_2)\left[\frac{1}{\rho_0} - (q(\rho, F_1) + 1)D'\right]^+ > 0;$$

diremos entonces que $F(z)$ *es de la clase* L;

Asimismo $F(z)$ *será de la clase* L, *si siendo de orden infinito puede representarse en la forma*

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)},$$

donde $F_1(z)$ *y* $F_2(z)$ *no tienen ceros en común y los exponentes* l_k *y* l_k' *de sus desarrollos* Taylor *cumplen la*

$$q(W, F_1)\left[1 - \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log k(x)}{\log x}\right]^+ + q(W, F_2)\left[1 - \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log k^{(1)}(x)}{\log x}\right]^+ > 0.$$

Para el significado de algunas de las notaciones véase [9 **b** n.° 4 y 15].

TEOREMA 3,1. *Si los conjuntos $E_1(a_1)$, $E_1(a_2)$, $E_1(a_3)$ y $E_1(a_4)$ de la función $f_1(z)$ de la clase L son equivalentes respectivamente a los conjuntos $E_2(a_1)$, $E_2(a_2)$, $E_2(a_3)$ y $E_2(a_4)$ de la función $f_2(z)$, entonces, sin excepción posible,*

$$f_1(z) \equiv f_2(z) \quad (^{10}).$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, según el teorema anteriormente enunciado, el caso excepcional solamente puede presentarse cuando dos de los valores a_1, a_2, a_3 y a_4 son excepcionales en el sentido de BOREL - LINDELOF para $f_1(z)$; pero como, según [9 **b** teorema I y teorema III, n.° 15 nota], ninguna función de la clase L puede tener dos valores excepcionales, podremos afirmar que la excepción no se presenta y que siempre

$$f_1(z) \equiv f_2(z),$$

que es lo que queríamos demostrar.

3,2. — En la misma memoria de NEVANLINNA citada en el número anterior, este autor demuestra un resultado (teorema 6) para las funciones meromorfas de orden finito no entero; a continuación vamos a demostrar que, en el caso de las funciones enteras, puede substituirse la condición de que el orden no sea entero por una condición lagunar de las series de TAYLOR que representan las funciones; a saber, puede enunciarse el siguiente teorema :

TEOREMA 3,2. *Sean*

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k} \qquad\qquad F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^{l'_k}$$

dos funciones enteras de orden finito ρ_0 y tales que las densidades máximas D de los l_k y *D' de los l'_k verifiquen*

$$D < \frac{1}{2\rho_0}, \qquad\qquad D' < \frac{1}{2\rho_0},$$

(10) Creo interesante subrayar que la hipótesis lagunar solamente afecta $f_1(z)$, tal vez en los teoremas 3,2 y 3,3, que después enunciaremos, puede también lograrse, mediante otra demostración, que la hipótesis lagunar intervenga tan sólo en una de las funciones; pero hasta ahora no me ha sido posible lograrlo.

si por dos valores finitos a y b los conjuntos $E_1(a)$ y $E_1(b)$ de $F_1(z)$ son respectivamente equivalentes a los $E_2(a)$ y $E_2(b)$ de $F_2(z)$, entonces

$$F_1(z) \equiv F_2(z).$$

Demostración. Si ρ_0 no es entero el teorema no necesita demostración pues es el de Nevanlinna, para las funciones enteras, con una condición lagunar, innecesaria en este caso.

Supongamos pues ρ_0 entero, y escribamos, como Nevanlinna,

$$\frac{F_1(z)-a}{F_2(z)-a} = \varphi_1(z), \qquad \frac{F_1(z)-b}{F_2(z)-b} = \varphi_2(z)$$

y, si $\varphi_1(z)$ no es idéntica a $\varphi_2(z)$,

$$(3{,}21) \qquad \begin{cases} F_1(z) = a-(a-b)\dfrac{1-\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)-\varphi_2(z)}\,\varphi_1(z), \\ F_2(z) = a-(a-b)\dfrac{1-\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)-\varphi_2(z)}, \end{cases}$$

de estas igualdades se deduce

$$(3{,}22) \qquad \begin{cases} T(r, \varphi_s) \leq T(r, F_1) + T(r, F_2) + O(1) & (s = 1, 2), \\ T(r, F_s) \leq O\,(T(r, \varphi_1) + T(r, \varphi_2)) & (s = 1, 2). \end{cases}$$

Las condiciones del teorema nos permiten afirmar

$$(3{,}23) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{n\left(r, \dfrac{1}{\varphi_s}\right)}{U(r)} = \lim_{r=\infty} \frac{n(r, \varphi_s)}{U(r)} = 0 \qquad (s = 1, 2),$$

donde $U(r)$ es la función construída con un orden precisado tal que

$$U(r) \geq \max\,[\log M(r, F_1), \quad \log M(r, F_2)]$$

(es evidente que existe un orden precisado con estas propiedades) y que el signo de igualdad sea válido por lo menos por una sucesión r_n ($\lim r_n = \infty$); además puesto que las propiedades de $F_1(z)$ y de $F_2(z)$, según las hipótesis del teorema, son las mismas, sin pérdida de generalidad, podremos suponer

$$(3{,}24) \qquad U(r_n) = \log M(r_n, F_1) \geq \log M(r_n, F_2) \quad (^{11});$$

(11) Es para la validez de esta fórmula que hemos supuesto que la condición lagunar afecta a las dos funciones.

asimismo, sin perder tampoco generalidad, podemos suponer, según las (3,22),

$$\lim_{n=\infty} \frac{T(2r_n, \varphi_1)}{U(2r_n)} = c > C^*(\rho_0);$$

por tanto, el lema 1,2, teniendo en cuenta las (3,23), nos permite escribir, en

$$\Omega^{-1}\, 2r_n < r < \Omega\, 2r_n,$$

$$\left|\alpha - \alpha(2r_n, \varphi_1) + \frac{\pi}{\rho_0}\right| \leq \alpha' < \frac{\pi}{\rho_0} \qquad (z = r\, e^{i\alpha}),$$

excepto en un conjunto de pequeños círculos la suma de cuyos radios es inferior a $2\,\eta\,\Omega\, r_n/\theta$,

$$(3,25)\quad \log|\varphi_1(z)| < \left[\left(\frac{r}{2r_n}\right)^{\rho_0} c\cos(\rho_0\,\alpha - \rho_0\,\alpha(2r_n, \varphi_1)) + \varepsilon(r_n)\right] U(2r_n) <$$
$$< (-c\,\Omega^{-\rho_0}\cos\rho_0\,\alpha' + \varepsilon(r_n))\, U(r_n) = (-q + \varepsilon(r_n))\, U(r_n).$$

Finalmente si $\alpha' > \pi D$ del lema 1,3 y las fórmulas (3,21), (3,24) y (3,25), resultará la existencia de una sucesión de puntos z_n interiores a los dominios donde (3,25) se verifica, y que cumplen

$$(1 - \varepsilon(r_n))\, U(r_n) < \log|F_1(z_n)| < \log|F_2(z_n)| + \log|\varphi_1(z_n)| + \varepsilon(r_n) <$$
$$< \left(1 + \frac{2\eta\,\Omega}{\theta}\right)^{\rho_0} U(r_n) + (-q + \varepsilon(r_n))\, U(r_n).$$

Esto demuestra que debe cumplirse

$$q < \left(1 + \frac{2\eta\,\Omega}{\theta}\right)^{\rho_0} - 1;$$

pero como, una vez determinada α', la cantidad q será fija y positiva, mientras que η puede tomarse arbitrariamente pequeña sin que por ello varíe el valor de q, mediante la elección apropiada de η puede lograrse que la última desigualdad no pueda cumplirse; esto demuestra que

$$\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$$

y, en consecuencia, que

$$F_1(z) \equiv F_2(z).$$

que es lo que queríamos demostrar.

3,3. — A continuación vamos a demostrar un resultado semejante al teorema anterior pero en el cual para extender el teorema de NEVANLINNA, para las funciones enteras, al caso en que el orden sea entero se introduce, como hipótesis lagunar, una acotación de la densidad superior de los exponentes en lugar de acotar la densidad máxima de la misma sucesión de los exponentes como hemos hecho en el teorema 3,2.

DEFINICIÓN. *Sea* $A_0(\rho_0)$ *el extremo superior de las cantidades* A *tales que para todo valor de* α *tal que* $0 < \rho_0 \alpha < \pi A$ *se cumple*

$$\exp\left(7A + 3A\log\frac{\rho_0}{A} + \left|\sqrt{\pi^2 A^2 - \rho_0^2\alpha^2}\right|\right) -$$
$$- C^*(\rho_0)\exp\left(7A + 3A\log\frac{\rho_0}{A} - \left|\sqrt{\pi^2 A^2 - \rho_0^2\alpha^2}\right|\right)\cos\rho_0\alpha < 1.$$

Después de esta definición podemos ya enunciar y demostrar el siguiente

TEOREMA 3,3. *Sean*

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}, \qquad F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^{l'_k}$$

dos funciones enteras de orden finito ρ_0 *y tales que las densidades superiores* D_0 *de los* l_k *y* D'_0 *de los* l'_k *verifiquen*

$$D_0 < \frac{A_0(\rho_0)}{\rho_0}, \qquad D'_0 < \frac{A_0(\rho_0)}{\rho_0},$$

si por dos valores finitos a *y* b *los conjuntos* $E_1(a)$ *y* $E_1(b)$ *de* $F_1(z)$ *son respectivamente equivalentes a los* $E_2(a)$ *y* $E_2(b)$ *de* $F_2(z)$, *entonces*

$$F_1(z) \equiv F_2(z).$$

DEMOSTRACIÓN. Igual que en el número anterior supondremos ρ_0 entero; además es fácil ver que las fórmulas (3,21), (3,22), (3,23), (3,24) y (3,25) continuan siendo válidas.

Por otra parte, según un resultado de MANDELBROFT [4 Teorema F, fórmula (I)] sobre las series de DIRICHLET aplicable en el caso en que los exponentes son enteros, o sea cuando la serie es una serie de TAYLOR transformada, podemos afirmar, cualesquiera que sean $\varepsilon > 0$, α'' y R, que en el dominio definido por

$$|\log z - \log R - i\alpha''| < \pi D_0(1+\varepsilon),$$

existe siempre al menos un punto z' en el cual

(3,31) $$\log |F_1(z')| >$$

$$> \log |a_k| + l_k \log R - \log (\overset{*}{\Lambda}_k l_k) - q(\varepsilon, a_0) \quad [12].$$

Además según la misma memoria de MANDELBROFT (pág. 355), si k es suficientemente grande, resulta

(3,32) $$\frac{-\log (\overset{*}{\Lambda}_k l_k) - q(\varepsilon, a_0)}{l_k} \geq -D_0 (7 - 3 \log D_0) - \varepsilon,$$

ahora bien, determinando k de forma que dé el máximo valor a la expresión

$$\log |a_k| + l_k (\log R - D_0 (7 - 3 \log D_0) - \varepsilon),$$

cuando R sea suficientemente grande, este valor de k cumplirá asimismo la (3,32) y, por tanto, si escribimos $h_1 = -D_0 (7 - 3 \log D_0)$ resultará para estos valores de R y teniendo en cuenta (3,31)

(3,33) $$\log |F_1(z')| > \log \mu (R e^{h_1 - \varepsilon}),$$

donde $\mu(r)$ representa el máximo de la expresión

$$|a_k| r^{l_k}$$

cuando k describe la sucesión de los números enteros no negativos.

Como, según VALIRON, para las funciones enteras de orden finito se cumplen las desigualdades

$$(1 - \varepsilon(r)) \log M(r, F_1) < \log \mu(r) < \log M(r, F_1);$$

de todo lo que antecede resulta, puesto que ε es arbitraria, la existencia para todo valor de R y de α'' de un punto z' que verifica

$$|\arg z' - \alpha''| < \pi D_0 + \varepsilon(R),$$

$$|\log |z'| - \log R| < |\sqrt{\pi^2 D_0^2 - (\arg z' - \alpha'')^2}| + \varepsilon(R),$$

(3,34) $$\log |F_1(z')| > (1 - \varepsilon(R)) \log M(R e^{h_1 - \varepsilon(R)}, F_1)$$

---

[12] La expresión $\overset{*}{\Lambda}_k$ la consideramos definida, a partir de los l_k, de la misma manera que Mandelbroft la define a partir de λ_n.

Si suponemos que sucesivamente

$$R = r_n e^{-h_1}, \qquad \alpha'' = \alpha(r_n, \varphi_1) + \frac{\pi}{\rho_0}, \qquad (n = 1, 2, \ldots..);$$

de (3,21), (3,24), (3,25) y (3,34) resulta que existe una sucesión de puntos z'_n tales que

$$(3{,}35)\ (1-\varepsilon(r_n))U(r_n) < \log|F_1(z'_n)| < \log|F_2(z'_n)| + \log|\varphi_1(z'_n)| + \varepsilon(r_n) <$$
$$\left(1+\frac{2\eta\Omega}{\theta}\right)^{\rho_0} e^{\lambda_1}\, U(r_n) - c\, e^{\lambda_2}\, U(r_n) \cos \rho_0 \alpha_n + \varepsilon(r_n)\, U(r_n),$$

donde

$$\alpha_n = \arg z'_n - \alpha(r_n, \varphi_1) - \frac{\pi}{\rho_0},$$
$$\lambda_1 = -\rho_0 h_1 + |\sqrt{\rho_0^2 \pi^2 D_0^2 - \rho_0^2 \alpha_n^2}|;$$
$$\lambda_2 = -\rho_0 h_1 - |\sqrt{\rho_0^2 \pi^2 D_0^2 - \rho_0^2 \alpha''^2}|;$$

puesto que η es arbitrario, la definición de $A_0(\rho_0)$ y las hipótesis del teorema demuestran que las desigualdades (3,35) son imposibles; la demostración termina como en el número anterior.

3,4. — Nevanlinna y Cartan indican que su teorema enunciado al principio de este capítulo y el teorema del primero citado en el n.° 3,2 pueden generalizarse suponiendo únicamente que las funciones que en ellos intervienen tienen las propiedades requeridas en los mismos en un entorno del punto infinito, supuesto singular esencial, y no en la totalidad del plano.

Mediante ligeros cambios en los resultados de nuestra memoria [9 b] y en las demostraciones de la presente, puede verse que asimismo nuestros teoremas 3,1, 3,2 y 3,3 son válidos si suponemos que las funciones que en ellos intervienen cumplen las condiciones impuestas en un entorno del punto infinito, supuesto singular esencial, y que los desarrollos de Laurent tienen las propiedades lagunares en las series con exponentes positivos, esto es, que los desarrollos son de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' z^{-n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k},$$

donde como de costumbre l_k son enteros que verifican

$$0 = l_0 < l_1 < \ldots < l_k < \ldots$$

y tienen las propiedades lagunares impuestas en los teoremas correspondientes.

CAPITULO IV

VALORES ASINTÓTICOS

4,1. — Pólya, en su célebre memoria sobre series lagunares, da una condición lagunar suficiente para que una función entera, de orden finito, no pueda permanecer acotada cuando la variable tiende al infinito conservando constante su argumento [7 a cap. III, teorema VII]. Además, su teorema IX del mismo capítulo puede aplicarse asimismo para indicar una condición suficiente para que la función entera de orden finito no pueda permanecer acotada en ninguna curva continua que tienda al infinito. Naturalmente, con mayor motivo, estas dos condiciones son suficientes para imposibilitar la existencia de valores asintóticos, en el primer caso, cuando la variable tiende al infinito siguiendo una recta que parte del origen, y en el segundo, cuando tiende al infinito siguiendo una curva continua cualquiera.

Pero mientras la primera condición no puede mejorarse, la segunda resulta excesiva para la no existencia de valores asintóticos (pero no para el resultado de Pólya), como se intuye con sólo ver la rapidez con que, según el citado teorema IX de Polya, debe crecer el módulo de la función a lo largo de una curva continua cualquiera que tienda al infinito.

En el presente capítulo trataremos de hallar una condición lagunar más débil que la del teorema IX de Pólya y además daremos una generalización del teorema que para los valores asintóticos se deduce del teorema VII de Pólya; pero antes daremos una clasificación de los valores asintóticos según la clase de curvas que sigue la variable al tender al infinito y según la rapidez con que la función tiende a dicho valor asintótico. Ya Rolf Nevanlinna [6 c pág. 96] indica que, tal vez, para estudiar la relación entre los valores asintóticos y los valores excepcionales, sería interesante tener en cuenta dicha rapidez; además Milloux [5] al estudiar el número de valores asintóticos que puede tener una función entera de orden infinito, hace uso de la rapidez con que la función tiende a dichos valores asintóticos. En este capítulo veremos que, en el tema que nos ocupa, tiene asimismo importancia la repetida rapidez con que la función tiende al valor asintótico.

Diremos que z tiende al infinito siguiendo una curva continua, si los puntos z en cuestión pueden representarse mediante la igualdad

$z = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es una función continua para todo valor real positivo de t y

$$\lim_{t=\infty} \varphi(t) = \infty \,.$$

Si, además,

$$\lim_{t=\infty} \arg \varphi(t)$$

existe y es finito, entonces la curva será llamada casi radial.

Representemos por Δ la totalidad de las curvas continuas que tienden al infinito y por Δ_1 el subconjunto de Δ formado por las curvas casi radiales.

Por otro lado, si G representa un conjunto cualquiera de curvas y X un número real determinado por cada curva φ de G la expresión

$$\underset{\varphi \,\varepsilon\, G}{\underline{\text{extremo}}}\; X = X_0 \,,$$

significará que X_0 es el extremo inferior del conjunto de valores que toma el funcional X en el conjunto G.

Sea $F(z)$ una función entera de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, si

$$\underset{\varphi \,\varepsilon\, \Delta}{\underline{\text{extremo}}}\; \overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log |\, F(\varphi(t)) - a \,|}{U(|\,\varphi(t)\,|)} = -\, b_0 \,, \tag{4,11}$$

diremos que a es un valor asintótico de tipo b_0 de $F(z)$. Si en la fórmula anterior se substituye el conjunto Δ por el subconjunto Δ_1, entonces diremos que a es un valor asintótico casi radial de tipo b_0 de la función $F(z)$.

En realidad únicamente si $b_0 > 0$ podemos afirmar que a sea un valor asintótico en el sentido que siempre se le da a esta expresión; cuando $b_0 = 0$ la igualdad (4,11) será satisfecha por cualquier valor finito de a, siendo así, que, según el teorema de Denjoy - Carleman - Ahlfors, como máximo un número finito de valores de a serán en realidad valores asintóticos. Finalmente, si $b_0 < 0$ la igualdad (4,11) indica precisamente que la función no tiene ningún valor asintótico (asimismo en este caso b_0 es independiente de a) pero nos informa sobre la existencia de curvas continuas que tienden al infinito en las cuales, si $b_0 > -1$, la expresión $|\, F(z) \,|$ crece menos rápidamente que $M(r, F)$. Por lo tanto, nosotros continuaremos, a fin de abreviar, incluso en los casos en que $b_0 \lesssim 0$, a pesar de ser una denominación evidentemente impropia, diciendo que $F(z)$ tiene un valor asintótico de tipo b_0.

4,2. — TEOREMA 4,2. *Sea*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^{l_k}$$

una función entera de tipo 1 *del orden precisado* $\rho(r)$, *si la densidad máxima* D *de los* l_k *verifica*

$$D < \frac{1}{2\rho_0} + \frac{1}{\pi \rho_0} \text{ arc sin } b_0,$$

la función $F(z)$ *no tiene valores asintóticos casi radiales de tipo igual o superior a* b_0.

DEMOSTRACIÓN. Según VALIRON (véase por ej. [10 n.° 20]) cualesquiera que sean $\rho(r)$ y $\varepsilon > 0$, existe una función $V(z)$ holomorfa en $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2\rho_0} - \varepsilon$ $(z = r\, e^{i\alpha})$ tal que $V(r) = U(r)$ y que en el ángulo citado la expresión

$$\frac{V(r\, e^{i\alpha})}{U(r)}$$

tiende uniformemente hacia $e^{i\rho_0 \alpha}$ cuando r crece indefinidamente.

Supongamos que $F(z)$ tenga el valor asintótico casi radial a de tipo b_0. Entonces, mediante la sustitución de z por $z\, e^{i\theta}$, podremos suponer que existe una curva tal que, cuando z tiende al infinito sobre esta curva se cumplen

$$\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log | F(z) - a |}{U(r)}, = - b \qquad (z = \varphi(t), \qquad r = | \varphi(t) |)$$

donde $b_0 \geq b > b_0 - \varepsilon$ y

$$\lim_{t=\infty} \arg z = 0.$$

Por lo tanto, en la curva se verificará

$$\left| (F(z) - a)\, e^{i(1+\varepsilon) V(\lambda z)} \right| < q \qquad \left(\lambda = \exp \left(- \frac{i}{\rho_0} \text{ arc. sen } (b_0 - 2\varepsilon) \right) \right)$$

y la misma desigualdad, si ε es suficientemente pequeña, será satisfecha en la recta definida por

$$\arg z = \frac{\pi}{2\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{arc\,sen}(b_0 - 2\varepsilon) - \varepsilon,$$

entonces, siguiendo un procedimiento igual que en la demostración del teorema de PHRAGMEN - LINDELÖF, veremos que, en el ángulo

$$(4,21) \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{arc\,sen}(b_0 - 2\varepsilon) - \varepsilon,$$

se verifica

$$(4,22) \qquad \frac{\log |F(r e^{i\alpha}) - a|}{U(r)} < (1+\varepsilon) \operatorname{sen}(\rho_0 \alpha - \operatorname{arc\,sen}(b_0 - 2\varepsilon)) + \varepsilon(r).$$

En el ángulo simétrico de (4,21) respecto al eje real puede demostrarse de la misma forma que se cumple

$$(4,23) \qquad \frac{\log |F(r e^{i\alpha}) - a|}{U(r)} < (1+\varepsilon) \operatorname{sen}(\rho_0 |\alpha| - \operatorname{arc\,sen}(b_0 - 2\varepsilon)) + \varepsilon(r).$$

Por lo tanto, como ε es arbitraria, podemos suponer que

$$D + 2\varepsilon < \frac{1}{2\rho_0} + \frac{1}{\pi\rho_0} \operatorname{arc\,sen}(b_0 - 2\varepsilon)$$

y

$$(1+\varepsilon) \operatorname{sen}(\pi\rho_0 D + \pi\rho_0 \varepsilon - \operatorname{arc\,sen}(b_0 - 2\varepsilon)) < 1 - \varepsilon;$$

con esta condición y teniendo en cuenta (4,22) y (4, 23), resulta que, en el ángulo

$$|\alpha| < \pi D + \pi\varepsilon,$$

se verificará

$$\frac{\log |F(r e^{i\alpha})|}{U(r)} < 1 - \varepsilon + \varepsilon(r),$$

desigualdad que siendo $F(z)$ de tipo 1 está en contradición con el lema 1,3. Queda, pues, demostrado el teorema.

Si $b_0 < 0$ también podíamos desarrollar la demostración en la forma siguiente: demostrar en primer término que la existencia de un valor asintótico casi radial de tipo b_0 implica la existencia de un ángulo tal que

$$\alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + 2 \frac{1}{\rho_0} \text{ arc sen } b_0$$

en el cual el indicador de crecimiento

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log | F(r e^{i\alpha}) |}{U(r)}$$

no es positivo, y aplicar luego el teorema de Pólya citado al principio de este capítulo [7 **a** cap. III, teorema VII]. No obstante, por diversas razones hemos creído preferible dar la demostración completa sin apoyarnos en el teorema de Pólya, sin embargo se comprende inmediatamente que la idea está contenida en el teorema últimamente citado.

4,3. — Cuando en lugar de utilizar la densidad máxima, para definir la propiedad lagunar de la serie, se utiliza la densidad superior, es posible asimismo dar un resultado semejante al anterior; pero mientras para el teorema 4,2 puede demostrarse, mediante ejemplo, que, al menos en algunos casos, la condición lagunar impuesta no puede debilitarse sin que el resultado deje de cumplirse, en el caso que vamos a estudiar no conocemos ejemplo alguno de este género, y nada nos permite afirmar que la condición lagunar que imponemos no sea excesiva; nosotros creemos que efectivamente así es, pero que la condición precisa no es mucho más débil.

Antes de enunciar el teorema correspondiente debemos dar la definición de una cantidad que intervendrá en el enunciado y en la demostración; esta definición tiene gran semejanza con la definición que tuvimos que dar al estudiar la condición suficiente, expresada mediante la densidad superior de los exponentes de la serie de Taylor, para que la función entera por ella representada, no pueda tener valores excepcionales en el sentido de Borel - Lindelof [9 **a** definición de la cantidad $A(\rho_0)$].

Definición. *Sea* $A_1(\rho_0, \alpha_0)$ *el extremo superior de las cantidades* $A_1 < \rho_0$ *que para todo valor de* α *que satisface a* $\rho_0 \alpha_0 < \rho_0 \alpha < \pi A_1$, *cumplen la*

$$\log [\operatorname{sen} (\rho_0 \alpha - \rho_0 \alpha_0)] + A_1 \left(7 + 3 \log \frac{\rho_0}{A_1} \right) + | \sqrt{\pi^2 A_1^2 - \rho_0^2 \alpha^2} | \leq 0;$$

evidentemente $A_1 (\rho_0, \alpha_0)$ es una función no decreciente de α_0

Una vez definida esta función de ρ_0 y de α_0 podemos ya pasar al enunciado y demostrar seguidamente el teorema que nos interesa.

TEOREMA 4,3. *Sea*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}$$

una función de orden ρ_0 *y tipo* 1 *del orden precisado* $\rho(r)$, *tal que la densidad superior* D_0 *de los* l_k *verifique*

$$D_0 < \frac{A_1 (\rho_0, \alpha_0)}{\rho_0},$$

entonces esta función no puede tener valores asintóticos casi radiales de tipo igual o superior a $b_0 = \operatorname{sen} \rho_0 \alpha_0$

DEMOSTRACIÓN. Según el resultado de MANDELBROJT citado en el n.° 3,3 y razonando sobre $F(z)$, como, en el mencionado n.°, hemos hecho sobre $F_1(z)$, veremos que si R_n ($\lim R_n = \infty$) es una sucesión tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, F)}{U(R_n)} = 1,$$

cualquiera que sea α'' podremos extraer una sucesión parcial, que continuaremos llamando R_n, para la cual existirá una sucesión de puntos z'_n que verificarán

$$\lim_{n=\infty} (\arg z'_n - \alpha'') = \alpha; \qquad | \alpha | \leq \pi D_0,$$

$$\lim_{n=\infty} | \log | z'_n | + h_1 - \log R_n | \leq | \sqrt{\pi^2 D_0^2 - \alpha^2} |,$$

$$\log | F(z'_n) | > (1 - \varepsilon(R_n)) \, U(R_n),$$

por tanto, si $r_n = | z'_n |$, por las propiedades de los órdenes precisados tendremos

$$(4,31) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\log | F(z'_n) |}{U(r_n)} \geq \exp \left[\rho_0 h_1 - | \sqrt{\rho_0^2 \pi^2 D_0^2 - \rho_0^2 \alpha^2} | \right].$$

Si $F(z)$ tiene un valor asintótico casi radial de tipo b_0 y si ponemos

$$\alpha'' = \lim \arg \varphi(t)$$

veremos que las desigualdades (4,22) y (4,23) (teniendo en cuenta que ε es arbitraria) junto con la (4,31) demuestran en primer lugar que $\alpha \geq \alpha_0$, y luego, que

$$\text{sen}\,(\rho_0\,\alpha - \rho_0\,\alpha_0) \gtrsim \exp\left[\rho_0\,h_1 - \left|\sqrt{\rho_0^2\,\pi^2\,D_0^2 - \rho_0^2\,\alpha^2}\right|\right]$$

que según la definición de $A_1(\rho_0, \alpha_0)$ y las hipótesis del teorema, es imposible. Esto completa la demostración.

4,4. — Cuando los caminos que intervienen en la definición de los valores asintóticos no son casi radiales el método aplicado en la demostración de los teoremas anteriores, es inaplicable; podría pensarse tal vez en la aplicación previa de los teoremas de Ahlfors sobre la representación conforme de las fajas, pero al intentarlo resulta que de nuevo, aplicando el procedimiento de las demostraciones de los teoremas anteriores, es necesario, a fin de llegar a resultados concretos, introducir hipótesis restrictivas sobre la naturaleza de los caminos en los cuales la función tiende hacia los valores asintóticos. Por tanto, como nuestra intención es tratar el caso en que los caminos mencionados no cumplen otra condición que la de ser continuos y tender al infinito, debemos utilizar otro procedimiento; este será uno que usa Pólya [7 a cap. III, teorema IX], si bien nosotros al aplicar el teorema de Milloux lo haremos en una forma más precisa (forma dada en el lema 1,4) en lugar del enunciado que Pólya da para el mencionado teorema de Milloux.

Por este procedimiento obtendremos en primer lugar, un teorema que con una condición lagunar más débil que la del teorema de Pólya últimamente mencionado afirma la imposibilidad de existencia de valores asintóticos de tipo determinado, y, en segundo lugar, un resultado semejante en el cual la condición lagunar vendrá expresada mediante la densidad superior, contrariamente a lo que sucede en el teorema citado en primer lugar y que demostraremos seguidamente, en el que se utiliza la densidad máxima.

Antes, pero, debemos de nuevo dar la definición de una cantidad, la cual nos permitirá enunciar el teorema en una forma más breve y clara.

Definición. *La cantidad $A_2(b_0)$ será el extremo superior de las cantidades A para las cuales existe al menos un valor ω tal que*

$$1 < \omega < \text{cotang}\ \pi A \tag{4,41}$$

para el cual

$$\text{(4,42)} \qquad \cos \pi A + \omega \operatorname{sen} \pi A -$$

$$-((1+b_0)\cos \pi A + \omega \operatorname{sen} \pi A)\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} < 1.$$

Fácil es demostrar que $A_2(0) > \frac{1}{18}$ y que $A_2(b_0)$ es una función no decreciente de b_0.

Teorema 4,4. *Sea*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}$$

una función entera de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, si la densidad máxima D de la sucesión de los l_k verifica

$$D < \frac{A_2(b_0)}{\rho_0},$$

la función $F(z)$ no tiene ningún valor asintótico de tipo igual o superior a b_0.

Demostración. Pongamos

$$F_1(z) = F(z^{1/\rho_0}) - a.$$

Si a es un valor asintótico finito de tipo b_0 de $F(z)$, cualquiera que sea ε positiva, existirá una curva que podremos representar paramétricamente por $z = \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ es continua y $\lim\limits_{t=\infty} \varphi(t) = \infty$, y que verifica

$$\overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log |F_1(\varphi(t))|}{U_1(|\varphi(t)|)} \leq -b < -b_0 + \varepsilon \qquad \left(\log U_1(r) = \frac{\rho(r^{1/\rho_0})}{\rho_0} \log r\right)$$

Sea $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, una sucesión de números positivos que de momento dejaremos indeterminada, y sea t_n el valor de t determinado de la siguiente forma: si $b_0 > 0$ tomaremos t_n igual al máximo valor de t que verifica

$$r_n = |\varphi(t)|$$

y si $b_0 \leq 0$, t_n será el mínimo valor de t que satisface a la misma igualdad.

Sea C_n el círculo descrito alrededor del punto $\varphi(t_n)$ como centro y cuyo radio es

$$\tau_n = r_n \operatorname{tang}(\pi \rho_0 D + \varepsilon);$$

sea además ω_0 un valor que si en (4,41) y (4,42) se ponen $A = \rho_0 D$ y $\omega = \omega_0$ estas desigualdades quedan satisfechas, lo que, según las hipótesis del teorema, es posible.

Multiplicamos el radio de C_n por ω_0, obtendremos un círculo C'_n, y puesto que en este círculo se verifica

$$\log |F_1(z)| < (1 + \varepsilon(r_n))\, U_1(r_n + \omega_0 \tau_n)$$

y que, en una curva que partiendo del centro de este círculo llega hasta la circunferencia, se cumple

$$\log |F_1(z)| < (-b + \varepsilon(r_n))\, U_1(r_n),$$

podremos aplicar a C'_n el lema 1,4, y obtendremos el resultado siguiente: en los puntos interiores al círculo C_n tendremos

$$\log |F_1(z)| < (1 + \varepsilon(r_n))\Big[U_1(r_n + \omega_0 \tau_n) - \tag{4,43}$$
$$- (U_1(r_n + \omega_0 \tau_n) + b\, U_1(r_n)) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0 + 1}\Big].$$

Determinemos la sucesión de los r_n que habíamos dejado indeterminada. Sea R_n una sucesión de valores tales que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M(R_n, F_1)}{U_1(R_n)} = 1$$

(el significado de $M(r, F_1)$ es evidente a pesar de que $F_1(z)$ puede no ser uniforme) y determinamos r_n por

$$r_n = R_n \cos(\pi \rho_0 D + \varepsilon).$$

Aplicando el lema 1,3 a $F(z)$ y pasando seguidamente a $F_1(z)$ veremos que existe una sucesión de puntos z'_n tales que

$$\lim_{n=\infty} \frac{|z'_n|}{R_n} = 1, \qquad \overline{\lim_{n=\infty}}\, |\arg z'_n - \arg \varphi(t_n)| \leq \pi \rho_0 D,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log |F_1(z'_n)|}{U_1(R_n)} = 1; \tag{4,44}$$

pero por estas relaciones resulta que el punto z'_n es interior al círculo C_n correspondiente al valor t_n y, por consiguiente, de las (4,43) y (4,44) se deduce

$$\frac{U_1(r_n + \omega_0 \tau_n)}{U_1(R_n)} -$$

$$- \frac{U_1(r_n + \omega_0 \tau_n) + b\, U_1(r_n)}{U_1(R_n)} \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0 + 1} > 1 - \varepsilon(R_n).$$

y por las propiedades de los órdenes precisados resultará

$$\frac{r_n + \omega_0 \tau_n}{R_n} - \frac{r_n + \omega_0 \tau_n + b\, r_n}{R_n} \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0 + 1} > 1 - \varepsilon(R_n),$$

y puesto que

$$\frac{r_n}{R_n} = \cos(\pi \rho_0 D + \varepsilon), \qquad \frac{\tau_n}{R_n} = \operatorname{sen}(\pi \rho_0 D + \varepsilon),$$

escribiendo para abreviar $\theta = \pi \rho_0 D + \varepsilon$, tendremos finalmente

$$\cos\theta + \omega_0 \operatorname{sen}\theta -$$

$$- ((1 + b)\cos\theta + \omega_0 \operatorname{sen}\theta) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0 + 1} \geq 1,$$

y como ε es arbitraria, podremos suponer que en la anterior desigualdad $\varepsilon \to 0$ y pasando al límite

$$\cos(\pi \rho_0 D) + \omega_0 \operatorname{sen}(\pi \rho_0 D) -$$

$$- ((1 + b_0)\cos(\pi \rho_0 D) + \omega_0 \operatorname{sen}(\pi \rho_0 D)) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega_0 - 1}{\omega_0 + 1} \geq 1,$$

la cual está en contradicción con la elección de ω_0; este absurdo demuestra la imposibilidad de un valor asintótico de tipo igual o superior a b_0.

Eligiendo la relación entre r_n y R_n y la entre τ_n y R_n de diferente modo que lo hemos hecho podría hallarse una condición lagunar algo más débil pero asimismo suficiente para imposibilitar la existencia de valores asintóticos de tipo igual o superior a b_0, pero las fórmulas no resultarían tan simples y la mejora, para los primcipales valores de b_0, sería insignificante. Además, es muy probable que en los dos casos la cantidad $A_2(b_0)$, sea bastante inferior a la cantidad (cuya existencia resulta evidente después de lo dicho) que llamaremos $A_2^*(b_0)$, y que es tal que la condición

$$D < \frac{A_2^*(b_0)}{\rho_0}$$

es suficiente para afirmar la imposibilidad de la existencia de valores asintóticos de tipo igual o superior a b_0, mientras que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existirán funciones con tales valores asintóticos, para las cuales la densidad máxima D de los l_k verifica

$$D - \varepsilon < \frac{A_2^*(b_0)}{\rho_0} \leq D .$$

4,5. — En el caso en que la condición lagunar viene expresada mediante la densidad superior, podría abordarse el problema en una forma parecida a la del número anterior pero las fórmulas resultarían muy complicadas. Por consiguiente, utilizaremos una transformación que nos permitirá simplificar las fórmulas, y, al mismo tiempo, tendrá la ventaja de que los dominios donde acotaremos superiormente el módulo de la función mediante el lema 1,4, coincidirán con los dominios en que daremos una acotación inferior de este mismo módulo apoyándonos en un resultado de MANDELBROJT [4 teorema F] ya citado en los números 3,3 y 4,3.

DEFINICIÓN. *$A_3(\rho_0, b_0)$ será definido como el extremo superior de las cantidades $A < \rho_0$ que al menos por un $\omega > 1$ verifican*

$$\left(\frac{\rho_0}{A}\right)^{3A} e^{7A} \left[e^{\pi\omega A} - (e^{\pi\omega A} + b_0) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} \right] < 1 ;$$

evidentemente $A_3(\rho_0, b_0)$ es una función creciente de b_0.

TEOREMA 4,5. *Sea*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{l_k}$$

una función entera de tipo 1 del orden precisado $\rho(r)$, si la densidad superior D_0 de los l_k satisface a

$$D_0 < \frac{A_3(\rho_0, b_0)}{\rho_0} ,$$

la función $F(z)$ no tiene ningún valor asintótico de tipo igual o superior a b_0.

Demostración. Efectuemos la transformación de que hemos hablado antes del enunciado y que es la siguiente:

$$F(e^s) = f(s), \quad (^{13})$$

evidentemente, la función $f(s)$ vendrá representada por la serie de Dirichlet

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, e^{l_k s}$$

absolutamente convergente en todo punto finito del plano de la variable $s = x + i y$.

Sin necesidad de insistir, resulta que, si $M_1(x, f)$ representa el máximo de $|f(s)|$ en la recta formada por todos los puntos cuya abscisa es igual a x,

$$M(e^x, F) = M_1(x, f)$$

y

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log M_1(x, f)}{\Phi(x)} = 1,$$

donde $\Phi(x) = U(e^x)$. Además el resultado de Valiron citado en el n.° 3,3 nos permite escribir

$$\log M_1(x, f) \geq \log \mu_1(x) \geq (1 - \varepsilon(x)) \log M_1(x, f),$$

donde

$$\mu_1(x) = \max_{k \geq 0} |a_k| \, e^{l_k x}.$$

Este resultado ha sido demostrado directamente, por una clase de series de Dirichlet que comprende las que estamos estudiando, por K. Sugimura [8 teorema 5].

Pasemos seguidamente a la demostración propiamente dicha del teorema y supongamos, como anteriormente, que la función $F(z)$ tiene

(13) Generalmente se utiliza la transformación $z = e^{-s}$ en lugar de la $z = e^s$ empleada por nosotros, pero las fórmulas que siguen resultarían de escritura algo menos simple, entre otros motivos, puesto que los límites tendrían que tomarse cuando x tendiera a $-\infty$. Sin embargo, en el fondo, este cambio de signo no tiene absolutamente ninguna importancia.

un valor asintótico a de tipo b_0, esta suposición nos llevará a un absurdo, lo cual indicará claramente la imposibilidad de existencia de tal valor asintótico. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a = 0$. Estas hipótesis son equivalentes a la existencia, para cualquier valor de ε, de una función continua

$$\varphi_1(t) = g_1(t) + i\, g_2(t) \qquad (g_1(t), g_2(t) \text{ son reales})$$

y de un b tales que

$$\lim_{t=\infty} g_1(t) = \infty\,, \qquad b_0 - \varepsilon < b \leq b_0, \qquad \overline{\lim_{t=\infty}} \frac{\log |f(\varphi_1(t))|}{\Phi(g_1(t))} = -b\,.$$

Sea x_n ($\lim x_n = \infty$) una sucesión tal que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log M_1(x_n + h_1 - \varepsilon, f)}{\Phi(x_n + h_1 - \varepsilon)} = 1 \qquad (h_1 = -D_0(7 - 3\log D_0))\,.$$

y t_n la sucesión definida del siguiente modo: si $b_0 \leq 0$ el t_n será el menor valor de t que verifica $x_n = g_1(t)$, mientras que si $b_0 > 0$ el t_n será el mayor de estos mismos valores.

De nuevo sea C_n el círculo de centro $s_n = \varphi_1(t_n)$ al que actualmente supondremos de radio $\pi D_0 + \varepsilon$, según el resultado de MANDELBROJT citado en el n.° 3,3 y el resultado que podemos llamar de VALIRON - SUGIMURA, en el círculo C_n existirá un punto s'_n para el cual

$$\log |f(s'_n)| > (1 - \varepsilon(x_n))\, \Phi(x_n + h_1 - \varepsilon)\,.$$

Aplicando el lema 1,4 al círculo C'_n, obtenido multiplicando por ω el radio de C_n, deduciremos como en el número anterior, en C_n,

$$\log |f(s)| < (1 + \varepsilon(x_n)) \Big[\Phi(x_n + \omega\pi D_0 + \omega\varepsilon) -$$

$$- (\Phi(x_n + \omega\pi D_0 + \omega\varepsilon) + b\,\Phi(x_n)) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega - 1}{\omega + 1}\Big]\,.$$

Combinando estas dos últimas desigualdades, puesto que ε es arbitraria, se deduce finalmente, para cualquier valor de $\omega > 1$, que tendremos

$$e^{-\rho_0 h_1}\Big[e^{\pi\omega\rho_0 D_0} - (e^{\pi\omega\rho_0 D_0} + b_0) \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen} \frac{\omega - 1}{\omega + 1}\Big] < 1\,;$$

lo cual, dada la condición que cumple D_0 según la hipótesis del teorema, está en contradicción con la definición de $A_3(\rho_0, b_0)$; este es el absurdo que, según hemos dicho, demuestra el teorema.

4,6. — Como es sabido, la relación entre la densidad máxima y la densidad superior es la siguiente $D \gtrsim D_0$, esta relación nos permitiría deducir a partir de los teoremas 4,3 y 4,5 unos resultados semejantes respectivamente a los teoremas 4,2 y 4,4 pero en general las condiciones lagunares deducidas serían bastante más restrictivas que en los últimamente citados.

Barcelona, 4 julio 1949

NOTA AÑADIDA DURANTE LA CORRECCIÓN DE PRUEBAS. — Ultimamente tuve conocimiento de los resultados obtenidos por J. E. LITTLEWOOD y A. C. OFFORD en su memoria: On the distribution of zeros and a—values of a random integral function (II) (Annals of mathematics vol. 49 pag. 885-952 (1948)). Estos resultados permiten dar un sentido y demostrar nuestro enunciado B del n.° 2,2 confirmando lo que dábamos como probable. Por otra parte los resultados de estos mismos autores permiten asimismo dar otra demostración de mi teorema 2,6.

BIBLIOGRAFÍA

1. BERNSTEIN (V). — Sulle direzioni di Borel di funzioni olomorfe. (Annali di Mat. 4° serie, T. 12, 1934).
2. CARTAN (H). — Sur quelques theoremes de M. R. Nevanlinna. (Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, T. 185, pág. 1253).
3. HADAMARD (J) y MANDELBROJT (S). — La serie de Taylor et son prolongement analytique. (Paris 1925, 2.ª edi.).
4. MANDELBROJT (S). — Sur une inegalité fondamentale. (An. Sci de l'Ec. Nor Sup., 3.ª serie, T. 63, pág. 151, 1947).
5. MILLOUX (H). — Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entieres d'ordre infini. (Compositio Math. Vol 1).
6. NEVANLINNA (R). — a) Eindeutige analytische Funktionen. (Berlin 1926).
   — b) Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen. (Acta Math. T. 48, 1926).
   — c) Le theoreme de Picard - Borel et la theorie des fonctions meromorphes. (Paris 1929).
7. POLYA (G). — a) Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. (Math. Zeitschrift, T. 29, pág. 549).
   — b) Ueber die Potenzreihen deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. (Acta Math., T. 41, pág. 99).
8. SUGIMURA (K). — Ubertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletsche Reihen. (Math. Zeitschrift. T. 29, pág. 264).
9. SUNYER BALAGUER (F). a) Sur la substitucion d'une valeur exceptionnelle par une proprieté lacunaire. (2 Notas; Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, T. 224, pág. 1609 - 1611 y T. 225, pág. 21 - 23; 1947). Las demostraciones de los resultados contenidos en estas dos notas aparecerán en una memoria que en breve se publicará.
   — b) Sobre la sustitución de una función excepcional por una propiedad lagunar. (Mem. de la Real Acad. de Ciencias y Artes de Barcelona, 3.ª época, n.° 604, Vol. 29, n.° 16, pág. 475). En estas memorias de la R. Acad. exsite doble numeración de páginas, aquí damos la numeración general del volúmen, pero en las citas damos la numeración particular del trabajo, que por ser la superior resulta más práctica.
10. VALIRON (G). — Fonctions entières et fonctions meromorphes d'une variable (Mem. Sci. Math., fasc. 2, 1925).