ELEVACIONES DE FUNCTORES

por

ROSA M. FERNANDEZ RODRIGUEZ

1. INTRODUCCION.

En [3] Barr prueba que si $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ son dos triples sobre una categoría K, existe una correspondencia biyectiva entre aplicaciones de teorías $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$ y functores sobre K entre las categorías de álgebras $K^{\mathbb{T}'} \longrightarrow K^{\mathbb{T}}$; correspondencia que se establece también con los functores entre las categorías de Kleisli $K_{\mathbb{T}} \longrightarrow K_{\mathbb{T}'}$ que conmutan con los functores de Kleisli desde K. Si en la categoría K se considera un endofunctor X, es conocido (véase [2], [6], [1], [8]) que cada transformación directa de estado (T.D.E.) $TX \longrightarrow XT'$ se corresponde biyectivamente con una elevación $\bar{X}: K^{\mathbb{T}'} \longrightarrow K^{\mathbb{T}}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K^{\mathbb{T}'} \arrow[r, "\bar{X}"] \arrow[d, "U^{\mathbb{T}'}"'] & K^{\mathbb{T}} \arrow[d, "U^{\mathbb{T}}"] \\
K \arrow[r, "X"] & K
\end{tikzcd} \tag{1}$$

donde $U^{\mathbb{T}'}$ y $U^{\mathbb{T}}$ son los functores de olvido, es conmutativo. Lo mismo sucede con las transformaciones inversas de estado (T.I.E.) $XT \longrightarrow T'X$ y elevaciones entre las categorías de Kleisli $\bar{X}: K_{\mathbb{T}} \longrightarrow K_{\mathbb{T}'}$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{T}} \arrow[r, "\bar{X}"] & K_{\mathbb{T}'} \\ K \arrow[u, "F_{\mathbb{T}}"] \arrow[r, "X"] & K \arrow[u, "F_{\mathbb{T}'}"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

Resultados análogos se verifican si X es un functor entre dos categorías distintas [6].

Si X es un triple, una transformación natural $TX \longrightarrow XT$ que sea simultaneamente T.D.E. y T.I.E., es una ley distributiva de $\mathbb{T}$ sobre $\mathbb{X}$ [4]. La existencia de una tal ley distributiva garantiza la de un par de functores $\bar{X}$ y $\bar{T}$ que hacen conmutativos diagramas análogos a los anteriores.

En el caso de que X sea un cotriple, una λ: $TX \longrightarrow XT$ que verifique los axiomas de T.D.E. y sus duales (resp. λ: $XT \longrightarrow TX$ verificando los axiomas de T.I.E. y sus duales), es una ley distributiva mixta de $\mathbb{T}$ sobre $\mathbb{X}$ (resp. de $\mathbb{X}$ sobre $\mathbb{T}$) ([5], [9], [10]) dando lugar a un par de functores que hacen conmutativos dos diagramas análogos al (1) (resp. análogos al (2)).

Lo que aquí se pretende es completar los distintos casos de elevaciones de un functor X: $K \longrightarrow L$; más explícitamente, probar que existe una biyección entre los morfismos (X, λ) de $(K, (T, \eta, \mu))$ a $(L, (C, \epsilon, \delta))$, y los functores $\bar{X}$: $K_{\mathbb{T}} \longrightarrow L_{\mathbb{C}}$ sobre X de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd} K_{\mathbb{T}} \arrow[r, "\bar{X}"] & L_{\mathbb{C}} \\ K \arrow[u, "F_{\mathbb{T}}"] \arrow[r, "X"] & L \arrow[u, "F_{\mathbb{C}}"'] \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Se demuestra igualmente la existencia de una correspondencia biyectiva entre los morfismos duales (X, λ) y las elevaciones $\bar{X}$: $K^{\mathbb{T}} \longrightarrow L^{\mathbb{C}}$ que conmutan con los functores de olvido.

2. ELEVACIONES ENTRE LAS CATEGORIAS DE KLEISLI Y DE CO-KLEISLI.

Sean K y L dos categorías, $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ un triple en K y $\mathbb{C} = (C, \epsilon, \delta)$ un cotriple en L.

Definición. 1. [7]. Un morfismo de $(K, (T, \eta, \mu))$ a $(L, (C, \epsilon, \delta))$ es un par (X, λ), donde $X: K \longrightarrow L$ es un functor y $\lambda: CXT \longrightarrow X$ es una transformación natural verificando:

$$\lambda \cdot CX\eta = \epsilon X$$

$$\lambda \cdot CX\mu = \lambda \cdot C\lambda T \cdot \delta XT^2$$

Proposición 1. Si $\mathbb{T}$ es un triple en K, $\mathbb{C}$ un cotriple en L y $X: K \longrightarrow L$ un functor, entonces cada morfismo (X, λ): $(K, (T, \eta, \mu)) \longrightarrow (L, (C, \epsilon, \delta))$ induce un functor $\bar{X} : K_{\mathbb{T}} \longrightarrow L_{\mathbb{C}}$ elevación de X tal que $\bar{X}\ F_{\mathbb{T}} = F_{\mathbb{C}}\ X$. Inversamente, un tal functor V induce una transformación natural λ: $CXT \longrightarrow X$ definida por $\lambda_A = V(1_{TA})$ y de tal forma que (X, λ) es un morfismo de $(K, (T, \eta, \mu))$ a $(L, (C, \epsilon, \delta))$. Además los dos pasos son biyecciones mutuamente inversas.

Demostración. Dada λ: $CXT \longrightarrow X$ se define $\bar{X}(\alpha: A \longrightarrow B) = \lambda_B \cdot CX\alpha: XA \longrightarrow XB$. Con esta definición $\bar{X}$ es un functor: si $\alpha: A \longrightarrow B$, $\beta: B \longrightarrow D$ son morfismos en la categoría de Kleisli $K_{\mathbb{T}}$, su composición está dada por $\beta \circ \alpha = \mu_D \cdot T\beta \cdot \alpha$ y $\bar{X}(\beta \circ \alpha) = \lambda_D \cdot CX(\mu_D \cdot T\beta \cdot \alpha)$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\bar{X}(\beta) \circ \bar{X}(\alpha) &= \bar{X}(\beta) \cdot C\bar{X}(\alpha) \cdot \delta_{XA} = \\ &= \lambda_D \cdot CX\beta \cdot C(\lambda_B \cdot CX\alpha) \cdot \delta_{XA} = \\ &= \lambda_D \cdot C\lambda_{TD} \cdot \delta_{XT^2D} \cdot CXT\beta \cdot CX\alpha = \\ &= \lambda_D \cdot CX\mu_D \cdot CXT\beta \cdot CX\alpha.\end{aligned}$$

Si $a: A \longrightarrow B$ es un morfismo en K,

$$\begin{aligned}\bar{X}F_{\mathbb{T}}(a) &= \bar{X}(\eta_B \cdot a) = \lambda_B \cdot CX(\eta_B \cdot a) = \\ &= \epsilon_{XB} \cdot CXa = F_{\mathbb{C}}\, X(a)\end{aligned}$$

de lo cual se sigue que $\bar{X}$ es sobre X.

Reciprocamente, sea V un functor sobre X y $\lambda_A = V(1_{TA})$, si $\alpha: A \longrightarrow B$ entonces

$$V(\alpha) = V(\mu_B \cdot \eta_{TB} \cdot \alpha) = V(\mu_B \cdot F_{\mathbb{T}}\alpha) =$$
$$= V(1_{TB} \circ F_{\mathbb{T}}\alpha) = \lambda_B \circ F_{\mathbb{C}}X\alpha =$$
$$= \lambda_B \cdot C\epsilon_{XTB} \cdot C^2X\alpha \cdot \delta_{XA} = \lambda_B \cdot CX\alpha.$$

Para demostrar la naturalidad de λ, supóngase un morfismo $a: A \longrightarrow B$. Entonces $V F_{\mathbb{T}}(a) = F_{\mathbb{C}}X(a)$, es decir

$$\lambda_B \cdot CX\eta_B \cdot CXa = \epsilon_{XB} \cdot CXa,$$

de esta forma

$$\lambda_B \cdot CXTa = V(Ta) = V((\eta_B . a) \circ 1_{TA}) =$$
$$=(\lambda_B \cdot CX\eta_B \cdot CXa) \circ \lambda_A =$$
$$=\lambda_B \cdot CX\eta_B \cdot CXa \cdot C\lambda_A \cdot \delta_{XTA} =$$
$$=\epsilon_{XB} \cdot CXa \cdot C\lambda_A \cdot \delta_{XTA} =$$
$$=Xa \cdot \lambda_A \cdot \epsilon_{CXTA} \cdot \delta_{XTA} = Xa \cdot \lambda_A.$$

Además $V(\eta_A) = \epsilon_{XA}$ para todo A y por tanto $\lambda \cdot CX\eta = \epsilon X$ y,

$$\lambda_A \cdot CX\mu_A = V(\mu_A) = V(1_{TA} \circ 1_{T^2A}) = \lambda_A \circ \lambda_{TA} =$$
$$= \lambda_A \cdot C\lambda_{TA} \cdot \delta_{XT^2A}$$

con lo cual $\lambda \cdot CX\mu = \lambda \cdot C\lambda T \cdot \delta XT^2$

Los dos pasos anteriores son mutuamente inversos: si $\bar{X}$ es el functor que define λ, la transformación natural $\bar{\lambda}$ inducida por $\bar{X}$ está definida por $\bar{\lambda}_A = \bar{X}(1_{TA}) = \lambda_A \cdot CX1_{TA} = \lambda_A$. Reciprocamente, si $\lambda_B = V(1_{TB})$, $\bar{X}$ es el functor definido por λ y $\alpha: A \longrightarrow B$, $\bar{X}(\alpha) = \lambda_B \cdot CX\alpha = V(\alpha)$.

Dualizando el resultado anterior se obtiene la equivalencia entre las transformaciones naturales $\lambda: X \longrightarrow TXC$ verificando

$$TX\epsilon \cdot \lambda = \eta X$$
$$\mu XC^2 \cdot T\lambda C \cdot \lambda = TX\delta \cdot \lambda$$

y los functores $\bar{X}: K_{\mathbb{C}} \longrightarrow L_{\mathbb{T}}$ elevaciones de X tales que $\bar{X} F_{\mathbb{C}} = F_{\mathbb{T}} X$.

3. ELEVACIONES ENTRE LAS CATEGORIAS DE ALGEBRAS Y DE CO-ALGEBRAS

Definición 2. [7]. Un morfismo dual de $(K, (T, \eta, \mu))$ a $(L, (C, \epsilon, \delta))$ es un par (X, λ) con $X\colon K \longrightarrow L$ un functor y $\lambda\colon X \longrightarrow CXT$ transformación natural verificando

$$\epsilon XT \cdot \lambda = X\eta$$

$$\delta XT \cdot \lambda = C^2X\mu \cdot C\lambda T \cdot \lambda$$

Proposición 2. Sean $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ un triple en K, $\mathbb{C} = (C, \epsilon, \delta)$ un cotriple en L y $X\colon K \longrightarrow L$ un functor. Cada (X, λ) morfismo dual de $(K, (T, \eta, \mu))$ a $(L, (C, \epsilon, \delta))$ define un functor $\bar{X}\colon K^{\mathbb{T}} \longrightarrow L^{\mathbb{C}}$ elevación de X tal que $X\,U^{\mathbb{T}} = U^{\mathbb{C}}\,\bar{X}$. Reciprocamente, un tal functor induce una transformación natural $\lambda\colon X \longrightarrow CXT$ tal que (X, λ) es un morfismo dual de $(K, (T, \eta, \mu))$ a $(L, (C, \epsilon, \delta))$. Además ambos procesos son mutuamente inversos.

Demostración. Dada λ se define $\bar{X}(A, \sigma) = (XA, CX\sigma \cdot \lambda_A)$; $CX\sigma \cdot \lambda_A$ es una estructura de co-álgebra sobre XA pues:

$$\epsilon_{XA} \cdot CX\sigma \cdot \lambda_A = X\sigma \cdot \epsilon_{XTA} \cdot \lambda_A = X\sigma \cdot X\eta_A = 1_{XA},$$

y

$$\begin{aligned} C^2X\sigma \cdot C\lambda_A \cdot CX\sigma \cdot \lambda_A &= C^2X\sigma \cdot C^2XT\sigma \cdot C\lambda_{TA} \cdot \lambda_A = \\ = C^2X(\sigma \cdot \mu_A) \cdot C\lambda_{TA} \cdot \lambda_A &= C^2X\sigma \cdot \delta_{XTA} \cdot \lambda_A = \\ = \delta_{XA} \cdot CX\sigma \cdot \lambda_A. \end{aligned}$$

Si $f\colon (A, \sigma) \longrightarrow (B, \theta)$ es un morfismo de $\mathbb{T}$-álgebras, $\bar{X}(f)$ es un morfismo de co-álgebras; en efecto,

$$\bar{X}(f) = X(f)\colon (XA, CX\sigma \cdot \lambda_A) \longrightarrow (XB, CX\theta \cdot \lambda_B)$$

es tal que

$$CXf \cdot CX\sigma \cdot \lambda_A = CX(\theta \cdot Tf) \cdot \lambda_A = CX\theta \cdot \lambda_B \cdot Xf.$$

Reciprocamente, sea $V\colon K^{\mathbb{T}} \longrightarrow L^{\mathbb{C}}$ un functor sobre X y $V(TA, \mu_A) = (XTA, \sigma_A)$, se define $\lambda_A = \sigma_A \cdot X\eta_A$. Así definida λ es natural; si $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo en la categoría K, $Tf\colon (TA, \mu_A) \longrightarrow (TB, \mu_B)$ es un morfismo en $K^{\mathbb{T}}$, por tanto $VTf = XTf: (XTA, \sigma_A) \longrightarrow (XTB, \sigma_B)$ es morfismo de co-álgebras y

$$CXTf \cdot \lambda_A = CXTf \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A = \sigma_B \cdot XTf \cdot X\eta_A =$$
$$= \sigma_B \cdot X\eta_B \cdot Xf = \lambda_B \cdot Xf.$$

Se verifican, también, las propiedades requeridas para λ:

$$\epsilon_{XTA} \cdot \lambda_A = \epsilon_{XTA} \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A = 1_{XTA} \cdot X\eta_A$$
$$\delta_{XTA} \cdot \lambda_A = \delta_{XTA} \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A = C\sigma_A \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A;$$

por otra parte

$$C^2X\mu_A \cdot C\lambda_{TA} \cdot \lambda_A = C^2X\mu_A \cdot C\sigma_{TA} \cdot CX\eta_{TA} \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A =$$
$$= C(CX\mu_A \cdot \sigma_{TA} \cdot X\eta_{TA}) \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A$$

expresión que por ser $V(\mu_A) = X\mu_A: (XT^2A, \sigma_{TA}) \longrightarrow (XTA, \sigma_A)$ morfismo de co-álgebras se convierte en

$$C(\sigma_A \cdot X\mu_A \cdot X\eta_{TA}) \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A =$$
$$= C(\sigma_A \cdot X1_{TA}) \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A = C\sigma_A \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A.$$

Los dos pasos son inversos: dada λ, $\bar{X}(TA, \mu_A) = (XTA, CX\mu_A \cdot \lambda_{TA})$ y $\bar{\lambda}$ inducida por $\bar{X}$ está definida por $\bar{\lambda}_A = CX\mu_A \cdot \lambda_{TA} \cdot X\eta_A$ que coincide con λ_A.

Dado V sobre X y $V(TA, \mu_A) = (XTA, \sigma_A)$, $\lambda_A = \sigma_A \cdot X\eta_A$. Supóngase que $V(A, \theta) = (XA, \beta)$. El functor $\bar{X}$ inducido por λ viene dado por $\bar{X}(A, \theta) = (XA, CX\theta \cdot \lambda_A) = (XA, CX\theta \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A)$.

Como $\theta: (TA, \mu_A) \longrightarrow (A, \theta)$ es un morfismo de T-álgebras, $V\theta = X\theta: (XTA, \sigma_A) \longrightarrow (XA, \beta)$ es un morfismo de co-álgebras y por tanto $CX\theta \cdot \sigma_A = \beta \cdot X\theta$ con lo que $CX\theta \cdot \sigma_A \cdot X\eta_A = \beta \cdot X\theta \cdot X\eta_A = \beta$.

La dualización del resultado anterior permite afirmar la existencia de una biyección entre las transformaciones naturales $\lambda: TXC \longrightarrow X$ verificando

$$\lambda \cdot \eta XC = X\epsilon$$
$$\lambda \cdot \mu XC = \lambda \cdot T\lambda C \cdot T^2X\delta$$

y los functores $\bar{X}: K^{\mathbb{C}} \longrightarrow L^{\mathbb{T}}$ conmutando con los functores de olvido.

BIBLIOGRAFIA

1. ALAGIC, S. *Categorical theory of tree processing.* Lect. Notes in Computer Science 25, 65-72. Springer 1975.

2. APPELGATE, H. *Acyclic models and resolvent functors,* dissertation, Columbia University 1965.

3. BARR, M. *Coequalizers and free triples.* Math. Zeit. 116, 307-322 (1970).

4. BECK, J. *Distributive laws.* Lect. Notes in Math. 80, 119-140 (1970).

5. BURRONI, E. *Lois distributives mixtes.* C. R. Acad. Sci. Paris 276, A 897-900 (1973).

6. MANES, E.G. *A triple miscellany: some aspects of the theory of algebras over a triple,* dissertation, Wesleyan University, 1967.

7. MARANDA, J.M. *Constructions fondamentales de dégré supérieur* J. Reine Angew Math. 243, 1-16 (1970).

8. MEYER, J.P. *Induced functors on categories of algebras.* Math. Zeit. 142, 1-14 (1975).

9. WÄTJEN, D. *Liftungen von tripeln.* Manuscripta Math. 12, 67-71 (1974).

10. WOLFF, H. *Distributive laws and lifting of triples.* Communications in Algebra 5 (9), 981-996 (1977).

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago de Compostela