

SUI FUNZIONALI DEL CICLO CHIUSO PIU' GENERALI

DI

FRANCO PELLEGRINO (a ROMA) (*)

INTRODUZIONE

a) E' noto come i funzionali presi finora in considerazione nei vari indirizzi del calcolo funzionale (VOLTERRA, PINCHERLE, HILBERT, FRÉCHET, FANTAPPIÈ) siano solo quelli definiti per i polinomi, in quanto sembrava che fossero i soli ad avere importanza soprattutto in vista delle applicazioni alla fisica. Nel corso di un'altra ricerca ⁽¹⁾ m'è venuto fatto però di considerare i funzionali soddisfacenti all'equazione

$$F[y(t+h)] = F[y(t)] - h.$$

Questi funzionali, evidentemente *non definiti per le costanti* ⁽¹⁾, poichè per esse l'uguaglianza precedente è assurda, sono però lo stesso della massima importanza in quanto fra essi si trovano, com'è facile convincersi ⁽¹⁾, quelli che danno i punti singolari isolati di una funzione analitica, i suoi punti di livello e quindi i suoi zeri, etc. Essi sono poi « primitivi » di quelli del « ciclo chiuso », in quanto il loro derivato primo (e quindi tutti gli altri per un risultato di questo stesso lavoro) appartengono a tale classe ⁽¹⁾.

(*) Per un sunto dei concetti e delle definizioni che vengono qui supposti noti vedi:

F. PELLEGRINO. — *Die analytischen Funktionale und ihre Anwendungen*. Matematisk Tidsskrift, B, 1949, Kopenhagen.

Per una esposizione completa della teoria dei funzionali analitici confronta l'opera di prossima pubblicazione:

L. FANTAPPIÈ - F. PELLEGRINO. — *Traité des fonctionelles analytiques*. Editions du Griffon, Neuchâtel.

Sui criteri informativi e sui risultati della presente ricerca è stato riferito dal Prof. Fantappiè e da me al III° Congresso dell' U. M. I. (Pisa, sett. 1948) nei cui atti apparirà un brevissimo sunto di questo lavoro.

⁽¹⁾ F. PELLEGRINO. — *Su un'importante classe di funzionali analitici non definiti per le costanti e su una generalizzazione della serie di LAGRANGE*. — Rend. Mat., Roma, s. V, vol. 7°, fasc. 3-4, 1948.

Essendo le funzioni argomento dei funzionali analitici per ipotesi nulle all'infinito, quando in esso siano definite, le costanti diverse da zero sono sempre considerate come nulle all'infinito.

Cose analoghe possono poi dirsi per una classe di funzionali introdotti dal CALUGAREANO ⁽²⁾, anch'essi della massima importanza, perchè danno i così detti « invarianti di prolungamento » di una funzione analitica ⁽²⁾. Detti funzionali soddisfano all'equazione

$$F[y(t+h)] = F[y(t)],$$

non sono definiti per alcuna costante diversa da zero, come è stato dimostrato in una tesi da me seguita ⁽³⁾ e finalmente, come ha mostrato lo stesso CALUGAREANO ⁽²⁾, sono anch'essi primitivi di quelli del ciclo chiuso. Lo studio dei funzionali del ciclo chiuso, prescindendo dalla condizione che siano definiti per le costanti, si presentava dunque, oltre che d'interesse generale, anche indispensabile per lo studio dei funzionali importantissimi su indicati. Basta pensare ad es che la conoscenza della struttura dei funzionali derivati d'un funzionale del ciclo chiuso (pensati come funzioni dei loro indici di derivazione), permette di determinare lo sviluppo in serie di FANTAPPIÈ dei sudetti suoi primitivi.

b) Rimandando a poco più avanti (vedi c)), per un sunto sul contenuto di questo lavoro ricordiamo intanto i risultati del Prof. FANTAPPIÈ per quanto riguarda i funzionali analitici del ciclo chiuso definiti nell'intorno delle costanti.

Di questi operatori i lineari sono definiti ⁽⁴⁾ come quegli operatori analitici lineari

$$F[y(t); z] = f(z)$$

che sono permutabili con l'operazione D di derivazione, per cui cioè si ha :

$$F_t D_t y = D_z F_t y$$

e più precisamente

$$(1) \quad F[y'(t); z] = f'(z).$$

⁽²⁾ G. CALUGAREANO. — *Sur certains invariants attachés aux fonctions analytiques.* — « Mathematica ». Cluj. — Vol. XIII, 1936.

Invariants de prolongement et fonctionnelles analytiques. — « Mathematica ». Cluj. Vol. XV, 1939.

⁽³⁾ F. SUCCI. — *Su i funzionali analitici invarianti di prolungamento delle funzioni analitiche.* In corso di stampa in Rend. Mat., Roma.

⁽⁴⁾ L. FANTAPPIÈ. — *I funzionali analitici.* — Mem. Acc. Lincei Vol. III. — s. VI, p. 99, 1930.

Essi vengono caratterizzati dall'avere come indicatrice una funzione di $z - \alpha$. E' cioè :

$$(2) \quad u(\alpha, z) = F_t \left[\frac{1}{\alpha - t}; z \right] = u(z - \alpha)$$

Viceversa, ogni funzionale analitico lineare misto che ha per indicatrice una qualunque funzione della differenza $z - \alpha$, gode della proprietà (1) e cioè si ha :

$$(1') \quad u(z - \alpha) y'(\alpha) = F[y'(t); z] = f'(z)$$

Il FANTAPPIÈ ha dimostrato che gli operatori analitici lineari del ciclo chiuso formano un semigruppò abeliano e che se $y(t)$ è una funzione periodica, con periodo ω , della regione di definizione di un tale operatore F è :

$$(3) \quad f(z) = F[y(t); z] = F[y(t + \omega); z] = f(z + \omega)$$

La denominazione del « ciclo chiuso » data dal VOLTERRA, che li considerò per primo, a detti funzionali ⁽⁵⁾, è giustificata dal fatto che, se $y(t)$ è periodica, e quindi per la (3) anche $f(z)$, il punto che ha per coordinate

$$y = y(t), \quad f = f(t)$$

descrive una curva chiusa.

Il FANTAPPIÈ, oltre ad avere precisato la posizione dei punti singolari della $f(z)$, ha dimostrato che tali operatori sono caratterizzati dalla relazione

$$(4) \quad F_t[y(t + \omega); z] = F[y(t), z + \omega] = f(z + \omega)$$

valida quali che siano z ed ω , con $y(t)$ qualsiasi dentro la regione di definizione di F e ha ancora provato che :

« Se un fenomeno fisico è caratterizzato da due sole grandezze $f(t)$ ed $y(t)$ variabili col tempo, di cui una, la $y(t)$, è arbitraria, mentre l'altra dipende linearmente da questa, segue necessariamente dal postulato dell'invarianza delle leggi fisiche attraverso il tempo (che cioè

⁽⁵⁾ V. VOLTERRA. — *Leçons sur les fonctions de lignes*. — Paris, Gauthier-Villars, 1913. Cap. VII°.

le stesse cause producono sempre gli stessi effetti) che questa dipendenza dev'essere espressa da un funzionale lineare misto $F[y(t), t'] = f(t')$ appartenente al semigruppato del ciclo chiuso ».

Se poi più generalmente si considera una grandezza fisica $f(t)$ (funzione del tempo), dipendente in modo qualunque, anche non lineare, da un'altra grandezza fisica $y(t)$ e se cioè $f(t)$, o cambiando il nome della variabile, $f(z)$ è un funzionale misto della $y(t)$

$$f(z) = F[y(t); z],$$

e se si ammette il postulato dell'invarianza delle leggi fisiche nel tempo, questo postulato si traduce analiticamente ancora nella relazione (4)

$$(4) \quad F[y(t + \omega); z] = F[y(t); z + \omega] = f(z + \omega).$$

Il FANTAPPIÈ ha studiato anche ⁽⁶⁾ i funzionali analitici misti non lineari soddisfacenti identicamente alla (4), e di cui, dato quanto detto sopra, si capisce l'importanza, nel caso che essi siano *regolari nell'intorno di una qualunque costante* $y(t) = k$. Per essi il FANTAPPIÈ trova che sono caratterizzati dal fatto che il funzionale derivato n^{mo} , con n qualsiasi, calcolato in una costante k , è del tipo

$$(5) \quad F^{(n)}[k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z] = g_n(z - \alpha_1, z - \alpha_2, \dots, z - \alpha_n),$$

è cioè funzione delle sole differenze $z - \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ogni funzionale del ciclo chiuso, definito per le costanti, può dunque rappresentarsi nel loro intorno con lo sviluppo :

$$\begin{aligned} F[y(t); z] &= F[k + \varphi(t); z] = g_0 + \\ &+ \sum_1^n \frac{1}{n!} F^{(n)}[k; \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z] \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*) = \\ (6) \quad &= g_0 + \sum_1^n \frac{1}{n!} g_n(z - \alpha_1^*, z - \alpha_2^*, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*). \end{aligned}$$

Viceversa il FANTAPPIÈ trova pure ⁽⁷⁾ che « se i successivi funzionali derivati di un funzionale analitico misto $F[y(t); z]$, *regolare per* $y = k$ (*costante*), hanno tutti per questa funzione la forma particolare (5), mentre per questa funzione il funzionale assume un valore g_0 , indipendente da z , esso è del ciclo chiuso ».

⁽⁶⁾ Cfr. lavoro citato in ⁽⁴⁾, pag. 212.

⁽⁷⁾ V. lavoro citato in ⁽⁴⁾, p. 214.

c) In questo lavoro sono studiati gli operatori del ciclo chiuso e cioè i funzionali misti soddisfacenti identicamente alla (4), *prescindendo dalla condizione che siano definiti per le costanti* (cfr. quanto detto in a)).

Viene dimostrata una condizione necessaria e sufficiente perché un funzionale analitico misto (anche non lineare e non definito per le costanti) sia del ciclo chiuso e stabilite alcune relazioni che credo abbiano interesse generale. *Esse permettono poi di determinare una vasta classe, comprendente i polinomiali, di funzionali del ciclo chiuso a mezzo della loro espressione nell'intorno d'una funzione qualsiasi (costante o no).* Automaticamente sono allora determinate le corrispondenti classi di funzionali soddisfacenti alle due equazioni funzionali riportate in a).

Per ottenere tali risultati vengono introdotti e studiati dei funzionali che si presentano come una generalizzazione spontanea e feconda dei precedenti (da cui il titolo del lavoro). Vengono inoltre e indicate alcune applicazioni che mi sembrano interessanti.

1. — Cominciamo coll'estendere la definizione di funzionale del ciclo chiuso e cioè conveniamo di chiamare ancora del ciclo chiuso un operatore analitico (o funzionale analitico misto).

$$(7) \quad F[y(t); z_1, z_2, \dots, z_h] = f^y(z_1, z_2, \dots, z_h)$$

dipendente da h parametri, tutte le volte che, qualunque sia la $y(t)$ della regione funzionale di definizione di F , e quali che siano $z_1, z_2, \dots, z_h$ ed ω , si abbia

$$(4') \quad F[y(t + \omega); z_1, z_2, \dots, z_h] = F[y(t); z_1 + \omega, z_2 + \omega, \dots, z_h + \omega].$$

il che porta che se F è definito per una funzione $y(t)$ debba esserlo anche per tutte le funzioni $y(t + \omega)$, con ω qualsiasi.

Se F è un tale funzionale e se per di più, come supporremo in questo numero, è definito per le costanti, applicando un procedimento analogo a quello seguito dal FANTAPPIÈ per i funzionali del ciclo chiuso ad un solo parametro definiti per le costanti, abbiamo:

$$F[k; z_1, z_2, \dots, z_h] = F[k; z_1 + \omega, z_2 + \omega, \dots, z_h + \omega]$$

ovvero

$$f^k(z_1, z_2, \dots, z_h) = f^k(z_1 + \omega, z_2 + \omega, \dots, z_h + \omega).$$

Derivando ambo i membri rapporto ad ω , per $\omega = 0$, si ha:

$$0 = \frac{\partial f^k}{\partial z_1} + \frac{\partial f^k}{\partial z_2} + \dots + \frac{\partial f^k}{\partial z_h}$$

ciò che ci dice che la funzione f^k è funzione delle sole differenze $z_1 - z_i$ ($i = 2, 3, \dots, h$).

Si ha cioè

$$(5') \quad f^k(z_1, z_2, \dots, z_h) = g_0(z_1 - z_2, z_1 - z_3, \dots, z_1 - z_h)$$

Per $h = 1$ era stato visto dal FANTAPPIÈ che g_0 si riduce ad una costante. Qui ciò risulta chiaro dall'equazione differenziale precedente. Per il derivato ennesimo del nostro funzionale F nella costante k abbiamo

$$\begin{aligned} f_n^k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z_1, z_2, \dots, z_h) &= F^{(n)}[k; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z_1, z_2, \dots, z_h] = \\ &= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F_t \left[k + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}; z_1, \dots, z_h \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0} = \\ &= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F_t \left[k + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - (t + \omega)} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - (t + \omega)} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - (t + \omega)}; \right. \right. \\ &\quad \left. \left. z_1 - \omega, z_2 - \omega, \dots, z_h - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0} = \\ &= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F_t \left[k + \frac{\varepsilon_1}{(\alpha_1 - \omega) - t} + \frac{\varepsilon_2}{(\alpha_2 - \omega) - t} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{(\alpha_n - \omega) - t}; \right. \right. \\ &\quad \left. \left. z_1 - \omega, z_2 - \omega, \dots, z_h - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0} = \\ &= F^{(n)}[k; \alpha_1 - \omega, \alpha_2 - \omega, \dots, \alpha_n - \omega; z_1 - \omega, z_2 - \omega, \dots, z_h - \omega] = \\ &= f_n^k(\alpha_1 - \omega, \dots, \alpha_n - \omega; z_1 - \omega, \dots, z_h - \omega) \end{aligned}$$

ovvero

$$f_n^k(\alpha_1, \dots, \alpha_n; z_1, \dots, z_h) = f_n^k(\alpha_1 - \omega, \dots, \alpha_n - \omega; z_1 - \omega, \dots, z_h - \omega)$$

Derivando rispetto ad ω , per $\omega = 0$ si ha :

$$\frac{\partial f_n^k}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial f_n^k}{\partial \alpha_n} + \frac{\partial f_n^k}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial f_n^k}{\partial z_h} = 0$$

La funzione f_n^k è quindi solo funzione delle differenze $z_1 - \alpha_i$ e $z_1 - z_j$, ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 2, 3, \dots, h$), è cioè :

$$(5'') \quad \boxed{f_n^k(\alpha_1, \dots, \alpha_n; z_1, \dots, z_h) = g_n(z_1 - \alpha_1, z_1 - \alpha_2, \dots, z_1 - \alpha_n; z_1 - z_2, z_1 - z_3, \dots, z_1 - z_h)}$$

Ed è da osservare che la funzione g_n dovrà essere funzione *simmetrica* degli indici di derivazione $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, com'è noto dalla teoria dei funzionali analitici. Inoltre, posto

$$g_n(z_1 - \alpha_1, \dots, z_1 - \alpha_n; z_1 - z_2, \dots, z_1 - z_h) = \bar{f}(\beta_1, \dots, \beta_n),$$

cioè considerata la g_n come funzione delle sole variabili $z_1 - \alpha_i = \beta_i$, sia $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n$ un punto singolare di $\bar{f}$. La funzione g_n è allora singolare per

$$z_1 - \alpha_i = \bar{\beta}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ovvero per

$$\alpha_i = z_1 - \bar{\beta}_i$$

Dunque i punti singolari della g_n come funzione delle α_i si ottengono da quelli della $\bar{f}$ come funzione delle β con una simmetria rispetto all'origine e una traslazione di componenti tutti uguali a z_1 , quindi in particolare i punti singolari all' ∞ di g_n coincidono con quelli di $\bar{f}$ poiché queste due operazioni lasciano fissi i punti all' ∞ .

Per lo sviluppo in serie di FANTAPPIÈ di un funzionale del tipo (7) nell'intorno d'una costante, dove si suppone definito, abbiamo dunque, tenendo presente le (5) e (5'') :

$$\begin{aligned} F[y(t); z_1, z_2, \dots, z_h] &= F[k + \varphi(t); z_1, z_2, \dots, z_h] = \\ (6') \quad &= g_0(z_1 - z_2, z_1 - z_3, \dots, z_1 - z_h) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} g_n(z_1 - \alpha_1, \dots, z_1 - \alpha_n; z_1 - z_2, \dots, z_1 - z_h) \varphi(\alpha_1) \cdots \varphi(\alpha_n) \end{aligned}$$

Viceversa :

Ogni funzionale F , dato a mezzo di uno sviluppo di questo tipo, è del ciclo chiuso secondo la nuova definizione qui data.

Ne tralasciamo la dimostrazione essendo assolutamente analoga a quella data dal FANTAPPIÈ per il caso d'un funzionale del ciclo chiuso con un solo parametro.

Facciamo infine la seguente osservazione, che è valida anche per lo sviluppo (6) dato dal FANTAPPIÈ, e cioè che :

Le funzioni g_n ($n = 1, 2, \dots$) degli sviluppi in serie di un funzionale F nell'intorno di una costante $k \neq 0$, se sono costanti sono nulle.

E infatti, poiché in ogni intorno (A, σ) di una costante $k \neq 0$, cadono sicuramente altre costanti $\bar{k}$, fatto $\varphi = \bar{k}$, non sarebbe possibile eseguire i prodotti funzionali emisimmetrici che compaiono in detti

sviluppi per la mancanza delle curve separatrici, tranne nel caso in cui le g_n siano identicamente nulle.

2. — a) Occupiamoci ora degli operatori analitici del ciclo chiuso $F[y(t); z]$ prescindendo dalla condizione che siano definiti per le costanti.

Per il funzionale derivato primo di F , in un punto qualunque $y(t)$ della sua regione di definizione, avremo, per il valore z del parametro :

$$F'[y(t); \alpha_1; z] = \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} F \left[y(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t}; z \right] \right\}_{\varepsilon_1=0}$$

Ma per la (4) è

$$F \left[y(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t}; z \right] = F \left[y(t + \omega) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - (t + \omega)}; z - \omega \right]$$

e quindi

$$\begin{aligned} F'[y(t); \alpha_1; z] &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} F \left[y(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t}; z \right] \right\}_{\varepsilon_1=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} F \left[y(t + \omega) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - (t + \omega)}; z - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} F \left[y(t + \omega) + \frac{\varepsilon_1}{(\alpha_1 - \omega) - t}; z - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} F \left[\bar{y}(t) + \frac{\varepsilon_1}{\bar{\alpha}_1 - t}; z - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1=0} \\ &= F'[\bar{y}(t); \bar{\alpha}_1; z - \omega] = F'[y(t + \omega); \alpha_1 - \omega; z - \omega] \end{aligned}$$

ovvero in definitiva :

$$(8) \quad F'[y(t); \alpha_1; z] = F'[y(t + \omega); \alpha_1 - \omega; z - \omega].$$

E per il generico derivato, tenendo sempre presente la (4), abbiamo :

$$\begin{aligned} F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z] &= \\ &= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F_t \left[y(t) + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - t} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - t} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - t}; z \right] \right\}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=\varepsilon_n=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F_t \left[y(t + \omega) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1 - (t + \omega)} + \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2 - (t + \omega)} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{\alpha_n - (t + \omega)}; z - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\dots=\varepsilon_n=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F_t \left[y(t + \omega) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon_1}{(\alpha_1 - \omega) - t} + \frac{\varepsilon_2}{(\alpha_2 - \omega) - t} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{(\alpha_n - \omega) - t}; z - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0} = \\
&= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F_t \left[\bar{y}(t) + \frac{\varepsilon_1}{\bar{\alpha}_1 - t} + \frac{\varepsilon_2}{\bar{\alpha}_2 - t} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{\bar{\alpha}_n - t}; z - \omega \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0} = \\
&= F_t^{(n)} [\bar{y}(t); \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n; z - \omega] = \\
&= F_t^{(n)} [y(t + \omega); \alpha_1 - \omega, \alpha_2 - \omega, \dots, \alpha_n - \omega; z - \omega]
\end{aligned}$$

ovvero in definitiva :

$$(9) \quad \boxed{F_t^{(n)} [y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z] = F_t^{(n)} [y(t + \omega); \alpha_1 - \omega, \alpha_2 - \omega, \dots, \alpha_n - \omega; z - \omega]}$$

ed anche

$$(9') \quad \boxed{F_t^{(n)} [y(t + \omega); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z] = F_t^{(n)} [y(t); \alpha_1 + \omega, \alpha_2 + \omega, \dots, \alpha_n + \omega; z + \omega]}$$

Ricordando la definizione data al n. 1 potremo sintetizzare questo risultato dicendo :

Tutti i funzionali derivati d'un funzionale del ciclo chiuso $F[y(t); z]$ sono ancora funzionali del ciclo chiuso.

Anzi, più generalmente, con calcoli analoghi si prova che :

Tutti i derivati d'un funzionale del ciclo chiuso del tipo più generale (7) sono ancora funzionali del ciclo chiuso.

b) Siao ra $F[y(t); z]$ un funzionale analitico misto. Sviluppandolo in serie di FANTAPPIÈ nell'intorno della generica funzione $y(t)$ del suo campo di definizione abbiamo :

$$\begin{aligned}
&F[y(t) + \varphi(t); z] = F[y(t); z] + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}[y(t); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z] \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*)
\end{aligned}$$

e per l'analogo sviluppo nell'intorno della funzione $\bar{y}(t) + \bar{\varphi}(t) = y(t + \omega) + \varphi(t + \omega)$, supposto che per essa F sia definito, si ha :

$$F[y(t+\omega) + \varphi(t+\omega); z-\omega] = F[y(t+\omega); z-\omega] + \\ + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} F^{(n)}[y(t+\omega); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z-\omega] \varphi(\alpha_1^*+\omega) \varphi(\alpha_2^*+\omega) \dots \varphi(\alpha_n^*+\omega).$$

Supposto ora che tutti i funzionali derivati di F verifichino la condizione (4) del ciclo chiuso per la funzione $y(t)$, possiamo ottenere lo sviluppo precedente nella nuova forma:

$$F[y(t+\omega) + \varphi(t+\omega); z-\omega] = F[y(t+\omega); z-\omega] + \\ + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} F^{(n)}[y(t); \alpha_1^*+\omega, \alpha_2^*+\omega, \dots, \alpha_n^*+\omega; z] \varphi(\alpha_1^*+\omega) \varphi(\alpha_2^*+\omega) \dots \varphi(\alpha_n^*+\omega)$$

che per una proprietà dei prodotti funzionali emisimmetrici ⁽⁸⁾ può ancora scriversi:

$$F[y(t+\omega) + \varphi(t+\omega); z-\omega] = F[y(t+\omega); z-\omega] + \\ + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} F^{(n)}[y(t); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z] \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*)$$

Supponiamo ora che anche F soddisfi alla condizione del ciclo chiuso per la funzione $y(t)$, confrontando allora quest'ultimo sviluppo con quello di $F[y(t) + \varphi(t); z]$ si ha:

$$F[y(t+\omega) + \varphi(t+\omega); z-\omega] = F[y(t) + \varphi(t); z].$$

Tenendo presente allora i risultati precedenti e le evidenti generalizzazioni per i funzionali del ciclo chiuso più generali, già definiti al n. 1, potremo intanto concludere:

Condizione necessaria e sufficiente perché un operatore analitico $F[y(t); z_1, z_2, \dots, z_k]$ sia del ciclo chiuso in tutto il campo di convergenza dello sviluppo di $F[y(t) + \varphi(t); z_1, z_2, \dots, z_k]$ è che esso e tutti i suoi funzionali derivati verifichino alla condizione del ciclo chiuso per la sola funzione iniziale $y(t)$.

Se il campo di convergenza dello sviluppo in serie di F non esaurisce la regione connessa, cui $y(t)$ appartiene, consideriamo una funzione $\bar{y}(t)$ di detta regione, ma esterna all'intorno (A_1, σ) di $y(t)$ per tutte le funzioni $\varphi(t)$ del quale, vale lo sviluppo suddetto. Per la connessione di detta regione è possibile passare dalla $y(t)$ alla $\bar{y}(t)$ mediante un numero finito di prolungamenti analitici. Considerando allora due in-

(8) L. FANTAPPIÈ. — *Teoría de los funcionales analíticos, etc.* — Barcelona, p. 52.

torni « consecutivi » (A_1, σ) di $y(t)$ e (A_1, σ_1) di $y_1(t)$ dati da un prolungamento analitico immediato, poichè il centro $y_1(t)$ di tale nuovo intorno appartiene all'intorno (A_1, σ) di $y(t)$, per le cose dette F e tutti i suoi funzionali derivati verificano la (4) per la funzione $y_1(t)$. Ma allora la verificano per ogni funzione dell'intorno di (A_1, σ_1) ed essendo tali « successivi » intorni in numero finito, F verifica la condizione del ciclo chiuso anche per $\bar{y}(t)$ e possiamo allora concludere che :

Condizione necessaria e sufficiente, perché un operatore analitico $F[y(t); z_1, z_2, \dots, z_h]$ sia del ciclo chiuso è che esso e tutti i suoi funzionali derivati verifichino alla condizione del ciclo chiuso per una sola funzione di ognuna delle parti connesse in cui eventualmente si suddivide la regione funzionale di definizione di F .

3. — a) Per proseguire lo studio dei funzionali del ciclo chiuso definiti o no per le costanti, e cioè per avere un'espressione dello sviluppo di qualsiasi funzionale del ciclo chiuso nell'intorno d'una funzione non costante $y(t)$, si rende necessario lo studio della struttura delle funzioni (simmetriche nelle α_i) :

$$v_n^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z) = F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z]$$

Il far ricorso alle relazioni (9) non dà però grandi informazioni al riguardo. Così la

$$(8) \quad v_1^y(\alpha_1; z) = v_1^{\bar{y}}(\alpha_1 - \omega; z - \omega)$$

dice solo che le funzioni v_1 relative alle varie funzioni $\bar{y}(t) = y(t + \omega)$, al variare di ω , si ottengono tutte dalla v_1^y ponendo al posto di α_1 e z rispettivamente $\alpha_1 + \omega$ e $z + \omega$.

In altre parole se T indica il gruppo continuo ad un parametro delle traslazioni sulla retta

$$\zeta' = \zeta + \omega,$$

la definizione di operatore del ciclo chiuso dice che un tale operatore, a uno o più parametri, e quindi tutti i suoi derivati, sono permutabili con gli elementi del gruppo T .

Gli invarianti di tale gruppo T sono evidentemente le funzioni $f(z_1, z_2, \dots, z_h)$ per cui si ha :

$$f(z_1, z_2, \dots, z_h) = f(z_1 + \omega, z_2 + \omega, \dots, z_h + \omega),$$

cioè le funzioni soluzioni dell'equazione :

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_h} = 0,$$

cioè ancora le funzioni delle differenze $z_1 - z_i$ ($i = 2, 3, \dots, h$). Ne segue allora che *i funzionali derivati, calcolati nelle costanti, di un funzionale del ciclo chiuso ad un numero qualunque di parametri, definito per le costanti, sono proprio invarianti del gruppo T* , ed è da osservare che per la notata simmetria non li esauriscono.

b) Ritornando allo studio della struttura delle funzioni v_n^y cominciamo con lo stabilire alcune relazioni che ci serviranno appunto per tale studio. Se deriviamo rispetto ad ω ambo i membri della :

$$(4) \quad F[y(t + \omega); z] = F[y(t); z + \omega],$$

considerando $y(t + \omega)$ come una particolare linea analitica $y(t, \omega)$ e tenendo presente le regole di derivazione funzionale, abbiamo :

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial \omega} F[y(t + \omega); z] = F'[y(t + \omega); \alpha_1; z] \frac{\partial y(\alpha_1 + \omega)}{\partial \omega},$$

ovvero per la (4)

$$(11) \quad F'[y(t + \omega); \alpha_1; z] y'(\alpha_1 + \omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} F[y(t); z + \omega].$$

Ma la derivata rispetto ad ω del 2° membro della (11) è uguale alla derivata rapporto a z , si ha cioè

$$\frac{\partial}{\partial \omega} F[y(t); z + \omega] = \frac{\partial}{\partial z} F[y(t); z + \omega]$$

e quindi da (10) e (11) :

$$F'[y(t + \omega); \alpha_1; z] y'(\alpha_1 + \omega) = \frac{\partial}{\partial z} F[y(t); z + \omega]$$

e ponendo $\omega = 0$ abbiamo :

$$(12) \quad \boxed{F'[y(t); \alpha_1; z] y'(\alpha_1) = \frac{\partial}{\partial z} F[y(t); z] = f'(z)}$$

formula che è la generalizzazione della (1'), cui si riduce se F è lineare.

La (12) per una proprietà del prodotto emisimmetrico può ancora scriversi

$$(13) \quad \boxed{- \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F' [y(t); \alpha_1; z] \right\} y(\alpha_1) = \frac{\partial}{\partial z} F[y(t); z] = f'(z)}$$

In particolare per $y(t) = \frac{1}{\beta - t}$ si ha

$$F' \left[\frac{1}{\beta - t}; \alpha_1; z \right] \frac{1}{(\beta - \alpha_1)^2} = \frac{\partial}{\partial z} F \left[\frac{1}{\beta - t}; z \right]$$

ovvero

$$(14) \quad - \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F' \left[\frac{1}{\beta - t}; \alpha_1; z \right] = \frac{\partial}{\partial z} F \left[\frac{1}{\beta - t}; z \right]$$

c) Partiamo ora dalla (8) che scriveremo:

$$(8') \quad F' [y(t + \omega); \alpha_1; z] = F' [y(t); \alpha_1 + \omega; z + \omega]$$

ed operiamo analogamente a quanto fatto adesso. Abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} F' [y(t + \omega); \alpha_1; z] = F'' [y(t + \omega); \alpha_1, \alpha_2; z] \frac{\partial y(\alpha_2 + \omega)}{\partial \omega},$$

ovvero:

$$\begin{aligned} F'' [y(t + \omega); \alpha_1, \alpha_2; z] y'(\alpha_2 + \omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega} F' [y(t); \alpha_1 + \omega; z + \omega] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F' [y(t); \alpha_1 + \omega; z + \omega] + \frac{\partial}{\partial z} F' [y(t); \alpha_1 + \omega; z + \omega], \end{aligned}$$

quindi:

$$\begin{aligned} F'' [y(t + \omega); \alpha_1, \alpha_2; z] y'(\alpha_2 + \omega) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F' [y(t); \alpha_1 + \omega; z + \omega] + \frac{\partial}{\partial z} F' [y(t); \alpha_1 + \omega; z + \omega] \end{aligned}$$

e per $\omega = 0$

$$(15) \quad \boxed{\begin{aligned} & F''[y(t); \alpha_1, \alpha_2^*; z] y'(\alpha_2) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F'[y(t); \alpha_1; z] + \frac{\partial}{\partial z} F'[y(t); \alpha_1; z] \end{aligned}}$$

ovvero

$$(16) \quad \boxed{\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha_2} F''[y(t); \alpha_1, \alpha_2; z] \right\} y(\alpha_2) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F'[y(t); \alpha_1; z] + \frac{\partial}{\partial z} F'[y(t); \alpha_1; z] \end{aligned}}$$

formule analoghe delle (12) e (13).

Scriveremo la (15) e la (16) così:

$$(17) \quad v_2^y(\alpha_1, \alpha_2^*; z) y'(\alpha_2) = v_{1\alpha_1}^y(\alpha_1; z) + v_{1z}^y(\alpha_1; z)$$

$$(18) \quad -v_{2\alpha_2}^y(\alpha_1, \alpha_2^*; z) y(\alpha_2) = v_{1\alpha_1}^y(\alpha_1; z) + v_{1z}^y(\alpha_1; z)$$

ove con $v_{1\alpha_1}$, v_{1z} e $v_{2\alpha_2}$ indichiamo rispettivamente $\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial v_1}{\partial z}$, $\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2}$; e in generale indicheremo la derivata di una funzione rispetto ad una variabile aggiungendo questa variabile come indice alla funzione stessa.

d) Il procedimento precedente ha carattere generale e cioè per il fatto che il derivato nmo di un funzionale del ciclo chiuso $F[y(t), z]$ è ancora un funzionale del ciclo chiuso, si può ottenere una relazione generale, di cui la (15) e la (12) sono casi particolari.

All'uopo, derivando rapporto ad ω ambo i membri della

$$(8'') \quad \begin{aligned} & F^{(n-1)}[y(t+\omega); \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, z] = \\ & = F^{(n-1)}[y(t); \alpha_1 + \omega, \dots, \alpha_{n-1} + \omega; z + \omega] \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \omega} F^{(n-1)}[y(t+\omega); \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; z] = \\ & = F^{(n)}[y(t+\omega); \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n^*; z] y'(\alpha_n) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \omega} F^{(n-1)}[y(t); \alpha_1 + \omega, \dots, \alpha_{n-1} + \omega; z + \omega], \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & F^{(n)} [y(t + \omega); \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n^*; z] y'(\alpha_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} F^{(n-1)} [y(t); \alpha_1 + \omega, \dots, \alpha_{n-1} + \omega; z + \omega] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} F^{(n-1)} [y(t); \alpha_1 + \omega, \dots, \alpha_{n-1} + \omega; z + \omega], \end{aligned}$$

e per $\omega = 0$ si ha allora:

(19)

$$\begin{aligned} & F^{(n)} [y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n^*; z] y'(\alpha_n) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} F^{(n-1)} [y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} F^{(n-1)} [y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z] + \dots + \frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}} F^{(n-1)} [y(t); \\ &\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z] + \frac{\partial}{\partial z} F^{(n-1)} [y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z] \end{aligned}$$

formula generale di cui sono casi particolari la (15) per $n = 2$, la (12) per $n = 1$ e la (1') nel caso che F sia lineare; la scriveremo anche, con le notazioni già introdotte e tralasciando in esse l'indice y :

$$\begin{aligned} (20) \quad & v_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n^*; z) y'(\alpha_n) = \\ &= v_{n-1, \alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z) + \dots + v_{n-1, \alpha_{n-1}}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z) + \\ &+ v_{n-1, z}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z) \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} (21) \quad & - v_{n, \alpha_n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n^*; z) y(\alpha_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} v_{n-1, \alpha_i}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z) + v_{n-1, z}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z) \end{aligned}$$

che generalizza la (16) e la (13).

4. — A relazioni ancora più generali si arriva partendo da un operatore del ciclo chiuso del tipo

$$(7) \quad F[y(t); z_1, z_2, \dots, z_h] = f^y(z_1, z_2, \dots, z_h)$$

per cui valga la

$$(4') \quad F_t[y(t + \omega); z_1, \dots, z_h] = F_t[y(t); z_1 + \omega, \dots, z_h + \omega].$$

Con procedimento analogo a quello del numero precedente abbiamo allora

$$\frac{\partial}{\partial \omega} F[y(t + \omega); z_1, \dots, z_h] = F'[y(t + \omega); \alpha_1^*; z_1, \dots, z_h] \frac{\partial y(\alpha_1 + \omega)}{\partial \omega}$$

e per la (4')

$$\begin{aligned} F'[y(t + \omega); \alpha_1^*; z_1, \dots, z_h] y'(\alpha_1 + \omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega} F[y(t); z_1 + \omega, \dots, z_h + \omega] = \\ &= \sum_1^h \frac{\partial F[y(t); z_1 + \omega, \dots, z_h + \omega]}{\partial z_i} \end{aligned}$$

e per $\omega = 0$

$$(12') \quad F'[y(t); \alpha_1^*; z_1, z_2, \dots, z_h] y'(\alpha_1) = \sum_1^h \frac{\partial F[y(t); z_1, z_2, \dots, z_h]}{\partial z_i}$$

formula che generalizza a sua volta la (12).

Se F è lineare, F' ne è l'indicatrice e la (12') diventa:

$$(1'') \quad F[y'(t); z_1, z_2, \dots, z_h] = \sum_1^h \frac{\partial f^y(z_1, z_2, \dots, z_h)}{\partial z_i}$$

che generalizza la (1').

Ricordiamoci ora (n. 2) che anche i derivati dei funzionali del ciclo chiuso del tipo più generale (7) sono ancora del ciclo chiuso. E' allora:

$$\begin{aligned} (8''') \quad F^{(n-1)}[y(t + \omega); \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; z_1, \dots, z_h] &= \\ &= F^{(n-1)}[y(t); \alpha_1 + \omega, \dots, \alpha_{n-1} + \omega; z_1 + \omega, \dots, z_h + \omega] \end{aligned}$$

In virtù di questa identità è possibile procedere analogamente a quanto fatto per i funzionali del ciclo chiuso ad un solo parametro e si ottiene:

$$\begin{aligned} (19') \quad & F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n^*; z_1, z_2, \dots, z_h] y'(\alpha_n) = \\ &= \sum_1^{n-1} \frac{\partial F^{(n-1)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z_1, z_2, \dots, z_h]}{\partial \alpha_i} + \\ &+ \sum_1^h \frac{\partial F^{(n-1)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z_1, z_2, \dots, z_h]}{\partial z_i} \end{aligned}$$

relazione che generalizza la (19).

5. — a) Supponiamo ora che il funzionale del ciclo chiuso $F[y(t); z]$ sia polinomiale; ovvero che il suo sviluppo in serie di FANTAPPIÈ, nell'intorno di una qualunque funzione del suo campo di definizione, sia costituito da uno stesso numero *finito* di termini. Avremo cioè:

$$(22) \quad F[y(t) + \varepsilon \varphi(t); z] = F[y(t); z] + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon^i}{i!} F^{(i)}[y(t); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_i^*; z] \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_i^*)$$

dove il derivato $n^{\text{mo}} F^{(n)}$, non dipende dalla $y(t)$, ed è cioè una pura funzione dei parametri indici di derivazione e della z . E quindi, mentre per $i < n$ possiamo soltanto scrivere, ricordando la (9):

$$\begin{aligned} \bar{v}_i^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i; z) &= F^{(i)}[y(t + \omega); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i; z] = \\ &= F^{(i)}[y(t); \alpha_1 + \omega, \alpha_2 + \omega, \dots, \alpha_i + \omega; z + \omega] = \\ &= v_i^y(\alpha_1 + \omega, \alpha_2 + \omega, \dots, \alpha_i + \omega; z + \omega), \end{aligned}$$

per $i = n$ è invece $\bar{v}_n^y = v_n^y$ e quindi

$$(23) \quad \begin{aligned} v_n^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z) &= \bar{v}_n^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z) = F^{(n)}[y(t + \omega); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z] = \\ &= F^{(n)}[y(t); \alpha_1 + \omega, \alpha_2 + \omega, \dots, \alpha_n + \omega; z + \omega] = v_n^y(\alpha_1 + \omega, \alpha_2 + \omega, \dots, \alpha_n + \omega; z + \omega). \end{aligned}$$

Ma allora, derivando rapporto a ω primo ed ultimo membro, per $\omega = 0$ si ha:

$$\frac{\partial v_n}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_n}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial \alpha_n} + \frac{\partial v_n}{\partial z} = 0$$

da cui risulta che v_n è solo funzione delle differenze $z - \alpha_i$ (come nel caso considerato dal FANTAPPIÈ nell'intorno delle funzioni y costanti) e cioè si ha:

$$(24) \quad \boxed{v_n^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z) = g_n(z - \alpha_1, z - \alpha_2, \dots, z - \alpha_n)}$$

Potremo allora scrivere lo sviluppo (22), più precisamente sotto la forma:

$$(25) \quad \begin{aligned} F[y(t) + \varepsilon \varphi(t); z] &= F[y(t); z] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon^i}{i!} v_i^y(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_i^*; z) \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_i^*) + \\ &+ \frac{\varepsilon^n}{n!} g_n(z - \alpha_1^*, z - \alpha_2^*, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*). \end{aligned}$$

b) Vediamo ora, avvalendoci delle relazioni (20) e dei risultati del numero precedente, di determinare anche la struttura delle funzioni v_i , con $i < n$, che compaiono nello sviluppo (25). E per prima cosa, supposta nota la $g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n)$, cerchiamo di determinare la v_{n-1}^y . All'uopo dalla (20) otteniamo:

$$(26) \quad g_n(z - \alpha_1, z - \alpha_2, \dots, z - \alpha_n) y'(\alpha_n) = \\ = \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} + \frac{\partial v_{n-1}}{\partial z}.$$

Ora conosciamo l'integrale generale dell'equazione omogenea che si ottiene da questa ponendo uguale a zero il primo membro e che è appunto dato da una funzione arbitraria g_{n-1} delle differenze $z - \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Basterà allora, per avere l'integrale generale della (26), trovare un integrale particolare, e sommarlo alla g_{n-1} suddetta.

All'uopo, applicando lo sviluppo di FANTAPPIÈ ad $F^{(n-1)}$, abbiamo:

$$F^{(n-1)}[y(t) + \varphi(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z] = \\ = F^{(n-1)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z] + g_n(z - \alpha_1, z - \alpha_2, \dots, z - \alpha_n) \varphi(\alpha_n).$$

Derivando ambo i membri di questa relazione successivamente rispetto ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, z$ e sommando otteniamo:

$$v_{n-1, \alpha_1}^{y+\varphi} + v_{n-1, \alpha_2}^{y+\varphi} + \dots + v_{n-1, \alpha_{n-1}}^{y+\varphi} + v_{n-1, z}^{y+\varphi} = v_{n-1, \alpha_1}^y + \dots + v_{n-1, \alpha_{n-1}}^y + v_{n-1, z}^y + \\ + g_{n, \alpha_1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n) \varphi(\alpha_n) + \dots + g_{n, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n) \varphi(\alpha_n) + \\ + g_{n, z}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n) \varphi(\alpha_n).$$

Ma per la (20) e per essere la g_n indipendente da $y(t)$, il primo membro della precedente può scriversi:

$$g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n) [y'(\alpha_n) + \varphi'(\alpha_n)].$$

Per gli stessi motivi i primi n termini del 2.° membro sono uguali a $g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n) y'(\alpha_n)$. E' allora:

$$\begin{aligned}
& g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) [y'(\alpha_n) + \varphi'(\alpha_n)] = \\
& = g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) y'(\alpha_n) + g_{n, \alpha_1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_n) + \dots \\
& + g_{n, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_n) + g_{n, z}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_n)
\end{aligned}$$

ovvero, eseguite le riduzioni:

$$\begin{aligned}
(27) \quad & g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi'(\alpha_n) = \\
& = g_{n, \alpha_1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_n) + \dots + g_{n, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_n) + \\
& + g_{n, z}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n^*) \varphi(\alpha_n),
\end{aligned}$$

relazione che vale per ogni φ tale che $y + \varphi$ sia in un intorno conveniente di y , cioè tale che $|\varphi| < \sigma$ in un insieme A conveniente. Ma poiché questa è una relazione lineare, se essa vale per φ , vale anche per $K\varphi$ con K comunque grande, e quindi vale anche se al posto di φ poniamo la y stessa, ottenendosi così:

$$\begin{aligned}
(27') \quad & g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y'(\alpha_n) = \\
& = g_{n, \alpha_1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n) + \dots + g_{n, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n) + \\
& + g_{n, z}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n).
\end{aligned}$$

Si è così ottenuto che una soluzione particolare dell'equazione differenziale (26) è data proprio da $g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n)$. Il suo integrale generale sarà quindi:

$$\begin{aligned}
(28) \quad & v_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}; z) = \\
& = g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}) + g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n)
\end{aligned}$$

con g_{n-1} funzione arbitraria delle differenze $z - \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), che qui però sarà anche da assumersi simmetrica nelle α_i .

Per integrare la (26) con il metodo classico dell'analisi bisogna ricorrere al sistema differenziale associato che nel nostro caso è

$$d\alpha_1 = \dots = d\alpha_{n-1} = dz = \frac{dv_{n-1}}{g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y'(\alpha_n)}$$

e si ottiene per l'integrale generale della (26) :

$$(29) \quad v_{n-1} = \int_{z_0}^z g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n^*) y'(\alpha_n) d\zeta + \psi_1(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1})$$

con ψ_1 funzione arbitraria delle differenze $z - \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$), ma simmetrica rispetto alle α_i perché tale deve essere la v_{n-1} .

E' facile ritrovare dalla precedente la (28) : e infatti per una proprietà del prodotto funzionale emisimmetrico possiamo scrivere la (29) :

$$v_{n-1} = \int_{z_0}^z g_{n, \alpha_n}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n^*) y(\alpha_n) d\zeta + \psi_1(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1})$$

ovvero :

$$v_{n-1} = \int_{z_0}^z g_{n, \zeta}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n^*) y(\alpha_n) d\zeta + \psi_1(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}),$$

ovvero ancora

$$(30) \quad v_{n-1} = g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n) - \\ - g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z_0 - \alpha_n^*) y(\alpha_n) + \psi_1(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1})$$

ed essendo $g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z_0 - \alpha_n^*) y(\alpha_n)$ funzione delle sole differenze $z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}$ e simmetrica rispetto alle α_i , perché tale è la g_n , potremo includerla nella funzione arbitraria ψ_1 ed avere così la (28).

c) Calcoliamo ora la v_{n-2} . Tenendo presente la (20) abbiamo :

$$v_{n-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}^*; z) y'(\alpha_{n-1}) = \\ = \frac{\partial v_{n-2}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_{n-2}}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial v_{n-2}}{\partial \alpha_{n-2}} + \frac{\partial v_{n-2}}{\partial z},$$

ovvero per la (28) :

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \{ g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}, z - \alpha_n) y(\alpha_n) + \\
 & + g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-1}) \} y'(\alpha_{n-1}) = \\
 & = \frac{\partial v_{n-2}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_{n-2}}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial v_{n-2}}{\partial \alpha_{n-2}} + \frac{\partial v_{n-2}}{\partial z},
 \end{aligned}$$

da cui si ottiene :

$$\begin{aligned}
 (32) \quad & v_{n-2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}; z) = \\
 & = \int_{z_0}^z \{ g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n) y(\alpha_n) + \\
 & + g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}) \} y'(\alpha_{n-1}) d\zeta + \psi_2(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2})
 \end{aligned}$$

con ψ_2 funzione arbitraria delle differenze $z - \alpha_i$. Dalla precedente può farsi sparire la quadratura e la derivata della funzione y che in essa compaiono. Abbiamo infatti, utilizzando la proprietà del prodotto emi-simmetrico già più volte invocata,

$$\begin{aligned}
 v_{n-2} &= \int_{z_0}^z g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n) y(\alpha_n) y'(\alpha_{n-1}) d\zeta + \\
 &+ \int_{z_0}^z g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}) y'(\alpha_{n-1}) d\zeta + \psi_2(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}) = \\
 &= \int_{z_0}^z g_{n, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n) y(\alpha_n) y(\alpha_{n-1}) d\zeta + \\
 &+ \int_{z_0}^z g_{n-1, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}) y(\alpha_{n-1}) d\zeta + \psi_2(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}).
 \end{aligned}$$

Ma è :

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & \frac{\partial g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n)}{\partial \zeta} = \\
 &= - \frac{\partial g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n)}{\partial \alpha_{n-1}} - \frac{\partial g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}, \zeta - \alpha_n)}{\partial \alpha_n}
 \end{aligned}$$

e

$$(34) \quad \frac{\partial g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1})}{\partial \zeta} = - \frac{\partial g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1})}{\partial \alpha_{n-1}}$$

ed allora per la simmetria di g_n rispetto alle α_i e per il fatto che gli asterischi indicano integrali estesi ad una curva chiusa, nei quali si possono scambiare i nomi delle due variabili d'integrazione α_{n-1} e α_n , valgono le identità :

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & \frac{\partial g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}^*, \zeta - \alpha_n^*)}{\partial \zeta} y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_* = \\
 & = - \{ g_{n, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}^*, \zeta - \alpha_n^*) + \\
 & + g_{n, \alpha_n}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}^*, \zeta - \alpha_n^*) \} y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_* = \\
 & = - 2 g_{n, \alpha_n}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}^*, \zeta - \alpha_n^*) y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_* = \\
 & = - 2 g_{n, \alpha_{n-1}}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}^*, \zeta - \alpha_n^*) y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_*.
 \end{aligned}$$

E' allora :

$$\begin{aligned}
 v_{n-2} &= \int_{z_0}^z \frac{1}{2} g_{n, \zeta}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}^*, \zeta - \alpha_n^*) y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_* d\zeta + \\
 + \int_{z_0}^z g_{n-1, \zeta}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, \zeta - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1})_* d\zeta + \psi_2(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}) = \\
 &= \frac{1}{2} g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, z - \alpha_{n-1}^*, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_* + \\
 &+ g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, z - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1})_* - \\
 &- \frac{1}{2} g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, z_0 - \alpha_{n-1}^*, z_0 - \alpha_n^*) y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_* - \\
 &- g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, z_0 - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1})_* + \psi_2(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2})
 \end{aligned}$$

e chiamando con $g_{n-2}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2})$ le ultime tre funzioni, il che è giustificato dal fatto che sono tutte e tre funzioni delle sole differenze $z - \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-2$) e dall'arbitrarietà di ψ_2 , abbiamo infine :

$$\begin{aligned}
 (36) \quad & v_{n-2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}; z) = \\
 &= \frac{1}{2} g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, z - \alpha_{n-1}^*, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n)_* y(\alpha_{n-1})_* + \\
 &+ g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2}, z - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1})_* + g_{n-2}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-2})
 \end{aligned}$$

con g_{n-2} pure arbitraria.

d) Per induzione, basandosi poi sulle identità analoghe alle (33), (34), (35) che valgono nel caso generale, si dimostra poi che è:

$$(37) \quad \begin{aligned} v_{n-r}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}, z) = \\ = \frac{1}{r!} g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-r}, z - \alpha_{n-(r-1)}^* \dots z - \alpha_n^*) y(\alpha_n^*) \dots y(\alpha_{n-(r-1)}^*) + \\ + \frac{1}{(r-1)!} g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-r}, z - \alpha_{n-(r-1)}^*, \dots, z - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1}^*) \dots y(\alpha_{n-(r-1)}^*) + \\ + \dots + g_{n-(r-1)}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-r}, z - \alpha_{n-(r-1)}^*) y(\alpha_{n-(r-1)}^*) + g_{n-r}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_{n-r}) \end{aligned}$$

e cambiando $n - r$ in i abbiamo

$$(37') \quad \begin{aligned} v_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i; z) = \\ = \frac{1}{(n-i)!} g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, z - \alpha_{i+1}^*, \dots, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n^*) \dots y(\alpha_{i+1}^*) + \\ + \frac{1}{(n-i-1)!} g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, z - \alpha_{i+1}^*, \dots, z - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1}^*) \dots y(\alpha_{i+1}^*) + \\ + \dots + g_{i+1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, z - \alpha_{i+1}^*) y(\alpha_{i+1}^*) + g_i(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i), \end{aligned}$$

in cui tutte le g_i sono funzioni arbitrarie delle differenze $z - \alpha_k$. Ogni funzionale polinomiale del ciclo chiuso è dunque del tipo (25) dove al posto delle v_i si pongono le corrispondenti espressioni date dalla (37'). E' da osservare che lo sviluppo in questione si particolarizza nello sviluppo (6) di FANTAPPIÈ. All'uopo basta osservare che la relazione fondamentale (20) vale anche se $y = k$ e che tutti i termini di ogni v_i , dati dalla (37'), hanno la forma dell'ultimo. Come si vede, cambiando in questo caso le variabili d'integrazione α_{i+j} in $u_{i+j} = z - \alpha_{i+j}$, lo sviluppo (25), con le v_i date dalla (37'), è valido per i funzionali polinomiali del ciclo chiuso (definiti o no per le costanti $\neq 0$), nell'intorno di una funzione qualunque del campo di definizione di detti funzionali.

6. — Resta da sapere se un tale sviluppo fornisce sempre un funzionale polinomiale del ciclo chiuso. All'uopo ricordiamo la condizione necessaria e sufficiente qui stabilita al n° 2. In forza di essa potremo asserire che lo sviluppo (25), dove le v_i sono date dalla (37'), rappresenterà un funzionale polinomiale F del ciclo chiuso se faremo vedere che per le v_i vale la relazione:

$$(38) \quad v_i^{y(t)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i; z) = v_i^{y(t+\omega)}(\alpha_1 - \omega, \alpha_2 - \omega, \dots, \alpha_i - \omega, z - \omega)$$

e se inoltre è:

$$(39) \quad F[y(t + \omega); z] = F[y(t); z + \omega]$$

per una particolare funzione $y(t)$ di ognuna delle parti connesse in cui eventualmente si spezza la regione R di definizione di F . Ora la (38) è effettivamente verificata. E infatti, ricordata la (37'), è:

$$\begin{aligned} v_i^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i; z) = & \\ = \frac{1}{(n-i)!} g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, z - \alpha_{i+1}^*, \dots, z - \alpha_n^*) y(\alpha_n^*) \dots y(\alpha_{i+1}^*) + & \\ + \frac{1}{(n-i-1)!} g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, z - \alpha_{i+1}^*, \dots, z - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1}^*) \dots y(\alpha_{i+1}^*) + & \\ + \dots \dots \dots & \\ + g_{i+1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, z - \alpha_{i+1}^*) y(\alpha_{i+1}^*) + g_i(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i). & \end{aligned}$$

E per la proprietà del prodotto funzionale emisimmetrico già varie volte utilizzata, è:

$$\begin{aligned} v_i^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i; z) = \frac{1}{(n-i)!} g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, & \\ z - (\alpha_{i+1}^* + \omega), \dots, z - (\alpha_n^* + \omega)) y(\alpha_n^* + \omega) \dots y(\alpha_{i+1}^* + \omega) + & \\ + \frac{1}{(n-i-1)!} g_{n-1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, & \\ z - (\alpha_{i+1}^* + \omega), \dots, z - (\alpha_{n-1}^* + \omega)) y(\alpha_{n-1}^* + \omega) \dots y(\alpha_{i+1}^* + \omega) + & \\ + \dots \dots \dots & \\ + g_{i+1}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i, z - (\alpha_{i+1}^* + \omega)) y(\alpha_{i+1}^* + \omega) + g_i(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_i) = & \\ = \frac{1}{(n-i)!} g_n(z - \omega - (\alpha_1 - \omega), \dots, z - \omega - (\alpha_i - \omega), & \\ z - \omega - \alpha_{i+1}^*, \dots, z - \omega - \alpha_n^*) y(\alpha_n^* + \omega) \dots y(\alpha_{i+1}^* + \omega) + & \\ + \frac{1}{(n-i-1)!} g_{n-1}(z - \omega - (\alpha_1 - \omega), \dots, z - \omega - (\alpha_i - \omega), & \\ z - \omega - \alpha_{i+1}^*, \dots, z - \omega - \alpha_{n-1}^*) y(\alpha_{n-1}^* + \omega) \dots y(\alpha_{i+1}^* + \omega) + & \\ + \dots \dots \dots & \\ + g_{i+1}(z - \omega - (\alpha_1 - \omega), \dots, z - \omega - (\alpha_i - \omega), & \\ z - \omega - \alpha_{i+1}^*) y(\alpha_{i+1}^* + \omega) + g_i(z - \omega - (\alpha_1 - \omega), \dots, z - \omega - (\alpha_i - \omega)) = & \\ = v_i^{y(t+\omega)}(\alpha_1 - \omega, \alpha_2 - \omega, \dots, \alpha_i - \omega; z - \omega), & \end{aligned}$$

relazione verificata per ogni valore di i da 0 ad n . Osserviamo poi che per $i = 0$ tale relazione ci dice che *è verificata anche la (39) per la funzione iniziale $y(t)$* . Possiamo allora concludere che *ogni funzionale F da'o dallo sviluppo (25) rappresenta effettivamente un funzionale polinomiale del ciclo chiuso*. Ciò dimostra anche che *la condizione necessaria e sufficiente perché un funzionale polinomiale F d'ordine n sia del ciclo chiuso è data dalle relazioni (20) per i valori di i da 1 ad n* .

7. — Ma v'è di più. La (37') suggerisce infatti quale possa essere lo sviluppo d'un funzionale del ciclo chiuso non polinomiale. Fa cioè pensare che le v_i di tale sviluppo si possano ottenere passando da tale somma finita (37') a una serie infinita.

Dovrebbe cioè essere :

$$(40) \quad F[y(t) + \varepsilon \varphi(t); z] = F[y(t); z] + \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} F^{(n)}[y(t); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z] \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*)$$

con

$$(41) \quad F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z] = v_n^y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z) = g_n(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n) + \sum_r \frac{1}{r!} g_{n+r}(z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_n, z - \alpha_{n+1}^*, \dots, z - \alpha_{n+r}^*) y(\alpha_{n+1}^*) \dots y(\alpha_{n+r}^*),$$

con le g_i funzioni simmetriche delle α_i e quindi degli argomenti $z - \alpha_i$, tali inoltre da rendere convergenti le serie (40) e (41) per tutte le φ di un certo intorno dello zero, tali ancora che i prodotti funzionali indicati nella (40) e (41) siano eseguibili (non perdano senso) e per il resto arbitrarie. Consideriamo allora lo sviluppo

$$(42) \quad v_0(z) + \sum \frac{\varepsilon^n}{n!} v_n^y(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z) \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*)$$

con le v_n date dalla (41).

Per $\varepsilon = 1$ lo sviluppo (42), che per ipotesi converge, rappresenta uno sviluppo di funzionali omogenei che dà il valore di un funzionale analitico F in $y(t) + \varphi(t)$ e cioè nell'intorno di $y(t)$. Sviluppato tale

funzionale F in serie di FANTAPPIÈ, per l'unicità di tale sviluppo ⁽⁹⁾, avremo:

$$(43) \quad v_n^y(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z) \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*) = \\ = F^{(n)}[y(t); \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*; z] \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*).$$

Se adesso si deriva funzionalmente n volte ambo i membri di questa ultima relazione rapporto a $\varphi(t)$ otteniamo $n! F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z]$ dal secondo membro e $n! v_n^y(\alpha_1 \dots \alpha_n; z)$ dal primo membro per l'ammessa simmetria delle g_i rapporto alle α_i .

Siamo allora sicuri che ogni sviluppo del tipo (42) è proprio lo sviluppo in serie di FANTAPPIÈ d'un funzionale analitico e cioè le v_i coincidono con i corrispondenti funzionali derivati del funzionale sviluppato.

Di più, ogni serie (40) soddisfa; com'è evidente dopo quanto esposto al n. 6, alle relazioni (39) e (38) per i da 0 a ∞ . Ma allora per la condizione necessaria e sufficiente esposta al n. 2 ogni sviluppo (42) rappresenta indubbiamente un funzionale non polinomiale del ciclo chiuso.

8. — E' da osservare che i funzionali che si ricavano dallo sviluppo (25) a mezzo della (37') sono tutti continui perché polinomiali. ⁽¹⁰⁾

Gli sviluppi (25) e (40) anzi la (37') e la (41) mostrano che la proprietà che la funzione delle α_k ($k = 1, 2, \dots, n$): $F^{(n)}[y(t); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; z]$ sia funzione delle differenze $z - \alpha_k$ non è più vera in generale se la $y(t)$ non è una costante. Alla stessa conclusione si perviene del resto considerando lo sviluppo del funzionale del ciclo chiuso (non definito per lo zero) dato dall'inverso d'un lineare del ciclo chiuso. Si ha infatti subito in tal caso:

$$F[y(t) + \varepsilon \varphi(t); z] = \frac{1}{L[y(t) + \varepsilon \varphi(t); z]} = \frac{1}{L[y(t); z]} + \\ (44) + \sum_1^\infty \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{u(z - \alpha_1^*) u(z - \alpha_2^*) \dots u(z - \alpha_n^*)}{L^{n+1}[y(t); z]} \varphi(\alpha_1^*) \varphi(\alpha_2^*) \dots \varphi(\alpha_n^*) \\ = g(z) + \sum_1^\infty \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[H_i^n u(z - \alpha_i^*) \varphi(\alpha_i^*) \right] [g(z)]^{n+1}$$

⁽⁹⁾ Cfr. H. G. HAEFELI und F. PELLEGRINO. — *Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen nicht linearen Funktione*. — Comm. Math. Helv., vol. 23, fasc. 2°, 1949.

⁽¹⁰⁾ Cfr. lavoro citato in ⁽⁹⁾.

dove si è posto $g(z) = \frac{1}{L[y(t); z]}$ e con $u(z - \alpha)$ si è indicata l'indicatrice del funzionale L .

Gli sviluppi (25) e (40) precisati a mezzo delle (37') e (41) permettono naturalmente la determinazione dei funzionali primitivi di quelli che essi rappresentano e appartenenti alle due classi di cui alla a) dell'introduzione di questo lavoro. Ma per questo vedi il lavoro citato in (1).

Roma, novembre 1948.

