

RESOLUCIÓN EN FORMA FINITA DEL PROBLEMA DE CAUCHY SOBRE UNA HIPERSUPERFICIE CUALQUIERA EN LA ECUACIÓN DE ONDAS CON CUALQUIER NÚMERO DE VARIABLES, Y EN OTRAS NOTABLES DE TIPO HIPERBÓLICO CON COEFICIENTES CONSTANTES

POR

ENRIQUE LINÉS ESCARDÓ

ÍNDICE

Cap. I. *Resolución en forma finita del problema de CAUCHY sobre una hipersuperficie cualquiera, en la ecuación de ondas con cualquier número de variables.*

	Páginas
1. Reducción del problema a la resolución de una ecuación integrodiferencial.....	5
2. Aplicación del cálculo de operadores.....	8
3. Cálculo del funcional cuya indicatriz proyectiva es de la forma	
$p(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$	10
4. Nueva expresión de la función $\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y del funcional de indicatriz proyectiva $\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$	17
5. Fórmulas que resuelven en forma finita el problema de CAUCHY en la ecuación de ondas con n variables.....	21
6. Condiciones iniciales particulares.....	22
7. Estudio de las fórmulas resolventes.....	26
8. Expresión de las fórmulas resolventes por medio de integrales de volumen, sobre el cono característico, sobre la hipersuperficie Γ , y sobre la variedad intersección de las dos anteriores.	34



9. Estudio de la solución de la ecuación no homogénea cuando las condiciones iniciales de CAUCHY sobre la hipersuperficie I' son $[u]_{I'} \equiv 0$ y $[u'_t]_{I'} \equiv 0$ 38
 10. Estudio de la solución de la ecuación homogénea cuando las condiciones iniciales de CAUCHY sobre la hipersuperficie I' son : $[u(t, x_i)]_{I'} \equiv \varphi_0(x_i)$ y $[u'_t(t, x_i)]_{I'} \equiv \varphi_1(x_i)$. Principio de HUYGHENS 39
 11. La solución del problema de CAUCHY de la ecuación de ondas en el campo real..... 44
 12. Resolución del problema de CAUCHY sobre una hipersuperficie cualquiera en la ecuación de los telegrafistas..... 47
- Cap. II. *Casos notables de resolución del problema de CAUCHY en ecuaciones y sistemas en derivadas parciales con coeficientes constantes y de tipo hiperbólico.*
13. Productos proyectivos en los que una de las funciones del mismo es par respecto de todas las variables..... 51
 14. Estudio del producto proyectivo

$$P = \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \alpha_i^2\right) \left(1 - \sum_{i=1}^n b_i^2 \alpha_i^2\right)} \Delta_y (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \dots 53$$
 15. Estudio del producto proyectivo

$$P = \frac{1}{1 - \alpha_1^4 - \alpha_2^4 - \dots - \alpha_n^4} \Delta_y (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \dots 55$$
 16. Resolución del problema de CAUCHY en la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = f(t, x_1, \dots, x_n)$ 57
 17. Resolución del problema de CAUCHY en la ecuación en derivadas parciales $\prod_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^h a_{ij}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) u = f(t, x_1, \dots, x_n)$. 60
 18. Resolución del problema de CAUCHY en el sistema de ecuaciones de la propagación de las ondas luminosas en los medios cristalinos uniaxiales..... 63
- Cap. III. *Cálculo de productos proyectivos a partir de soluciones particulares de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes. Aplicaciones.*
19. Cálculo de productos proyectivos a partir de soluciones particulares de ciertas ecuaciones en derivadas parciales..... 68

20. Estudio del producto proyectivo de la forma :

$$\frac{1}{a_{00} + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^n a_{0i} \alpha_i} \triangle_x f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \dots \dots \dots 74$$

Caso particular..... 78

21. Resolución del problema de CAUCHY para la ecuación en derivadas parciales

$$a_{00} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + \sum_{i=1}^n a_{0,i} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial t^2} = f(t, x_1, \dots, x_n) \dots \dots 79$$

Nota. Nueva expresión de la media proyectiva de una función entre k puntos..... 81

CAPÍTULO I

RESOLUCIÓN EN FORMA FINITA DEL PROBLEMA DE CAUCHY SOBRE UNA HIPERSUPERFICIE CUALQUIERA, EN LA ECUACIÓN DE ONDAS CON CUALQUIER NÚMERO DE VARIABLES

1. Reducción del problema a la resolución de una ecuación integro-diferencial. — Sea la ecuación de tipo hiperbólico, llamada de ondas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [1,1]$$

en $n + 1$ variables, donde se ha designado a la primera variable con la letra t representante del tiempo. Se trata de encontrar la solución de la misma, determinada por las condiciones iniciales en la forma de CAUCHY, sobre una hipersuperficie cualquiera.

Sea I' un trozo regular de la hipersuperficie de ecuación

$$t = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad [1,2]$$

tal que en ninguno de sus puntos sea tangente a una hipersuperficie característica de la ecuación [1,1]. Se dan los valores que toma la función desconocida u , así como su derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ respecto de t , en los puntos del



trozo Γ de la hipersuperficie analítica [1,2], es decir, se dan las funciones $\varphi_0(x_1, \dots, x_n)$ y $\varphi_1(x_1, \dots, x_n)$ de manera que

$$[u(x_i, t)]_{\Gamma} = [u(x_i, t)]_{t=\psi} = \varphi_0(x_i) \quad [1,3]$$

$$y \quad \left[\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right]_{\Gamma} = \left[\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right]_{t=\psi} = \varphi_1(x_i), \quad [1,4]$$

(para abreviar se ha representado con la sola letra x_i , el conjunto de $x_1, x_2, \dots, x_n$), y se trata de hallar la función $u(x_i, t)$ que verifique la ecuación [1,1] y las condiciones [1,3] y [1,4].

Se supone que tanto la función $f(t, x_i)$ como las $\varphi_0(x_i)$ y $\varphi_1(x_i)$ son analíticas y regulares en un entorno conveniente de un punto P_0 , en el cual Γ es regular.

Introduzcamos los operadores lineales I y B_s , que aplicados a una función $z(t, x_1, \dots, x_n)$ tienen la forma

$$Iz = \int_{\psi}^t z(\tau, x_1, \dots, x_n) d\tau, \quad [1,5]$$

$$B_s z = I \frac{\partial z}{\partial x_s} = \int_{\psi}^t z'_s(\tau, x_1, \dots, x_n) d\tau, \quad [1,6]$$

donde las integrales serán variables con el extremo superior t , mientras el inferior es la función fija $\psi(x_1, \dots, x_n)$ ⁽¹⁾. Naturalmente que los caminos de integración han de estar en el interior de un recinto en el que la función z sea regular, y dentro del cual tendrán sentido dichos operadores.

Estos operadores son permutables siempre que operen sobre funciones que se anulen en Γ , y además verifican las condiciones suficientes para que el cálculo simbólico sea riguroso ⁽²⁾.

Aplicemos a la ecuación [1,1] el operador I :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{\psi}^t - I \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \dots - I \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = I f(t, x_1, \dots, x_n), \quad [1,7]$$

pero como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\psi}^t \frac{\partial u(x_j, \tau)}{\partial x_i} d\tau = \int_{\psi}^t \frac{\partial^2 u(x_j, \tau)}{\partial x_i^2} d\tau - \left(\frac{\partial u(x_j, \tau)}{\partial x_i} \right)_{\tau=\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

⁽¹⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *Risoluzione in termini finiti del problema di CAUCHY, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque.* — Rend. P. Acc. d'Italia. — S. 7, vol. 2, 1941.

⁽²⁾ Cfr. Memoria antes citada, y L. FANTAPPIÉ. — *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali.* — Mem. R. Acc. d'Italia. — Vol. I. — 1930.

y

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x_j, \psi(x_j))}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u(x_j, t)}{\partial x_i} \right)_{t=\psi} + \left(\frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} \right)_{t=\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

o sea

$$\left(\frac{\partial u(x_j, t)}{\partial x_i} \right)_{t=\psi} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} - \varphi_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

se tendrá

$$\int_{\psi}^t \frac{\partial^2 u(x_j, \tau)}{\partial x_i^2} d\tau = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\psi}^t \frac{\partial u(x_j, \tau)}{\partial x_i} d\tau + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \psi} - \varphi_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2.$$

La [1,7] se podrá escribir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\psi}^t \frac{\partial u}{\partial x_1} d\tau - \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{\psi}^t \frac{\partial u}{\partial x_2} d\tau - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} \int_{\psi}^t \frac{\partial u}{\partial x_n} d\tau = \\ & = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} I \frac{\partial u}{\partial x_i} = I f(t, x_1, \dots, x_n) + \varphi_1 \left[1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Volviendo a aplicar a esta ecuación el operador I , se tiene

$$[u]_{\psi}^t - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} I \left(I \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = I^2 f + I \left\{ \varphi_1 \left[1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right] \right\} + I \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}. \quad [1,8]$$

En el segundo término del primer miembro, se han permutado los símbolos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ y I cosa lícita por aplicarse a la función $I \frac{\partial u}{\partial x_i}$ que se anula sobre I' .

Transformando $I \frac{\partial u}{\partial x_i}$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\psi}^t \frac{\partial u(x_j, \tau)}{\partial x_i} d\tau &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\psi}^t u(x_j, \tau) d\tau + (u(x_j, \tau))_I \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\psi}^t u(x_j, \tau) d\tau + \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_i} I \left(I \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} I \frac{\partial}{\partial x_i} I u + \frac{\partial}{\partial x_i} I \left(\varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right),$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial x_i} I \left(\varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) = I \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \varphi_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) - \varphi_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2,$$

de donde la ecuación [1,8] será finalmente

$$u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} I \frac{\partial}{\partial x_i} I u = f_1(x_i, t), \quad [1,9]$$

donde se ha puesto

$$\begin{aligned} f_1(x_i, t) = & I^2 f + I \left\{ \varphi_1 \left[1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right] \right\} + 2 I \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \\ & + I \varphi_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + \varphi_0 \left[1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad [1,10]$$

Esta expresión consta de tres sumandos que dependen por separado de f , φ_1 y φ_0 , cosa digna de hacerse notar, pues si resolviéramos la ecuación dada, considerando no nula una de las tres funciones, y las otras dos nulas, las sumas de las tres soluciones correspondientes a los tres casos sería la solución del problema.

Si volvemos a aplicar finalmente el operador I a los dos miembros, y tomamos $Iu = \bar{u}$ como función incógnita auxiliar

$$\bar{u} = \int_{\psi}^t u(x_i, \tau) d\tau \quad \text{ó} \quad u = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \quad [1,11]$$

se tiene como ecuación transformada de la dada

$$\bar{u} - \sum_{i=1}^n B_i^2 \bar{u} = I f_1(x_i, t) \quad [1,12]$$

La resolución de esta ecuación integrodiferencial es equivalente a la resolución de la ecuación dada con las condiciones de CAUCHY [13] y [14] sobre el trozo de hipersuperficie Γ .

2. **Aplicación del cálculo de operadores** ⁽¹⁾. — La función u definida en [1,11] se anula sobre la hipersuperficie Γ , que es condición para que el cálculo de operadores sea lícito, y por lo tanto la fórmula [1,12] se podrá escribir

$$\bar{u} = \frac{1}{1 - B_1^2 - B_2^2 - \dots - B_n^2} I f_1(x_i, t), \quad [2,1]$$

⁽¹⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi*. — Annali di Matematica. — s. IV. tomo XXII. — 1943. — XXI, especialmente pág. 284 y siguientes. Véase también la eoria antes citada *Risoluzione in termini finiti, etc., etc.*

o bien

$$u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{1 - B_1^2 - B_2^2 - \dots - B_n^2} I f_1(x_i, t) \right]. \quad [2,2]$$

La resolución de la ecuación propuesta, queda pues reducida al cálculo del operador

$$\frac{1}{1 - B_1^2 - B_2^2 - \dots - B_n^2}, \quad [2,3]$$

aplicado en nuestro caso a la función $I f_1(x_i, t)$.

Para calcular el operador [2,3], hemos de tener en cuenta que toda función de los operadores B_i , tal como $g(B_1, B_2, \dots, B_n)$, correspondiente a la función analítica y regular en el origen $g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, aplicada a una función fija, como la $I f_1(x_i, t)$, es un funcional analítico y lineal $F[g]$, con la función g como variable independiente:

$$g(B_1, B_2, \dots, B_n) I f_1 = F[g(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)];$$

y el cálculo de este funcional resulta del previo de la indicatriz proyectiva

$$\begin{aligned} p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= F \left[\frac{1}{1 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n} \right] = \\ &= \frac{1}{1 + \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n} I f_1. \end{aligned} \quad [2,4]$$

Conocida la indicatriz $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, la función $\bar{u}$ buscada se obtiene como resultado del producto proyectivo siguiente:

$$\bar{u} = \left\{ \frac{\frac{\Delta}{1}}{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \dots - \alpha_n^2} \right\} \frac{\Delta}{p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}. \quad [2,5]$$

De la [2,4] resulta que $p(\alpha)$ ha de ser la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial p}{\partial x_n} = f_1,$$

y verificar la condición inicial $p_{\Gamma} = 0$.

Resuelta la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t, x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ = \int_{\frac{t}{\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}}^t f_1(\tau, x_1 + \alpha_1(\tau - t), \dots, x_n + \alpha_n(\tau - t)) d\tau, \end{aligned} \quad [2,6]$$

donde $\bar{t}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es la coordenada t del punto de intersección de la hipersuperficie $t = \psi(x_1, \dots, x_n)$, con la recta que pasa por el punto $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ y cuyos cosenos directores son proporcionales a $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; es decir la recta

$$T - t = \frac{X_1 - x_1}{\alpha_1} = \frac{X_2 - x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{X_n - x_n}{\alpha_n}, \quad [2,7]$$

donde $T, X_1, \dots, X_n$ son las coordenadas del punto genérico de la misma.

3. Cálculo del funcional cuya indicatriz proyectiva es de la forma

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}.$$

Este funcional $F[y(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ estará definido para todas las funciones analíticas y regulares en un recinto cerrado E definido por $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$; es decir, el campo de definición del funcional es la región lineal (E). Su indicatriz proyectiva tiene como única singularidad los puntos de la hipersfera $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

El valor del funcional vendrá definido por el producto proyectivo de la función $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por la indicatriz dada:

$$F[y(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \left\{ \frac{\frac{\Delta}{1}}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \frac{\Delta}{y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}. \quad [3,1]$$

El cálculo de este producto proyectivo, vamos a realizarlo directamente por medio del desarrollo en serie ⁽¹⁾.

Si el desarrollo en serie de la función $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n}^{\infty} y_{r_1, r_2, \dots, r_n} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}, \quad [3,2]$$

y el de $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n}^{\infty} p_{r_1, r_2, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \dots \alpha_n^{r_n}, \quad [3,3]$$

el producto proyectivo de p por y viene dado por la serie

$$\frac{\Delta}{p} \frac{\Delta}{y} = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n}^{\infty} \frac{(-1)^r r_1! r_2! \dots r_n!}{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)!} p_{r_1, r_2, \dots, r_n} y_{r_1, r_2, \dots, r_n}, \quad [3,4]$$

donde se ha puesto $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$.

⁽¹⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice projectiva...*, pág. 193.

El desarrollo de la indicatriz, en nuestro caso, es :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_n = r} \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \alpha_1^{2r_1} \alpha_2^{2r_2} \dots \alpha_n^{2r_n} = \\ &= \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \alpha_1^{2r_1} \alpha_2^{2r_2} \dots \alpha_n^{2r_n}; \end{aligned}$$

y considerando que el de la función y es el [3,2], obtendremos como expresión del producto proyectivo

$$\begin{aligned} F[y] &= \left\{ \frac{\frac{\Delta}{1}}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \\ \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n} y_{2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n} \frac{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \frac{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_n)!}{(2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_n)!} \quad [3,5] \end{aligned}$$

Para obtener una expresión finita de la serie anterior, haremos uso de las siguientes integrales definidas :

$$\int_0^{2\pi} \cos^h \alpha \sin^k \alpha d\alpha = \begin{cases} 2\pi \frac{(h-1)!! (k-1)!!}{(h+k)!!} & \text{si } h \text{ y } k \text{ son pares,} \\ 0 & \text{si } h \text{ ó } k \text{ es impar.} \end{cases} \quad [3,6]$$

$$\int_0^{\pi} \cos^h \alpha \sin^k \alpha d\alpha = \begin{cases} \pi \frac{(h-1)!! (k-1)!!}{(h+k)!!} & \text{si } h \text{ y } k \text{ son pares,} \\ 2 \frac{(h-1)!! (k-1)!!}{(h+k)!!} & \text{si } h \text{ es par y } k \text{ impar,} \\ 0 & \text{si } h \text{ es impar.} \end{cases} \quad [3,7]$$

$$\int_0^1 \frac{r^h}{\sqrt{1-r^2}} dr = \begin{cases} \frac{\pi (h-1)!!}{2 h!!} & \text{si } h \text{ es par,} \\ \frac{(h-1)!!}{h!!} & \text{si } h \text{ es impar} \end{cases} \quad [3,8]$$

donde el símbolo !! representa la semifactorial, o sea el producto de números de la misma paridad, decrecientes a partir del número indicado, y positivos.

Distinguiremos dos casos, según el número n de variables sea par o impar.

Caso I : n par.

Calculemos el valor de la integral

$$\mathfrak{J} = \int_{E_n} \frac{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad [3,9]$$

extendida al interior de recinto limitado por la esfera real n -dimensional $E_n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Para simplificar dicho cálculo haremos el cambio de variables ordinario

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= r \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{n-2} \operatorname{sen} \varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

Con estas nuevas variables el interior de la esfera E_n estará precisado por las siguientes desigualdades :

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < 1 \\ 0 &\leq \varphi_1 \leq \pi \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &\leq \varphi_{n-2} \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi. \end{aligned}$$

El jacobiano de la transformación es

$$\mathfrak{J} = r^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} \varphi_1 \operatorname{sen}^{n-3} \varphi_2 \dots \operatorname{sen} \varphi_{n-2},$$

y la integral [3,9] se transformará en la siguiente

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} = \int_0^1 \frac{r^{(m_1 + \dots + m_n) + n - 1}}{\sqrt{1 - r^2}} dr \int_0^\pi (\operatorname{sen} \varphi_1)^{(m_1 + \dots + m_n) + n - 2} (\cos \varphi_1)^{m_1} d\varphi_1 \\ \int_0^\pi (\operatorname{sen} \varphi_2)^{(m_2 + \dots + m_n) + n - 3} (\cos \varphi_2)^{m_2} d\varphi_2 \dots \\ \dots \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} \varphi_{n-1})^{m_n} (\cos \varphi_{n-1})^{m_{n-1}} d\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

En primer lugar, para que esta expresión no se anule, han de ser *todas las m_i pares* en virtud de las [3,6] y [3,7]. En este caso sustitu-

yendo los valores dados por estas mismas fórmulas, teniendo en cuenta que n es par, obtendremos :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \left(\frac{(m_n + \dots + m_1 + n - 2)!!}{(m_n + \dots + m_1 + n - 1)!!} \right) \left(\pi \frac{(m_n + \dots + m_2 + n - 3)!! (m_1 - 1)!!}{(m_n + \dots + m_1 + n - 2)!!} \right) \\ &\left(2 \frac{(m_n + \dots + m_3 + n - 4)!! (m_2 - 1)!!}{(m_n + \dots + m_2 + n - 3)!!} \right) \left(\pi \dots \right) \left(2\pi \frac{(m_n - 1)!! (m_{n-1} - 1)!!}{(m_n + m_{n-1})!!} \right) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{(m_1 - 1)!! (m_2 - 1)!! \dots (m_{n-1} - 1)!! (m_n - 1)!!}{(m_1 + m_2 + \dots + m_n + n - 1)!!}, \end{aligned}$$

y finalmente, poniendo $m_1 = 2r_1$, $m_2 = 2r_2$, ..., $m_n = 2r_n$, resulta :

$$\mathfrak{J} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_n)! (r_1 + r_2 + \dots + r_n)!}{(2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_n)! r_1! r_2! \dots r_n! \mathfrak{R}}, \quad [3,10]$$

donde $\mathfrak{R}$ indica el producto de $\frac{n}{2}$ factores, a partir del número $2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_n + 1$, y obtenidos aumentando cada factor en dos unidades para obtener el siguiente :

$$\mathfrak{R} = (2r_1 + \dots + 2r_n + 1) (2r_1 + \dots + 2r_n + 3) \dots (2r_1 + \dots + 2r_n + n - 1). \quad [3,11]$$

De la fórmula [3,10] resulta :

$$\frac{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_n)! (r_1 + r_2 + \dots + r_n)!}{(2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_n)! r_1! r_2! \dots r_n!} = \frac{\mathfrak{R}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{x_1^{2r_1} x_2^{2r_2} \dots x_n^{2r_n}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} dx_1 \dots dx_n$$

que llevada a la expresión [3,5] del producto proyectivo, nos da

$$F[y] = \sum_{0 \leq r_1, r_2, \dots, r_n}^{\infty} y_{2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n} \frac{\mathfrak{R}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{x_1^{2r_1} x_2^{2r_2} \dots x_n^{2r_n}}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} dx_1 \dots dx_n$$

o bien

$$F[y] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \sum_{0 \leq r_1, r_2, \dots, r_n}^{\infty} \frac{y_{2r_1, 2r_2, \dots, 2r_n} \mathfrak{R} x_1^{2r_1} x_2^{2r_2} \dots x_n^{2r_n}}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} dx_1 \dots dx_n. \quad [3,12]$$

Teniendo en cuenta que la integral [3,9] es nula cuando uno cualquiera de los exponentes de las x_i sea impar, podemos completar la serie que aparece bajo el signo integral en la fórmula anterior [3,12], considerando no sólo los términos con exponentes pares, sino todos los términos de la serie

$$\sum_{0 \atop m_1, m_2, \dots, m_n}^{\infty} y_{m_1, m_2, \dots, m_n} \mathfrak{R} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

donde $\mathfrak{R}$ será en todo caso

$$\mathfrak{R} = (m_1 + m_2 + \dots + m_n + 1)(m_1 + \dots + m_n + 3) \dots (m_1 + \dots + m_n + n - 1).$$

La expresión del producto proyectivo buscado será por lo tanto :

$$F[y] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{\sum_{0 \atop m_1, m_2, \dots, m_n}^{\infty} y_{m_1, m_2, \dots, m_n} \mathfrak{R} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} dx_1 \dots dx_n;$$

y llamando para simplificar $\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a la función representada por la serie anterior

$$\begin{aligned} \bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{0 \atop m_1, m_2, \dots, m_n}^{\infty} & (m_1 + \dots + m_n + 1)(m_1 + \dots + m_n + 3) \dots \\ & \dots (m_1 + \dots + m_n + n - 1) y_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}, \end{aligned} \quad [3,13]$$

se obtiene la siguiente forma reducida para el producto proyectivo :

$$\begin{aligned} F[y] &= \left\{ \frac{\frac{\Delta}{1}}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \frac{\Delta}{y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}} dx_1, \dots dx_n. \end{aligned} \quad [3,14]$$

La función $\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se calcula muy sencillamente a partir de la $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, por medio de la operación de derivación, repetida $\frac{n}{2}$ veces, de la forma siguiente. De la función y se deduce la y_1 :

$$y_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} [\theta \cdot y(x_1 \theta, x_2 \theta, \dots, x_n \theta)],$$

a partir de ésta se deducen sucesivamente las $y_2, y_3, \dots$:

$$y_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} [\theta^3 y_1], \quad y_3 = \frac{\partial}{\partial \theta} [\theta^3 y_2], \dots$$

La última obtenida después de haber repetido $\frac{n}{2}$ veces la operación, y haciendo en el resultado $\theta = 1$ es la función buscada $\bar{y}$:

$$\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\theta^{\frac{n}{2}-1} y_{\frac{n}{2}-1} \right]_{\theta=1}.$$

Nota. Teniendo en cuenta que el elemento diferencial de área en la esfera $n + 1$ dimensional

$$1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 - x_{n+1}^2 = 0 \quad [3,15]$$

es precisamente

$$d\sigma_{n+1} = \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{x_{n+1}} = \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}},$$

se tendrá

$$\int_{E_n} \frac{\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}} dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{2} \int_{S_{n+1}} \bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) d\sigma_{n+1},$$

donde la última integral es una integral de superficie extendida a la S_{n+1} esférica $n + 1$ dimensional.

La fórmula [3,14] que nos daba el valor del funcional $F[y]$, se transforma en la siguiente:

$$F[y] = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S_{n+1}} \bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) d\sigma_{n+1}. \quad [3,16]$$

Caso II : n impar.

Calculemos el valor de la integral de superficie

$$\mathcal{J} = \int_{S_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} d\sigma_n, \quad [3,17]$$

extendida a la superficie esférica real S_n n -dimensional de radio unidad:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

El elemento diferencial de área en coordenadas polares sobre esta esfera es:

$$d\sigma = \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-2} d\varphi_{n-1}.$$

El valor de la integral [3,17] en coordenadas polares, será por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_f &= \int_0^\pi (\text{sen } \varphi_1)^{(m_n + \dots + m_2) + n - 2} (\cos \varphi_1)^{m_1} d\varphi_1 \\ &\int_0^\pi (\text{sen } \varphi_2)^{(m_n + \dots + m_2) + n - 3} (\cos \varphi_2)^{m_2} d\varphi_2 \dots \\ &\dots \int_0^{2\pi} (\text{sen } \varphi_{n-1})^{m_n} (\cos \varphi_{n-1})^{m_{n-1}} d\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

que se observa que es la misma fórmula encontrada en el caso anterior, salvo la integración respecto de r que aquí evidentemente no aparece.

Para que la expresión obtenida para $\mathfrak{Q}_f$ no se anule, han de ser *todas* las m_i pares, y en este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_f &= \left(2 \frac{(m_n + \dots + m_2 + n - 3)!! (m_1 - 1)!!}{(m_n + \dots + m_1 + n - 2)!!} \right) \\ &\left(\pi \frac{(m_n + \dots + m_3 + n - 4)!! (m_2 - 1)!!}{(m_n + \dots + m_2 + n - 3)!!} \right) \left(2 \dots \right) \dots \left(2\pi \frac{(m_n - 1)!! (m_{n-1} - 1)!!}{(m_n + m_{n-1})!!} \right) = \\ &= 2 \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(m_1 - 1)!! (m_2 - 1)!! \dots (m_{n-1} - 1)!! (m_n - 1)!!}{(m_n + m_{n-1} + \dots + m_1 + n - 2)!!}, \end{aligned}$$

y finalmente poniendo $m_1 = 2r_1, m_2 = 2r_2, \dots, m_n = 2r_n$ resulta

$$\mathfrak{Q}_f = 2 (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_n)! (r_1 + r_2 + \dots + r_n)!}{(2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_n)! r_1! r_2! \dots r_n! \mathfrak{R}} \quad [3,18]$$

donde $\mathfrak{R}$ indica el producto de $\frac{n-1}{2}$ factores, a partir del entero $2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_n + 1$, y tales que cada factor es igual al anterior aumentado en dos unidades:

$$\mathfrak{R} = (2r_1 + \dots + 2r_n + 1) (2r_1 + \dots + 2r_n + 3) \dots (2r_1 + \dots + 2r_n + n - 2). \quad [3,19]$$

Siguiendo el mismo proceso que en el caso anterior, resultará que el valor del funcional vendrá dado en el caso presente por la fórmula:

$$F[y] = \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\}^{\frac{\Delta}{n}} y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{2 (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{S_n} \bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) d\sigma_n, \quad [3,20]$$

donde la integral de superficie que aparece, está extendida a la hipersuperficie esférica $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, y la función $\bar{y}$ es

$$\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n}^{\infty} (m_1 + \dots + m_n + 1) (m_1 + \dots + m_n + 3) \dots \\ \dots (m_1 + \dots + m_n + n - 2) y_{m_1, m_2, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad [3, 21]$$

cuyo cálculo como en el caso anterior, se realiza a partir de $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, por medio de la operación de derivación repetida $\frac{n-1}{2}$ veces.

4. Nueva expresión de la función $\bar{y}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y del funcional de indicatriz proyectiva

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}.$$

A la función $\bar{y}(x_1, \dots, x_n)$ que aparece en las fórmulas $F[y]$ en el párrafo anterior, se le puede dar una forma más resumida por medio de una integral definida.

Consideremos la expresión

$$\frac{\partial^{2\lambda+2}}{\partial \theta^{2\lambda+2}} \int_0^\theta (\theta^2 - \rho^2)^\lambda \rho^m d\rho,$$

basta hacer el cambio de variable $\rho = \theta \cos \alpha$ en la integral, para obtener una del tipo [3,7], y así resulta

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2\lambda+2}}{\partial \theta^{2\lambda+2}} \int_0^\theta (\theta^2 - \rho^2)^\lambda \rho^m d\rho = \\ & = (2\lambda + m + 1) (2\lambda + m) \dots (m + 1) m \frac{(2\lambda)!! (m-1)!!}{(2\lambda + m + 1)!!} \theta^{m-1} = \\ & = (2\lambda + m) (2\lambda + m - 2) \dots m 2^\lambda \lambda! \theta^{m-1}. \end{aligned} \quad [4, 1]$$

Caso I : n par.

A partir de la función $y(x_1, \dots, x_n)$, construyamos la $y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho)$ y calculemos la expresión

$$\frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho.$$

Substituyendo la función y por su desarrollo en serie, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{m_1, \dots, m_n}^\infty y_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \rho^{m_1+m_2+\dots+m_n} d\rho = \\ = \sum_{m_1, \dots, m_n}^\infty y_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} \rho^{m_1+\dots+m_n+1} d\rho, \end{aligned}$$

y aplicando la fórmula [4,1] cuando $\lambda = \frac{n-2}{2}$ y $m = m_1 + \dots + m_n + 1$,

resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho = \\ = 2^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{n-2}{2} \right)! \sum_{m_1, \dots, m_n}^\infty \theta^{m_1+\dots+m_n} y_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} (m_1 + \dots + m_n + 1) \\ (m_1 + \dots + m_n + 3) \dots (m_1 + \dots + m_n + n - 1) = 2^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{n-2}{2} \right)! \bar{y}(x_1 \theta, \dots, x_n \theta), \end{aligned}$$

y finalmente

$$\bar{y}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{n-2}{2} \right)!} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho. \quad [4,2]$$

Fórmula simplificada para la función $\bar{y}$, pero que tiene el inconveniente de no dar de modo tan explícito su estructura a partir de la función y , en particular el número de derivaciones necesarias para pasar de y a $\bar{y}$.

Substituyendo esta expresión de $\bar{y}(x_1, \dots, x_n)$ en el valor del funcional $F[y]$ encontrado en [3,14], resulta

$$\begin{aligned} F[y] = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{n-2}{2} \right)! (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\ \int_{E_n} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(x_1 \rho, x_2 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el área σ_1 de la esfera n -dimensional, en el caso de ser n par es

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2} \right)!},$$

se puede escribir el valor del funcional en la forma :

$$F[y] = \frac{1}{(n-2)!^2} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{dx_1 \dots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho. \quad [4,3]$$

Caso II ; n impar.

Calculemos en este caso la expresión

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho.$$

Substituyendo la función y por su desarrollo en serie se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n}^\infty y_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \rho^{m_1 + \dots + m_n + 1} d\rho = \\ &= 2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2} \right)! \sum_{m_1, \dots, m_n}^\infty \theta^{m_1 + \dots + m_n} y_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \\ & (m_1 + \dots + m_n + 1) (m_1 + \dots + m_n + 3) \dots (m_1 + \dots + m_n + n - 2) = \\ &= 2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2} \right)! \bar{y}(x_1 \theta, \dots, x_n \theta), \quad [4,4] \end{aligned}$$

y finalmente

$$\bar{y}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{n-3}{2} \right)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho. \quad [4,5]$$

Llevando esta expresión encontrada para $\bar{y}(x_1, \dots, x_n)$ al valor del funcional $F[y]$ obtenido en [3,20], resulta

$$\begin{aligned} F[y] &= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-3}{2} \right)! (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \\ & \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-1}{2}} y(x_1 \rho, \dots, x_n \rho) d\rho; \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el área σ_n de la esfera n -dimensional, en el caso de ser n impar es

$$\sigma_n = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-3}{2}\right)! (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!}, \quad [4,6]$$

se puede escribir el valor del funcional en la forma

$$F[y] = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta \varrho (\theta^2 - \varrho^2)^{\frac{n-3}{2}} y(x_1 \varrho, \dots, x_n \varrho) d\varrho. \quad [4,7]$$

Nota. En el caso de ser n par, habíamos obtenido para el funcional $F[y]$ la expresión [3,16], en la que substituyendo en vez de $\bar{y}$ la [4,2] se obtendrá

$$F[y] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n-2}{2}\right)! (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \varrho (\theta^2 - \varrho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(x_1 \varrho, \dots, x_n \varrho) d\varrho,$$

o sea en virtud de [4,6]

$$F[y] = \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\sigma_{n+1}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \varrho (\theta^2 - \varrho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(x_1 \varrho, \dots, x_n \varrho) d\varrho, \quad [4,8]$$

que tiene de notable, el ser enteramente análoga a la [4,7] del caso impar, cambiando solamente n por $n+1$.

Por otra parte, era de esperar este resultado, ya que si en el producto funcional proyectivo de dos funciones, una de ellas carece de una o varias variables, queda reducido al producto proyectivo respecto a las variables correspondientes que existen simultáneamente en las dos funciones ⁽¹⁾. Referida esta propiedad a la integración de las ecuaciones entre derivadas parciales se obtiene el método de HADAMARD, que da las soluciones de una ecuación, a partir de las de ecuaciones del mismo tipo y mayor número de variables.

(1) Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice projectiva...*, pág. 196.

5. Fórmulas que resuelven en forma finita el problema de Cauchy en la ecuación de ondas con n variables.

Calculada la expresión general del producto proyectivo

$$\left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\}^{\Delta} y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (1)$$

por las fórmulas [3,14] y [3,19], o las [4,3] y [4,7], y conocida la indicatriz proyectiva $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t, x_1, \dots, x_n)$ dada en [2,6], la solución general de la ecuación diferencial de ondas, se obtiene inmediatamente según [2,5]:

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\}^{\Delta} p(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t, x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\}^{\Delta} \int_{\bar{t}(\alpha_i)}^{\bar{t}} f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau, \end{aligned}$$

donde la integral sobrerayada representa la función deducida de la integral, por el proceso indicado en § 3.

Las expresiones desarrolladas de la solución en los dos casos de ser n par e impar son:

Caso I : n par.

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \int_{\bar{t}(\alpha_i)}^{\bar{t}} f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau, \quad [5,1] \end{aligned}$$

extendida la primera integral al interior de la hiperesfera $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$; o también según [3,16]

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \int_{\bar{t}(\alpha_i)}^{\bar{t}} f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau \quad [5,2]$$

(1) Con objeto de simplificar la escritura, introducimos esta nueva notación del producto proyectivo, útil especialmente cuando los términos del mismo sean complicados. Cuando no haya lugar a dudas, suprimiremos además la letra colocada debajo del símbolo Δ , que indica las variables respecto de las cuales se verifica el producto proyectivo.

Haciendo uso de la fórmula [4,3], se puede dar a la solución la forma siguiente :

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1, \dots, d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho(\theta^2-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho \int_{\bar{t}(\alpha_i, \theta)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) d\tau, \quad [5,3]$$

o también según [4,8]

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\sigma_{n+1}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho(\theta^2-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}} \partial \rho \int_{\bar{t}(\alpha_i, \theta)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) d\tau \quad [5,4]$$

Caso II : n impar.

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{S_n} d\sigma_n \int_{\bar{t}(\alpha_i)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau-t)) d\tau, \quad [5,5]$$

extendida la primera integral a la hipersuperficie esférica $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$. Teniendo en cuenta la fórmula [4,7], se puede dar a la solución la forma siguiente :

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho(\theta^2-\rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \int_{\bar{t}(\alpha_i, \theta)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) d\tau. \quad [5,6]$$

6. Condiciones iniciales particulares. — Nos referiremos al caso de ser n impar, ya que la solución cuando n es par se puede expresar, como ya hemos dicho, en una forma integral análoga.

1.º *La hipersuperficie $t = \psi(x_i)$ se reduce al hiperplano $t = 0$, la ecuación diferencial es homogénea $f \equiv 0$, y las condiciones iniciales de CAUCHY son :*

$$[u(x_i, t)]_{\Gamma} = u(x_i, 0) = 0, \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right]_{\Gamma} = u_t(x_i, 0) = \varphi_1(x_i).$$

En este caso la función $f_1(t, x_i)$ [1,10] toma la forma

$$f_1(t, x_i) = I\varphi_1(x_i) = \int_0^t \varphi_1(x_i) d\tau = \varphi_1(x_i) t,$$

y la solución [5,6] de la ecuación diferencial dada será

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) \tau d\tau \quad [6,1]$$

Calculemos en primer lugar, la última parte que depende de t

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) \tau d\tau &= \varphi_1(x_i) t + \\ &+ \int_0^t \sum_1^n \varphi_{1x_i}(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) (-\alpha_i) \rho \tau d\tau, \end{aligned}$$

e integrando por partes resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) \tau d\tau = \int_0^t \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho \tau) d\tau$$

La fórmula [6,1] se podrá, pues, escribir en la forma

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \int_0^t d\tau \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho \tau) d\rho. \quad [6,2] \end{aligned}$$

Consideremos la última parte de la fórmula :

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho \tau) d\rho,$$

en virtud de [4,5] se tiene, (considerando las x_i como constantes),

$$\bar{\varphi}_1(x_i + \alpha_i \tau) = k \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \bigg|_{\theta=1} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \tau \rho) d\rho.$$

donde k es un coeficiente numérico. Pero la fórmula [4,4], nos permite también escribir

$$\bar{\varphi}_1(x_i + \alpha_i \tau) = k \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho) d\rho,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \tau \rho) d\rho = \\ & = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho) d\rho. \end{aligned} \quad [6,3]$$

Finalmente, la solución de nuestro problema será :

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, t) = \\ = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \int_0^t d\tau \frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho) d\rho, \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, t) = \\ = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t \rho (t^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho) d\rho. \end{aligned} \quad [6,4]$$

Nota. En el caso de dar las condiciones iniciales sobre el hiperplano $t = \tau_1$, es decir :

$$u(x_i, \tau_1) = 0, \quad y \quad u_t(x_i, \tau_1) = \varphi_1(x_i),$$

se hubiera obtenido, análogamente, como solución final

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, t) = \\ = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{t-\tau_1} \rho ((t-\tau_1)^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi_1(x_i + \alpha_i \rho) d\rho. \end{aligned} \quad [6,5]$$

2.º La hipersuperficie $t = \psi(x_i)$ se reduce al hiperplano $t = 0$, la ecuación diferencial es homogénea $f \equiv 0$, y las condiciones iniciales de CAUCHY son :

$$[u(x_i, t)]_T = u(x_i, 0) = \varphi(x_i), \quad y \quad \left[\frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \right]_T = u_t(x_i, 0) = 0.$$

En este caso la función $f_1(x_i, t)$ [1,10] coincide con $\varphi(x_i)$, y la solución de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n, t) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \int_0^t \varphi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau, \end{aligned}$$

que comparada con la [6,2], y en virtud de la [6,4], nos da :

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^t \rho (t^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \varphi(x_i + \alpha_i \rho) d\rho. \quad [6,6]$$

3.° La ecuación diferencial no es homogénea $f(x_i, t) \not\equiv 0$, y las condiciones iniciales sobre el hiperplano $t = 0$ son :

$$u(x_i, 0) = 0, \quad y \quad u_t(x_i, 0) = 0.$$

La función $f_1(x_i, t)$ será en este caso [1,10] :

$$f_1(x_i, t) = I^2 f(x_i, t) = \int_0^t (t - \tau_1) f(x_i, \tau_1) d\tau_1,$$

y la fórmula resolvente

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\tau - \tau_1) f(\tau_1, x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau_1. \quad [6,7]$$

Obsérvese que las dos últimas integraciones sucesivas se pueden expresar como una doble extendida al recinto triangular R , limitado por las rectas $\tau = \tau_1$, $\tau_1 = 0$, $\tau = t$; y a la vez esta integral doble se puede desdoblar en dos sucesivas, la primera respecto a τ , y la segunda respecto a τ_1 , y así se obtiene :

$$\begin{aligned} & \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\tau - \tau_1) f(x_i + \alpha_i(\tau - t), \tau_1) d\tau_1 = \\ & = \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t (\tau - \tau_1) f(x_i + \alpha_i(\tau - t), \tau_1) d\tau. \end{aligned}$$

Además, la derivada parcial respecto de t , es

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t (\tau - \tau_1) f(x_i + \alpha_i(\tau - t), \tau_1) d\tau = \\ & = \int_0^t d\tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_1}^t (\tau - \tau_1) f(x_i + \alpha_i(\tau - t), \tau_1) d\tau, \end{aligned}$$

y por lo tanto, la solución [6,7] se podrá escribir en la forma

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \int_0^t d\tau_1 \left[\frac{1}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_1}^t (\tau - \tau_1) f(x_i + \alpha_i \rho (\tau - t), \tau_1) d\tau_1 \right]. \quad [6,8]$$

Ahora bien, la expresión del paréntesis es precisamente *la solución de la ecuación diferencial dada en el caso homogéneo, cuando las condiciones iniciales sobre el hiperplano $t = \tau_1$ son :*

$$u(x, \tau_1) = 0 \quad y \quad u_i(x, \tau_1) = f(\tau_1, x),$$

donde τ_1 es un parámetro. Pero la solución del problema con estas condiciones está dada por la fórmula [6,5], y en consecuencia nuestra solución será finalmente :

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \\ = \int_0^t d\tau_1 \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int_0^{t-\tau_1} \rho ((t-\tau_1)^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} f(x_i + \alpha_i \rho, \tau_1) d\rho. \quad [6,9]$$

El método de variación de constantes resulta como consecuencia de nuestras fórmulas. ⁽¹⁾

7. Estudio de las fórmulas resolventes. — Las fórmulas resolventes [5,3] y [5,6] que corresponden respectivamente al caso de ser n par y al caso de ser n impar, son análogas en su estructura. En ambos casos se ha de considerar la función

$$F(\rho) = \int_{i(\alpha_i \rho)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) d\tau; \quad [7,1]$$

después, aplicar a esta función los dos operadores

$$\frac{1}{(n-2)!^2} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} F(\rho) d\rho, \quad [7,2]$$

y

$$\frac{1}{(n-2)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} F(\rho) d\rho, \quad [7,3]$$

⁽¹⁾ Las fórmulas obtenidas en estos tres casos particulares considerados, coinciden con las dadas por R. COURANT y D. HILBERT. — *Methoden der Mathematischen Physik* II. — Berlin, 1937. — Pág. 391.

que se particularizan para $\theta = 1$, y finalmente, previo el cálculo de dos valores medios, respecto de las variables α_i , uno sobre la esfera $n + 1$ dimensional (caso n par), y otro sobre la esfera n dimensional (caso n impar), se ha de hallar la derivada respecto de la coordenada t del punto genérico en donde se busca el valor de la solución.

Aunque los dos operadores [7,2] y [7,3], que se han de aplicar a la función $F(\rho)$, son del mismo tipo, conviene estudiarlos separadamente, ya que siendo distintos tanto los exponentes como los órdenes de derivación, interesa precisar en cada caso su forma particular, así como las condiciones mínimas de diferenciabilidad de la función $F(\rho)$, necesarias para que en uno y otro caso tengan sentido dichos operadores.

Caso I : n par.

Para simplificar, pondremos $\frac{n-2}{2} = \lambda$, y llamaremos $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ a la expresión [7,2] :

$$\mathfrak{M}_\lambda(\theta) = \frac{1}{(2\lambda)!!^2} \frac{\partial^{2\lambda+2}}{\partial \theta^{2\lambda+2}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^\lambda F(\rho) d\rho. \quad [7,4]$$

Verificando dos derivaciones, de las indicadas, respecto de θ , se tiene :

$$\mathfrak{M}_\lambda(\theta) = \frac{1}{2\lambda} [(2\lambda + 1) \mathfrak{M}_{\lambda-1}(\theta) + \theta \mathfrak{M}'_{\lambda-1}(\theta)] ; \quad [7,5]$$

fórmula recurrente, que nos permite calcular $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ a partir de la anterior. En particular

$$\mathfrak{M}_1(\theta) = \frac{1}{2} [3 \mathfrak{M}_0(\theta) + \theta \mathfrak{M}'_0(\theta)]$$

y

$$\mathfrak{M}_0(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int_0^\theta \rho F(\rho) d\rho = \frac{\partial}{\partial \theta} [\theta F(\theta)]. \quad [7,6]$$

En virtud de estas dos relaciones, [7,5] y [7,6], resulta que la función $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ se expresa como un *polinomio con coeficientes racionales* en $\theta^k F^{(k)}(\theta)$, y además, la máxima derivada de $F(\theta)$ que aparece en $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ es la de orden $\lambda + 1$, se tiene pues :

$$\mathfrak{M}_\lambda(\theta) = a_{\lambda,0} F(\theta) + a_{\lambda,1} \theta F'(\theta) + \dots + a_{\lambda,\lambda+1} \theta^{\lambda+1} F^{(\lambda+1)}(\theta),$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \dots). \quad [7,7]$$

Para encontrar con facilidad los coeficientes $a_{\lambda,i}$, aplicaremos la fórmula anterior al caso de ser $F(\theta) = e^\theta$, y entonces se tendrá :

$$\mathfrak{A}_\lambda(\theta) = (a_{\lambda,0} + a_{\lambda,1}\theta + \dots + a_{\lambda,\lambda+1}\theta^{\lambda+1}) e^\theta = P_\lambda(\theta) e^\theta. \quad [7,8]$$

Conocidos los polinomios $P_\lambda(\theta)$, ($\lambda = 0, 1, 2, \dots$), quedará determinada la estructura de las funciones $\mathfrak{A}_\lambda(\theta)$.

De las [7,5] y [7,8] resulta

$$P_\lambda(\theta) = \frac{1}{2\lambda} [(2\lambda + 1 + \theta) P_{\lambda-1}(\theta) + \theta P'_{\lambda-1}(\theta)] \quad [7,9]$$

que nos da una relación recurrente sencillísima para los polinomios $P_\lambda(\theta)$. En particular :

$$\begin{aligned} P_0(\theta) &= 1 + \theta \\ P_1(\theta) &= \frac{1}{2} (3 + 5\theta + \theta^2) \\ P_2(\theta) &= \frac{1}{8} (15 + 33\theta + 12\theta^2 + \theta^3) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Es de notar que *para que el operador [7,2] sea aplicable a la función $F(\rho)$, ésta ha de ser por lo menos $\frac{n}{2}$ veces derivable.*

Caso II : n impar.

Para simplificar, pondremos $\frac{n-3}{2} = \lambda$, y llamaremos $\mathfrak{A}_\lambda(\theta)$ a la expresión [7,3] :

$$\mathfrak{A}_\lambda(\theta) = \frac{1}{(2\lambda + 1)!} \frac{\partial^{2\lambda+2}}{\partial \theta^{2\lambda+2}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^\lambda F(\rho) d\rho. \quad [7,10]$$

Verificando dos de las derivaciones, de las indicadas, respecto de θ , se tiene

$$\mathfrak{A}_\lambda(\theta) = \frac{1}{2\lambda + 1} [(2\lambda + 1) \mathfrak{A}_{\lambda-1}(\theta) + \theta \mathfrak{A}'_{\lambda-1}(\theta)], \quad [7,11]$$

fórmula recurrente que nos permite calcular $\mathfrak{A}_\lambda(\theta)$ a partir de la anterior $\mathfrak{A}_{\lambda-1}(\theta)$. En particular

$$\mathfrak{A}_1(\theta) = \frac{1}{3} [3 \mathfrak{A}_0(\theta) + \theta \mathfrak{A}'_0(\theta)] \quad y \quad \mathfrak{A}_0(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} [\theta F(\theta)]. \quad [7,12]$$

Si se compara esta relación de recurrencia con la [7,5] se observa, que salvo el coeficiente $\frac{1}{2\lambda+1}$ que se cambia por el $\frac{1}{2\lambda}$, las dos coinciden. En este caso se tendrá análogamente

$$\mathfrak{Q}_\lambda(\theta) = a'_{\lambda,0} F'(\theta) + a'_{\lambda,1} \theta F'(\theta) + \dots + a'_{\lambda,\lambda+1} \theta^{\lambda+1} F^{(\lambda+1)}(\theta),$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \dots), \quad [7,13]$$

y entre los polinomios $Q_\lambda(\theta)$ correspondientes a los $P_\lambda(\theta)$ del caso anterior, se verificará la relación de recurrencia:

$$Q_\lambda(\theta) = \frac{1}{2\lambda+1} [(2\lambda)+1+\theta] Q_{\lambda-1}(\theta) + Q'_{\lambda-1}(\theta). \quad [7,14]$$

En particular

$$Q_0(\theta) = 1 + \theta$$

$$Q_1(\theta) = \frac{1}{3} (3 + 5\theta + \theta^2)$$

$$Q_2(\theta) = \frac{1}{15} (15 + 33\theta + 12\theta^2 + \theta^3)$$

.....

Es de notar, que para que el operador [7,3] sea aplicable a la función $F(\rho)$, ésta ha de ser por lo menos $\frac{n-1}{2}$ veces derivable.

Derivadas sucesivas de la función $F(\rho)$.

Pasemos a calcular las derivadas sucesivas respecto de ρ de la función [7,1]:

$$F(\rho) = \int_{\bar{l}(\alpha_i \rho)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau.$$

Se obtiene como primera derivada:

$$F'(\rho) = \int_{\bar{l}(\alpha_i \rho)}^t d\tau \frac{\partial}{\partial \rho} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) - \frac{\partial \bar{l}}{\partial \rho} f_1(\bar{l}, x_i + \alpha_i \rho(\bar{l} - t)), \quad [7,15]$$

pero como $f_1(\bar{l}, x_i + \alpha_i \rho(\bar{l} - t))$ es el valor de la función $f_1(T, X_i)^{(1)}$ en

⁽¹⁾ Representaremos con letras mayúsculas las coordenadas del punto genérico, y así se distinguirán de las coordenadas (letras minúsculas) del punto donde se calcula el valor de la solución de la ecuación.

el punto de intersección de la hipersuperficie $T = \psi(X_i)$ con la recta

$$T - t = \frac{X_1 - x_1}{\alpha_1 \rho} = \dots = \frac{X_n - x_n}{\alpha_n \rho}, \quad [7,16]$$

escribiremos simbólicamente

$$f_{1\Gamma} \equiv f_1(\bar{t}, x_i + \alpha_i \rho (\bar{t} - t)). \quad [7,17]$$

Volviendo a derivar, se obtiene como segunda derivada

$$\begin{aligned} F''(\rho) &= \int_{\bar{t}(\alpha_i \rho)}^t d\tau \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) - \\ &- \frac{\partial \bar{t}}{\partial \rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) \right]_{\Gamma} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \bar{t}}{\partial \rho} f_{1\Gamma} \right], \end{aligned} \quad [7,18]$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial \rho} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) \right]_{\Gamma} = \\ &= (\bar{t} - t) \left(\sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial X_i} \right) f_1(\bar{t}, x_i + \alpha_i \rho (\bar{t} - t)) = \frac{\partial f_{1\Gamma}}{\partial \rho}, \end{aligned} \quad [7,19]$$

tendremos

$$F''(\rho) = \int_{\bar{t}(\alpha_i \rho)}^t \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) d\tau - \frac{\partial \bar{t}}{\partial \rho} \frac{\partial f_{1\Gamma}}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \bar{t}}{\partial \rho} f_{1\Gamma} \right],$$

o bien

$$F''(\rho) = \int_{\bar{t}(\alpha_i \rho)}^t \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) d\tau + \bar{t} \frac{\partial^2 f_{1\Gamma}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [\bar{t} f_{1\Gamma}]. \quad [7,20]$$

Reiterando la derivación, se obtiene para la derivada de orden k la expresión siguiente :

$$F^{(k)}(\rho) = \int_{\bar{t}(\alpha_i \rho)}^t \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) d\tau + \bar{t} \frac{\partial^k f_{1\Gamma}}{\partial \rho^k} - \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} [\bar{t} f_{1\Gamma}]. \quad [7,21]$$

Se ha de observar que las derivadas sucesivas de $\bar{t}(\alpha_i \rho)$ respecto de ρ , vienen dadas como derivadas de la función implícita $\bar{t} = \psi(x_i + \alpha_i \rho (\bar{t} - t))$, que para que existan, ha de ser

$$1 - (\psi'_{x_1} \alpha_1 + \dots + \psi'_{x_n} \alpha_n) \rho \neq 0,$$

y si $\rho = 1$, caso único que interesa en las fórmulas resolventes, se obtiene

$$1 - \psi'_{x_1} \alpha_1 - \dots - \psi'_{x_n} \alpha_n \neq 0,$$

lo que nos dice, que la recta

$$T - t = \frac{X_1 - x_1}{\alpha_1} = \dots = \frac{X_n - x_n}{\alpha_n} \quad [7, 22]$$

no ha de ser tangente a la hipersuperficie Γ , sobre la que se dan las condiciones iniciales.

Además, como en las fórmulas resolventes, tanto en el caso par como en el impar, se presentan integraciones extendidas a los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, pertenecientes o interiores a la variedad esférica $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$, se tendrá en consecuencia, que considerando el cono característico de la ecuación diferencial [1,1], cuyo vértice es el punto genérico $(t, x_1, \dots, x_n)$, y cuya ecuación será :

$$(X_1 - x_1)^2 + \dots + (X_n - x_n)^2 = (T - t)^2 \quad [7, 23]$$

cualquier recta que pase por su vértice, perteneciente o interior a él, no ha de ser tangente a la hipersuperficie Γ donde se dan las condiciones iniciales de CAUCHY.

Interpretación geométrica de las derivadas de la función $F(\rho)$.

La derivada de orden k de la función $F(\rho)$, particularizada para $\rho = 1$, único valor que interesa en las fórmulas resolventes, consta de dos partes: una integral, y la otra constituida por valores de funciones de $(T, X_1, \dots, X_n)$ sobre la hipersuperficie Γ . Estudiaremos separadamente estas dos partes.

En la integral

$$\int_{\bar{\Gamma}(\alpha_i)}^t \left[\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) \right]_{\rho=1} d\tau, \quad [7, 24]$$

la expresión

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^k}{\partial \rho^k} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) \right]_{\rho=1} = \\ & = (\tau - t)^k \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial X_i} \right)^{(k)} f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)), \end{aligned} \quad [7, 25]$$

tiene una interpretación muy sencilla. Consideremos, en efecto, la recta

$$T = \tau, \frac{X_1 - (x_1 + \alpha_1 (\tau - t))}{\alpha_1} = \dots = \frac{X_n - (x_n + \alpha_n (\tau - t))}{\alpha_n}, \quad [7,26]$$

(donde $T, X_1, \dots, X_n$, son las coordenadas de un punto arbitrario de la misma) que pasa por el punto $R \equiv (\tau, x_i + \alpha_i (\tau - t))$ de la recta [7,22], y es perpendicular al eje del cono característico [7,23]. El segundo miembro de [7,25] será precisamente *la derivada de orden k en el punto R de la función $f_1(T, X_1, \dots, X_n)$ a lo largo de la recta* [7,26], *multipli-*
cada por la potencia k — esima de la distancia r del punto R al eje del
cono característico.

Representando por $\frac{\partial}{\partial r}$ la derivada de f_1 a lo largo de la recta [7,26], la integral [7,24] se podrá expresar como *integral curvilínea de la función $r^k \frac{\partial^k f_1}{\partial r^k}$ a lo largo de la recta* [7,22], *entre el punto $P \equiv (t, x_1, \dots, x_n)$ y el Q de intersección de dicha recta con la hipersuperficie Γ* , es decir

$$\int_{\bar{t}(\alpha_i)}^t \left[\frac{\partial^k}{\partial r^k} f_1(\tau, x_i + \alpha_i (\tau - t)) \right]_{r=1} d\tau = \int_Q^P \left(r^k \frac{\partial^k f_1}{\partial r^k} \right)_R dT \quad [7,27]$$

donde R es un punto cualquiera del segmento PQ .

La segunda parte de la fórmula [7,21] que nos da $F^{(k)}(\rho)$, particularizada para $\rho = 1$, se refiere a valores calculados en el punto de intersección de la recta [7,22] y la hipersuperficie Γ . Se ha de tener en cuenta que en el desarrollo de la expresión

$$\bar{t} \frac{\partial^k f_{1\Gamma}}{\partial \rho^k} - \frac{\partial^k}{\partial \rho^k} [\bar{t} f_{1\Gamma}]$$

las derivadas parciales de $f_{1\Gamma}$ [7,17] respecto de ρ , se expresan por medio de las derivadas de f_1 respecto de r , particularizadas en el punto de intersección de Γ con la recta [7,22]. Por otra parte, como al variar ρ , la recta [7,16] se desplaza en la variedad lineal bidimensional

$$\frac{X_1 - x_1}{\alpha_1} = \frac{X_2 - x_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{X_n - x_n}{\alpha_n} \quad [7,28]$$

todas las derivadas de $\bar{t}$ respecto de ρ , particularizadas para $\rho = 1$, se referirán a la variación, a lo largo de la intersección de la hipersu-

perficie $T = \psi(X_1, \dots, X_n)$ con la variedad [7,28], de la coordenada T en un entorno del punto Q . Con más precisión, como la *tangente del ángulo β que forma la recta [7,16] con el eje T* es $\rho \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$, y por otra parte, $\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$ es la *tangente del ángulo γ , que forma la recta [7,22] con el eje T* , se tendrá

$$\rho = \frac{tg \beta}{tg \gamma} \quad [7,29]$$

y por lo tanto, salvo el coeficiente $tg \gamma$ (o potencias del mismo), las derivadas respecto de ρ , son derivadas respecto de la *tangente del ángulo que forma el eje T con una recta que pase por el punto $P \equiv (t, x_1, \dots, x_n)$ y se desplace en la variedad [7,28]*.

Fórmulas finales.

Obtenidas las derivadas sucesivas de la función $F(\rho)$, y teniendo en cuenta las fórmulas [7,7] y [7,13] para los casos n par e impar respectivamente, las soluciones encontradas en § 5 tomarán la siguiente forma :

Caso I : n par.

$$\begin{aligned} u(t, x_1, \dots, x_n) = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \int_Q^P P_{\frac{n-2}{2}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) f_1(T, X_i) dT + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \left[\bar{t} P_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) f_{1T} - P_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\bar{t} f_{1T}) \right]_{\rho=1} \end{aligned} \quad [7,30]$$

donde el polinomio $P_{\frac{n-2}{2}}$ tiene el sentido indicado en [7,8], siendo $\lambda = \frac{n-2}{2}$, y en él, se ha substituído la variable θ por los símbolos diferenciales expresados en los paréntesis.

Caso II : n impar.

$$\begin{aligned} u(t, x_i, \dots, x_n) = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \int_Q^P Q_{\frac{n-3}{2}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) f_1(T, X_i) dT + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \left[\bar{t} Q_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) f_{1T} - Q_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\bar{t} f_{1T}) \right]_{\rho=1} \end{aligned} \quad [7,31]$$

donde el polinomio $Q_{\frac{n-3}{2}}$ tiene el sentido indicado en [7,13], siendo

$$\lambda = \frac{n-3}{2}.$$

8. Expresión de las fórmulas resolventes por medio de integrales de volumen, sobre el cono característico, sobre la hipersuperficie I , y sobre la variedad intersección de las dos anteriores.

Tiene interés deducir las integrales que aparecen en las fórmulas [7,30] y [7,31] a otras, bien sean de volumen, bien sobre variedades conocidas situadas en el espacio $T, X_1, X_2, \dots, X_n$. Veamos que todas las integrales que aparecen en las fórmulas resolventes puede reducirse: 1) a integrales de volumen extendidas al recinto del espacio $T, X_1, \dots, X_n$, que designaremos por V_{n+1} , limitado por el cono característico [7,23] y la hipersuperficie I de ecuación $T = \psi(X_1, \dots, X_n)$; 2) a integrales sobre la hipersuperficie I , extendidas al recinto superficial Γ_n limitado por el cono característico [7,23]; 3) a integrales sobre el cono característico [7,23], extendidas a la porción C_n del mismo limitada por el vértice y la hipersuperficie I ; y 4) a integrales sobre la variedad de $n-1$ dimensiones Γ_{n-1} , intersección del cono característico con la hipersuperficie I .

Previo, para esta reducción, es el cálculo de los elementos diferenciales de volumen, y sobre cada uno de los recintos C_n, Γ_n y Γ_{n-1} .

1) Elemento diferencial de volumen expresado en las coordenadas $\alpha_1, \dots, \alpha_n, T$.

Teniendo en cuenta que las fórmulas de transformación son

$$T = T, \quad X_i = x_i + \alpha_i (T - t), \quad (i = 1, \dots, n), \quad [8,1]$$

se tendrá

$$\begin{aligned} dX_1 dX_2 \dots dX_n dT &= \\ &= \frac{\partial (X_1, \dots, X_n, T)}{\partial (\alpha_1, \dots, \alpha_n, T)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n dT = (T - t)^n d\alpha_1 \dots d\alpha_n dT. \end{aligned} \quad [8,2]$$

2) Elemento diferencial sobre la hipersuperficie $T = \psi(X_1, \dots, X_n)$.

Consideradas $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ como coordenadas curvilíneas sobre la hipersuperficie Γ_n , sus ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} T &= \psi(x_1 + \alpha_1 (T - t), \dots, x_n + \alpha_n (T - t)), \\ X_i &= x_i + \alpha_i (T - t), \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad [8,3]$$

donde en la primera ecuación está expresada T como función implícita

de las variables α_i , función que se tendrá que substituir en las ecuaciones siguientes.

El elemento diferencial de extensión ds_n sobre I' vendrá dado por

$$\begin{aligned} ds_n &= \left[\sum \left(\frac{\partial (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})}{\partial (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n = \\ &= \frac{\left(1 + \sum \psi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \sum \alpha_i \psi_i} (T - t)^n d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \end{aligned} \quad [8,4]$$

donde $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}$, es una cualquiera de las combinaciones que se pueden formar con $T, X_1, \dots, X_n$, y el sumatorio está extendido a todas estas combinaciones.

Teniendo en cuenta que si ω es el *ángulo de la normal a la superficie*, con la recta $X_i = x_i + \alpha_i (T - t)$, ($i = 1, \dots, n$),

$$\cos \omega = \frac{1 - \sum \alpha_i \psi_i}{\left(1 + \sum \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum \psi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad [8,5]$$

se podrá escribir como valor del elemento diferencial buscado

$$ds_n = \frac{(T - t)^n}{\left(1 + \sum \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\cos \omega} d\alpha_1 \dots d\alpha_n. \quad [8,6]$$

3) Elemento diferencial sobre el cono característico.

Tomadas como coordenadas curvilíneas sobre el cono característico las $T, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, sus ecuaciones son :

$$T = T, X_i = x_i + \alpha_i (T - t), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad [8,7]$$

donde $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$. El elemento diferencial de extensión ds_n sobre el cono característico, expresado por medio de las coordenadas curvilíneas indicadas será

$$\begin{aligned} ds_n &= \left[\sum \left(\frac{\partial (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n})}{\partial (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, T)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1} dT = \\ &= \sqrt{2} (T - t)^{n-1} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}}{\alpha_n} dT, \end{aligned} \quad [8,8]$$

donde $X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_n}$, es una cualquiera de las combinaciones que se pue-

den formar con $X_1, \dots, X_n, T$, y el sumatorio está extendido a todas estas combinaciones.

Teniendo en cuenta que la fracción indicada es precisamente el elemento diferencial de extensión $d\sigma_n$ sobre la hipersuperficie esférica $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$, se tendrá finalmente

$$ds_n = \sqrt{2} (T - t)^{n-1} dT d\sigma_n. \quad [8.9]$$

4) *Elemento diferencial sobre la variedad $n - 1$ dimensional, intersección de la hipersuperficie $T = \psi (X_1, \dots, X_n)$ con el cono característico.*

Consideradas $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ como coordenadas curvilíneas sobre la variedad $n - 1$ dimensional Γ_{n-1} , sus ecuaciones serán :

$$X_i = x_i + \alpha_i (T - t), \quad (i = 1, \dots, n)$$

y

$$T = \psi (x_1 + \alpha_1 (T - t), \dots, x_n + \alpha_n (T - t)), \quad [8,10]$$

donde $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$, y en la última ecuación aparece T como función de $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, en forma implícita, que habrá que substituir en las ecuaciones anteriores.

El elemento diferencial será

$$ds_{n-1} = \left[\sum \left(\frac{\partial (X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{n-1}})}{\partial (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1},$$

donde $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{n-1}}$, es una cualquiera de las combinaciones que se pueden formar con $X_1, X_2, \dots, X_n, T$, y el sumatorio está extendido a todas estas combinaciones.

El cálculo algo laborioso de los términos del sumatorio anterior, así como de su suma, nos conduce a la relación

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ds_{n-1}}{d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}} \right)^2 = \\ &= \frac{(T-t)^{2n-2}}{\alpha_n^2} \left(\frac{2(1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_n^2)}{(1 - \alpha_1 \psi_1 - \dots - \alpha_n \psi_n)^2} - \frac{(1 + \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_n \psi_n)^2}{(1 - \alpha_1 \psi_1 - \dots - \alpha_n \psi_n)^2} \right), \quad [8,11] \end{aligned}$$

que admite una interpretación geométrica muy sencilla.

Sea ω el ángulo de la generatriz del cono característico, con la normal a la hipersuperficie Γ en el punto P de intersección, entonces

$$\cos \omega = \frac{-1 + \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_n \psi_n}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}}, \quad [8,12]$$

sea análogamente ω' el ángulo de la normal a la hipersuperficie en P con la normal al hiperplano tangente al cono característico a lo largo de la generatriz, se tendrá

$$\cos \omega' = \frac{1 + \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_n \psi_n}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}}. \quad [8,13]$$

Substituyendo estos valores [8,12] y [8,13] en la [8,11] resulta

$$ds_{n-1} = \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \frac{\sin \omega'}{\cos \omega} (T-t)^{n-1}, \quad [8,14]$$

y teniendo en cuenta que el primer factor es precisamente la $d\sigma_n$ sobre la hipersuperficie esférica $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$, se obtiene finalmente

$$ds_{n-1} = \frac{\sin \omega'}{\cos \omega} (T-t)^{n-1} d\sigma_n = \frac{\cos \pi}{\cos \omega} (T-t)^{n-1} d\sigma_n, \quad [8,15]$$

donde ω y π son los ángulos que forma la normal a la hipersuperficie Γ , con la generatriz del cono característico, y con el hiperplano tangente al cono a lo largo de dicha generatriz.

Conocida la expresión de los elementos diferenciales en el espacio $T, X_1, \dots, X_n$, y sobre cada una de las variedades Γ_n, C_n y Γ_{n-1} , obtendremos como soluciones de la ecuación de ondas, las siguientes expresiones integrales extendidas a recintos y variedades del espacio $T, X_1, \dots, X_n$.

Caso I : n par.

$$\begin{aligned} u(t, x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma_n} \int_{V_{n+1}} \frac{1}{(T-t)^{n-1} \sqrt{(T-t)^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - x_i)^2}} \\ &P_{\frac{n-2}{2}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) f_1(T, X_i) dv_{n+1} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma_n} \int_{\Gamma_n} \frac{\cos \omega}{(T-t)^n} \frac{\sqrt{(T-t)^2 + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i)^2}}{\sqrt{(T-t)^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - x_i)^2}} \\ &\left[T P_{\frac{n-2}{2}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) f_1(T, X_i) - P_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} (T f_1(T, X_i)) \right] ds_n. \quad [8,16] \end{aligned}$$

Caso II : n impar.

$$\begin{aligned}
 u(t, x_1, \dots, x_n) = & \\
 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_n} \int_{C_n} \frac{1}{(T-t)^{n-1}} Q_{\frac{n-3}{2}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) f_1(T, X_i) ds_n &+ \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sigma_n} \int_{I'_{n-1}} \frac{\cos \omega}{\cos \pi (T-t)^{n-1}} \\
 \left[T Q_{\frac{n-3}{2}} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) f_1(T, X_i) - Q_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} (T f_1(T, X_i)) \right] & ds_{n-1}, \quad [8,17]
 \end{aligned}$$

entendiéndose que en el cálculo de las derivadas respecto de ρ del producto $T \cdot f_1(T, X_i)$, las derivadas de T en un punto (T^0, X_i^0) de la hipersuperficie I' , se han de calcular a partir de $T = \psi \left(x_i + \frac{X_i^0 - x_i}{T^0 - t} \rho (T - t) \right)$, mientras que las de $f_1(T, X_i)$ se expresan por el operador antes definido $r \frac{\partial}{\partial r}$.

9. Estudio de la solución de la ecuación no homogénea cuando las condiciones iniciales de CAUCHY sobre la hipersuperficie I' son: $[u]_{I'} \equiv 0$ y $[u'_t]_{I'} \equiv 0$.

Aun se puede pasar más adelante en el estudio de las soluciones de la ecuación de ondas, al tener en cuenta la forma de la función $f_1(T, X_i)$, que desarrollada completamente es [1,10]:

$$\begin{aligned}
 f_1(T, X_i) = \int_{\psi}^T (T - \tau) f(\tau, x_i) d\tau + \\
 + (T - \psi) \left\{ \varphi_1 \left[1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right] + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \varphi_0 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right\} + \varphi_0 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \right\},
 \end{aligned}$$

[9,1]

y que en forma abreviada escribiremos:

$$f_1(T, X_i) = F(T, X_i) + (T - \psi(X_i)) \Phi(X_i) + \Psi(X_i). \quad [9,2]$$

Teniendo en cuenta la observación hecha en § 1, podemos considerar la solución de la ecuación [1,1], como suma de la solución de la ecuación no homogénea, cuando las condiciones iniciales sobre I' son $[u]_{I'} \equiv 0$ y $[u'_t]_{I'} \equiv 0$, y de la solución de la ecuación homogénea con las condiciones generales sobre la hipersuperficie I' .

Consideremos en primer lugar el caso de la ecuación no homogénea con las condiciones iniciales nulas sobre la hipersuperficie Γ .

En este caso la función $f_1(T, X_i)$ se reduce a $F(T, X_i)$, y las fórmulas resolventes, tanto en el caso de ser n par, como en el de ser impar, son exactamente las mismas [8,16] y [8,17] después de hacer el cambio de $f_1(T, X_i)$ por $F(T, X_i)$.

En el caso de ser n par, el valor de la solución u de la ecuación diferencial en el punto (t, x_i) viene dado por la derivada respecto de t de una suma de dos integrales, una en V_{n+1} y la otra sobre Γ_n . En consecuencia, considerando el recinto espacial V_{n+1} , limitado por el cono característico de vértice en el punto considerado, *el valor de la función u en (t, x_i) dependerá exclusivamente de los valores que tome $F(T, X_i)$ en los puntos de un entorno de V_{n+1} , que difiera de él tan poco como se quiera.*

En el caso de ser n impar, el valor de la solución u en el punto (t, x_i) , viene dado por la derivada respecto de t de una suma de dos integrales, una sobre C_n , y la otra sobre Γ_{n-1} . Considerando, pues, el recinto superficial C_n , sobre el cono característico, limitado por el vértice y por la hipersuperficie Γ_n , *el valor de la solución u en (t, x_i) dependerá exclusivamente de los valores que tome $F(T, X_i)$ en un entorno espacial de C_n , y que difiera de él tan poco como se quiera.*

En ambos casos, *el conjunto de puntos del espacio $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ en que con seguridad existe la solución $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ de la ecuación en derivadas parciales [1,1] con las condiciones iniciales nulas sobre la hipersuperficie Γ , está constituido por el conjunto abierto R , de puntos que son vértices de conos característicos que corten a la hipersuperficie Γ , siempre que en dicho conjunto, la función $F(T, X_i)$ sea regular; y teniendo en cuenta la forma de esta función [9,1], bastará que en el conjunto R sea regular la función $f(T, X_i)$.*

10. Estudio de la solución de la ecuación homogénea cuando las condiciones iniciales de CAUCHY sobre la hipersuperficie Γ son: $[u(t, x_i)]_{\Gamma} \equiv \varphi_0(x_i)$ y $[u'_t(t, x_i)]_{\Gamma} \equiv \varphi_1(x_i)$. **Principio de HUYGHENS.**

En vez de hacer el estudio directamente sobre las fórmulas [8,16] y [8,17] volvamos a las [5,3] y [5,6]. En ambas, la derivación parcial respecto de t , la podemos realizar sobre la integral que aparece en último lugar. Como en el caso que estamos estudiando es:

$$f_1(T, X_i) = (T - \psi(X_i)) \Phi(X_i) + \Psi(X_i), \quad [10,1]$$

se tendrá:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t [\tau - \psi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t))] \Phi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau + \\
& + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t \Psi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau. \quad [10,2]
\end{aligned}$$

Efectuando la derivación respecto de t en la primera integral del segundo miembro, y después una integración por partes se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t [\tau - \psi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t))] \Phi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau = \\
& = \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t \Phi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau \quad [10,3]
\end{aligned}$$

Análogamente, para la segunda integral resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t \Psi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau = \left(1 - \frac{\partial \bar{t}(\alpha_i \rho)}{\partial t}\right) \Psi(x_i + \alpha_i \rho(\bar{t} - t)). \quad [10,4]$$

Distingamos los dos casos correspondientes a n impar y a n par.

Caso I : n par

La solución de la ecuación diferencial será en este caso [5,3]:

$$\begin{aligned}
u(t, x_1, \dots, x_n) = & \frac{1}{(n-2)!!^2} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho(\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho \\
& \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t \Phi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau + \frac{1}{(n-2)!!^2} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \\
& \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho(\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} \left(1 - \frac{\partial \bar{t}(\alpha_i \rho)}{\partial t}\right) \Psi(x_i + \alpha_i \rho(\bar{t} - t)) d\rho. \quad [10,5]
\end{aligned}$$

En virtud de [7,4], [7,7] y [7,30], el primer sumando se desarrolla en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n-2)!!^2} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho(\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho \\
& \int_{\bar{t}(\alpha_i)}^t \Phi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau + \\
& + \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \left[\bar{t} P_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi_{\Gamma - P_{\frac{n-2}{2}}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\bar{t} \Phi_{\Gamma}) \right]_{\varphi=1}
\end{aligned}$$

y a su vez, el primer término de la suma anterior se transforma fácilmente, después de invertir el orden de integración, aplicando la relación [6,3], y así se tiene :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-2)!!^2} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \bigg|_{\theta=1}^0 \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} \partial \rho \\ & \int_{\bar{t}(\alpha_i)}^t \Phi(x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau = \\ & = \frac{1}{(n-2)!!^2} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} \Phi(x_i + \alpha_i \rho) d\rho \right]_{\bar{t}-t}^0. \end{aligned}$$

[10,6]

Ahora bien, de manera análoga a como se reducía el operador [7,4] a un polinomio [7,7] en las derivadas sucesivas, se reduce el operador

$$\frac{1}{(2\lambda)!!^2} \frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial \tau^{2\lambda+1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^\lambda G(\rho) d\rho$$

a un polinomio en las derivadas sucesivas de $G(\tau)$ respecto de τ . En efecto :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\lambda)!!^2} \frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial \tau^{2\lambda+1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^\lambda G(\rho) d\rho = \\ & = \tau \sum_{\nu=1}^{\lambda} a'_{\lambda,\nu} \tau^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial \tau^\nu} G(\tau) = \tau H_\lambda \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) G(\tau), \end{aligned} \quad [10,7]$$

donde los polinomios $H_\lambda(\tau) = \sum_{\nu=i}^n a'_{\lambda,\nu} \tau^\nu$ verifican la ley de recurrencia

$$H_\lambda(\tau) = \frac{1}{2\lambda} [(2\lambda + 1 + \tau) H_{\lambda-1}(\tau) + \tau H'_{\lambda-1}(\tau)] \quad \text{y} \quad H_0(\tau) = 1. \quad [10,8]$$

Aplicando este desarrollo a la expresión [10,6], resulta :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-2)!!^2} \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \\ & \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial \tau^{n-1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} \Phi(x_i + \alpha_i \rho) d\rho \right]_{\bar{t}-t}^0 = \\ & = \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\dots-\alpha_n^2}} \left[(t - \bar{t}) H_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi_F \right]_{\rho=1} \end{aligned} \quad [10,9]$$

y en consecuencia, la solución de la ecuación homogénea en el caso n par será :

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \left[\bar{t} (P_{\frac{n-2}{2}} - H_{\frac{n-2}{2}}) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi_\Gamma + \right. \\ \left. + t H_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi_\Gamma - P_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\bar{t} \Phi_\Gamma + \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \Psi_\Gamma - \Psi_\Gamma) \right]_{\varrho=1} \quad [10,10]$$

Esta solución se puede expresar por medio de una integral extendida sobre el recinto superficial Γ_n , es decir, sobre la porción de hipersuperficie $T = \psi(X_1, \dots, X_n)$ limitada por el cono característico [7,23], y así se tiene finalmente [8,16]:

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = \\ = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\Gamma_n} \frac{\cos \omega}{(T-t)^n} \frac{\sqrt{(T-t)^2 + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i)^2}}{\sqrt{(T-t)^2 - \sum_{i=1}^n (X_i - x_i)^2}} \left[T (P_{\frac{n-2}{2}} - H_{\frac{n-2}{2}}) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi(X_i) + \right. \\ \left. + t H_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi(X_i) - P_{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) (T \Phi(X_i) + \frac{\partial T}{\partial t} \Psi(X_i) - \Psi(X_i)) \right]_{\varrho=1} \quad [10,11]$$

Caso II : n impar.

La solución de la ecuación diferencial será en este caso :

$$u(t, x_1, \dots, x_n) = \\ = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t \Phi(x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) d\tau + \\ + \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \left(1 - \frac{\partial \bar{t}(\alpha_i \rho)}{\partial t} \right) \Psi(x_i + \alpha_i \rho (\bar{t} - t)) d\rho. \quad [10,12]$$

El primer sumando se desarrolla en la siguiente forma :

$$\frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \int_{\bar{t}(\alpha_i)}^t \Phi(x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) d\tau + \\ + \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \left[\bar{t} Q_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi_\Gamma - Q_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) (\bar{t} \Phi_\Gamma) \right]_{\varrho=1}$$

y a su vez, el primer término de la suma anterior se transforma como en el caso anterior, obteniéndose :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \int_{t(\alpha_i)}^t \Phi(x_i + \alpha_i \rho (\tau - t)) d\tau = \\ & = \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \left[\frac{\partial^{n-2}}{\partial \tau^{n-2}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \Phi(x_i + \alpha_i \rho) d\rho \right]_{t-t}^0 \quad [10,13] \end{aligned}$$

Ahora bien, considerando el operador

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\lambda+1)!} \frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial \tau^{2\lambda+1}} \int_0^\tau \rho (\tau^2 - \rho^2)^\lambda G(\rho) d\rho = \\ & = \tau \sum_{\nu=1}^{\lambda} b'_{\lambda,\nu} \tau^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial \tau^\nu} G(\tau) = \tau K_\lambda \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) G(\tau), \quad (1) \quad [10,14] \end{aligned}$$

donde los polinomios $K_\lambda(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\lambda} b'_{\lambda,\nu} \tau^\nu$ verifican la ley de recurrencia,

$$K_\lambda(\tau) = \frac{1}{2\lambda+1} [(2\lambda+1+\tau)K_{\lambda-1}(\tau) + \tau K'_{\lambda-1}(\tau)], \quad \text{y} \quad K_0(\tau) = 1,$$

se tendrá como solución de la ecuación homogénea, en el caso n impar, la fórmula siguiente:

$$\begin{aligned} u(t, x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \left[\bar{t} (Q_{\frac{n-3}{2}} - K_{\frac{n-3}{2}}) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi_{I'} + \right. \\ & \left. + t K_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi_{I'} - Q_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(\bar{t} \Phi_{I'} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial l} \Psi_{I'} - \Psi_{I'} \right) \right]_{\theta=1}. \quad [10,15] \end{aligned}$$

Expresando esta solución por medio de una integral extendida sobre la variedad $n-1$ dimensional Γ_{n-1} , obtenida como intersección del cono característico [7,23] con la hipersuperficie $T = \psi(X_1, \dots, X_n)$, se obtiene finalmente [8,17]:

$$\begin{aligned} u(t, x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\Gamma_{n-1}} \frac{\cos \omega}{\cos \pi (T-t)^{n-1}} \left[T (Q_{\frac{n-3}{2}} - K_{\frac{n-3}{2}}) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi(X_i) + \right. \\ & \left. + t K_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi(X_i) - Q_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left(T \Phi(X_i) + \frac{\partial T}{\partial t} \Psi(X_i) - \Psi(X_i) \right) \right] ds_{n-1}. \quad [10,16] \end{aligned}$$

Se ha de hacer notar una diferencia fundamental entre la solución de la ecuación homogénea de ondas correspondiente al caso n par, y la

(1) Cfr. R. COURANT y D. HILBERT. — Lug. cit. pág. 393.

correspondiente al caso n impar. En el caso de ser n par, la solución viene expresada por una integral de superficie sobre Γ_n dependiendo exclusivamente el valor u de la solución en el punto $(t, x_1, \dots, x_n)$, de los valores que toman $\Phi(X_i)$ y $\Psi(X_i)$ en Γ_n ; es decir, de los valores de las condiciones iniciales sobre la porción de hipersuperficie Γ interceptada por el cono característico de vértice en $(t, x_1, \dots, x_n)$. En el caso de ser n impar, la solución viene expresada por una integral sobre la variedad Γ_{n-1} , dependiendo exclusivamente el valor u de la solución en el punto $(t, x_1, \dots, x_n)$ de los valores que toman $\Phi(X_i)$ y $\Psi(X_i)$ en Γ_{n-1} ; con más precisión, el valor de la solución en el punto $(t, x_1, \dots, x_n)$ depende exclusivamente de los valores de las condiciones iniciales, de sus derivadas y de las de la ecuación $T = \psi(X_1, \dots, X_n)$ hasta el orden conveniente indicado en [10,16], en los puntos de la variedad intersección de Γ con el cono característico de vértice en $(t, x_1, \dots, x_n)$; no depende pues de los valores que toman las funciones anteriores en los puntos de Γ interiores al cono característico, ni tampoco en los exteriores. Esta notable diferencia en la estructura de la solución de la ecuación de ondas, homogénea, en los casos de ser n par y en los casos de ser n impar, se conoce con el nombre de *principio de HUYGHENS*.

11. La solución del problema de CAUCHY de la ecuación de ondas en el campo real. — El método seguido para la obtención de las fórmulas resolventes requiere la hipótesis de la analiticidad de las funciones $f(t, x_i)$, $\varphi_0(x_i)$, $\varphi_1(x_i)$ y $\psi(x_i)$; sin embargo, las fórmulas resolventes obtenidas tienen también sentido cuando se debilitan estas hipótesis tan restrictivas. Limitándonos al caso de ser n impar (del cual, como ya indicamos [4,8], se pasa fácilmente al otro caso) se observa que la fórmula [5,6] no sólo tiene sentido cuando las funciones f , φ_0 , φ_1 , y ψ son analíticas, sino en el caso general de ser la función

$$\int_{t(\alpha_i 0)}^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau - t)) d\tau \quad [11,1]$$

$\frac{n-1}{2}$ veces derivable respecto de ρ , con todas estas derivadas integrables respecto de las variables α_i sobre la hipersuperficie $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$, y tal que estas integrales sean derivables respecto de t . Ahora bien, para que la función [11,1] sea $\frac{n-1}{2}$ veces derivable respecto de ρ , basta que existan todas las derivadas parciales

de f_1 respecto de X_i [7,25] hasta las de orden $\frac{n-1}{2}$, y que estas sean continuas, y por otra parte que la función $\bar{t}(\rho)$ definida por

$$\bar{t} = \psi(x_i + \alpha_i \rho(\bar{t} - t)) \quad [11,2]$$

sea derivable $\frac{n-1}{2}$ veces, para lo cual basta la continuidad de las derivadas parciales de $\psi(X_i)$ hasta las de orden $\frac{n-1}{2}$, supuesto, como ya se indicó, que $T = \psi(X_i)$ no es tangente en ninguno de sus puntos a ninguna generatriz del cono característico. Luego, supuesta la existencia y continuidad de las derivadas parciales de $f_1(T, X_i)$ hasta las de orden $\frac{n+1}{2}$ respecto de X_i , y de primer orden respecto de T , en un recinto espacial G , así como las de orden $\frac{n+1}{2}$ de $\psi(X_i)$ en un trozo T' de la superficie real $T = \psi(X_i)$ interior a G , resultará que la fórmula [5,6] tendrá validez para todos los puntos de G que sean vértices de conos característicos que corten a T' en el interior de G .

Si desdoblamos la función $f_1(T, X_i)$, aun se pueden precisar más las condiciones de derivabilidad necesarias para que la función $u(t, x_i)$ esté definida. En cuanto se refiere a la función $f(T, X_i)$, segundo miembro de la ecuación no homogénea, las condiciones indicadas subsisten, pero en lo referente a las otras funciones resulta que teniendo en cuenta las relaciones [10,3] y [10,4], para la existencia de la función, nos bastará admitir la continuidad de las derivadas de orden $\frac{n-1}{2}$ de las funciones $\Phi(X_i)$ y $\Psi(X_i)$, mientras que para la función $T = \psi(X_i)$ será necesario suponer que dicho orden es el $\frac{n+1}{2}$ en virtud de [10,4]. Ahora bien, teniendo en cuenta la forma de las funciones $\Phi(X_i)$ y $\Psi(X_i)$, resulta que deberemos aceptar la continuidad de las derivadas parciales de orden $\frac{n+1}{2}$ para las funciones $\varphi_0(X_i)$ y $\varphi_1(X_i)$, y la continuidad de las de orden $\frac{n+3}{2}$ para la función $\psi(X_i)$.

Si además, ha de ser la función u solución de la ecuación en derivadas parciales [1,1], habrá que suponer que existen las derivadas parciales continuas de $f(T, X_i)$ de orden $\frac{n-1}{2} + 3$ respecto de X_i y de

tercer orden respecto de T , y las de orden $\frac{n-1}{2} + 3$ de $\varphi_0(x_i)$ y $\varphi_1(X_i)$, y finalmente las de orden $\frac{n-1}{2} + 4$ de $\psi(X_i)$, con lo que quedará asegurada la existencia de las derivadas parciales segundas de la función $u(t, x_i)$.⁽¹⁾

Queda por contestar la pregunta de si cuando las condiciones iniciales cumplen estas condiciones de diferenciabilidad, la función $u(t, x_i)$ dada por la fórmula [5,6] verifica el problema de CAUCHY planteado. La respuesta es afirmativa. Aparte de la comprobación directa de la solución se puede justificar la afirmación teniendo en cuenta las siguientes consideraciones. La fórmula resolvente [5,6] o [7,31] no es más que la expresión de una dependencia funcional tal que a cada sistema de funciones f , φ_0 , φ_1 y ψ le hace corresponder una función $u(t, x_i)$. La fórmula [5,6] es pues la expresión de un funcional mixto y real

$$u(t, x_i) = F[t, x_i, f, \varphi_0, \varphi_1, \psi] \quad [11,3]$$

definido en el campo real, para aquellas funciones que verifican las condiciones de diferenciabilidad siguientes: la función $f(T, X_i)$ tiene derivadas parciales de orden $\frac{n+1}{2}$ respecto X_i y de primer orden respecto de T , y todas ellas continuas; la función $\psi(X_i)$ tiene derivadas parciales de orden $\frac{n+3}{2}$ continuas; y las funciones $\varphi_0(X_i)$ y $\varphi_1(X_i)$ poseen derivadas parciales de orden $\frac{n+1}{2}$ también continuas. Naturalmente que este funcional también está definido para las funciones analíticas, incluso de variable compleja. Ahora bien, supuestas las variables del funcional funciones analíticas, sabemos que el funcional verifica la ecuación en derivadas parciales dada y las condiciones iniciales impuestas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) F \equiv f(t, x_i),$$

$$F[\psi(x_i), x_i, f, \varphi_0, \varphi_1, \psi] \equiv \varphi_0(x), \quad F'_i[\psi(x_i), x_i, f, \varphi_0, \varphi_1, \psi] \equiv \varphi_1(x_i). \quad [11,4]$$

Ahora bien, si consideramos las sucesiones de funciones

$$f_i, \varphi_{0,i}, \varphi_{1,i}, \psi_i, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

(1) Evidentemente las condiciones indicadas no son las mínimas.

convergentes uniformemente hacia las correspondientes f , φ_0 , φ_1 y ψ , y además suponemos, que tanto las funciones de las sucesiones como sus límites verifican las condiciones de diferenciabilidad indicadas en la definición del funcional F , *aumentadas en dos unidades*, poseyendo además las últimas derivadas parciales continuas, entonces dada la estructura del funcional F [5,6] se tendrá :

$$\begin{aligned} F[t, x_j, f, \varphi_0, \varphi_1, \psi] &= \lim_{i \rightarrow \infty} F[t, x_j, f_i, \varphi_{0,i}, \varphi_{1,i}, \psi_i], \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) F[t, x_j, f, \varphi_0, \varphi_1, \psi] &= \\ = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) F[t, x_j, f_i, \varphi_{0,i}, \varphi_{1,i}, \psi_i] \end{aligned} \quad [11,5]$$

y lo mismo ocurrirá con las condiciones iniciales.

Dadas las funciones f , φ_0 , φ_1 y ψ que verifiquen las condiciones de diferenciabilidad que se acaban de indicar, formemos cuatro sucesiones de funciones analíticas (por ejemplo, polinomios) que aproximen uniformemente tanto a las funciones dadas como a sus derivadas hasta el orden requerido; por paso al límite de las identidades [11,4] correspondientes a las funciones analíticas, obtenemos las identidades para las funciones f , φ_0 , φ_1 y ψ consideradas.

12. Resolución del problema de CAUCHY sobre una hipersuperficie cualquiera en la ecuación de los telegrafistas :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - u = f(t, x_1, \dots, x_n). \quad [12,1]$$

Como condiciones iniciales se tomarán las mismas [1,3] y [1,4] consideradas para la ecuación de ondas.

Aplicando tres veces el operador I a los dos miembros de la ecuación anterior, se obtiene la ecuación integrodiferencial

$$\bar{u} - \sum_{i=1}^n B_i^2 \bar{u} - I^2 \bar{u} = I f_1(x_i, t), \quad [12,2]$$

que compendia la ecuación dada junto con las condiciones iniciales propuestas, y en la cual la función $f_1(x_i, t)$ es la dada en [1,10]; y como entonces, se ha representado por $\bar{u}$ la función

$$\bar{u} = \int_{\psi}^t u(x_i, \tau) d\tau, \text{ de donde resulta } u = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}.$$

La aplicación del cálculo de operadores nos conduce a la fórmula

$$\bar{u} = \left[\frac{1}{1 - B_1^2 - B_2^2 - \dots - B_n^2 - I^2} I f_1(x_i, t) \right], \quad [12,3]$$

de la cual se deduce que $\bar{u}$ vendrá dada por el producto proyectivo

$$\bar{u} = \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \dots - \alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2} \right\} \Delta p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}), \quad [12,4]$$

donde $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ es la indicatriz proyectiva, resultado de

aplicar el operador $\frac{1}{1 + \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n + \alpha_{n+1} I}$ a la función $I f_1$, [2,4];

es decir $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = \frac{1}{1 + \alpha_1 B_1 + \dots + \alpha_n B_n + \alpha_{n+1} I} I f_1$.

La función $p(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ será por consiguiente, la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial p}{\partial x_n} + \alpha_{n+1} p = f_1, \quad [12,5]$$

que verifican la condición inicial $p_I = 0$.

Esta solución es precisamente (1):

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, t, x_1, \dots, x_n) = \int_{\bar{l}(\alpha_i)}^t e^{\alpha_{n+1}(\tau-t)} f(\tau, x_i + \alpha_i(\tau-t)) d\tau \quad [12,6]$$

donde $\bar{l}(\alpha_i)$ tiene el mismo significado que el indicado anteriormente: coordenada $\bar{l}$ del punto de intersección de la recta [2,7] con la hipersuperficie Γ .

Caso I: n par.

Cuando el número de variables x_i es un número par n , el producto proyectivo [12,4] se referirá a $n + 1$ variables α_i y entonces deberemos aplicar la expresión del producto proyectivo en el caso impar [4,7], y así se obtiene como solución de la ecuación diferencial propuesta, la siguiente:

(1) Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *Risoluzione in termini finiti...* pág. 955.

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\sigma_{n+1}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho$$

$$\int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t e^{\alpha_{n+1} \varrho (\tau-t)} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) d\tau, \quad [12,7]$$

donde S_{n+1} es hipersuperficie esférica $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 + \alpha_{n+1}^2 = 1$, y $d\sigma_{n+1}$ el elemento diferencial de área sobre la misma.

Poniendo $r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2$, se le puede dar al elemento diferencial $d\sigma_{n+1}$ la siguiente forma

$$d\sigma_{n+1} = \frac{r^{n-1} dr d\sigma_n}{\sqrt{1-r^2}}, \quad [12,8]$$

representando $d\sigma_n$ el elemento de área sobre la hipersfera $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$. Por tanto, la integral

$$\int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t e^{\alpha_{n+1} \varrho (\tau-t)} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) d\tau$$

se transformará en la suma de las dos integrales siguientes:

$$\int_{S_n} d\sigma_n \int_0^1 \frac{r^{n-1} dr}{\sqrt{1-r^2}} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t e^{\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t)} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) d\tau +$$

$$+ \int_{S_n} d\sigma_n \int_0^1 \frac{r^{n-1} d\tau}{\sqrt{1-r^2}} \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t e^{-\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t)} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) d\tau.$$

Como $\bar{t}(\alpha_i \varrho)$ y $f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t))$ no dependen de r , se podrán invertir las integraciones respecto de r y de τ , y se obtendrá:

$$\int_{S_n} d\sigma_n \int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t d\tau f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) \int_0^1 \frac{r^{n-1} e^{\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t)} + e^{-\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t)}}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

La solución de la ecuación será pues finalmente

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{2}{(n-2)! \sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho$$

$$\int_{\bar{t}(\alpha_i \varrho)}^t d\tau f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho(\tau-t)) \int_0^1 \frac{r^{n+1} \operatorname{Ch}(\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t))}{\sqrt{1-r^2}} dr. \quad [12,9]$$

Caso II: n impar.

En este caso habrá que aplicar la expresión del producto proyectivo [4,3], cuando el número de variables α_i es $n+1$ impar, y así se obtiene como solución de la ecuación diferencial, la siguiente:

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-1)!^2 \sigma_{n+1}} \int_{E_{n+1}} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n d\alpha_{n+1}}{\sqrt{1-\alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2}} \frac{\partial^{n+1}}{\partial \theta^{n+1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-1}{2}} d\rho \int_{\vec{i}(\alpha_i \varrho)}^t e^{\alpha_{n+1} \varrho (\tau-t)} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau-t)) d\tau \quad [12,10]$$

donde E_{n+1} representa el interior de la esfera $n+1$ — dimensional $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 + \alpha_{n+1}^2 \leq 1$.

Indicando explícitamente la integración respecto de la variable α_{n+1} , la integral

$$\int_{E_{n+1}} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n d\alpha_{n+1}}{\sqrt{1-\alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2}} \int_{\vec{i}(\alpha_i \varrho)}^t e^{\alpha_{n+1} \varrho (\tau-t)} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau-t)) d\tau$$

se transforma en la

$$\int_{S_n} d\sigma_n \int_{\vec{i}(\alpha_i \varrho)}^t d\tau f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau-t)) \int_0^{1^{n-1}} dr \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{e^{\alpha_{n+1} \varrho (\tau-t)}}{\sqrt{1-r^2 - \alpha_{n+1}^2}} d\alpha_{n+1}.$$

Ahora bien, haciendo el cambio de variable $\alpha_{n+1} = \sqrt{1-r^2} \sin \varphi$ en la última integral, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{e^{\alpha_{n+1} \varrho (\tau-t)}}{\sqrt{1-r^2 - \alpha_{n+1}^2}} d\alpha_{n+1} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t) \sin \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t) \sin \varphi} d\varphi = \frac{1}{\pi} J_0(i\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t)), \end{aligned}$$

donde, como es costumbre, J_0 representa la función de BESSEL de orden 0. La función $J_0(i\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t))$ será real, ya que J_0 es una función par.

La solución de la ecuación propuesta será finalmente

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(n-1)! \sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n+1}}{\partial \theta^{n+1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-1}{2}} d\rho \int_{\vec{i}(\alpha_i \varrho)}^t d\tau f_1(\tau, x_i + \alpha_i \rho (\tau-t)) \int_0^1 r^{n-1} J_0(i\sqrt{1-r^2} \varrho (\tau-t)) dr. \quad [12,11]$$

CAPÍTULO II

CASOS NOTABLES DE RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY EN ECUACIONES Y SISTEMAS EN DERIVADAS PARCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES Y DE TIPO HIPERBÓLICO

13. **Productos proyectivos en los que una de las funciones del mismo es par respecto de todas las variables.** — Cuando una de las funciones de un producto proyectivo, sólo depende de las *potencias pares de las variables*, se puede reducir su cálculo al de otro en el que se substituye dicha función por la obtenida cambiando las antiguas variables elevadas al cuadrado por nuevas variables.

En primer lugar, se ha de advertir que como en la serie que define el producto proyectivo [3,4,] aparecen multiplicados los coeficientes de términos semejantes, si el desarrollo en serie de una de las funciones sólo consta de términos con potencias pares, los únicos términos del desarrollo en serie de la otra función que intervendrán en la construcción del producto proyectivo serán los de potencias pares.

Sean las funciones $p(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2)$ e $y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, en donde se ha puesto de manifiesto la dependencia de la función p respecto de los cuadrados de las variables. Se trata de calcular el producto proyectivo

$$P = p(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2) \triangle y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad [13,1]$$

En virtud de las propiedades de la indicatriz proyectiva ⁽¹⁾, se tiene:

$$p(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_n^2) = \frac{1}{1 + \alpha_1^2 t_1 + \dots + \alpha_n^2 t_n} \triangle_t p(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad [13,2]$$

y substituyendo este valor de la función $p(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$ en el producto proyectivo buscado, se tendrá

$$\begin{aligned} P &= p(t_1, \dots, t_n) \triangle \left[\frac{1}{1 + \alpha_1^2 t_1 + \dots + \alpha_n^2 t_n} \triangle_\alpha y(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right] = \\ &= p(-t_1, \dots, -t_n) \triangle \left[\frac{1}{1 - \alpha_1^2 t_1 - \dots - \alpha_n^2 t_n} \triangle_\alpha y(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right]. \end{aligned} \quad [13,3]$$

⁽¹⁾ L. FANTAPPIÉ. — *L'indatrice proiettiva...*, Lug. cit., pág. 194.

En el caso particular de que la función $y(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ fuera de manera explícita función *par* respecto de todas las variables, es decir: $y(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = y^*(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$, la expresión del producto proyectivo aún se podría dar en forma más simplificada, ya que entonces sería:

$$\begin{aligned} P &= p(-t_1, \dots, -t_n) \triangle_t \left[\frac{1}{1 - \sum \alpha_i^2} \triangle_\alpha y^*(\alpha_1^2 t_1, \dots, \alpha_n^2 t_n) \right] = \\ &= p(t_1, \dots, t_n) \triangle_t \left[\frac{1}{1 - \sum \alpha_i^2} \triangle_\alpha y^*(-\alpha_1^2 t_1, \dots, -\alpha_n^2 t_n) \right]. \quad [13,4] \end{aligned}$$

Claro es, que dada una función $y(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, cuando es analítica, es fácil construir la función $y^*(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$ obtenida suprimiendo en la y todos los términos que contienen alguna potencia impar de las variables. En efecto, la función y^* es:

$$y^*(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2) = \frac{1}{2^n} \sum y(\varepsilon_1 \alpha_1, \dots, \varepsilon_n \alpha_n) \quad [13,5]$$

donde $\varepsilon_i = \pm 1$, y la suma está extendida a todas las disposiciones posibles de los signos más y menos.

Como el producto proyectivo de la función $\frac{1}{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \dots - \alpha_n^2}$ por $y^*(\alpha_1^2 t_1, \dots, \alpha_n^2 t_n)$, ya se ha calculado en forma de valor medio sobre una superficie esférica real [3,16], [3,20], de la función $\bar{y}^*(\alpha_i^2 t_i)$ transformada de la $y^*(\alpha_i^2 t_i)$ por medio de los operadores [4,2] y [4,7], se tendrán como expresiones del producto proyectivo propuesto, las dos siguientes que corresponden a los casos de ser n par e impar.

Caso I : n par.

$$\begin{aligned} P &= p(-t_i) \triangle_t \left[\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \bar{y}^*(\alpha_i^2 t_i) \right] = \\ &= p(-t_i) \triangle_t \left[\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \bar{y}(\alpha_i \sqrt{t_i}) \right]. \quad [13,6] \end{aligned}$$

Nótese que los radicales cuadráticos que aparecen en $\bar{y}(\alpha_i \sqrt{t_i})$, pueden tomarse con cualquiera de sus determinaciones, ya que como hemos indicado, los términos que los contienen se anulan en el cálculo de la integral sobre S_{n+1} .

Desarrollando la función $\bar{y}(\alpha_i \sqrt{t_i})$, se tiene :

$$P = p(-t_i) \triangle_t \left[\frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{\sigma_{n+1}} \int_{S_{n+1}} d\sigma_{n+1} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} y(\alpha_i \sqrt{t_i} \rho) d\rho \right]. \quad [13,7]$$

Caso II : n impar.

$$\begin{aligned} P &= p(-t_i) \triangle_t \left[\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{S_n} d\sigma_n \bar{y}^*(\alpha_i^2 t_i) \right] = \\ &= p(-t_i) \triangle_t \left[\frac{1}{2(2)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{S_n} d\sigma_n \bar{y}(\alpha_i \sqrt{t_i}) \right] \end{aligned} \quad [13,8]$$

donde, como en el caso anterior, los radicales $\sqrt{t_i}$ en $\bar{y}(\alpha_i \sqrt{t_i})$ no influyen en el producto.

Desarrollando la función $\bar{y}(\alpha_i \sqrt{t_i})$ se tiene :

$$P = p(-t_i) \triangle_t \left[\frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_n} d\sigma_n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}} \int_{\theta=1}^{\theta} \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-3}{2}} y(\alpha_i \sqrt{t_i} \rho) d\rho \right]. \quad [13,9]$$

14. Estudio del producto proyectivo :

$$P = \frac{1}{(1 - \sum a_i^2 \alpha_i^2) (1 - \sum b_i^2 \alpha_i^2)} \triangle_{\alpha} y(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad [14,1]$$

Aplicando la fórmula [13,3] se obtiene :

$$P = \frac{1}{(1 - \sum a_i^2 \alpha_i^2) (1 - \sum b_i^2 \alpha_i^2)} \triangle_t \left[\frac{1}{1 - \alpha_1^2 t_1 - \dots - \alpha_n^2 t_n} \triangle_{\alpha} y(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right]$$

o bien, en el caso de ser n par

$$P = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(1 + \sum a_i^2 t_i) (1 + \sum b_i^2 t_i)} \triangle_t \int_{E_n} \frac{\bar{y}(\alpha_1 \sqrt{t_1}, \dots, \alpha_n \sqrt{t_n})}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n. \quad [14,2]$$

Ahora bien, el producto proyectivo [14,2] respecto de las variables t_i es precisamente la media proyectiva ⁽¹⁾ de la función

$$F(t_1, \dots, t_n) = \int_{E_n} \frac{\bar{y}(\alpha_1 \sqrt{t_1}, \dots, \alpha_n \sqrt{t_n})}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \quad [14,3]$$

⁽¹⁾ L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice proiettiva...*, Lug. cit., pág. 234.

entre los dos puntos $(a_1^2, \dots, a_n^2)$ y $(b_1^2, \dots, b_n^2)$, cuya expresión es:

$$M(a_i^2, b_i^2) F = F(a_i^2) + \sum_{r=1}^n b_r^2 \int_0^1 F'_r(b_1^2 + \tau(a_1^2 - b_1^2), \dots, b_n^2 + \tau(a_n^2 - b_n^2)) d\tau. \quad [14,4]$$

Se tendrá, pues, como valor del producto proyectivo buscado:

$$P = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \left[\bar{y}(a_i, \alpha_i) + \int_0^1 d\tau \sum_{r=1}^n \frac{b_r^2 \alpha_r}{2\sqrt{b_r^2 + \tau(a_r^2 - b_r^2)}} \bar{y}'_r(\alpha_1 \sqrt{b_1^2 + \tau(a_1^2 - b_1^2)}, \dots, \alpha_n \sqrt{b_n^2 + \tau(a_n^2 - b_n^2)}) \right]. \quad [14,5]$$

Casos particulares. I. — Supongamos, en primer lugar, todas las a_i iguales a la unidad, y las b_i iguales a una constante k :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1; \quad b_1 = b_2 = \dots = b_n = k.$$

En este caso, los dos puntos $(1, 1, \dots, 1)$ y $(k^2, k^2, \dots, k^2)$ están alineados con el origen, y la media proyectiva de la función $F(t_1, \dots, t_n)$ es:

$$M(1, k^2) F = \frac{1}{1 - k^2} F(1, \dots, 1) - \frac{k^2}{1 - k^2} F(k^2, \dots, k^2) \quad [14,6]$$

y el producto proyectivo propuesto:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - \sum \alpha_i^2)(1 - \sum k^2 \alpha_i^2)} \triangle_{\alpha} y(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \frac{\bar{y}(\alpha_i) - k^2 \bar{y}(k\alpha_i)}{1 - k^2} \end{aligned} \quad [14,7]$$

II. Si además de todas las a_i fueran todas las b_i iguales a la unidad, la media proyectiva anterior se reduciría a la media proyectiva de la función $F(t_1, \dots, t_n)$ en el punto $(1, 1, \dots, 1)$, y el producto proyectivo buscado

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - \sum \alpha_i^2)^2} \triangle_{\alpha} y(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} (\bar{y}(\alpha_i) + \sum_{r=1}^n \alpha_r \bar{y}'_r(\alpha_i)). \end{aligned} \quad [14,8]$$

Fórmulas análogas a las [14,5], [14,7] y [14,8] se obtendrían en el caso de ser n impar :

III. Consideremos finalmente el producto proyectivo

$$P = \frac{1}{(1 - c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - a^2\alpha_3^2)(1 - a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2))} \Delta_{\alpha} y(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad [14,9]$$

que en virtud de [13,8] se transforma en

$$P = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(1 + c^2(t_1 + t_2) + a^2t_3)(1 + a^2(t_1 + t_2 + t_3))} \Delta_{\alpha} \int_{S_3} \bar{y}(\alpha_1 \sqrt{t_1}, \alpha_2 \sqrt{t_2}, \alpha_3 \sqrt{t_3}) d\sigma_3$$

donde S_3 representa la superficie esférica $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$.

La media proyectiva de la función

$$F(t_1, t_2, t_3) = \int_{S_3} \bar{y}(\alpha_1 \sqrt{t_1}, \alpha_2 \sqrt{t_2}, \alpha_3 \sqrt{t_3}) d\sigma_3$$

entre los dos puntos (c^2, c^2, a^2) y (a^2, a^2, a^2) es

$$\begin{aligned} MF &= F(a^2, a^2, a^2) + \\ &+ \int_0^1 d\tau [c^2 F'_{t_1}(c^2 + \tau(a^2 - c^2), c^2 + \tau(a^2 - c^2), a^2) + c^2 F'_{t_2} + a^2 F'_{t_3}] = \\ &+ \frac{a^2 F(a^2, a^2, a^2) - c^2 F(c^2, c^2, a^2)}{a^2 - c^2} + \int_0^1 a^2 F'_{t_1}(c^2 + \tau(a^2 - c^2), c^2 + \tau(a^2 - c^2), a^2) d\tau. \end{aligned}$$

El valor del producto proyectivo buscado es pues :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} d\sigma_3 \left[\frac{\bar{y}(a\alpha_1, a\alpha_2, a\alpha_3) a^2 - \bar{y}(c\alpha_1, c\alpha_2, a\alpha_3) c^2}{a^2 - c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a\alpha_3}{a^2 - c^2} \int_c^a \bar{y}'_{\alpha_3}(\alpha_1 u, \alpha_2 u, \alpha_3 a) u du \right]. \quad [14,10] \end{aligned}$$

15. Estudio del producto proyectivo :

$$P = \frac{1}{1 - \alpha_1^4 - \alpha_2^4 - \dots - \alpha_n^4} \Delta_{\alpha} y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad [15,1]$$

Otra aplicación de la propiedad demostrada en § 13 es el cálculo del producto proyectivo anterior. Aplicando la fórmula [13,3] resulta :

$$P = \frac{1}{1 - \sum^n l_i^2} \triangle_i \left[\frac{1}{1 - \sum^n \alpha_i^2 l_i} \triangle_x y(\alpha_i) \right] =$$

$$= \frac{1}{1 - \sum^n l_i^2} \triangle_i \left[\frac{1}{1 - \sum^n \alpha_i^2} \triangle_\alpha y(\alpha_i \sqrt{l_i}) \right], \quad [15,2]$$

quedando el producto proyectivo reducido a dos sucesivos de la forma estudiada en el capítulo primero.

Si n es *par* se tiene :

$$P = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E'_n} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{1 - t_1^2 - \dots - t_n^2}} \int_{E_n} \frac{\bar{y}(\alpha_1 \sqrt{l_1}, \dots, \alpha_n \sqrt{l_n})}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \quad [15,3]$$

donde E'_n y E_n son los recintos esféricos n — dimensionales $t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 \leq 1$, y $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \leq 1$ respectivamente, y la función $\bar{y}(\alpha_1 \sqrt{l_1}, \dots, \alpha_n \sqrt{l_n})$ se puede calcular aplicando dos veces sucesivas el operador [4,2] a la función $y(\alpha_1 \sqrt{l_1}, \dots, \alpha_n \sqrt{l_n})$ es decir :

$$\bar{y}(\alpha_i \sqrt{l_i}) = \frac{1}{2^{n-2} \left(\frac{n-2}{2}\right)!} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \frac{\partial^n}{\partial \theta'^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho$$

$$\int_0^{\theta'} \rho' (\theta'^2 - \rho'^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho' y(\alpha_i \rho \sqrt{l_i} \rho'). \quad [15,4]$$

Otra forma del producto proyectivo [15,1], se obtiene tomando como nuevas variables $\sqrt{l_i}$ y $\sqrt{\rho'}$:

$$P = \frac{2^{n+1}}{(n-2)!!^4} \frac{1}{\sigma_n^2} \frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \frac{\partial^n}{\partial \theta'^n} \int_0^\theta \rho (\theta^2 - \rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho \int_0^{\sqrt{\theta'}} \rho'^3 (\theta' - \rho'^4)^{\frac{n-2}{2}} d\rho'$$

$$\int_{G_n} \frac{t_1 \dots t_n dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{1 - \sum^n l_i^4}} \int_{E_n} \frac{y(\alpha_i t_i \rho \rho')}{\sqrt{1 - \sum^n \alpha_i^2}} d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \quad [15,5]$$

donde las integrales están extendidas a los recintos espaciales n dimensionales limitados por las superficies $G_n \equiv t_1^4 + t_2^4 + \dots + t_n^4 - 1 = 0$ y $E_n \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 - 1 = 0$.

En el caso de ser n *impar* la expresión del producto proyectivo es

$$P = \frac{1}{4(2\pi)^{n-1}} \int_{S'_n} d\sigma'_n \int_{S_n} \bar{y}(\alpha_1 \sqrt{l_1}, \dots, \alpha_n \sqrt{l_n}) d\sigma_n, \quad [15,6]$$

donde las integrales están extendidas a las hipersuperficies esféricas S'_n y S_n , cuyas ecuaciones son $t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = 1$ y $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$ respectivamente, y la función $\bar{y}(\alpha_1\sqrt{t_1}, \dots, \alpha_n\sqrt{t_n})$ resulta de aplicar dos veces el operador [4,5] a la $y(\alpha_1\sqrt{t_1}, \dots, \alpha_n\sqrt{t_n})$.

Casos particulares.

Tiene interés el considerar las fórmulas del producto proyectivo en los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Si $n = 2$, la fórmula [15,3] se transforma en la

$$P = \frac{1}{4\pi^2} \int_{E_2} \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{1-t_1^2-t_2^2}} \int_{E_2} \frac{\bar{y}(\alpha_1\sqrt{t_1}, \alpha_2\sqrt{t_2})}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad [15,7]$$

donde la función $\bar{y}(\alpha_1\sqrt{t_1}, \alpha_2\sqrt{t_2})$ desarrollada en serie es:

$$\begin{aligned} & \bar{y}(\alpha_1\sqrt{t_1}, \alpha_2\sqrt{t_2}) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2}^{\infty} y_{r_1, r_2} (r_1 + r_2 + 1) (r_1 + r_2 + 2) (\alpha_1\sqrt{t_1})^{r_1} (\alpha_2\sqrt{t_2})^{r_2}, \quad [15,8] \end{aligned}$$

cuyo valor se puede expresar muy sencillamente por medio de una derivada segunda, ya que se tiene:

$$\bar{y}(\alpha_1\sqrt{t_1}, \alpha_2\sqrt{t_2}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}_{\theta=1} [y(\alpha_1\sqrt{t_1}\theta, \alpha_2\sqrt{t_2}\theta) \cdot \theta^2]. \quad [15,9]$$

El valor del producto proyectivo será por consiguiente:

$$P = \frac{1}{8\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}_{\theta=1} \int_{E_2} \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{1-t_1^2-t_2^2}} \int_{E_2} \frac{\theta^2 y(\alpha_1\sqrt{t_1}\theta, \alpha_2\sqrt{t_2}\theta)}{\sqrt{1-\alpha_1^2-\alpha_2^2}} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad [15,10]$$

En el caso $n = 3$ la fórmula [15,6] se transforma en la siguiente:

$$P = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}_{\theta=1} \int_{S_3} d\sigma'_3 \int_{S_3} \theta^2 y(\alpha_1\sqrt{t_1}\theta, \alpha_2\sqrt{t_2}\theta, \alpha_3\sqrt{t_3}\theta) d\sigma_3. \quad [15,11]$$

16. Resolución del problema de CAUCHY en la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = f(t, x_1, \dots, x_n). \quad [16,1]$$

Para simplificar, supondremos las condiciones iniciales dadas sobre el hiperplano $t = 0$; sean éstas:

$$\left[\frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right]_{t=0} = \varphi_r(x_i), \quad (r = 0, 1, 2, 3). \quad [16,2]$$

Aplicando los operadores [1,5] y [1,6], la ecuación dada junto con las condiciones iniciales, se transforma en la ecuación integrodiferencial siguiente:

$$u - \sum_{i=1}^n B_i^4 u = f_1(t, x_i) \quad [16,3]$$

donde la función $f_1(t, x_i)$ tiene una estructura análoga a la obtenida en [1,10] aunque más simple, por haber supuesto las condiciones iniciales sobre $t = 0$:

$$f_1(t, x_i) = \frac{1}{4!} \int_0^t (t-\tau)^4 f(\tau, x_i) d\tau + t^3 \varphi_3(x_i) + t^2 \varphi_2(x_i) + t \varphi_1(x_i) + \varphi_0(x_i) \quad [16,4]$$

La solución buscada se obtiene por el producto proyectivo

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^4} \triangle_{\alpha} \int_0^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau-t)) d\tau \right]. \quad [16,5]$$

Si n es *par*, la fórmula [15,3] nos da:

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E'_n} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{1-t_1^2 - \dots - t_n^2}} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1-\alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \int_0^t \bar{f}_1(\tau, x_i + \alpha_i \sqrt{t_i}(\tau-t)) d\tau. \quad [16,6]$$

Como ya vimos, la última integral de la fórmula anterior no es más que la integral curvilínea

$$\int_P^Q \bar{f}_1(T, X_i) dT, \quad [16,7]$$

a lo largo de la recta

$$T-t = \frac{X_1-x_1}{\alpha_1 \sqrt{t_1}} = \dots = \frac{X_n-x_n}{\alpha_n \sqrt{t_n}}, \quad [16,8]$$

entre los puntos P y Q correspondientes a $T = 0$ y $T = t$. Ahora bien, los cosenos directores de esta recta, que son proporcionales a $1, \alpha_1 \sqrt{t_1}, \dots, \alpha_n \sqrt{t_n}$, no son arbitrarios, ya que las variables α_i y las t_i verifican respectivamente las desigualdades $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \leq 1$ y $t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 \leq 1$. Si consideramos fijas las t_i , el conjunto de todas las rectas [16,8] estará constituido por las rectas de la radiación de vértice (t, x_i) que son interiores a la hipersuperficie cónica de segundo orden cuya ecuación es:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} (X_i - x_i)^2 = (T - t)^2 \quad [16,9]$$

Si suponemos ahora variables las t_i , pero verificando siempre la ecuación $\sum_{i=1}^n t_i^2 = 1$, las superficies [16,9], tendrán por envolvente la hipersuperficie:

$$(X_1 - x_1)^{\frac{4}{3}} + (X_2 - x_2)^{\frac{4}{3}} + \dots + (X_n - x_n)^{\frac{4}{3}} = (T - t)^{\frac{4}{3}} \quad [16,10]$$

y las rectas [16,8] serán todas las de la radiación de vértice (t, x_1) que son interiores a la hipersuperficie cónica anterior. En consecuencia, el valor de la solución $u(t, x_i)$ de la ecuación diferencial [16,1] en el punto $(t, x_1, \dots, x_i)$ depende exclusivamente de los valores de $f_1(T, X_i)$ en los puntos interiores a la hipersuperficie cónica [16,10] comprendidos entre el vértice y el hiperplano $T = 0$.

Es de advertir, que

$$U_1^{\frac{4}{3}} + U_2^{\frac{4}{3}} + \dots + U_n^{\frac{4}{3}} = V^{\frac{4}{3}} \quad \text{y} \quad U_1 x_1 + U_2 x_2 + \dots + U_n x_n + Vt + 1 = 0, \quad [16,11]$$

son las ecuaciones tangenciales del cono característico de la ecuación [16,1], con vértice en el punto (t, x_i) :

$$(X_1 - x_1)^4 + (X_2 - x_2)^4 + \dots + (X_n - x_n)^4 = (T - t)^4 \quad [16,12]$$

y por lo tanto, la ecuación [16,10] se puede considerar como la obtenida cambiando en la ecuación tangencial [16,11] las coordenadas tangenciales por las puntuales, y trasladando el vértice de la hipersuperficie cónica resultante del punto (t, x_i) .

En el caso de ser n impar, la fórmula resolvente de la ecuación es:

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4(2\pi)^{n-1}} \int_{S'_n} d\sigma'_n \int_{S_n} d\sigma_n \int_0^{t_1} f_1(\tau, x_i + \alpha_i \sqrt{t_i}(\tau - t)) d\tau \quad [16,13]$$

El valor de la solución $u(t, x_i)$ en el punto $(t, x_1, \dots, x_n)$ depende también exclusivamente de los valores de $f_1(T, X_i)$ en el recinto análogo al estudiado en el caso n par.

Nota. Aplicando reiteradamente el método seguido para el cálculo del producto proyectivo [15,1] del que se deducía la solución del problema de CAUCHY para la ecuación [16,1], resulta un método para la resolución del problema de CAUCHY para las ecuaciones de la forma.

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^{2k} u}{\partial x_i^{2k}} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad [16,14]$$

con cualquier número de variables.

17. Resolución del problema de CAUCHY en la ecuación en derivadas parciales :

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) u = f(t, x_1, \dots, x_n). \quad [17,1]$$

Esta ecuación es de orden $2k$ y de tipo hiperbólico puro. Para simplificar, supondremos las condiciones iniciales dadas sobre el hiperplano $t = 0$; sean éstas :

$$\left[\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right]_{t=0} = \varphi_m(x_1, \dots, x_n), \quad (m = 0, 1, \dots, 2k-1), \quad [17,2]$$

Aplicando los operadores [1,5] y [1,6], la ecuación dada, junto con las condiciones iniciales, se transforma en la ecuación integrodiferencial siguiente :

$$\prod_{j=1}^k \left(1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 B_i^2 \right) I u = I f_1(t, x_i), \quad [17,3]$$

donde la función $f_1(t, x_i)$, obtenida por un proceso análogo al seguido en § 1, tiene la siguiente forma :

$$f_1(t, x_i) = \frac{1}{(2k)!} \int_0^t (t-\tau)^{2k} f(\tau, x_i) d\tau + \sum_{r=0}^{2k-1} t^r \varphi_r(x_i) \quad [17,4]$$

La solución buscada se obtiene por el producto proyectivo

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\prod_{j=1}^k (1 - \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \alpha_i^2)} \Delta \int_0^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau \right]. \quad [17,5]$$

Ahora bien, en virtud de la propiedad expuesta en [13,3] este producto proyectivo se transforma en el

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\prod_{j=1}^k (1 + \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 t_i)} \Delta \left\{ \frac{1}{1 - \alpha_1^2 t_1 - \dots - \alpha_n^2 t_n} \Delta \int_0^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau \right\}, \quad [17,6]$$

y llamando

$$F(t_i) = \frac{1}{1 - \alpha_1^2 t_1 - \dots - \alpha_n^2 t_n} \Delta \int_0^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau, \quad [17,7]$$

observamos que

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^k (1 + \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 t_i)} \Delta F(t_i) \quad [17,8]$$

es la media proyectiva de la función $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ entre los k puntos $(a_{1j}^2, a_{2j}^2, \dots, a_{nj}^2)$, $(j = 1, \dots, k)$, que representaremos con la notación

$$M(a_{i1}^2, a_{i2}^2, \dots, a_{in}^2) F(t_1, t_2, \dots, t_n) \quad [17,9]$$

La solución de la ecuación diferencial propuesta para n par será :

$$u(t, x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} M(a_{i1}^2, a_{i2}^2, \dots, a_{in}^2) \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \int_0^t \bar{f}_1(\tau, x_i + \alpha_i \sqrt{t_i}(\tau - t)) d\tau, \quad [17,10]$$

y si n es impar la solución análoga tendrá la forma :

$$u(t, x_i) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} M(a_{i1}^2, a_{i2}^2, \dots, a_{in}^2) \int_{S_n} d\sigma_n \int_0^t \bar{f}_1(\tau, x_i + \alpha_i \sqrt{t_i}(\tau - t)) d\tau. \quad [17,11]$$

Teniendo en cuenta la expresión integral encontrada para la media proyectiva entre k puntos ⁽¹⁾ las fórmulas resolventes de la ecuación [17,1] se pueden presentar en las formas (particularizadas para $k=3$) siguientes :

$$u(t, x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}}$$

$$\int_0^t d\tau \left[\int \int \int_{R_3} \frac{\partial^3}{\partial \tau_1 \partial \tau_2 \partial \tau_3} \bar{f}_1(\tau, x_i + \alpha_i \sqrt{a_{i1}^2 \tau_1 + a_{i2}^2 \tau_2 + a_{i3}^2 \tau_3}(\tau - t)) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right.$$

$$+ \sum_{j < k}^3 \int \int_{R_2} \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \bar{f}_1(\tau, x_i + \alpha_i \sqrt{a_{ij}^2 \tau_1 + a_{ik}^2 \tau_2}(\tau - t)) d\tau_1 d\tau_2$$

$$\left. + \sum_j^3 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \bar{f}_1(\tau, x_i + \alpha_i \sqrt{a_{ij}^2 \tau_1}(\tau - t)) d\tau_1 + \bar{f}_1(\tau, x_i) \right] \quad [17,12]$$

donde R_3 es el tetraedro limitado por el plano $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$, y los planos coordenados $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$ y $\tau_3 = 0$; y donde R_2 es el triángulo limitado por la recta $\tau_1 + \tau_2 = 1$ y los ejes τ_1 y τ_2 .

En el caso de ser n impar la fórmula resolvente es análoga a la anterior, bastando substituir la integral extendida al interior de la esfera E_n por la integral de superficie sobre S_n .

Caso particular : resolución del problema de CAUCHY para la ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k^2 \Delta \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u = f(t, x_i) \quad (2). \quad [17,13]$$

Consideraremos las condiciones de CAUCHY sobre la hipersuperficie $t = \psi(x_i)$, y supondremos que son

$$\left[\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right]_{t=\psi} = \varphi_m(x_i), \quad (m = 0, 1, 2, 3). \quad [17,14]$$

Aplicando cinco veces el operador I a los dos miembros de la ecuación [17,13] se obtiene la ecuación integrodiferencial

$$(1 - k^2 \sum_1^n B_i^2) (1 - \sum_1^n B_i^2) \bar{u} = IF(t, x_i), \quad [17,15]$$

⁽¹⁾ Véase nota sobre « Nueva expresión de la media proyectiva de una función entre k puntos » al final de este trabajo.

⁽²⁾ Cfr. J. P. KORMES. — *Bull. amer. math. Soc.* — 1944. — Págs. 842 - 855.

donde la función $F(t, x_i)$ se deduce de la $f(t, x_i)$ por un proceso análogo al indicado en § 1 para la ecuación de ondas. La función $\bar{u}$ representa como anteriormente $\int_{\psi}^t u(\tau, x_i) d\tau$, de donde $u = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$.

En virtud de [14,7] la solución de la ecuación propuesta será :

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{E_n} \frac{d\alpha_1 \dots d\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \dots - \alpha_n^2}} \frac{1}{1 - k^2} \left[\int_{t(\alpha_i)}^t F(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau - k^2 \int_{t(k\alpha_i)}^t F(\tau, x_i + \alpha_i k(\tau - t)) d\tau \right], \quad [17,16]$$

en el caso de ser n par. Si n fuera impar, bastaría hacer la substitución de integrales indicada en el caso general.

18. Resolución del problema de CAUCHY en el sistema de ecuaciones de la propagación de las ondas luminosas en los medios cristalinis uniáxicos. — La forma de este sistema de ecuaciones es ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta u_1 - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= g_1(x_1, x_2, x_3, t), \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \Delta u_2 + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) &= g_2(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned} \quad [18,1]$$

Para simplificar, supondremos las condiciones de CAUCHY dadas sobre el hiperplano $t = 0$ (el método a seguir es el mismo en el caso general). Sean, pues, dichas condiciones las siguientes :

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3, 0) &= \varphi_0(x_1, x_2, x_3), & \frac{\partial u_1}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \\ u_2(x_1, x_2, x_3, 0) &= \psi_0(x_1, x_2, x_3), & \frac{\partial u_2}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, 0) &= \psi_1(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad [18,2]$$

donde supondremos que las funciones φ y ψ verifican las condiciones de analiticidad acostumbradas (§ 1).

Apliquemos dos veces a ambos miembros de las dos ecuaciones el operador

$$Iz(x_1, x_2, x_3, t) = \int_0^t z(x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau,$$

⁽¹⁾ Cfr. FLORENT BUREAU. — *Sur l'integration des equations de propagation des ondes lumineuses dans les milieux cristallins uniaxes.* — Comp. Rendus, 26 de abril de 1948. — Tomo 226.

y el sistema propuesto se reducirá al integrodiferencial siguiente :

$$\begin{aligned} u_1 - a^2 (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) u_1 - (a^2 - c^2) (B_1 B_2 u_2 - B_2^2 u_1) &= G_1 (x_1, x_2, x_3, t), \\ u_2 - a^2 (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) u_2 + (a^2 - c^2) (B_1^2 u_2 - B_1 B_2 u_1) &= G_2 (x_1, x_2, x_3, t), \end{aligned} \quad [18,3]$$

donde, como anteriormente [1,6], los operadores B_i son

$$B_i z (x_1, x_2, x_3, t) = \int_0^t z'_{x_i} (x_1, x_2, x_3, \tau) d\tau$$

y las funciones G_1 y G_2 serán respectivamente

$$\begin{aligned} G_1 (x_1, x_2, x_3, t) &= I^2 g_1 (x_i, t) + I \varphi_1 (x_i) + \varphi_0 (x_i) \\ \text{y} \quad G_2 (x_1, x_2, x_3, t) &= I^2 g_2 (x_i, t) + I \psi_1 (x_i) + \psi_0 (x_i) \end{aligned} \quad [18,4]$$

Por ser lícito el cálculo simbólico con los operadores introducidos ⁽¹⁾ podemos resolver el sistema anterior como un sistema de ecuaciones lineales en u_1 y u_2 , y poniendo

$$D = (1 - c^2 (B_1^2 + B_2^2) - a^2 B_3^2) (1 - a^2 (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2))$$

se tendrá

$$\begin{aligned} u_1 (x_i, t) &= \frac{1 - a^2 (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) + (a^2 - c^2) B_1^2}{D} G_1 (x_i, t) + \\ &\quad + \frac{(a^2 - c^2) B_1 B_2}{D} G_2 (x_i, t) \\ u_2 (x_i, t) &= \frac{1 - a^2 (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) + (a^2 - c^2) B_2^2}{D} G_2 (x_i, t) + \\ &\quad + \frac{(a^2 - c^2) B_1 B_2}{D} G_1 (x_i, t) \end{aligned} \quad [18,5]$$

Estas dos expresiones para u_1 y u_2 tiene la misma estructura, pasando de una a la otra por cambio de los subíndices 1 y 2. Calcularemos por esto solamente la expresión que nos da u_1 .

Como ya se indicó en § 2, el cálculo de los operadores anteriores

⁽¹⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *Integrazione in termini finiti di ogni sistema ad equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque.* — Mem. Acc. d'Italia, vol. VIII, n. 13, 1937, pág. 613 y siguientes.

aplicados a las funciones G_1 y G_2 , se reduce al de los productos proyectivos siguientes :

$$u_1(x_i, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1 - a^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (a^2 - c^2)\alpha_1^2}{D(\alpha_i)} \right\} \triangle \int_0^t G_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau +$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(a^2 - c^2)\alpha_1\alpha_2}{D(\alpha_i)} \right\} \triangle \int_0^t G_2(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau$$

[18,6]

Considerando el primero de estos dos productos proyectivos, se observa que el primer término se puede descomponer en un producto ordinario de dos factores, y por lo tanto, para realizar el cálculo de dicho producto proyectivo, se podrá emplear el método siguiente ⁽¹⁾: primero, se calculará la media proyectiva $M(\mu, \lambda)$ de la función

$$\int_0^t G_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau,$$

entre los dos puntos (μ_1, μ_2, μ_3) y $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; y después, considerados los dos factores

$$1 - c^2\mu_1^2 - a^2(\mu_2^2 + \mu_3^2) \quad \text{y} \quad \frac{1}{(1 - c^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - a^2\lambda_3^2)(1 - a^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2))},$$

en que se descompone el primer término del producto proyectivo, una vez sustituidas las variables α_i por las μ_i y λ_i respectivamente, se calcularán sucesivamente respecto de las variables μ_i y λ_i , los productos proyectivos de la media considerada, por cada uno de los factores.

Análogamente se operará con el segundo producto proyectivo de [18,6].

Tendremos pues

$$\left\{ \frac{1 - c^2\alpha_1^2 - a^2(\alpha_2^2 + \alpha_3^2)}{D(\alpha_i)} \right\} \triangle \int_0^t G_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau =$$

$$= \frac{1}{D(\lambda)} (1 - c^2\mu_1^2 - a^2(\mu_2^2 + \mu_3^2)) \triangle_{\lambda} \triangle_{\mu} M(\mu, \lambda) \int_0^t G_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau.$$

[18,7]

La media proyectiva entre los dos puntos μ_i y λ_i , se obtiene sencillamente con las operaciones de derivación e integración respecto una variable real ⁽²⁾, y así resulta :

⁽¹⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice projectiva...* Lug. cit., pág. 237.

⁽²⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *Idem.*, pág. 243.

$$\begin{aligned}
M(\mu, \lambda) \int_0^t G_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau-t)) d\tau &= \int_0^t G_1(\tau, x_i + \lambda_i(\tau-t)) d\tau + \\
+ \int_0^t d\tau \left[\mu_1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_1} G_1(\tau, x_i + [\mu_i + \theta(\lambda_i - \mu_i)](\tau-t)) d\theta + \right. \\
+ \mu_2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_2} G_1(\tau, x_i + [\mu_i + \theta(\lambda_i - \mu_i)](\tau-t)) d\theta + \\
\left. + \mu_3 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_3} G_1(\tau, x_i + [\mu_i + \theta(\lambda_i - \mu_i)](\tau-t)) d\theta \right]. \quad [18,8]
\end{aligned}$$

Advertimos que las derivadas parciales respecto X_1 se refieren a las derivadas de G_1 en [18,4] antes de haber hecho la sustitución de las variables por las expresiones que aparecen en los paréntesis.

Como por la misma definición del producto proyectivo, sólo entran en su composición los términos semejantes de los desarrollos en serie de las dos funciones [3,4], resulta que si una de ellas se reduce a un polinomio, el producto proyectivo se expresará por medio de las derivadas parciales de la otra función en el origen, y precisamente de las derivadas parciales tomadas respecto de los grupos de variables análogos a los de cada uno de los términos que constituyen el polinomio. En nuestro caso se tiene:

$$\begin{aligned}
(1 - c^2\mu_1^2 - a^2(\mu_2^2 + \mu_3^2)) \triangle_\mu M(\mu, \lambda) = \\
= M(0, \lambda) - \frac{1}{2} \left(c^2 \frac{\partial^2 M(0, \lambda)}{\partial \mu_1^2} + a^2 \frac{\partial^2 M(0, \lambda)}{\partial \mu_2^2} + a^2 \frac{\partial^2 M(0, \lambda)}{\partial \mu_3^2} \right). \quad [18,9]
\end{aligned}$$

Calcularemos $\frac{\partial^2 M(0, \lambda)}{\partial \mu_1^2}$, ya que las demás se obtienen por simetría:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu_1^2} \left[M(\mu, \lambda) \int_0^t G_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau-t)) d\tau \right]_{\mu_i=0} &= \\
= 2 \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial \mu_1} \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial X_1} G_1(\tau, x_i + [\mu_i + \theta(\lambda_i - \mu_i)](\tau-t)) d\theta \right]_{\mu_i=0} &= \\
= 2 \int_0^t d\tau (\tau-t) \int_0^1 (1-\theta) \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} G_1(\tau, x_i + \theta\lambda_i(\tau-t)) d\theta.
\end{aligned}$$

Obtendremos por lo tanto como expresión para el producto [18,9] la siguiente

$$\begin{aligned}
H_1(t, x_i, \lambda_i) &= (1 - c^2 \mu_1^2 - a^2 (\mu_2^2 + \mu_3^2)) \triangle_{\mu} M(\mu, \lambda) \int_0^t G_2 d\tau = \\
&= \int_0^t d\tau \left[G_1(\tau, x_i + \lambda_i(\tau - t)) - \right. \\
&\left. - (\tau - t) \int_0^1 (1 - \theta) \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial X_3^2} \right) G_1(\tau, x_i + \theta \lambda_i(\tau - t)) d\theta \right].
\end{aligned}$$

[18,10]

Análogamente resulta

$$\begin{aligned}
H_2(t, x_i, \lambda_i) &= ((a^2 - c^2) \mu_1 \mu_2) \triangle_{\mu} M(\mu, \lambda) \int_0^t G_2 d\tau = \\
&= \int_0^t d\tau (\tau - t) \int_0^1 (1 - \theta) (a^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} G_2(\tau, x_i + \theta \lambda_i(\tau - t)) d\theta.
\end{aligned}$$

[18,11]

El cálculo del producto proyectivo de estas funciones por $\frac{1}{D(\lambda_i)}$, ya se hizo en § 14, III, y así, poniendo

$$H(t, x_i, \lambda_i) = H_1(t, x_i, \lambda_i) + H_2(t, x_i, \lambda_i), \quad [18,12]$$

resulta

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2, x_3, t) &= \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{a^2 - c^2} \int_{S_3} d\sigma_3 \left[\bar{H}(t, x_i, a\lambda_1, a\lambda_2, a\lambda_3) a^2 - \bar{H}(t, x_i, a\lambda_1, a\lambda_2, c\lambda_3) c^2 + \right. \\
&\quad \left. + a\lambda_3 \int_c^a \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda_3}(t, x_i, u\lambda_1, u\lambda_2, a\lambda_3) u du \right],
\end{aligned}$$

[18,13]

donde la función $\bar{H}$ es precisamente [3,21]

$$\bar{H} = H + \lambda_1 \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} + \lambda_3 \frac{\partial H}{\partial \lambda_3}, \quad [18,14]$$

y S_3 es la superficie esférica $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$.

Para obtener la función $u_2(x_1, x_2, x_3, t)$, basta permutar en la [18,10] y [18,11], G_1 con G_2 y x_1 con x_2 . A partir de la función H construida de esta forma, se obtiene la función u_2 , que junto con la u_1 , constituyen la solución del problema de Cauchy propuesto.

CAPÍTULO III

CÁLCULO DE PRODUCTOS PROYECTIVOS A PARTIR DE SOLUCIONES PARTICULARES DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES. APLICACIONES

19. Cálculo de productos proyectivos a partir de soluciones particulares de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. — La resolución del problema de CAUCHY para una ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes, queda reducida al cálculo de un producto proyectivo ⁽¹⁾; veamos que el recíproco también es cierto.

Consideremos el producto proyectivo de la forma

$$\left\{ \frac{1}{1 + \sum_{r_1, \dots, r_n}^m a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \right\} \triangleq f(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (r_1 + \dots + r_n \leq m), \quad [19,1]$$

que suponemos que *existe*; tal ocurre, por ejemplo, cuando la función del primer término del producto, sea regular en un n — cilindro Q , definido por las desigualdades

$$|\alpha_1| \leq \rho_1, \quad |\alpha_2| \leq \rho_2, \dots, |\alpha_n| \leq \rho_n,$$

y la función $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sea regular en el n — cilindro « asociado » Q' , es decir, en el definido por las desigualdades

$$|\alpha_1| \leq \rho'_1 = \frac{1}{\rho_1}, \quad |\alpha_2| \leq \rho'_2 = \frac{1}{\rho_2}, \dots, |\alpha_n| \leq \rho'_n = \frac{1}{\rho_n}. \quad (2)$$

En todo caso las dos funciones son regulares en un entorno del origen; y si

$$\frac{1}{1 + \sum_{r_1, \dots, r_n}^m a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} = \sum_0^\infty p_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}$$

y

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_0^\infty y_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n},$$

⁽¹⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *Risoluzione in termini finiti del problema di CAUCHY*. Lug. cit.

⁽²⁾ L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice proiettiva...* Lug. cit. pág. 192.

son los desarrollos en serie de las dos funciones, el producto proyectivo [19,1] viene dado por la serie *absolutamente convergente* ⁽¹⁾

$$\sum_0^{\infty} \sum_{r_1, \dots, r_n} (-1)^r \frac{r_1! \dots r_n!}{r!} p_{r_1, \dots, r_n} y_{r_1, \dots, r_n}. \quad [19,2]$$

Hagamos corresponder al producto proyectivo considerado, la ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes siguiente:

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_0^m} + \sum_{r_1, \dots, r_n}^m a_{r_1, \dots, r_n} \frac{\partial^{r_0 + r_1 + \dots + r_n} z}{\partial x_0^{r_0} \partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$(r_0 + r_1 + \dots + r_n = m), \quad [19,3]$$

en la que, como se indica, todas las derivadas que aparecen son de orden m , y el segundo miembro es precisamente $f(x_1, \dots, x_n)$, que no depende de x_1 .

Estudiemos la solución de la misma con las condiciones más sencillas de CAUCHY sobre el hiperplano $x_0 = 0$:

$$\left[\frac{\partial^r z}{\partial x_0^r} \right]_{x_0=0} \equiv 0, \quad (r = 0, 1, \dots, m-1). \quad [19,4]$$

La solución existirá por consiguiente, por lo menos en un entorno del origen, donde, como se ha indicado, la función $f(x_1, \dots, x_n)$, es seguramente regular.

Aplicando el operador $Iz = \int_0^{x_0} z(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi$, m veces a los dos miembros, se tiene:

$$z + \sum_{r_1, \dots, r_n}^m a_{r_1, \dots, r_n} B_1^{r_1} B_2^{r_2} \dots B_n^{r_n} z = I^m f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \frac{x_0^m}{m!}, \quad [19,5]$$

donde B_i es el operador $B_i z = \int_0^{x_0} z'_i(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi$. Como es lícito el cálculo con operadores, la función z se obtendrá por la fórmula:

$$z(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \sum_{r_1, \dots, r_n}^m a_{r_1, \dots, r_n} B_1^{r_1} \dots B_n^{r_n}} \left\{ f(x_1, \dots, x_n) \frac{x_0^m}{m!} \right\}. \quad [19,6]$$

(1) L. FANTAPPIÉ. — Idem., pág. 193.

Ahora bien, el cálculo del operador anterior queda reducido al del producto proyectivo (respecto las α_i) siguiente :

$$z(x_0, x_1, \dots, x_n) = \\ = \left\{ \frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \right\} \Delta \left\{ \int_0^{x_0} f(x_1 + \alpha_1(\xi - x_0), \dots, x_n + \alpha_n(\xi - x_0)) \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} d\xi \right\}$$

que nos da la solución buscada, que seguramente es válida para los puntos $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de un entorno del origen.

Derivemos los dos miembros respecto x_0 :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} z(x_0, x_1, \dots, x_n) = \\ = \left\{ \frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \right\} \Delta \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^{x_0} f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0)) \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} d\xi \right\}, \quad [19,7]$$

y transformando el segundo término del producto proyectivo, se tendrá :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^{x_0} f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0)) \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} d\xi = f(x_1, \dots, x_n) \frac{x_0^{m-1}}{(m-1)!} + \\ + \int_0^{x_0} \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0))}{\partial x_r} (-\alpha_r) \right) \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} d\xi,$$

pero como

$$\frac{d}{d\xi} f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0)) = \sum_{r=1}^n \frac{\partial f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0))}{\partial x_r} \alpha_r,$$

resultará

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int_0^{x_0} f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0)) \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} d\xi = \int_0^{x_0} f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0)) \frac{\xi^{m-1}}{(m-2)!} d\xi. \quad [19,8]$$

Repitiendo la derivación $m-1$ veces en [1,7], quedará por consiguiente :

$$\frac{\partial^m}{\partial x_0^m} z(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left\{ \frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \right\} \Delta f(x_i - \alpha_i x_0). \quad [19,9]$$

La derivada de orden m respecto de x_0 de la solución $z(x_0, x_1, \dots, x_n)$ existe en el entorno indicado del origen, por ser z la solución ; en par-

ticular existirá, la derivada de orden m respecto de x_0 , de la función obtenida haciendo en la solución $z(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, y así es

$$\frac{\partial^m}{\partial x_0^m} z(x_0, 0, \dots, 0) = \left\{ \frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \right\} \Delta f(-\alpha_1 x_0, \dots, -\alpha_n x_n). \quad [19,10]$$

Ahora bien, el segundo miembro de esta igualdad, no sólo está definido para los valores de x_0 de un entorno del origen, sino para todos los $|x_0| < 1$ e incluso para $x_0 = -1$. Que el segundo miembro de [19,10] está definido para $x_0 = -1$, lo hemos supuesto inicialmente, y el que lo esté para $|x_0| < 1$, es consecuencia de venir definido el producto proyectivo para $x_0 = -1$ por la serie *absolutamente* convergente [19,2], serie que también será absolutamente convergente cuando se multipliquen todos los términos por factores cuyo módulo sea menor que la unidad.

La función de x_0 definida por el segundo miembro de [19,10], es analítica para todo $|x_0| < 1$, por lo menos, y converge para $x_0 = -1$; además en un entorno del origen coincide con $\frac{\partial^m}{\partial x_0^m} z(x_0, 0, \dots, 0)$, luego esta función coincidirá con el segundo miembro en todo el campo de analiticidad, de éste, y se tendrá en consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{x_0 \rightarrow -1} \frac{\partial^m}{\partial x_0^m} z(x_0, 0, \dots, 0) &= \left[\frac{\partial^m}{\partial x_0^m} z(x_0, 0, \dots, 0) \right]_{x_0 = -1} = \\ &= \left\{ \frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \right\} \Delta f(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \end{aligned} \quad [19,11]$$

que nos da el valor del producto proyectivo, a partir de la solución del problema de CAUCHY, en el caso más sencillo, de la ecuación en derivadas parciales correspondiente.

Nota. Es de observar, que el resultado anterior, sólo ha requerido para su demostración la hipótesis de la existencia del producto proyectivo [19,1], ahora bien, si se hacen hipótesis más amplias para la función $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, no sólo se puede precisar más el resultado [19,11], sino que se puede determinar un campo en el que es regular la solución de la ecuación en derivadas parciales, con las condiciones de CAUCHY propuestas.

En efecto: la solución de la ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$z(x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_0^{x_0} d\xi \frac{\xi^{m-1}}{(m-1)!} \left\{ \frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \Delta f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0)) \right\}$$

y siempre que exista el producto proyectivo

$$\frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}} \Delta f(x_i + \alpha_i(\xi - x_0)) \quad [19,12]$$

existirá la solución, ya que el producto viene expresado por una serie absolutamente convergente, y el hecho de sustituir x_0 por $\xi - x_0$ para después realizar la integración indicada, equivale a multiplicar cada uno de los términos de la serie por factores de módulo menor que la unidad, (el factor x_0^{m-1} que multiplica toda la serie, no altera la convergencia). Ahora bien, si la función

$$\frac{1}{1 + \sum a_{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n}}$$

es regular en un n -cilindro Q de la forma

$$|\alpha_1| \leq \rho_1, \quad |\alpha_2| \leq \rho_2, \dots, |\alpha_n| \leq \rho_n,$$

con tal que $f(x_i + \alpha_i x_n)$, considerada como función de las α_i , sea regular en el asociado Q'

$$|\alpha_1| \leq \frac{1}{\rho_1}, \quad |\alpha_2| \leq \frac{1}{\rho_2}, \dots, |\alpha_n| \leq \frac{1}{\rho_n},$$

el producto proyectivo estará definido. Luego para los valores de $x_0, x_1, \dots, x_n$ tales, que todos los puntos $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ que verifiquen las limitaciones

$$\left| \frac{X_i - x_i}{x_0} \right| \leq \frac{1}{\rho_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [19,13]$$

pertenezcan al campo de regularidad de la función $f(X_1, \dots, X_n)$, el producto proyectivo [19,12] estará definido, y en consecuencia para dichos puntos existirá la solución de la ecuación en derivadas parciales. Si D es la región del espacio $X_1, X_2, \dots, X_n$ en que se supone regular la función $f(X_1, \dots, X_n)$, y $x_1, x_2, \dots, x_n$ un punto cualquiera de D , si

$$|X_i - x_i| \leq r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [19,14]$$

es un n — cilindro interior a D , el conjunto de valores de x_0 en que seguramente está definida la solución para $x_1, \dots, x_n$ fijos, es

$$|x_0| \leq r \rho \quad [19,15]$$

donde $r \rho$ es el mínimo de los $r_1 \rho_1, r_2 \rho_2, \dots, r_n \rho_n$.

En particular, si la función $f(X_1, \dots, X_n)$ es regular en un n — cilindro

$$|X_1| \leq \frac{1}{\rho'_1}, \dots, |X_n| \leq \frac{1}{\rho'_n}, \quad [19,16]$$

donde $\rho'_i \leq \rho_i$, tomados un sistema de valores cualesquiera $x_1, \dots, x_n$ tales que

$$|x_i| < \frac{1}{\rho'_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad [19,17]$$

el n — cilindro $|X_i - x_i| \leq \frac{1}{\rho'_i} - |x_i|$, pertenecerá al [19,16], y por lo tanto al campo de regularidad de f . Para dicho punto $x_1, x_2, \dots, x_n$ el conjunto de valores de x_0 en que está definida la solución es por lo menos [19,15] el conjunto de valores de x_0 cuyo módulo es menor o igual que el mínimo de los números $\rho_i \left(\frac{1}{\rho'_i} - |x_i| \right)$:

$$|x_0| \leq \text{mínimo} \left(\frac{\rho_i}{\rho'_i} - \rho_i |x_i|; (i = 1, 2, \dots, n) \right) \quad [19,18]$$

Estas cotas simultáneas de $|x_0|$ son funciones lineales de $|x_i|$, y en general distintas. Si llamamos R al mayor de los ρ_i , r al menor de los $\frac{\rho_i}{\rho'_i} > 1$, y μ al máximo de los módulos de x_i , la solución de la ecuación en derivadas parciales existirá seguramente para

$$|x_0| \leq r - R \mu \quad [19,19]$$

acotación que es lineal respecto de μ .

Si se trata de calcular el producto proyectivo para una función regular en [19,16], una vez hallada la derivada m — esima respecto de x_0 , de la solución de la ecuación [19,3], que también será regular, por lo menos, en el campo anterior [19,17 y 19,18], bastará alcanzar el punto $x_0 = -1, x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ siguiendo cualquier camino interior a dicho campo.

Nota. La propiedad demostrada para los funcionales cuya indicatriz proyectiva es de la forma [19,1], y en general, de aplicación ⁽¹⁾ a los funcionales de indicatriz racional (funcionales abeloides), permite deducir propiedades del producto proyectivo, a partir de las de ecuaciones en derivadas parciales correspondientes. Toda transformación que cambie una ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes de la forma [19,3], en otra del mismo tipo, permitirá pasar del cálculo de un producto proyectivo correspondiente a la primera ecuación, el del producto proyectivo correspondiente a la segunda.

En el próximo párrafo hacemos aplicación de este método a un caso sencillo pero de gran interés.

20. Estudio del producto proyectivo de la forma :

$$\frac{1}{a_{00} + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^n a_{0i} \alpha_i} \Delta_{\alpha} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad [20,1]$$

Este producto proyectivo corresponde [19,1] a la ecuación en derivadas parciales siguiente :

$$a_{00} \frac{\partial^2 z}{\partial x_0^2} + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{0i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_0 \partial x_i} = f(x_1, \dots, x_n), \quad [20,2]$$

con las condiciones de CAUCHY

$$\left[\frac{\partial^r z}{\partial x_0^r} \right]_{x_0=0} \equiv 0, \quad (r = 0, 1, \dots, m-1). \quad [20,3]$$

La ecuación [20,2] se puede reducir a la forma canónica por medio de una transformación afín de las variables independientes

$$\xi_i = c_{i0} x_0 + c_{i1} x_1 + \dots + c_{in} x_n, \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad [20,4]$$

o bien

$$x_i = \gamma_{i0} \xi_0 + \gamma_{i1} \xi_1 + \dots + \gamma_{in} \xi_n, \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad [20,5]$$

La forma canónica de la ecuación [20,2] será ⁽²⁾

$$\kappa_0 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_0^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1^2} + \dots + \kappa_n \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_n^2} = F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n), \quad [20,6]$$

⁽¹⁾ Cfr. L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice projectiva...* Lug. cit, pág. 263.

⁽²⁾ Dejamos aparte las ecuaciones de tipo parabólico.

donde $F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ es el resultado de realizar en $f(x_1, \dots, x_n)$ dicha transformación.

Al transformar la ecuación [20,2] por el cambio de variables de la forma [20,4] se obtendrá una ecuación análoga a la dada cuyos coeficientes $\bar{a}_{ik}$ son :

$$\bar{a}_{ik} = \sum_{l,s=0}^n c_{kl} c_{is} a_{ls},$$

que precisamente son los mismos que aparecen cuando la forma cuadrática

$$\sum_{i,k=0}^n a_{ik} y_i y_k, \quad [20,7]$$

se somete a la transformación afín

$$y_i = \sum_{l=0}^n c_{il} \eta_l, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Tomando, pues, la misma transformación afín que reduce la forma cuadrática [20,7] a la $\sum_{i=0}^n \kappa_i \eta_i^2$, la ecuación diferencial considerada [20,2] se transformará en la forma reducida.

En particular, si los coeficientes de la ecuación [20,2] son *reales*, se podrá reducir a la forma canónica por una transformación *real*, de manera que los coeficientes κ_i sean ± 1 .

Nosotros nos ocuparemos exclusivamente del caso en que $\kappa_0 = 1$, y $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n = -1$ que en el campo *real* corresponde al caso de ser la ecuación del tipo *hiperbólico* puro. Cuando se estudia la ecuación en el campo complejo también se puede hacer la misma hipótesis, ya que siempre existe una transformación [20,4] que la reduce a este tipo de forma canónica.

El hiperplano $x_0 = 0$ se transforma en el

$$\xi_0 = -\frac{\gamma_{01}}{\gamma_{00}} \xi_1 - \frac{\gamma_{02}}{\gamma_{00}} \xi_2 - \dots - \frac{\gamma_{0n}}{\gamma_{00}} \xi_n,$$

en el cual tanto la *función desconocida* z , como su *derivada parcial respecto de* ξ_0 , son nulas.

La solución de la ecuación [20,6] en estas condiciones, vendrá dada por la fórmula [2,2] :

$$z = \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left[\frac{1}{1 - B_1^2 - \dots - B_n^2} I F_1 (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \right], \quad [20,8]$$

donde el operador I aplicado a una función $\varphi (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ es en este caso [1,5] :

$$\int_{-\frac{1}{\gamma_{00}} \sum \gamma_{0i} \xi_i}^{\xi_0} \varphi (\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) d\tau,$$

y la función $F_1 (\xi_i) = I^2 F (\xi_i)$, [1,10].

La solución en forma de producto proyectivo [2,5] será por consiguiente :

$$z = \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ \int_{\bar{\xi}_0(\alpha_i)}^{\xi_0} F_1 (\tau, \xi_i + \alpha_i (\tau - \xi_0)) d\tau \right\}. \quad [20,9]$$

La función $\bar{\xi}_0 (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es la coordenada ξ_0 del punto de intersección de la recta [2,7] :

$$\xi'_0 - \xi_0 = \frac{\xi'_1 - \xi_1}{\alpha_1} = \dots = \frac{\xi'_n - \xi_n}{\alpha_n}$$

(donde ξ'_i es la coordenada del punto genérico) con el plano

$\xi'_0 = -\frac{\gamma_{01}}{\gamma_{00}} \xi'_1 - \dots - \frac{\gamma_{0n}}{\gamma_{00}} \xi'_n$, y así resulta :

$$\bar{\xi}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_{0i} (\xi_0 \alpha_i - \xi_i)}{\gamma_{00} + \sum_{i=1}^n \gamma_{0i} \alpha_i}.$$

Substituyendo F_1 por su desarrollo se tendrá

$$z (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ \int_{\bar{\xi}_0}^{\xi_0} d\tau \int_{\xi_0}^{\tau} d\tau' \int_{\xi_0}^{\tau'} F (\tau'', \xi_i + \alpha_i (\tau - \xi_0)) d\tau'' \right\}, \quad [20,10]$$

donde se ha puesto

$$\xi'_0 = -\frac{1}{\gamma_{00}} \sum_{i=1}^n \gamma_{0i} (\xi_i + \alpha_i (\tau - \xi_0)).$$

Si en la primera integral del segundo término de [20,10], hacemos el cambio de variable $t = \tau - \xi_0$, se transforma en

$$z(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\partial}{\partial \xi_0} \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ - \int_0^{\bar{\xi}_0 - \xi_0} dt \int_{\xi_0}^{\xi_0 + t} d\tau' \int_{\xi_0}^{\tau'} F(\tau'', \xi_i + \alpha_i t) d\tau'' \right\}, \quad [20,11]$$

donde

$$\xi_0'' = - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}} (\xi_i + \alpha_i t).$$

Se tiene, pues, como solución de la ecuación transformada

$$z(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ - \int_0^{\bar{\xi}_0 - \xi_0} dt \int_{\xi_0}^{\xi_0 + t} F(\tau'', \xi_i + \alpha_i t) d\tau'' + \frac{\gamma_{00}}{\gamma_{00} + \sum_{i=1}^n \gamma_{0i} \alpha_i} \int_{\bar{\xi}_0}^{\xi_0} d\tau' \int_{\bar{\xi}_0}^{\tau'} F(\tau'', \xi_i + \alpha_i (\bar{\xi}_0 - \xi_0)) d\tau'' \right\},$$

donde

$$\bar{\xi}_0'' = - \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{0i}}{\gamma_{00}} (\xi_i + \alpha_i (\bar{\xi}_0 - \xi_0)).$$

Volviendo a las variables primitivas, y haciendo $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ después de sencillos cambios de variables, se tiene

$$z(x_0, 0, 0, \dots, 0) = \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ \int_0^{\frac{x_0}{\Delta_0}} dt \int_0^{\frac{x_0}{\gamma_{00}} - \frac{\Delta_0}{\gamma_{00}} t} d\tau (-\gamma_{i0} \tau - \Delta_i t) d\tau \right\}, \quad [20,12]$$

donde se ha puesto

$$\Delta_i = \gamma_{i0} + \gamma_{i1} \alpha_1 + \dots + \gamma_{in} \alpha_n, \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad [20,13]$$

El producto proyectivo buscado [20,1] será, por lo tanto,

$$\left(\frac{d^2 z(x_0, 0)}{dx_0^2} \right)_{x_0 = -1} = \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ \frac{d^2}{dx_0^2} \int_0^{\frac{x_0}{\Delta_0}} dt \int_0^{\frac{x_0}{\gamma_{00}} - \frac{\Delta_0}{\gamma_{00}} t} d\tau (-\gamma_{i0} \tau - \Delta_i t) d\tau \right\}_{x_0 = -1}$$

que, efectuando la derivación indicada y simplificando, nos da :

$$\left(\frac{d^2 z(x_0, 0)}{dx_0^2} \right)_{x_0=-1} = \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ \frac{1}{\Delta_0 \gamma_{00}} f \left(\frac{\Delta_i}{\Delta_0} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta_0 \gamma_{00}} \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} \frac{\partial f}{\partial X_i} \left(\frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} (1 - \tau) + \frac{\Delta_i}{\Delta_0} \tau \right) d\tau \right\}. \quad [20,14]$$

Pero el segundo término de este producto proyectivo, es precisamente el producto de $\frac{1}{\Delta_0 \gamma_{00}}$ por la *media proyectiva* ⁽¹⁾ de la función $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ entre los dos puntos $\left(\frac{\gamma_{10}}{\gamma_{00}}, \frac{\gamma_{20}}{\gamma_{00}}, \dots, \frac{\gamma_{n0}}{\gamma_{00}} \right)$ y $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_0} \right)$; y por lo tanto podremos dar como expresión definitiva del producto proyectivo [20,1] la siguiente ;

$$\left\{ \frac{1}{a_{00} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^n a_{0i} \alpha_i} \right\} \Delta f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ = \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ \frac{1}{\Delta_0 \gamma_{00}} M \left(\frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}}, \frac{\Delta_i}{\Delta_0} \right) f \right\}. \quad [20,15]$$

Caso particular.

Consideremos el producto proyectivo

$$\left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^n 2a_i \alpha_i} \right\} \Delta f(\alpha_1, \dots, \alpha_n); \quad [20,16]$$

la forma cuadrática [20,6] es, en este caso,

$$y_0^2 - \sum_1^n y_i^2 - \sum_1^n 2a_i y_i y_0 = y_0^2 (1 + \sum_1^n a_i^2) - \sum_1^n (y_i + a_i y_0)^2$$

que con el cambio

$$\eta_0 = \delta y_0, \quad \eta_i = a_i y_0 + y_i, \quad \left(\delta = \sqrt{1 + \sum_1^n a_i^2} \right), \quad [20,17]$$

⁽¹⁾ L. FANTAPPIÉ. — *L'indicatrice projectiva*... Lug. cit., pág. 243.

se reduce a la forma canónica :

$$\eta_0^2 - \sum_1^n \eta_i^2$$

En las fórmulas de transformación [20,5] se tendrá, por consiguiente:

$$\gamma_{00} = \delta \quad \text{y} \quad \gamma_{i0} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

y entonces

$$\Delta_0 = \delta \quad \text{y} \quad \Delta_i = a_i + \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La fórmula [20,15] aplicada a nuestro producto proyectivo, nos dará

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{1 - \sum_1^n \alpha_i^2 - \sum_1^n 2a_i \alpha_i} \right\} \Delta f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \\ & = \left\{ \frac{1}{1 - \sum_1^n \alpha_i^2} \right\} \Delta \left\{ \frac{1}{\delta^2} M \left(\frac{a_i}{\delta}, \frac{a_i + \alpha_i}{\delta} \right) f \right\}. \end{aligned} \quad [20,18]$$

21. Resolución del problema de CAUCHY para la ecuación en derivadas parciales :

$$a_{00} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + \sum_{i=1}^n a_{0,i} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial t^2} = f(t, x_1, \dots, x_n). \quad [21,1]$$

Estudiaremos el caso en que la forma cuadrática [20,7]

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j,$$

se reduce a una canónica de la forma $\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \dots - \eta_n^2 = 0$ por una transformación afín

$$y_i = \sum_{l=1}^n c_{il} \eta_l, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Sean las condiciones iniciales sobre el hiperplano $t = 0$:

$$\left[\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right]_{t=0} = \varphi_m(x_1, \dots, x_n), \quad (m = 0, 1, 2, 3). \quad [21,2]$$

Aplicando los operadores [1,5] y [1,6], la ecuación dada junto con las condiciones iniciales se transforma en la integrodiferencial

$$\left[a_{00} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} B_i^2 B_j^2 + \sum_{i=1}^n B_i^2 \right] u = f_1(t, x_i) \quad [21,3]$$

donde la función $t_1(t, x_i)$ se obtiene por un proceso análogo al seguido en § 1, a partir de $f(t, x_i)$ y de las $\varphi_m(x_i)$.

La solución buscada se obtiene por el producto proyectivo

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{a_{00} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i^2 \alpha_j^2 + \sum_{i=1}^n a_{0i} \alpha_i^2} \Delta \int_0^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau, \quad [21,4]$$

que en virtud de [13,3], se puede desdoblar en los dos sucesivos

$$u(t, x_i) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{a_{00} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j + \sum_{i=1}^n a_{0i} t_i} \Delta \left\{ \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 t_i} \Delta \int_0^t f_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau \right\}; \quad [21,5]$$

y teniendo en cuenta el resultado obtenido en [3,16] y [3,20], tenemos finalmente como expresión de la solución (n impar)

$$u(t, x_i) = \frac{1}{4(2\pi)^{n-1}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S'_n} d\sigma'_n \left\{ \frac{1}{A_0 \gamma_{00}} M\left(\frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}}, \frac{A_i}{A_0}\right) \right\} \int_{S_n} d\sigma_n \int_0^t \bar{f}_1(\tau, x_i + \alpha_i(\tau - t)) d\tau \quad [21,6]$$

donde las integrales están extendidas a las superficies

$$S'_n \equiv t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 - 1 = 0, \text{ y } S_n \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 - 1 = 0,$$

y γ_{i0} y A_i tienen el sentido indicado en [20,5] y [20,13]:

$$A_i = \gamma_{i0} + \gamma_{i1} t_1 + \dots + \gamma_{in} t_n, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

NOTA

Nueva expresión de la media proyectiva de una función, entre k puntos.

La media proyectiva entre k puntos $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in})$, $i = 1, 2, \dots, k$ de la función $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que es por definición ⁽¹⁾

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) f = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1 + \alpha_1 \lambda_{i1} + \alpha_2 \lambda_{i2} + \dots + \alpha_n \lambda_{in})} \Delta f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad [n, 1]$$

se puede reducir a $k - 1$ medias proyectivas sucesivas entre dos puntos.

En efecto: en virtud de las propiedades de la indicatriz proyectiva se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 + \alpha_1 \lambda_{i1} + \dots + \alpha_n \lambda_{in})} = \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 + \beta_{11} \lambda_{i1} + \dots + \beta_{1n} \lambda_{in})} \frac{1}{1 + \beta_{11} \alpha_1 + \dots + \beta_{1n} \alpha_n} \Delta f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad [n, 2] \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) f &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (1 + \beta_{11} \lambda_{i1} + \dots + \beta_{1n} \lambda_{in})} \Delta f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ &= \left\{ \frac{1}{(1 + \beta_{11} \alpha_1 + \dots + \beta_{1n} \alpha_n) (1 + \alpha_1 \lambda_{k1} + \dots + \alpha_n \lambda_{kn})} \Delta f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \right\}, \end{aligned}$$

que siguiendo la notación empleada en [n,1] se podrá escribir

$$M(\lambda_1, \dots, \lambda_k) f = M(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) M(\beta_1, \lambda_k) f, \quad [n, 3]$$

y reiterando el razonamiento

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) f = M(\lambda_1, \lambda_2) M(\beta_{k-2}, \lambda_3) M(\beta_{k-3}, \lambda_4) \dots M(\beta_1, \lambda_k) f. \quad [n, 4]$$

Agrupando las $h - 1$ medias proyectivas primeras, y las $k - h$ restantes se tendrá que la media proyectiva entre k puntos de una fun-

(1) L. FANTAPPIÉ. ... *L'indatrice proiettiva...* Pág. 234.

ción f , se puede reducir a dos medias proyectivas sucesivas, una entre h de los k puntos, y la otra entre $k - h + 1$: los $k - h$ restantes y uno β auxiliar

$$M(\lambda_1, \dots, \lambda_k) f = M(\lambda_1, \dots, \lambda_h) M(\beta, \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_k) f. \quad [n, 5]$$

Media proyectiva entre dos puntos.

El cálculo de la media proyectiva entre los dos puntos $(\beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{1n})$ y $(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn})$ de la función $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, se puede realizar por la fórmula ⁽¹⁾

$$M(\beta_1, \lambda_k) f = f(\beta_{11}, \dots, \beta_{1n}) + \\ + \sum_{r=1}^n \lambda_{kr} \int_0^1 f'_r(\lambda_{kr}(1 - \theta_1) + \theta_1 \beta_{11}, \dots, \lambda_{kn}(1 - \theta_1) + \theta_1 \beta_{1n}) d\theta_1,$$

o bien, escrita abreviadamente

$$M(\beta_1, \lambda_k) f = f(\beta_1) + \sum_{r=1}^n \lambda_{kr} \int_0^1 f'_r(\lambda_k(1 - \theta_1) + \theta_1 \beta_1) d\theta_1. \quad [n, 6]$$

A esta expresión se le puede dar una forma más simétrica por medio de la integral

$$I_2(\lambda_k, \beta_1) = \int \int_{R_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} f(\lambda_{k1} \tau_1 + \beta_{11} \tau_2, \dots, \lambda_{kn} \tau_1 + \beta_{1n} \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad [n, 7]$$

donde el recinto R_1 es el triángulo limitado por los ejes τ_1 y τ_2 y la recta $\tau_1 + \tau_2 = 1$, pues desarrollando la integral resulta:

$$I_2(\lambda_k, \beta_1) f = \int_0^1 \partial \tau_1 \left[\frac{\partial}{\partial \tau_1} f(\lambda_{k1} \tau_1 + \beta_{11} \tau_2, \dots, \lambda_{kn} \tau_1 + \beta_{1n} \tau_2) \right]_0^{1-\tau_1} = \\ = M(\beta_1, \lambda_k) f - f(\beta_1) - \int_0^1 d\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} f(\lambda_{k1} \tau_1, \dots, \lambda_{kn} \tau_1);$$

y si introducimos la notación

$$I_1(\lambda_k) f = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} f(\lambda_k \tau_1) d\tau_1,$$

⁽¹⁾ L. FANTAPPIÉ.— Idem., pág. 243.

análoga a la empleada en [n,7], con la cual será evidentemente

$$f(\beta_1) = I_1(\beta_1)f + f(0);$$

y si finalmente ponemos, para mayor simetría del resultado,

$$I_0 f = f(0),$$

la expresión de la media proyectiva entre los dos puntos β_1 y λ_k de la función $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tomará la forma simétrica siguiente:

$$M(\beta_1, \lambda_n)f = I_2(\lambda_k, \beta_1)f + I_1(\lambda_n)f + I_1(\beta_1)f + I_0f. \quad [n, 8]$$

Media proyectiva entre tres puntos.

Para calcular la media proyectiva entre los tres puntos $(\beta_{21}, \beta_{22}, \dots, \beta_{2n})$, $(\lambda_{k-1,1}, \lambda_{k-1,2}, \dots, \lambda_{k-1,n})$ y $(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn})$ de la función $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, en virtud de la propiedad [n,3], bastará aplicar dos veces la fórmula [n,6], y así se tiene:

$$\begin{aligned} M(\beta_2, \lambda_{k-1}, \lambda_k)f &= f(\beta_2) + \sum_{r=1}^n \lambda_{kr} \int_0^1 f'(\lambda_k(1-\theta_1) + \theta_1\beta_2) d\theta_1 + \\ &+ \sum_{r=1}^n \lambda_{k-1,r} \int_0^1 f'(\lambda_{k-1}(1-\theta_1) + \theta_1\beta_2) d\theta_1 + \\ &+ \sum_{r,s=1}^n \lambda_{k-1,s} \lambda_{kr} \int_0^1 d\theta_1 \int_0^1 \theta_1 f''_{rs}(\lambda_k(1-\theta_1) + \lambda_{k-1}(1-\theta_2)\theta_1 + \beta_2\theta_1\theta_2) d\theta_2 \\ &\quad [n, 9] \end{aligned}$$

Haciendo en el último sumando el cambio de variables $1-\theta_1 = \tau_1$ y $\theta_1(1-\theta_2) = \tau_2$, se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \sum_{r,s=1}^n \lambda_{k-1,s} \lambda_{kr} \int_0^1 d\theta_1 \int_0^1 \theta_1 f''_{rs}(\lambda_k(1-\theta_1) + \lambda_{k-1}(1-\theta_2)\theta_1 + \beta_2\theta_1\theta_2) d\theta_2 = \\ &= \sum_{r,s=1}^n \lambda_{k-1,s} \lambda_{kr} \int \int_{R_2} f''_{rs}(\lambda_k\tau_1 + \lambda_{k-1}\tau_2 + \beta_2(1-\tau_1-\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \quad [n,10] \end{aligned}$$

donde R_2 es el triángulo limitado por la recta $\tau_1 + \tau_2 = 1$ y los ejes τ_1 y τ_2 .

A la expresión A se le puede dar una forma más simétrica, por medio de la integral

$$I_3(\lambda_k, \lambda_{k-1}, \beta_2) f = \int \int \int_{R_3} \frac{\partial^3}{\partial \tau_1 \partial \tau_2 \partial \tau_3} f(\lambda_k \tau_1 + \lambda_{k-1} \tau_2 + \beta_2 \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad [\text{n}, 11]$$

donde R_3 es el tetraedro limitado por el plano $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$, y los planos coordenados. Desarrollando esta integral, se tiene

$$\begin{aligned} I(\lambda_k, \lambda_{k-1}, \beta_2) f &= \int \int_{R_3} d\tau_1 d\tau_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} f(\lambda_k \tau_1 + \lambda_{k-1} \tau_2 + \beta_2 \tau_3) \right]_0^{1-\tau_1-\tau_2} = \\ &= A - I_2(\lambda_k, \lambda_{k-1}) f, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la [n,8], se obtendrá finalmente como media proyectiva entre los tres puntos, la siguiente:

$$\begin{aligned} M(\beta_2, \lambda_{k-1}, \lambda_k) f &= I_3(\lambda_k, \lambda_{k-1}, \beta_2) f + I_2(\lambda_k, \lambda_{k-1}) f + I_2(\lambda_k, \beta_2) f + \\ &+ I_2(\lambda_{k-1}, \beta_2) f + I_1(\lambda_k) f + I_1(\lambda_{k-1}) f + I_1(\beta_2) f + I_0 f. \quad [\text{n}, 12] \end{aligned}$$

Media proyectiva entre k puntos.

Reiterando el proceso seguido para el cálculo de las medias proyectivas entre dos y tres puntos, se obtiene como valor de la media entre k puntos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k) f &= f(\lambda_1) + \sum_{j=2}^n \sum_{r=1}^n \lambda_{jr} \int_0^1 f'_r(\lambda_j(1-\theta_1) + \lambda_1 \theta_1) d\theta_1 + \\ &\sum_{j_1 > j_2}^n \sum_{r, s=1}^n \lambda_{j_1 r} \lambda_{j_2 s} \int_0^1 d\theta_1 \int_0^1 \theta_1 f''_{rs}(\lambda_{j_1}(1-\theta_1) + \lambda_{j_2}(1-\theta_2) \theta_1 + \lambda_1 \theta_1 \theta_2) d\theta_2 + \\ &\sum_{j_1 > j_2 > j_3}^n \sum_{r, s, t=1}^n \lambda_{j_1 r} \lambda_{j_2 s} \lambda_{j_3 t} \int_0^1 d\theta_1 \int_0^1 d\theta_2 \int_0^1 \theta_1^2 \theta_2 f'''_{rst}(\lambda_{j_1}(1-\theta_1) + \\ &+ \lambda_{j_2}(1-\theta_2) \theta_1 + \lambda_{j_3}(1-\theta_3) \theta_1 \theta_2 + \lambda_1 \theta_1 \theta_2 \theta_3) d\theta_3 + \\ &\dots \dots \dots \sum_{r, s, \dots, u=1}^n \lambda_{2u} \dots \lambda_{k-1, s} \lambda_{kr} \int_0^1 d\theta_1 \dots \int_0^1 \theta_1^{k-2} \theta_2^{k-3} \dots \theta_{k-2} f_{rs \dots n}^{(k-1)}(\lambda_k(1-\theta_1) + \\ &+ \lambda_{k-1}(1-\theta_2) \theta_1 + \dots + \lambda_1 \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{k-1}) d\theta_{k-1} \quad [\text{n}, 13] \end{aligned}$$

donde los sumatorios exteriores de cada uno de los términos se suponen extendidos a todos los grupos de índices $j_1, j_2, \dots$ (de dos, de tres, ... de $k-1$ índices) que se supondrán distintos y decrecientes.

se puede escribir en la forma

$$\int_{R_2} d\tau_{j_1} d\tau_{j_2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau_{j_1} \partial \tau_{j_2}} f(\lambda_{j_1} \tau_{j_1} + \lambda_{j_2} \tau_{j_2} + \lambda_1 \tau_1) \right]_{1-\tau_{j_1}-\tau_{j_2}}$$

expresando cada uno de los términos del sumatorio [n,14] por integrales de la forma [n,15], se obtiene finalmente la expresión de la media proyectiva entre k puntos de la función f por la siguiente fórmula simétrica

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) f = \sum I_h(\lambda_p, \lambda_q, \dots, \lambda_u) f, \quad [n,16]$$

donde el sumatorio está extendido a todas las combinaciones sin repetición que se pueden formar con los k puntos $(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_n})$, $i = 1, 2, \dots, k$, teniendo las integrales I_h el sentido indicado en [n,15].
