SOBRE LA PRIMERA LEY DE ERRORES DE LAPLACE

POR

FRANCISCO DE A. SALES VALLÉS

ÍNDICE

Páginas

Introducción 86

Cap. I. *Estudio analítico de la ley de probabilidad definida por* $f(x) = \delta e^{-2\delta|x|}$.

Función característica y momentos 89
Momentos incompletos 90
Polinomios que aproximan la función $\frac{1}{2} e^{-|x|}$ por los mínimos cuadrados 91
Polinomios ortogonales respecto a $\delta e^{-2\delta|x|}$ 93
Fórmula de recurrencia 96
El problema de los momentos respecto a la función de probabilidades totales $F(x) = \delta \int_{-\infty}^{x} e^{-2\delta|x|}\, dx$ 96

Cap. II. *Desarrollo de funciones de distribución en serie de polinomios de Laguerre.*

Cálculo de los coeficientes a_n 99
Condiciones suficientes de convergencia 100
Condiciones necesarias y suficientes de convergencia 102
Desarrollo de la ley de Gauss en serie de polinomios de Laguerre. 108

Cap. III. *Combinaciones de la primera y segunda leyes de Laplace.*

Variables aleatorias independientes que siguen la primera ley de Laplace 110
Estudio de la ley de probabilidades $f(x) = K\, e^{-\alpha|x|-\beta x^2}$ 114

Páginas

Interpolación de una curva de frecuencia mediante la función $f(x) = K\, e^{-\alpha|x|-\beta x^2}$ 117

Aplicación al ejemplo del número de pétalos de la «Ranuncufus repens».. 119

Estudio de la ley de probabilidad definida por la función $f(x) = K\, e^{-\alpha|x-a|-\beta(x-b)^2}$.................................. 121

Nota A. — Sobre el error cometido al tomar como valor del momento de orden n, el momento incompleto.............. 126

Nota B. — Sobre una posible extensión del concepto de estabilidad a la ley de probabilidades definida por la función $f(x) = \delta e^{-2\delta|x|}$ 127

Nota C. — Sobre la extensión a dos variables de la primera ley de Laplace.. 133

Bibliografía.. 135

Sumario : Se estudia la ley de probabilidades cuya función de densidad es $\varphi(x) = \delta e^{-2\delta|x|}$, hallando los polinomios $L_n(|x|)$ ortogonales respecto a la misma. Se hallan también las condiciones necesarias y suficientes para que una función de distribución sea desarrollable en serie de polinomios $L_n(|x|)$. Se estudia también la ley que sigue una variable aleatoria suma de otras n, que siguen la primera ley de Laplace. Como combinación de las 1.ª y 2.ª leyes de Laplace se consideran las leyes cuyas funciones densidad son : $f(x) = Ke^{-\alpha|x|-\beta x^2}$ y $f(x) = Ke^{-\alpha|x-a|-\beta(x-b)^2}$, hallándose la expresión general de sus momentos absolutos y aplicándolas a casos prácticos de interpolación.

INTRODUCCIÓN

1. En la Memoria de Laplace, *Sur la probabilité des causes par les evenements** y al estudiar el problema de la determinación del valor promedio más plausible entre varias observaciones de un mismo fenómeno, aparece por vez primera la ley de distribución de probabilidades definida por la función $\varphi(x) = \delta e^{-2\delta|x|}$.

* Laplace, *Sur les probabilités des causes par les evenements*, 1774, en *Oeuvres*, t. viii, pág. 27.

En memoria posterior,* el propio Laplace, al estudiar la influencia de la habilidad de dos jugadores sobre las respectivas probabilidades de ganar la partida, mediante consideraciones acerca de la limitación de tal habilidad, reconduce el problema a la determinación de una curva que represente la curva media entre todas las que cumplan ciertas condiciones prefijadas, obteniendo la fórmula:

$$y = \frac{1}{2a} \operatorname{Log} \frac{a}{x} \tag{1}$$

fórmula que, según indica Laplace, debe considerarse válida también para valores de x negativos, conviniendo en tal caso que x se substituya por $|x|$.**

No obstante, toda la trascendencia de estas consideraciones de Laplace que por distintos caminos hubieron de conducirle a la ley de probabilidad definida por una función del tipo $f(x) = Ke^{-\alpha|x|}$ — obsérvese que esta función es precisamente la que resulta por *inversión* de la (1) —, es bien notorio que en cuantas cuestiones conciernen a la teoría de errores ha venido utilizándose la segunda ley de Laplace $f(x) = Ke^{-\alpha x^2}$, en lugar de la primera antes citada. Sin entrar en la explicación de este hecho, que desde el punto de vista puramente analítico tal vez radique en la discontinuidad de la derivada, es interesante observar también que dicha primera ley ha sido tema de algunos estudios aislados, tales, por ejemplo, el de Edgeworth,*** quien propone definir los valores más plausibles de x, y,... t, tomados de los datos en la forma usual

$$\begin{array}{c} a_1x + b_1y + \dots + f_1t = u_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_sx + b_sy + \dots + f_st = u_s \end{array}$$

(siendo u_1 u_2 ... u_s medidas de igual precisión), los que hacen mínima la suma

$$| a_1x + \dots + f_1t - u_1 | + | a_2x + \dots + f_2t - u_2 | + \dots + \\ + | a_sx + \dots + f_st - u_s |$$

* LAPLACE, *Memoire sur les probabilités*, 1780, en *Oeuvres*, t. II.

** No es hasta 1810 que Laplace encuentra su segunda ley de errores, la llamada ley de Gauss, al estudiar la probabilidad de que la media de los errores de un gran número de observaciones esté comprendida entre límites dados. *Sur les aproximations des formules qui sont fonctions de tres grandes nombres et sur leur application aux probabilités*, en *Oeuvres*, t. III.

*** En *Phil. Mag.*, t. 24-25, 1887.

regla que, como se ve fácilmente, proviene de tomar como ley de errores la primera ley de Laplace.*

Citemos, asimismo, los trabajos de Wilson,** quien ha demostrado que la primera ley de Laplace se adapta a los hechos casi tan bien como la ley de Gauss, y se debe a él la denominación adoptada después por Frechet,*** de primera y segunda ley de error, para designar a las dos leyes propuestas por Laplace.

2. Posteriormente, Frechet**** ha observado que no siendo sino aproximadas (y aun de hecho inexactas) las hipótesis que conducen a la formulación matemática de la ley de errores, no tiene sentido hablar de una *verdadera ley* en sentido estricto, sino del mayor o menor grado de plausibilidad que cabe atribuir a una ley determinada a base de su mejor o peor adaptación a los resultados de la observación, habiéndose ideado experiencias para verificar la ley de Gauss, mas estas experiencias son poco numerosas, y la mayoría de autores reproducen siempre las mismas. Propone Frechet: 1.° Reemprender y desarrollar el estudio experimental de las leyes de probabilidades de los errores; 2.° Confrontar con los resultados experimentales, no solamente la ley de Gauss, sino también las otras representaciones que han sido propuestas.

Siguiendo las indicaciones de Frechet, Samama estudió cuál era, de las leyes propuestas por Laplace, la que representaba mejor veinticuatro series de quinientas observaciones del astrónomo Pierce, llegando a las siguientes conclusiones : 1.ª Tanto la primera como la segunda ley representaban bastante bien las observaciones consideradas. 2.ª La ventaja desde el punto de vista de la precisión estaba para la segunda, pero con una superioridad muy modesta, puesto que ciertas series estaban mejor representadas por la primera ley.

3. Las consideraciones que anteceden, unidas al estudio de ciertos esquemas que se exponen en las páginas que siguen y que conducen a la primera ley de Laplace, justifican, a nuestro juicio, el interés del examen analítico de la misma y de algunas generalidades que pueden entrañar cierto interés por sus relaciones con el problema de los momentos.

Este estudio analítico es lo que constituye el núcleo fundamental de esta Memoria. En ella, y por método paralelo al que corrientemente se sigue para el estudio de la segunda ley, se hallarán los desarrollos en

---

* Véase WHITTAKER and ROBINSON, *The Calculus of Observations*, pág. 259.

** WILSON, E. B. *First and second law of error*, en *Jour. Amer, Statist. Ass.*, t. 18, 1923, págs. 841-851.

*** FRECHET, M., *Generalités sur les probabilités. Variables aleatoires*, pág. 109.

**** FRECHET, *Sur l'hipothese de l'additivité des erreurs partielles*, en *Bull. Sci. Math.*, t. 63, 1928.

serie de polinomios de Laguerre, que pueden ser utilizados en los problemas de interpolación, estudiándose los criterios de convergencia para dichos desarrollos. Con vistas a su aplicación práctica, estudiamos también algunas leyes de distribución, combinaciones de la primera y segunda ley de Laplace y que contienen a éstas como casos particulares, dando métodos para su aplicación a la interpolación de series estadísticas.

CAPÍTULO I

ESTUDIO ANALITICO DE LA LEY DE PROBABILIDAD DEFINIDA POR $f(x) = \delta e^{-2\delta|x|}$

1. **Función característica y momentos.** — La función característica correspondiente a la ley de distribución $f(x) = \delta e^{-2\delta|x|}$ viene dada por

$$\varphi(t) = \delta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\delta|x|}\, e^{itx}\, dx = \delta \left[\int_{-\infty}^{o} e^{-x(2\delta+it)}\, dx + \int_{o}^{+\infty} e^{-x(2\delta-it)}\, dx \right] =$$

$$= \delta \left[\frac{1}{2\delta + it} + \frac{1}{2\delta - it} \right] = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{t}{2\delta}\right)^2}$$

Desarrollando en serie de potencias obtenemos:

$$\varphi(t) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2\delta}\right)^{2n} \qquad (|t| < 2\delta)$$

Vemos, pues, que los momentos impares son nulos, como tenía que ser por ser la función simétrica, y los momentos pares serán:

$$M_{2p} = \frac{(2p)!}{(2\delta)^{2p}}$$

En particular, el momento de segundo orden será

$$M_2 = \frac{1}{2\delta^2}$$

y la dispersión,

$$\sigma = \frac{1}{\delta\sqrt{2}}$$

La ley reducida, es decir, tomando como unidad σ,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\,|x|}$$

Los momentos absolutos de orden par son iguales a los momentos ordinarios, y los de orden impar son, como se calcula fácilmente, $\frac{k!}{(2\delta)^k}$, o sea: obtenemos, como expresión de los momentos absolutos tanto si k es par como si es impar,

$$M_k = \frac{k!}{(2\delta)^k}$$

2. **Momentos incompletos.** — Designemos por $M_{n,\lambda}$ el valor del momento de orden n (n par) obtenido, prescindiendo de las masas situadas fuera del intervalo $(-\lambda, +\lambda)$, o sea el momento incompleto de orden n;* si además suponemos $\delta = \frac{1}{2}$ para simplificar los cálculos, será

$$M_{n,\lambda} = \frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-|x|}\, x^n\, dx = \int_{o}^{\lambda} e^{-x}\, x^n\, dx = \Gamma_\lambda\,(n-1)$$

designando por $\Gamma_\lambda\,(n-1)$ la función Γ incompleta.**

Adoptando la notación de K. Pearson $I_\lambda\,(n-1) = \frac{\Gamma_\lambda\,(n-1)}{\Gamma\,(n-1)} =$ $= 1 - \sum_{i=o}^{n} \frac{\lambda^i}{i!}$ puede escribirse

$$M_{n,\lambda} = n!\, I_\lambda\,(n-1) = n! \left[1 - e^{-\lambda} \sum_{i=o}^{n} \frac{\lambda^i}{i!}\right]$$

y, por tanto, el error cometido al tomar como valor de M_n la expresión $M_{n,\lambda}$ será igual a $n!\, e^{-\lambda} \sum_{i=o}^{n} \frac{\lambda^i}{i!}$.

---

* Levy, P., *Calcul des probabilités.*

** Jordan, Ch., *Statistique mathematique*, pág. 48. Esta función Γ está tabulada por K. Pearson, *Tables of Incomplete Γ function*, en His Majesty's Stationery office, Londres, 1922.

3. **Polinomios que aproximan la función $\frac{1}{2} e^{-|x|}$ por los mínimos cuadrados.** — Para obtener el polinomio de grado n que en el intervalo $(-\lambda, +\lambda)$ haga mínima la integral

$$I = \int_{-\lambda}^{+\lambda} [f(x) - P_n(x)]^2 \, dx$$

observemos que si

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

debe verificarse

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -2 \int_{-\lambda}^{+\lambda} [f(x) - P_n(x)] \, x^k \, dx = 0$$

y, por tanto,

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} x^k f(x) \, dx = \int_{-\lambda}^{+\lambda} x^k P_n(x) \, dx$$

es decir,

$$M_{k,\lambda} = a_0 \frac{\lambda^{k+1} - (-\lambda)^{k+1}}{k+1} + a_1 \frac{\lambda^{k+2} - (-\lambda)^{k+2}}{k+2} + \dots$$

Luego, si k es par, será

$$M_{k,\lambda} = a_0 \frac{2\lambda^{k+1}}{k+1} + a_2 \frac{2\lambda^{k+3}}{k+3} + \dots$$

y si k es impar,

$$o = a_1 \frac{2\lambda^{k+2}}{k+2} + a_3 \frac{2\lambda^{k+4}}{k+4} + \dots$$

Igualdad, esta última, que debiendo verificarse para cualquiera que sea λ, obliga a que $a_1 = a_3 = \dots = a_{2p+1} = \dots = o$, de donde resulta que los polinomios P_n serán de grado par y simétricos.

Para el cálculo de los coeficientes de P_n consideremos el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2} M_{0,\lambda} = a_0 \lambda + a_2 \frac{\lambda^3}{3} + a_4 \frac{\lambda^5}{5} + \ldots + a_n \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{2} M_{2,\lambda} = a_0 \frac{\lambda^3}{3} + a_2 \frac{\lambda^5}{5} + a_4 \frac{\lambda^7}{7} + \ldots + a_n \frac{\lambda^{n+3}}{n+3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2} M_{n,\lambda} = a_0 \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} + a_2 \frac{\lambda^{n+3}}{n+3} + a_4 \frac{\lambda^{n+5}}{n+5} + \ldots + a_n \frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1}$$

el cual da

$$a_{2i} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \frac{\lambda^3}{3} & \cdots & \frac{\lambda^{2i-1}}{2i-1} & M_{0,\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} \\ \frac{\lambda^3}{3} & \frac{\lambda^5}{5} & \cdots & \frac{\lambda^{2i+1}}{2i+1} & M_{2,\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^{n+3}}{n+3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} & \frac{\lambda^{n+3}}{n+3} & \cdots & \frac{\lambda^{n+2i-1}}{n+2i-1} & M_{n,\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & \frac{\lambda^3}{3} & \cdots & \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} \\ \frac{\lambda^3}{3} & \frac{\lambda^5}{5} & \cdots & \frac{\lambda^{n+3}}{n+3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} & \frac{\lambda^{n+3}}{n+3} & \cdots & \frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\,\lambda^{2i+1}} \cdot \frac{\varDelta_{i+1}}{\varDelta}$$

habiendo designado por $\varDelta$ el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+3} & \frac{1}{n+5} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}$$

y por Δ_k al determinante que se obtiene cambiando en Δ la columna k — sima por la columna $M_{0,\lambda}, \frac{M_{2,\lambda}}{\lambda^2} \ldots\ldots \frac{M_{n,\lambda}}{\lambda^n}$.

Obsérvese que al tender λ a infinito, cualquiera que sea n, todos los coeficientes de P_n tienden a cero; por lo tanto, cuando se toma como intervalo para la aproximación todo el eje real, los polinomios P_n se reducen al eje de las x.

4. **Polinomios ortogonales respecto a** $\delta e^{-2\delta|x|}$. — Consideremos los polinomios

$$L_n(2\delta|x|) = \frac{e^{2\delta|x|}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-2\delta|x|}x^n) \tag{1}$$

Estos polinomios son los de Laguerre, cambiando la variable independiente por $2\delta|x|$. En efecto: aplicando la fórmula de derivación de Leibnitz a (1), obtenemos

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-2\delta|x|}x^n) = n!\, e^{-2\delta|x|} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-2\delta|x|)^k}{k!}$$

o sea

$$L_n(2\delta|x|) = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(2\delta|x|)^k}{k!} \tag{2}$$

Puede comprobarse también, sin necesidad de un cálculo directo, escribiendo los polinomios $L_n(2\delta|x|)$ en la forma

$$\frac{e^{2\delta sx}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-2\delta sx}x^n)$$

designando por s la función $sg\,x$, es decir, la función igual a $+1$ si $x > 0$, e igual a -1 si $x < 0$. Ahora bien: si en los polinomios de Laguerre ordinarios substituimos x por $2\delta sx$, obtenemos

$$\frac{e^{2\delta sx}}{n!} \cdot \frac{d^n}{d(2\delta sx)^n}[e^{-2\delta sx}(2\delta sx)^n] = \frac{e^{2\delta sx}}{n!} \cdot \frac{d^n(2\delta sx)^n}{(2\delta s)^n dx^n}[e^{-2\delta sx}x^n] =$$
$$= \frac{e^{2\delta sx}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-2\delta sx}x^n)$$

que es la misma fórmula anterior.

Es importante observar que estos polinomios se comportan como de grado $2n$ respecto a x, y, por lo tanto, aunque su forma coincide con la de los polinomios de Laguerre, con el cambio de x en $2\,\delta|x|$, difieren esencialmente de éstos.

Las derivadas sucesivas de estos polinomios son

$$\left.\begin{aligned} L_n'(2\,\delta|x|) &= -2\,\delta s \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(2\,\delta|x|)^{k-1}}{(k-1)!} \\ L_n''(2\,\delta|x|) &= (-2\,\delta s)^2 \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2} \binom{n}{k} \frac{(2\,\delta|x|)^{k-2}}{(k-2)!} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_n^{(n)}(2\,\delta|x|) &= (-2\,\delta s)^n \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Vamos a probar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_n(2\,\delta|x|)\, P(x)\, \delta e^{-2\delta|x|}\, dx = 0$$

siendo $P(x)$ un polinomio de grado inferior a n.

Seguiremos una marcha análoga a la que se emplea para demostrar esta propiedad en los polinomios de Hermite-Tchebycheff, respecto a la función $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.*

Bastará probar que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k L_n(2\,\delta|x|)\, \delta e^{-2\delta|x|}\, dx = 0$$

para $k = 0, 1 \,.\,. \, n-1$, descomponiendo el dominio de integración, será

$$I = \frac{\delta}{n!} \left[\int_{-\infty}^{0} x^k \frac{d^n}{dx^n} (e^{2\delta x} x^n)\, dx + \int_{0}^{+\infty} x^k \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\delta x} x^n)\, dx \right]$$

Vamos a calcular la primera integral, para lo cual, integrando por partes, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{0} x^k \frac{d^n}{dx^n} (e^{2\delta x} x^n)\, dx = \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{2\delta x} x^n)\, x^k \right]_{-\infty}^{0} - k \int_{-\infty}^{0} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{2\delta x} x^n)\, x^{k-1}\, dx$$

* Deltheil, R., *Erreurs et moindres carrees*, pág. 67. — Borel, E., *Principes et formules classiques du Calcul des probabilités*, pág. 151.

El primer término del segundo miembro es nulo, como se comprueba fácilmente.

Integrando por partes reiteradamente n veces y teniendo en cuenta que k es menor que n, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{o} x^k \frac{d^n}{dx^n} (e^{2\delta x} x^n) \, dx = 0$$

El mismo resultado se obtendría para la segunda integral; por lo tanto,

$$I = o$$

Veamos ahora que estos polinomios $L_n(2\delta|x|)$ son normalizados; para ello calcularemos

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} L_n^2 (2\,\delta|x|) \, \delta e^{-2\delta|x|} \, dx$$

Se tiene

$$J = \frac{\delta}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\delta|x|} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\delta|x|} x^n) \, L_n (2\,\delta|x|) \, e^{-2\delta|x|} \, dx =$$

$$= \frac{\delta}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\delta|x|} x^n) \, L_n (2\,\delta|x|) \, dx$$

Descomponiendo el intervalo de integración, será

$$J = \frac{\delta}{n!} \left[\int_{-\infty}^{o} \frac{d^n}{dx^n} (e^{2\delta x} x^n) \, L_n (2\,\delta|x|) \, dx + \int_{o}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\delta x} x^n) \, L_n (2\,\delta|x|) \, dx \right]$$

y repitiendo un proceso análogo al anterior, se obtiene

$$J = \frac{\delta}{n!} \left(\frac{n!}{2\,\delta} + \frac{n!}{2\,\delta} \right) = 1$$

Constituyen, pues, los polinomios $L_n(2\,\delta|x|)$ un sistema ortogonal y normalizado respecto a la función $\delta e^{-2\delta|x|}$.

5. **Fórmula de recurrencia.** — Teniendo en cuenta la relación entre estos polinomios $L_n(2\delta|x|)$ y los de Laguerre ordinarios, vemos que es válida la misma fórmula de recurrencia, que ahora podrá escribirse en la forma

$$(n+1)\,L_{n+1}(2\delta|x|) - [2n+1-2\delta|x|]\,L_n(2\delta|x|) - nL_{n-1}(2\delta|x|) = 0 \qquad (4)$$

Podríamos hallar esta fórmula directamente siguiendo un método análogo al que se utiliza en el caso de los polinomios de Hermite-Tchebycheff,* observando que al dividir $L_n(2\delta|x|)$ por $L_{n-1}(2\delta|x|)$ se obtiene

$$L_n(2\delta|x|) = (c_n|x| + a_n)\,L_{n-1}(2\delta|x|) - b_n\,L_{n-2}(2\delta|x|) \qquad (5)$$

siendo

$$b_n = c_n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta|x|\,L_{n-1}(2\delta|x|)\,L_{n-2}(2\delta|x|)\,e^{-2\delta|x|}\,dx$$

pero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta|x|\,L_{n-1}(2\delta|x|)\,L_{n-2}(2\delta|x|)\,e^{-2\delta|x|}\,dx = -\frac{n-1}{2\delta}$$

como se ve fácilmente considerando el polinomio

$$Q(|x|) = L_{n-1}(2\delta|x|) + \frac{2\delta|x|}{n-1}\,L_{n-2}(2\delta|x|)$$

el cual es de grado $n-2$ en $|x|$ a lo más, multiplicando por $\delta\,L_{n-2}(2\delta|x|)\,e^{-2\delta|x|}$ e integrando entre $+\infty$ y $-\infty$.

El cálculo de c_n y a_n puede hacerse efectuando la división de L_n por L_{n-1}, obteniéndose

$$c_n = \frac{-2\delta}{n} \qquad \text{y} \qquad a_n = 2 - \frac{1}{n}$$

Substituyendo estos valores en (5), obtenemos la fórmula de recurrencia (4).

6. **El problema de los momentos respecto a la función de probabilidades totales** $F(x) = \delta\int_{-\infty}^{x} e^{-2\delta|x|}\,dx$. — Propongámonos construir una fun-

* Deltheil, R., Loc. cit., pág. 18.

ción $G_n(x)$ escalonada tal, que sus momentos absolutos sean los mismos que los $2n$ primeros momentos absolutos correspondientes a $F(x)$.

Sean estos momentos absolutos $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1 \dots \mathfrak{M}_{2n-1}$ y

$$\left.\begin{matrix} x_1 & x_2 \dots & x_n \\ -x_1 & -x_2 \dots & -x_n \end{matrix}\right\} \text{las raíces de } L_n(2\delta|x|) = 0.$$

Estos polinomios en $|x|$ tienen, como los de Laguerre ordinarios, las propiedades siguientes: 1.ª Tienen sus raíces reales y distintas; 2.ª Forman una sucesión de Sturm generalizada, y 3.ª Las raíces de $L_n(2\delta|x|)$ están separadas por las de $L_{n-1}(2\delta|x|)$.

Llamando $a_1\ a_2 \dots a_n$ las masas correspondientes a los puntos $\pm x_1, \pm x_2, \dots \pm x_n$, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} 2(a_1 + a_2 + \dots\dots\dots + a_n) = \mathfrak{M}_0 \\ 2(a_1|x_1| + a_2|x_2| + \dots + a_n|x_n|) = \mathfrak{M}_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ 2(a_1|x_1|^{2n-1} + a_2|x_2|^{2n-1} + \dots + a_n|x_n|^{2n-1}) = \mathfrak{M}_{2n-1} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Designando por $Q_n(x)$ a los polinomios $\frac{n!}{(-2\delta)^n} L_n(2\delta|x|)$, éstos son los que figuran en el problema de los momentos de Stieltjes,* y podemos plantear el problema considerando solamente los valores positivos de la x_i, pero con las masas $2\,a_i$.

Obtenemos para los valores de a_i la fórmula siguiente:

$$2\,a_i = \frac{1}{Q_n'^2(x_i)} \int_0^\infty (x - x_1)^2 \dots (x - x_{i-1})^2 (x - x_{i+1})^2 \dots (x - x_n)^2 \delta e^{-2\delta x} dx$$

La función $G_n(x)$ construída tomando como puntos de discontinuidad los $-x_1 - x_2, \dots -x_n, x_1, x_2, \dots x_n$, y con masas situadas en estos puntos respectivamente iguales $a_1\ a_2, a_3, \dots a_n, a_1, a_2, \dots a_n$, es una función de probabilidades totales, cuya función de probabilidades elementales es simétrica y, por tanto, sus momentos pares coincidirán con sus momentos absolutos, y sus momentos impares serán nulos, tal función tiene, pues, los mismos momentos (los $2n$ primeros) que $F(x)$.

Hallemos el límite de a_i cuando n tiende a infinito; para ello recordemos la relación siguiente:**

* Deltheil, R., Loc. cit., págs. 15 a 22.
Borel, E., Loc. cit., págs. 119 a 146.

** Deltheil, R., Loc. cit., pág. 19.

$$\sum_{i=1}^{n} 2\, a_i\, \theta(x_i) = \int_0^\infty \theta(x)\, \delta e^{-2\delta x}\, dx \tag{2}$$

siendo $\theta(x)$ un polinomio a lo sumo de grado igual a $2n - 2$.

Haciendo $\theta(x) = \frac{Q_n\, Q_{n-1}}{x - x_i}$ el primer miembro de (2), se reducirá a

$$2\, a_i \cdot \frac{Q_n(x_i)\, Q_{n-1}(x_i)}{x - x_i} = 2\, a_i\, Q'_n(x_i)\, Q_{n-1}(x_i)$$

En cuanto al segundo miembro, será

$$I = \int_0^\infty \frac{Q_n\, Q_{n-1}}{x - x_i}\, \delta e^{-2\delta x}\, dx = \int_0^\infty \frac{Q_n}{x - x_i}\, \frac{(n-1)!}{(-2\delta)^{n-1}}\, L_{n-1}(2\delta x)\, \delta e^{-2\delta x}\, dx =$$

$$= \frac{(n-1!)}{(-2\delta)^{n-1}} \int_0^\infty \frac{Q_n}{x - x_i}\, L_{n-1}(2\delta x)\, \delta e^{-2\delta x}\, dx$$

Teniendo en cuenta que $\frac{Q_n}{x - x_i}$ es de grado $n - 1$ y que su primer término es x^{n-1}, será

$$I = \frac{(n-1)!}{(-2\delta)^{n-1}} \int_0^\infty x^{n-1}\, L_{n-1}(2\delta x)\, \delta e^{-2\delta x}\, dx =$$

$$= \frac{\delta}{(-2\delta)^{n-1}} \int_0^\infty x^{n-1}\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\, e^{(-2\delta x}\, x^{n-1})\, dx$$

Integrando por partes $n - 1$ veces, obtendremos

$$I = \frac{\delta\, (n-1)!^2}{(2\delta)^{2n-1}}$$

Se tiene, pues,

$$2\, a_i = \frac{\delta}{n\, L'_n(2\delta x_i)\, L_n(2\delta x_i)}$$

expresión que tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Ahora bien: según las desigualdades de Tchebycheff* podemos afirmar que: fijado x y un número positivo arbitrario ε podemos hallar un valor N tal, que para todo $n < N$

$$| G_n(x) - F(x) | < \varepsilon$$

lo que expresa que $G_n(x)$ converge hacia $F(x)$, convergencia que será uniforme en virtud de un teorema de Polya,** según el cual, si una sucesión de funciones de probabilidades totales $G_1(x)$, $G_2(x)$ ... $G_n(x)$ ... converge hacia una función de probabilidades totales $F(x)$ continua, la sucesión de las $G_n(x)$ converge uniformemente hacia $F(x)$. Se puede, pues, afirmar que las funciones $G_n(x)$ tienden uniformemente hacia

$$F(x) = \delta \int_{-\infty}^{x} e^{-2\delta|x|}\, dx$$

CAPITULO II

DESARROLLO DE FUNCIONES DE DISTRIBUCION EN SERIE DE POLINOMIOS DE LAGUERRE

1. Según hemos visto en el capítulo anterior, los polinomios $L_n(2\delta|x|)$ son ortogonales respecto a $\delta e^{-2\delta|x}$; podemos, pues, representar, por lo menos formalmente, toda función simétrica de probabilidad en serie de polinomios $L_n(2\delta|x|)$ en la forma

$$f(x) = \delta e^{-2\delta|x|} \sum_{n=o}^{\infty} a_n L_n(2\delta|x|) \qquad (1)$$

Esta serie es análoga a la de Bruns-Charlier respecto a la ley normal y a las de Romanowsky respecto a las curvas de Pearson.

2. **Cálculo de los coeficientes** a_n. — La expresión de a_n será

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, L_n(2\delta|x|)\, dx$$

* Deltheil, R., Loc. cit. pág. 21.

** Polya, G., *Uber der Zentralen Grenzwertatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Moment-Problem*, en *Math. Zeit.*, 1920.
Borel, E., Loc. cit., pág. 157.

es decir,

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-2\delta|x|)^k}{k!} dx = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-2\delta)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-2\delta)^k}{k!} \mathfrak{M}_k \tag{2}$$

($\mathfrak{M}_k$ representa el momento absoluto de orden k de la función $f(x)$).

Obsérvese que esta expresión es la misma $L_n(2\delta|x|)$, cambiando $|x|^k$ por $\mathfrak{M}_k$; podemos, pues, escribir simbólicamente

$$a_n = L_n(2\delta\mathfrak{M})$$

y el desarrollo de $f(x)$ en la forma simbólica

$$f(x) = \delta e^{-2\delta|x|} \sum_{n=o}^{\infty} L_n(2\delta\mathfrak{M})\, L_n(2\delta|x|) \tag{3}$$

Por haber supuesto $f(x)$ simétrica, será suficiente estudiar su desarrollo para valores positivos de x, o sea en la siguiente forma:

$$f(x) = \delta e^{-2\delta|x|} \sum_{n=o}^{\infty} a_n L_n(2\delta x) \qquad x > o \tag{4}$$

3. **Condiciones suficientes de convergencia.** — Obtendremos unas condiciones suficientes de convergencia apoyándonos en el siguiente teorema debido a Broggi:*

Si la función $\Phi(t)$ es entera y de tipo exponencial, puede determinarse un λ_o tal, que para todo valor de $\lambda < \lambda_o$ se verifique uniformemente en todo recinto finito cerrado del plano t

$$\Phi(t) = \sum_{n=o}^{\infty} h_n L_n(\lambda t)$$

siendo

$$\Phi(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!} \qquad \text{y} \qquad f(s) = \alpha_o + \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots$$

y las h_n los coeficientes del desarrollo de $f(s)$ en serie de potencias de $\dfrac{s-\lambda}{s}$.

* Broggi, U., *Sugli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre*, en *Rend. Accad. Nat. Lincei.*, t. XXII, 6, 1935, págs. 108 - 112.

Las condiciones que ha de cumplir λ_o son

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_o > \dfrac{1}{\varrho} \\ \lambda_o(\partial - 1) + \mu < o \\ \lambda_o \partial > 1 \end{array}\right\} \quad (1)$$

siendo ϱ el radio de convergencia de la serie $\alpha_o + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots$, el cual si $\Phi(t)$ es entera y de tipo exponencial es distinto de cero, y recíprocamente;* μ es la abscisa de convergencia de la transformada de Laplace de $\Phi(t)$; por lo tanto, $\mu \leq \varrho$, y $\partial > o$ es el máximo valor que hace $\lambda_o(\partial - 1) + \mu < o$.

En nuestro caso

$$\Phi(t) = \frac{1}{\delta} e^{2\delta t} \varphi(t)$$

Si $\varphi(t)$ es de tipo exponencial, es decir:

$$|\varphi(t)| < A\, e^{a|t|}$$

se tendrá

$$|\Phi(t)| = \left|\frac{1}{\delta} e^{2\delta t} \varphi(t)\right| \leq \frac{1}{\delta} e^{2\delta|t|} |\varphi(t)| < \frac{A}{\delta} e^{(2\delta + a)|t|}$$

y, por lo tanto, también será $\Phi(t)$ de tipo exponencial.

Tenemos, pues, $2\delta = \lambda$, pero como $\delta < 1$ por ser la probabilidad correspondiente a $x = 0$, habrá de ser $\lambda < 2$.

Por las condiciones (1) tendremos

$$\varrho > \frac{1}{2} \quad ; \quad \partial > \frac{1}{2} \quad ; \quad \mu < 1$$

Dada una función de frecuencia $\varphi(x)$ simétrica, entera y de tipo exponencial, podremos construir la función $\Phi(t) = \frac{1}{\delta} e^{2\delta t} \varphi(t)$, y hallar su desarrollo en la forma

$$\Phi(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \alpha_n \frac{t^n}{n!}$$

---

* Polya, G., *Uber die Lücken und Singularitaten von Potenzreihen*, en *Mat. Zeit.*, 1929.

Las α_n son funciones de δ y, por tanto, también lo serán ϱ, y la abscisa de convergencia μ de la transformada de Laplace.

Si es posible hallar un valor de δ tal que $\varrho(\delta) > \frac{1}{2}$ y $\mu(\delta) < 1$, será válido el desarrollo

$$\varphi(x) = \delta e^{-2\delta x} \sum_{n=o}^{\infty} a_n L_n(2\delta x)$$

4. **Condiciones necesarias y suficientes de convergencia.** — Consideraremos ahora la expresión reducida de la primera ley de Laplace $\frac{1}{2} e^{-|x|}$; el desarrollo de una función simétrica $f(x)$ será:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sum_{n=o}^{\infty} a_n L_n(x) \tag{1}$$

para valores positivos de x.

Si $f(x)$ es entera y de tipo exponencial, su transformada de Laplace

$$\varphi(s) = \int_{o}^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

será regular en el infinito,* y podemos hallar una circunferencia de centro en el eje real del plano de las s y que pase por los puntos $s_1 = \frac{-1}{r-1}$, $s_2 = \frac{1-2h}{r+1}$, siendo r y h reales, $r > 1$ y h suficientemente pequeño, tal, que $\varphi(s)$ sea regular fuera de este círculo y desarrollable en la forma

$$\varphi(s) = \frac{1}{s+h} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(\frac{s+h-1}{s+h}\right)^n$$

y, además,

$$f(x) = e^{-hx} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{2} L_n(x)$$

En nuestro caso, $h = 1$, o sea $\varphi(s)$, ha de ser regular fuera de un círculo de centro en el eje real y que pase por los puntos $s_1 = \frac{-1}{r-1}$, $s_2 = \frac{-1}{r+1}$.

---

* Doetsch, G., *Theorie und Andwendung der Laplace-Transformation*, pág. 62.

Tomando r muy próximo a 1, s_2 estará muy próximo a $-\frac{1}{2}$; luego, será posible hallar este círculo siempre que $\varphi(s)$ no tenga ningún punto singular en el semiplano $Rs > -\frac{1}{2}$, o sea siempre que la abscisa de convergencia de $\varphi(s)$ sea menor o igual que $-\frac{1}{2}$. En este caso, pues, el desarrollo (1) será válido.

Recíprocamente: Si el desarrollo (1) es válido para todo valor de $x > 0$ e incluso para $x = 0$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a_n}{2}} \leq 1$$

ya que $L_n(o) = 1$ y el desarrollo para $x = 0$ será

$$f(o) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{2}$$

Pero

$$\varphi(s) = \mathfrak{L}\left\{ f(x) \right\} = \frac{1}{s+1} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(\frac{s}{s+1}\right)^n$$

designando por $\mathfrak{L}\left\{ f(x) \right\}$ a la transformada de Laplace* de $f(x)$, de donde

$$(s+1)\,\varphi(s) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(\frac{s}{s+1}\right)^n \tag{2}$$

Haciendo $\frac{s}{s+1} = z$ será: $(s+1)\,\varphi(s) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n}{2} z^n$, convergente en el círculo $|z| < 1$; luego (2) será convergente cuando $\left|\frac{s}{s+2}\right| < 1$, o sea en el semiplano $Rs > -\frac{1}{2}$.

Teniendo en cuenta la simetría de $f(x)$, $\varphi(s)$ tendrá un desarrollo en serie de la forma

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathfrak{M}_n}{n!} s^n \tag{3}$$

* Doetsch, G., Loc. cit., Pág. 136.
Tricomi, F., *Transformazione di Laplace e polinomi di Laguerre*, en *Rend. Accad. Naz. Lincei*, t. xxi, 6, 1935, págs. 232 - 239.

Ahora bien: si $\varphi(s)$ es convergente para $s = s_o$, lo es para todo valor de s tal que $Rs > Rs_o$;* luego será condición necesaria y suficiente para la validez del desarrollo (1) que el radio de convergencia de (3) sea mayor que $\frac{1}{2}$, o sea que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\mathfrak{M}_n}{n!}} < 2$$

La condición necesaria y suficiente para que, siendo $f(x)$ simétrica, sea válido el desarrollo (1), *es que $f(x)$ sea entera y de tipo exponencial y, además, que el límite superior de $\sqrt[n]{\frac{\mathfrak{M}_n}{n!}}$ sea menor que* 2, *siendo $\mathfrak{M}_n$ el momento absoluto de orden n de $f(x)$.*

5. Vamos a ver ahora cómo esta condición referente a los momentos absolutos repercute en el comportamiento de la función característica y en la misma función de distribución.

Para ello consideraremos las series

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_n}{n!} i^n z^n = \bar{\varphi}(z) \quad \text{y} \quad \sum_{n=o}^{\infty} \frac{M_n}{n!} i^n z^n = \varphi(z)$$

la segunda de las cuales es la función característica de la función de distribución considerada.

Por la desigualdad de Schwarz** podemos escribir

$$(\mathfrak{M}_{2n+1})^2 < \mathfrak{M}_{2n}\,\mathfrak{M}_{2n+2} \quad \text{y} \quad (M_{2n+1})^2 < M_{2n}\,M_{2n+2}$$

o sea que la convergencia de las dos series depende solamente de sus términos pares, y como en las dos series estos términos son idénticos, ambas tendrán el mismo radio de convergencia.

La condición $\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{\mathfrak{M}_n}{n!}} < 2$ *equivale, pues, a que la función característica tenga su radio de convergencia mayor que* $\frac{1}{2}$.

Para el estudio del comportamiento de la función de distribución demostraremos primero el siguiente teorema:

Si el radio de convergencia de la función característica de una función

---

* Doetsch, G., Loc. cit., pág. 16.

** Levy, P., *Theorie de l'addition des variables aleatories*, pág. 36.

de distribución $f(x)$ es mayor o igual que r, la función $f(x)$ verifica la desigualdad

$$f(x) \leq \frac{r}{2} e^{-r|x|}$$

desde un valor de $|x|$ en adelante y recíprocamente.

En efecto: Bastará considerar los momentos de orden par, puesto que solamente de éstos depende el radio de convergencia. Si éste es mayor o igual que r, se verificará

$$(n \text{ par}) \qquad \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} \leq \frac{1}{r}$$

y, por tanto, desde un valor de n en adelante, $M_n < n! \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^n$ siendo ε positivo y tan pequeño como se quiera. Por tanto, haciendo $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \varepsilon$, se tendrá

$$M_n < \frac{n!}{\varrho^n}$$

siendo $\varrho < r$.

Mas si se observa que el segundo miembro es el momento de orden n de $\frac{\varrho}{2} e^{-\varrho|x|}$, resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx < \frac{\varrho}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\varrho|x|}\, dx$$

y, por tanto, a partir de un cierto valor de $|x|$ en adelante,

$$f(x) < \frac{\varrho}{2} e^{-\varrho|x|} + \varepsilon(|x|)$$

tendiendo $\varepsilon(|x|)$ a cero cuando $|x|$ tiende a infinito. Podemos, pues, tomar $|x|$ suficientemente grande para que difiriendo ϱ' tan poco como se quiera de ϱ se verifique

$$f(x) < \frac{\varrho'}{2} e^{-\varrho'|x|}$$

y como ϱ puede ser tan próximo a r como se quiera, obtenemos, finalmente,

$$f(x) \leq \frac{r}{2} e^{-r|x|} \tag{1}$$

Recíprocamente: Si se verifica (1) desde un valor de $|x| = \lambda$ en adelante, será

$$(n \text{ par}) \qquad \int_{-\infty}^{-\lambda} x^n f(x)\, dx + \int_{+\lambda}^{+\infty} x^n f(x)\, dx \leq \frac{r}{2} \int_{-\infty}^{-\lambda} x^n e^{-r|x|}\, dx +$$

$$+ \frac{r}{2} \int_{+\lambda}^{+\infty} x^n e^{-r|x|}\, dx$$

Observando que por ser $f(x) < 1$, se tiene

$$\int_{-\lambda}^{+\lambda} x^n f(x)\, dx \leq \int_{-\lambda}^{+\lambda} x^n\, dx = \frac{2\, \lambda^{n+1}}{n+1}$$

y sumando esta desigualdad con la anterior, obtenemos

$$M_n \leq \frac{r}{2} \int_{-\infty}^{-\lambda} x^n e^{-r|x|}\, dx + \frac{r}{2} \int_{\lambda}^{\infty} x^n e^{-r|x|}\, dx + \frac{2\, \lambda^{n+1}}{n+1}$$

pero la suma de los dos primeros términos del segundo miembro es el error que se comete al tomar el momento incompleto de $\frac{r}{2} e^{-r|x|}$ en el intervalo $(-\lambda, +\lambda)$ en vez del momento total, error que, según hemos visto en el número 2 del capítulo 1, vale $\frac{n!}{r^n} e^{-\lambda} \sum_{i=o}^{n} \frac{\lambda^i}{i!}$.

Tenemos, pues,

$$M_n \leq \frac{n!\, e^{-\lambda}}{r^n} \sum_{i=o}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} + 2 \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}$$

y observando que por ser las expresiones que figuran en esta desigualdad esencialmente positivas, la raíz n-sima de la suma será menor que la suma de las raíces n-simas, podemos escribir la desigualdad

$$\sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} < \frac{\sqrt[n]{e^{-\lambda}\sum\limits_{i=o}^{n}\frac{\lambda^i}{i!}}}{r} + \frac{\sqrt[n]{2}\,\lambda^{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n!}\,(n+1)}$$

cuyo segundo miembro tiende a $\frac{1}{r}$ para n, tendiendo a infinito, de donde se infiere que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} \leq \frac{1}{r}$$

lo que prueba que el radio de convergencia de la función característica será mayor o igual a r.

Como consecuencia inmediata de este teorema, obtenemos la siguiente conclusión:

La condición necesaria y suficiente para que el desarrollo de una función de distribución simétrica $f(x)$ en serie de polinomios de Laguerre en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}\,e^{-|x|}\sum_{n=o}^{\infty} a_n\,L_n(|x|)$$

sea válido, es que para todo valor suficientemente grande de $|x|$ se verifique

$$f(x) < \frac{1}{4}\,e^{-\frac{|x|}{2}}$$

Este teorema puede también aplicarse al caso estudiado por Le Roy,* el cual supone que los momentos son de la forma

$$M_n = n!\,G(n)$$

siendo $G(n)$ una función entera de tipo exponencial de orden menor que la unidad, o sea

$$G(n) < ne^{n^\alpha}$$

siendo $\alpha < 1$, ya que en este caso se tiene

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} \leq 1$$

* Le Roy, E., *Sur les series divergentes et les fonctions definies par un developpement de Taylor*, en *Ann. de la Faculté de Sciencies de Toulouse*, II, 1900, pág. 317.
Borel, E., *Leçons sur les series divergentes*, pág. 85.

puesto que

$$\sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} < ne^{n^{\alpha}-1}$$

y el segundo miembro tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Resulta, pues, que la función de distribución $f(x)$ correspondiente verifica la desigualdad

$$f(x) < \frac{1}{2}\, e^{-|x|} < e^{-h|x|},$$

siendo $h < 1$, desde un valor de $|x|$ en adelante.

6. **Desarrollo de la ley de Gauss en serie de polinomios de Laguerre.** — La segunda ley de Laplace o ley de Gauss $y = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2x^2}$ cumple las condiciones para que su desarrollo en serie de polinomios $L_n(|x|)$ sea válido. Si para simplificar los cálculos se toma $k = 1$, se tendrá

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} = \frac{1}{2}\, e^{-|x|} \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, L_n(|x|)$$

Los primeros coeficientes son

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad a_2 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4}$$

Si tomamos un solo término del desarrollo será

$$y_1 = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$$

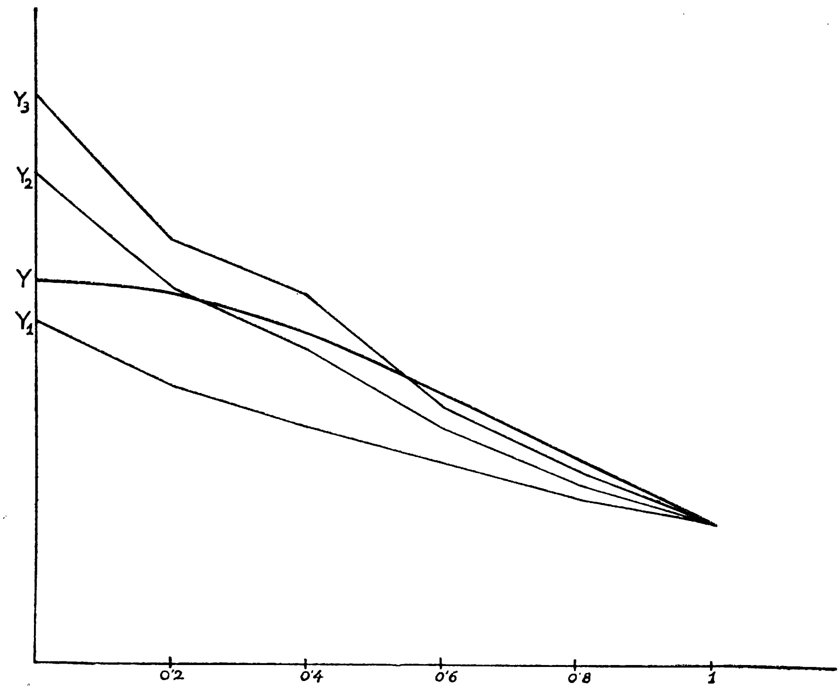
Si tomamos dos términos

$$y_2 = \frac{1}{2}\, e^{-|x|} \left[2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} - |x| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right]$$

y si tomamos tres términos

$$y_3 = \frac{1}{2}\, e^{-|x|} \left[3 + \frac{1}{4} - \frac{3}{\sqrt{\pi}} - |x| \left(3 + \frac{1}{2} - \frac{5}{\sqrt{\pi}}\right) + |x|^2 \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\right]$$

Hemos construído las gráficas de estas tres curvas en el intervalo (0,1) para su comparación con la curva de Gauss. Es interesante comparar estos gráficos con los obtenidos por Wilson,* al desarrollar la función $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|}$ mediante la función de Gauss y los polinomios de Her-



mite. En nuestro gráfico se observa que en las cercanías del origen da mejor aproximación la curva y_1 que las otras; en cambio, en las proximidades del punto $x = 1$ se obtiene mucha más ventaja con la y_3, notándose, además, una cierta regularidad en las variaciones de las aproximaciones que en los gráficos de Wilson es difícil preveer.

* Wilson, E. B., *The developement of a frecuency function and some comments of curve fitting*, en *Proc. Nat. Acad. of Sc. of the U. S. A.*, 1T, 10, 1924, págs. 79 - 84;

CAPÍTULO III

COMBINACIONES DE LA PRIMERA Y SEGUNDA LEYES DE LAPLACE

1. Variables aleatorias independientes que siguen la primera ley de Laplace. — Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes cuyas leyes respectivas son

$$\delta_1 e^{-2\delta_1|x|} \quad \text{y} \quad \delta_2 e^{-2\delta_2|x|}$$

y sus funciones características

$$\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2\,\delta_1}\right)^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2\,\delta_2}\right)^2}$$

Consideremos la variable aleatoria X suma de X_1 y X_2; su función característica será

$$\Phi(t) = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{t}{2\,\delta_1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{t}{2\,\delta_2}\right)^2\right]}$$

y su función de distribución, por la fórmula de reciprocidad de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx}\,dt}{\left[1+\left(\frac{t}{2\,\delta_1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{t}{2\,\delta_2}\right)^2\right]} \tag{1}$$

El valor de esta integral se calcula fácilmente por el método de los residuos, observando que de los cuatro polos $+\,2\,\delta_1 i$, $+\,2\,\delta_2 i$ $-\,2\,\delta_1 i$, $-\,2\,\delta_2 i$ de la función subintegral, hay que considerar solamente el primer par o el segundo, según sea $x < 0$ ó $x > 0$, obteniéndose respectivamente*

---

* Los residuos de la función $\dfrac{e^{-itx}}{\left[1+\left(\frac{t}{2\,\delta_1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{t}{2\,\delta_2}\right)^2\right]}$ correspondientes a los polos $\pm\,2\,\delta_1 i$ y $\pm\,2\,\delta_2 i$ son, respectivamente, $\dfrac{\delta_1 e^{2\delta_1 x}}{i\left[1-\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\right]}$ y $\dfrac{\delta_2 e^{2\delta_2 x}}{i\left[1-\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right]}$ (véase GOURSAT, *Cours d'Analyse*, II, pág. 103).

$$f(x) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\right]} \delta_1 e^{2\delta_1 x} + \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right]} \delta_2 e^{2\delta_2 x}$$

y

$$f(x) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\right]} \delta_1 e^{-2\delta_1 x} + \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right]} \delta_2 e^{-2\delta_2 x}$$

fórmulas que pueden condensarse en la expresión única

$$f(x) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\right]} \delta_1 e^{-2\delta_1|x|} + \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right]} \delta_2 e^{-\delta_2|x|} \tag{2}$$

Este procedimiento se extiende sin dificultad al caso de n variables aleatorias independientes $X_1\ X_2 \dots X_n$, cuyas leyes de distribución sean, respectivamente, $\delta_1 e^{-2\delta_1|x|}$, $\delta_2 e^{-2\delta_2|x|} \dots \delta_n e^{-2\delta_n|x|}$, obteniéndose para la variable $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, una ley de distribución dada por

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{\delta_1 e^{-2\delta_1|x|}}{\left[1 - \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\delta_1}{\delta_3}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\delta_1}{\delta_n}\right)^2\right]} + \\ & + \frac{\delta_2 e^{-2\delta_2|x|}}{\left[1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_3}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_n}\right)^2\right]} + \dots \\ & \dots + \frac{\delta_n e^{-2\delta_n|x|}}{\left[1 - \left(\frac{\delta_n}{\delta_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\delta_n}{\delta_2}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)^2\right]} \end{aligned} \tag{3}$$

Para simplificar esta expresión consideraremos el polinomio P_n de grado $2n$, cuyas raíces son $\pm 2\,\delta_i$ $(i = 1,2 \dots n)$

$$P_n(z) = \left[1 - \left(\frac{z}{2\delta_1}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{z}{2\delta_2}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{z}{2\delta_n}\right)^2\right]$$

La derivada de este polinomio en el punto $z = 2\delta_k$, es

$$P'_n(2\delta_k) = -\frac{1}{\delta_k}\left[1 - \left(\frac{\delta_k}{\delta_1}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\delta_k}{\delta_{k+1}}\right)^2\right] \cdots \left[1 - \left(\frac{\delta_k}{\delta_n}\right)^2\right]$$

luego, se puede escribir

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-2\delta_k|x|}}{P'_n(2\delta_k)} \tag{4}$$

Si suponemos ahora una sucesión indefinida $X_1\ X_2 \dots X_n \dots$ de variables aleatorias independientes que siguen la primera ley de Laplace con los parámetros $\delta_1\ \delta_2 \dots \delta_n \dots$, el polinomio P_n se convierte en un producto infinito, para cuya convergencia uniforme es necesario y suficiente que converja la serie $\Sigma \frac{1}{4\delta_i^2}$, lo que exige que la sucesión $\delta_1\ \delta_2 \dots \delta_n \dots$ tienda a infinito. Prescindiendo del significado de estos parámetros y colocándonos en el punto de vista puramente analítico, admitimos, pues, que $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \infty$.*

Como ejemplo de este método lo aplicaremos a dos casos: en el primero, considerado ya por Haussdorf,** supondremos una sucesión indefinida de variables aleatorias independientes, que siguen la primera ley de Laplace con los parámetros $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \dots$, respectivamente; el polinomio $P_n(z)$ será ahora el producto infinito

$$P(z) = (1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{(2n-1)^2}\right) \dots = \cos \frac{\pi z}{2}$$

su derivada para $z = 2k - 1$ será

$$P'(2k-1) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^k \frac{\pi}{2}$$

obteniéndose como función de distribución de la variable aleatoria suma la expresión siguiente:

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2e^{-(2k-1)|x|}}{\pi} = \frac{2}{\pi} e^{-|x|} \sum_{k=o}^{\infty} (-1)^k e^{-2k|x|} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{e^{-|x|}}{1 + e^{-2|x|}} = \frac{1}{\pi \cosh |x|}$$

* Podemos suponer variables aleatorias que siguen leyes de la forma $\delta e^{-2\delta|x|}$ siendo $\delta > 1$ siempre que no se considere intervalos comprendiendo el punto $x = 0$, puesto que en este caso δ, representando el valor de la probabilidad en el origen, ha de ser forzosamente menor que la unidad.

** Hausdorf, F., *Leipzig. Ber.* t. 53. Véase también Frechet, *Sur l'hipothese de l'additivité des erreurs partielles*, en *Bull. Sci. Math.*, t. 63, 1928.

En el segundo caso consideraremos una sucesión indefinida de variables aleatorias que siguen la primera ley de Laplace con los parámetros 1, 2, 3 ... n ..., respectivamente. En este caso,

$$P(z) = \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{(2\,n)^2}\right) \cdots = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2}}{\pi z}$$

y su derivada para $z = k$ será

$$P'(k) = \frac{(-1)^k}{2\,k}$$

obteniéndose como expresión de la ley de distribución de la suma

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, 2\, k e^{-2k|x|} = -\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\, s e^{-2k|x|}\right) =$$

$$-\frac{d}{dx}\left[s\, \frac{e^{-2|x|}}{1 + e^{-2|x|}}\right] = \frac{2\, e^{-2|x|}}{(1 + e^{-2|x|})^2}$$

(s significa, como en el capítulo 1, un número igual a $+1$ para x positivo e igual a -1 para x negativo).

2. En el número anterior se supone que todas las δ_i son distintas, puesto que si hubiese dos o más de iguales los polos de la función subintegral de (1) no serían todos simples. Vamos a considerar ahora el caso de n variables aleatorias independientes que siguen la primera ley de Laplace con el mismo parámetro δ; la función característica correspondiente a la variable aleatoria suma será

$$\varphi(t) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{t}{2\,\delta}\right)^2\right]^n}$$

y la función de distribución

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it(-|x|)}}{\left[1 + \left(\frac{t}{2\,\delta}\right)^2\right]^n}\, dt$$

los polos de la función subintegral con $\pm\, 2\,\delta i$, los dos de orden n y el residuo correspondiente a $2\,\delta i$ es

$$\frac{(2\,\delta)^{2n}}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[e^{-it(-|x|)}\,(t+2\,\delta i)^n\right]=$$

$$=\frac{e^{-2\delta|x|}}{(n-1)!\,i}\,(2\,\delta)^{2n}\sum_{p=o}^{n-1}\binom{n-1}{p}\,n\,(n+1)\ldots(n+p-1)\,\frac{|x|^{n-p-1}}{2^{n+p}\,(2\,\delta)^{n+p}}$$

por lo tanto, la expresión de la función de distribución será

$$f(x)=\frac{e^{-2\delta|x|}}{(n-1)!}\,(2\,\delta)^{2n}\sum_{p=o}^{n-1}\binom{n-1}{p}\,n\,(n+1)\ldots(n+p-1)\,\frac{|x|^{n-p-1}}{2^{n+p}\,(2\,\delta)^{n+p}}$$

que puede escribirse también

$$f(x)=\frac{\delta^n\,|x|^{n-1}\,e^{-2\delta|x|}}{(n-1)!}\sum_{p=o}^{n-1}\frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-p-1)!}\left(\frac{4\,\delta}{|x|}\right)^p$$

3. **Estudio de la ley de probabilidades $f(x)=K\,e^{-\alpha|x|-\beta x^2}$.** — Esta ley, que puede considerarse como el producto de las primera y segunda de Laplace, con iguales valores medios, contiene un parámetro más que la ley normal; luego, en los problemas de interpolación dará mejor aproximación.

El parámetro K es función de los parámetros α y β, y su valor viene dado por

$$K=\frac{1}{2\int\limits_o^\infty e^{-\alpha x-\beta x^2}\,dx}$$

Haciendo $\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\beta}}=s$, obtenemos*

$$K=\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}\displaystyle\int_o^\infty e^{-st}\,e^{-t^2/_4}\,dt}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}\,\mathfrak{L}\left[e^{-t^2/_4},\,s\right]}=\frac{\sqrt{\beta}}{e^{s^2}\sqrt{\pi}\,[1-\theta(s)]}$$

designando por $\theta(s)$ a la integral de Laplace.

Como la función $f(x)$ contiene dos parámetros independientes, en los problemas de interpolación por el método de los momentos serán necesarios los de segundo y cuarto orden, cuyo cálculo puede hacerse mediante la función característica

* Doetsch, G., *Theorie und Andwendung der Laplace-Transformation*, pág. 90.

$$\Phi(t) = K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\alpha|x| - \beta x^2}\, dx$$

que con la descomposición del intervalo de integración y el cambio $x = \dfrac{u}{2\sqrt{\beta}}$ toma la forma:

$$\Phi(t) = \frac{K}{2\sqrt{\beta}} \left[\int_o^\infty e^{-\left(s - \frac{t}{2\sqrt{\beta}}\right)u}\, e^{-\frac{u^2}{4}}\, du + \int_o^\infty e^{-\left(s + \frac{t}{2\sqrt{\beta}}\right)u}\, e^{-\frac{u^2}{4}}\, du \right] =$$

$$= \frac{K}{\sqrt{\beta}} \left[e^{\left(s - \frac{t}{2\beta}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \theta\left(s - \frac{t}{2\sqrt{\beta}} \right) \right] + e^{\left(s + \frac{t}{2\sqrt{\beta}}\right)^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \theta\left(s + \frac{t}{2\sqrt{\beta}} \right) \right] \right]$$

substituyendo k por su valor y haciendo

$$\varphi(t) = e^{\frac{st}{\sqrt{\beta}}} \left[1 - \theta\left(s + \frac{t}{2\sqrt{\beta}} \right) \right]$$

obtenemos

$$\Phi(t) = \frac{e^{\frac{t^2}{4\beta}}}{2\,[1 - \theta(s)]}\, [\varphi(t) + \varphi(-t)]$$

La expresión del momento de orden n es

$$M_n = \Phi^{(n)}(o)$$

Si hacemos ahora el cambio $\dfrac{t}{2\sqrt{\beta}} = u$, será

$$M_n = \Phi^{(n)}(o) \left(\frac{1}{2\sqrt{\beta}} \right)^n$$

siendo

$$\Phi(u) = \frac{e^{u^2}}{2\,[1 - \theta(s)]}\, [\varphi(u) + \varphi(-u)]$$

Derivando según la fórmula de Leibnitz, obtendremos

$$\Phi^{(n)}(u) = \frac{1}{2\,[1 - \theta(s)]} \left[\sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} e^{u^2} H'_{n-p}(u)\, [\varphi^{(p)}(u) + (-1)^p \varphi^{(p)}(-u)] \right]$$

donde H'_{n-p} representa el polinomio de Hermite de orden n-p, pero con todos sus términos positivos.

La derivada p-sima de $\varphi(u)$ se obtiene partiendo de la fórmula

$$\varphi(u) = e^{su} - e^{su}\,\theta(s+u)$$

resultando

$$\varphi^{(p)}(u) = e^{su} s^p - \sum_{k=o}^{p} \binom{p}{k} e^{su} s^{p-k}\, \theta^{(k)}(s+u)$$

Ahora bien: se tiene

$$\theta(s+u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^{s+u} e^{-x^2}\,dx$$

y por sucesivas derivaciones

$$\theta'(s+u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(s+u)^2}$$

$$\theta''(s+u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(s+u)^2}\,[-2\,(s+u)] = \theta'(s+u)\, H_1(s+u)$$

y en general

$$\theta^{(k)}(s+u) = \theta'(s+u)\, H_{k-1}(s+u)$$

Designando por H_k al polinomio de Hermite de orden k, será, pues,

$$\varphi^{(p)}(u) = e^{su} s^p\,[1-\theta(s+u)] - \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} e^{su} s^{p-k}\, \theta'(s+u)\, H_{k-1}(s+u)$$

La expresión general del momento de orden n puede escribirse en la forma

$$M_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)^n \frac{1}{2\,[1-\theta(s)]} \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} H'_{n-p}(o)\,[\varphi^{(p)}(o) + (-1)^p \varphi^{(p)}(o)]$$

Para p impar se anula el corchete, y para p par es

$$M_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)^n \frac{1}{2\,[1-\theta(s)]} \sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} H'_{n-p}(o)\; 2\,\varphi^{(p)}(o)$$

considerando solamente los valores de p pares en el sumatorio.

Si n es impar, n-p lo será también; pero por ser $H'_{n-p}(o) = o$ los momentos impares serán todos nulos, como había de ser por ser la función $f(x)$ simétrica.

Si n es par, se obtiene para el momento de orden n la fórmula

$$M_n = \left(\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\right)^n \left[\sum_{p=o}^{n} \binom{n}{p} s^p H'_{n-p}(o) - \right.$$

$$\left. - \frac{\theta'(s)}{1-\theta(s)} \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} H'_{n-p}(o) \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} s^{p-k} H_{k-1}(s)\right]$$

en la que debe sobreentenderse los sumatorios en p solamente para valores pares de p.

El momento de segundo orden será

$$M_2 = \frac{1}{4\beta}\left[H'_2(o) + s^2 H'_0(o) - \right.$$

$$\left. - \frac{\theta'(s)}{1-\theta(s)} \left[H'_0(o)\left(2s H_0(s) + H_1(s)\right)\right]\right] = \frac{1}{4\beta}(2+s^2)$$

y el de cuarto

$$M_4 = \frac{1}{16\beta^2}\left[12 + 12s^2 + s^4 - \frac{\theta'(s)}{1-\theta(s)} 4s\right]$$

4. **Interpolación de una curva de frecuencia mediante la función** $f(x) = K e^{-\alpha|x|-\beta x^2}$. — En aquellos esquemas estadísticos en los cuales la frecuencia máxima supera en mucho a las demás, parece convendrá mejor una curva de interpolación en «pico» que no una en «campana», tomando como origen de coordenadas el valor correspondiente a la frecuencia máxima podemos dar al parámetro K el valor de esta frecuencia máxima.

Escribiremos los valores de K, M_2 y M_4 en la forma

$$K = \frac{\alpha}{4s}\frac{\theta'(s)}{1-\theta(s)}$$

$$M_2 = \frac{s^2}{\alpha^2}(2+s^2)$$

$$M_4 = M_2^2 + \frac{1}{16\beta^2}\left[8s^2 + 8 - \frac{16s^2 k}{\alpha}\right]$$

e introduciremos, para simplificar, el valor

$$m = M_4 - M_2^2$$

el cual será

$$m = \frac{s^4}{\alpha^4}\left[8\,s^2 + 8 - \frac{16\,s^2\,K}{\alpha}\right]$$

Substituyendo s por su valor $\frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}}$ obtendremos

$$M_2 = \frac{1}{16\,\beta^2}\,[8\,\beta + \alpha^2]$$

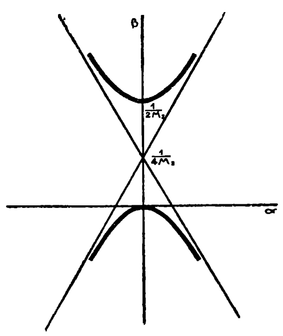
$$m = \frac{1}{16\,\beta^3}\,[2\,\alpha^2 + 8\,\beta - 4\,\alpha K]$$

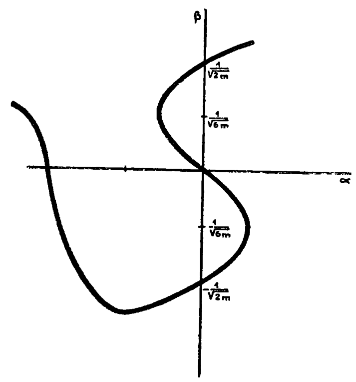
Dados, pues, los valores de K, M_2 y M_4 empíricamente podemos calcular los valores de α y β mediante el sistema de ecuaciones

$$16\,\beta^2\,M_2 - 8\,\beta - \alpha^2 = o$$
$$16\,\beta^3\,m - 8\,\beta + 4\,\alpha K - 2\alpha^2 = o$$

La primera ecuación representa una hipérbola cuyo centro es el punto $\left(o, \frac{1}{4\,M_2}\right)$ y tiene como asíntotas $\beta = \pm\,\frac{\alpha}{4\sqrt{M_2}} + \frac{1}{4\,M_2}$.

La segunda ecuación es una cúbica (de forma aproximadamente, como indica la figura), cuyo punto del infinito es el del eje α.





Se ve fácilmente que estas dos curvas sólo pueden tener un punto común cuyas coordenadas sean ambas positivas.

Si substituímos la hipérbola por la asíntota

$$\beta = \frac{\alpha}{4\sqrt{M_2}} + \frac{1}{4\,M_2}$$

el error cometido será tanto menor cuanto mayor sea el valor de la abcisa del punto de intersección con la cúbica, con la cual se obtiene la siguiente ecuación para hallar el valor de α

$$M_2\sqrt{M_2}\,m\alpha^3 + (3\,mM_2 - 8\,M_2^3)\,\alpha^2 + (3\sqrt{M_2}\,m - 8\,M_2^2\sqrt{M_2} -$$
$$- 16\,KM_2^3)\,\alpha + m - 8\,M_2^2 = o$$

de la cual sólo nos interesa la raíz positiva.

5. **Aplicación al ejemplo del número de pétalos de la « Ranunculus repens ».** — Consideremos el siguiente cuadro de observaciones del número de pétalos de las flores de « Ranunculus repens », tal como aparece en un trabajo de E. B. Wilson :*

Pétalos	5	6	7	8	9	10
Flores observadas.	133	55	23	7	2	2
Frecuencia	0,266	0,11	0,046	0,014	0,004	0,004

limitándonos a considerar aquellos casos en que el número de pétalos supera a cinco, ya que la distribución es sensiblemente simétrica. Interpolando por diversos procedimientos, se obtiene la siguiente tabla :

Pétalos	5	6	7	8	9	10
I........	132,6	55,2	22,9	7,1	3	0,1
II........	131,6	55,2	24,5	15,5	1,6	0,2
III........	136,9	48,5	22,6	9,6	3,4	0,8
IV........	131,8	66,1	20,6	6,4	2,2	0,8
V........	134,9	51,6	22,5	9,5	2,9	0,6
VI........	134,6	53,2	21,1	8,3	3,3	1,3

en donde la fila I son los resultados obtenidos mediante un desarrollo del tipo de A de Charlier, hasta el término sexto; la II, con el mismo des-

* Wilson, E. B., *The developement of a frecuency function and some comments of curve fitting.* Proc. Nat. Acad. of Sc. of the U. S. A., t. 10, 1924, págs. 79 - 84.

arrollo hasta el término cuarto ; la III, mediante una curva de Pearson apropiada ; la IV, por la transformación logarítmica

$$F = \frac{183,2}{0,5445\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left[\frac{\log(x-4)-0,044}{0,5445}\right]}$$

la v, por una curva del tipo

$$F = e^{-0,631}\,(0.631)^x : x!$$

y la VI, por la curva

$$F = 134,6.10^{-0,4027\,(x-5)}$$

Aplicando los resultados del número anterior, obtenemos para K el valor 0,266 y para los momentos de segundo y cuarto orden, los valores $M_2 = 1,168$, $M_4 = 11,008$. m será, pues, $m = 9,644$, y la ecuación para la determinación del valor de α

$$12,165\,\alpha^3 + 21,019\,\alpha^2 + 2,454\,\alpha - 1,268 = 0$$

cuya raíz positiva es

$$\alpha = 0,187$$

El valor de β será

$$\beta = 0,257$$

y la ley de frecuencia

$$y = 0,266\; e^{\,0,187|x| - 0,257x^2}$$

suponiendo ya el origen trasladado al punto $x = 5$.

Los valores que se obtienen mediante esta ley son :

Pétalos	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	0,266	0,122	0,047	0,011	0,0012	0,0001
Observaciones	133	61	23,5	5,5	0,6	0,05

Comparando estos resultados con los de la tabla anterior vemos que se obtienen resultados bastante aceptables, teniendo en cuenta, además, que no son necesarios cálculos excesivamente laboriosos, sobre todo si se comparan con los necesarios para los desarrollos de Charlier y las curvas de Pearson.

6. **Estudio de la ley de probabilidad definida por la función** $f(x) = K e^{-\alpha|x-a|-\beta(x-b)^2}$. — Esta ley puede considerarse como el producto de las primera y segunda de Laplace con valores medios distintos. Para comodidad del cálculo supondremos $b = 0$, es decir, tomaremos como origen el valor medio de la segunda ley de Laplace correspondiente. Será, pues,

$$y = Ke^{-\alpha|x-a|-\beta x^2}$$

cuya derivada para los valores de x menores que a es

$$y' = Ke^{\alpha(x-a)-\beta x^2}\,[\alpha - 2\,\beta\, x]$$

y para los valores de x mayores que a

$$y' = Ke^{-\alpha(x-a)-\beta x^2}\,[-\alpha - 2\,\beta\, x]$$

En el primer caso se anula la derivada para $x = \frac{\alpha}{2\beta}$, y en el segundo caso, para $x = -\frac{\alpha}{2\beta}$.

De esto se infiere que si $-\frac{\alpha}{2\beta} > a$, la curva tiene un máximo regular para $x = -\frac{\alpha}{2\beta}$; si $\frac{\alpha}{2\beta} < a$, tiene un máximo regular para $x = \frac{\alpha}{2\beta}$, y si a es interior al intervalo $\left(-\frac{\alpha}{2\beta}, +\frac{\alpha}{2\beta}\right)$, la curva carece de máximo regular. Vemos, pues, que el «valor medio» a de la primera ley de Laplace correspondiente influye en la forma y situación del máximo de la curva.

Consideremos ahora la discontinuidad que presenta la derivada en el punto $x = a$.

1.° Si $a > \frac{\alpha}{2\beta}$, los valores de la derivada a la derecha y a la izquierda del punto a son, respectivamente,

$$Ke^{-\beta a^2}\,[-\alpha - 2\,\beta a] < o \qquad \text{y} \qquad Ke^{-\beta a^2}\,[\alpha - 2\,\beta a] < o$$

y la curva presentará en $x = a$ un punto anguloso, siendo la función decreciente.

2.° Si $a < -\frac{\alpha}{2\beta}$, se prueba igualmente que para $x = a$ presenta la curva un punto anguloso, siendo la función creciente.

3.° Si $-\frac{\alpha}{2\beta} < a < \frac{\alpha}{2\beta}$, hemos visto que la curva no tiene máximo regular; los valores de la derivada a la derecha y a la izquierda en el punto a son, respectivamente,

$$Ke^{-\beta a^2}[-\alpha - 2\beta a] < o \qquad \text{y} \qquad Ke^{-\beta a^2}[\alpha - 2\beta a] > o$$

por lo tanto, tiene la curva en $x = a$ un máximo anguloso, y la forma de la curva es en « pico ».

Finalmente, si $a = \frac{\alpha}{2\beta}$, la derivada por la izquierda en el punto a será nula, y si $a = -\frac{\alpha}{2\beta}$, es la derivada por la derecha la que se anula.

Podemos clasificar las formas posibles de las curvas de distribución dadas por la función

$$y = Ke^{-\alpha|x-a|-\beta x^2}$$

según las inflexiones que presentan.

En efecto: la derivada segunda de la función considerada tiene la expresión

$$y'' = Ke^{-\alpha(x-a)-\beta x^2}[(-\alpha - 2\beta x)^2 - 2\beta]$$

si $x > a$, y la expresión

$$y'' = Ke^{-\alpha(x-a)-\beta x^2}[(\alpha - 2\beta x)^2 - 2\beta]$$

si $x < a$, luego las inflexiones posibles son

$$x = -\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \tag{1}$$

$$x = -\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \tag{2}$$

$$x = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \tag{3}$$

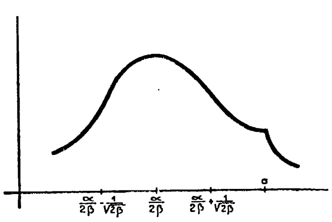
$$x = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \tag{4}$$

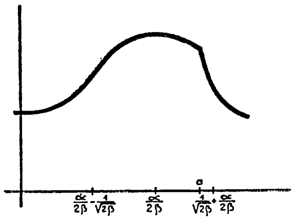
cuya existencia exige, respectivamente, que

$$-\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}} > a \text{ (I)}; \quad -\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{\sqrt{2\beta}} > a \text{ (II)};$$

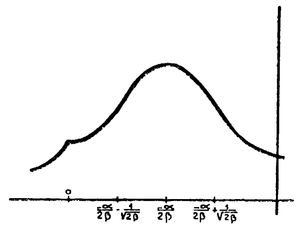
$$\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}} < a \text{ (III)}; \quad \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{\sqrt{2\beta}} < a \text{ (IV)}$$

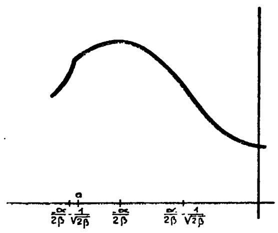
1.° Si $a > \frac{\alpha}{2\beta}$, no puede existir la inflexión (2), y existirá siempre la (4); de las dos condiciones (I) y (III) se ha de cumplir forzosamente una y sólo una de ellas; tenemos, pues, los dos tipos siguientes:



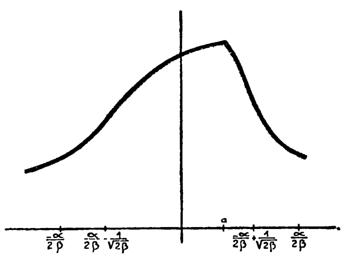


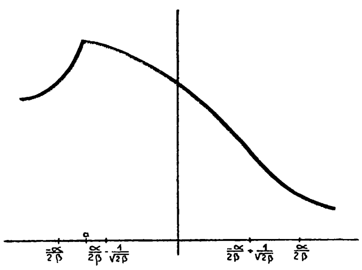
2.° Si $a < -\frac{\alpha}{2\beta}$, no puede existir la inflexión (3) y existirá siempre la (1); de las dos condiciones (II) y (IV) forzosamente se ha de verificar una y sólo una de ellas; obteniendo los dos tipos

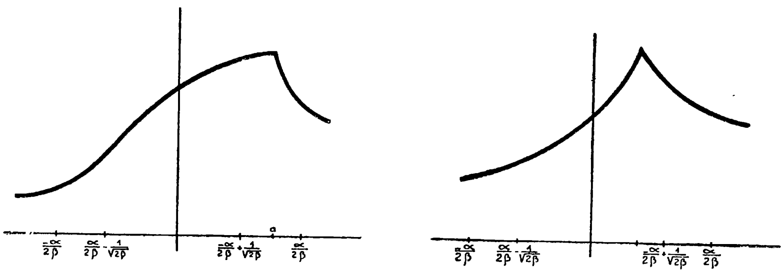




3.° Si a es interior al intervalo $\left(\frac{-\alpha}{2\beta}, + \frac{\alpha}{2\beta}\right)$, no pueden existir las inflexiones (2) y (3), obteniéndose cuatro tipos más:



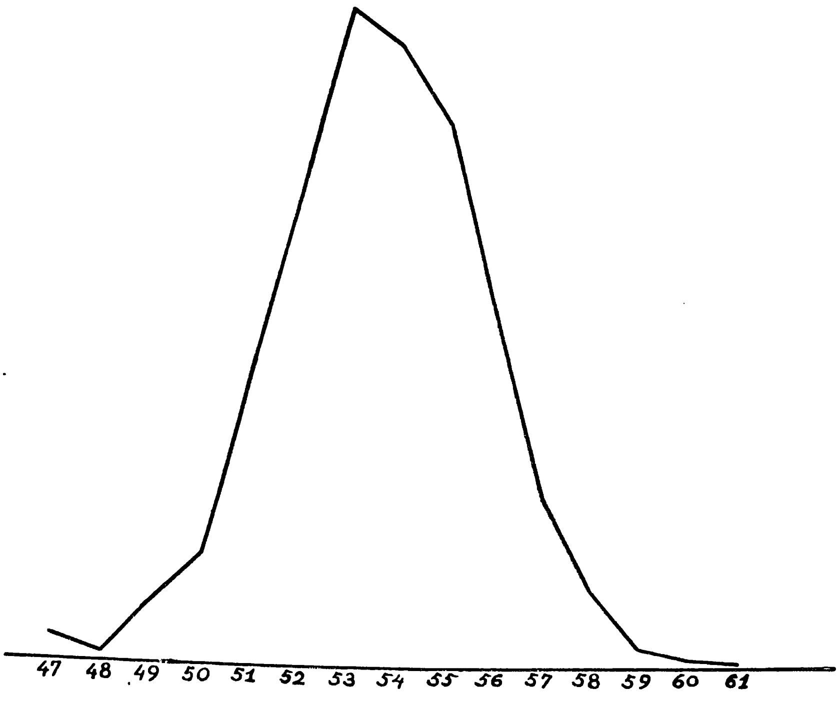




7. Como aplicación del caso de la función $y = Ke^{-\alpha(x-a)+\beta x^2}$ consideremos el ejemplo citado por Johansen del número de radios de la aleta caudal de 703 pleuronectos:

Número de radios	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
Observaciones.	5	2	13	23	58	96	134	127	111	74	37	16	4	2	1

cuya representación da origen al gráfico siguiente:



Observemos que parece convendrá una curva de interpolación con la única inflexión (1), y con la derivada a la derecha nula para el valor del número de radios igual a 53, tomando como origen el valor 55 del número de radios y situando la inflexión en el valor 56, se obtiene

$$a = -\frac{\alpha}{2\beta} = -2 \qquad -\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}} = 1$$

y para los parámetros α y β los valores

$$\alpha = \frac{2}{9} \qquad \beta = \frac{1}{18}$$

Para calcular el valor de K, tenemos

$$K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{9}|x+2|-\frac{x^2}{18}}\, dx = 1$$

que con el cambio de variable $x + 2 = t$ y la descomposición del intervalo de integración se convierte en

$$Ke^{-\frac{2}{9}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{4}{9}t-\frac{t^2}{18}}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{18}}\, dt\right] = 1$$

o sea

$$Ke^{-\frac{2}{9}}\left[\frac{e^{-\frac{8}{9}}\, 3\sqrt{2\pi}}{2}\left[1 - \theta\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right] + \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}\right] = 1$$

de donde

$$K = \frac{2\, e^{\frac{2}{9}}}{3\sqrt{2\pi}\left[e^{-\frac{2}{9}}\left(1 - \theta\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right) + 1\right]} = 0{,}22956$$

La función que hemos de utilizar para la interpolación será, pues,

$$y = 0{,}22956\, e^{-\frac{2}{9}|x+2|-\frac{x^2}{18}}$$

Se disponen fácilmente los cálculos en la forma

$$\log y = \log 0{,}22956 - \left[\frac{2}{9}|x + 2| + \frac{x^2}{18}\right] \log e = \bar{1}{,}3609111 -$$
$$- A(x)\, 0{,}4342945$$

designando por $A(x)$ la expresión $\frac{2}{9}|x+2|+\frac{x^2}{18}$, obteniéndose el siguiente cuadro de valores:

Número de radios	50	51	52	53	54
Valores calculados.......	20,39	42,18	78,03	129,35	122,32
Número de radios	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**
Valores calculados.......	106,5	78,03	53,43	32,34	17,57

Es interesante observar que esta interpolación, que da resultados bastante aceptables, se ha hecho sin necesidad de calcular ningún momento, y solamente por unas sencillas consideraciones de analogía con los tipos de curvas de la función $y = Ke^{-\alpha|x-a|-\beta x^2}$.

NOTA A

Sobre el error cometido al tomar como valor del momento de orden n, el momento incompleto. — En el número 2 del capítulo I hemos visto que al considerar $M_{n\lambda}$ como momento de orden n, el error que se comete es

$$E = n!\, e^{-\lambda} \sum_{k=o}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Como para $\lambda > n$ es evidentemente

$$\sum_{k=o}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} < \frac{(n+1)\lambda^n}{n!}$$

es decir,

$$E < (n+1)\, e^{-\lambda} \lambda^n$$

y observando que

$$e^{-\lambda} = \frac{1}{1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\dots+\frac{\lambda^n}{n!}+\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}+\dots} < \frac{1}{\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}}$$

se obtiene

$$E < \frac{(n+1)!\,(n+1)}{\lambda}$$

bastará, pues, tomar

$$\lambda < \frac{(n+1)!\,(n+1)}{\varepsilon}$$

para que el error sea menor que un número prefijado ε.

Por otra parte, suponiendo λ fijo, vemos que el error aumenta al crecer n, tendiendo a infinito como $n!$. Si queremos, pues, que el error tienda a cero, hemos de ligar el crecimiento de λ con el de n, siendo suficiente tomar $\lambda = (n+3)!$, ya que entonces se verifica

$$E < \frac{(n+1)!\,(n+1)}{(n+3)!} = \frac{(n+1)}{(n+2)\,(n+3)}$$

tendiendo el último miembro a cero al crecer n.

NOTA B

Sobre una posible extensión del concepto de estabilidad a la ley de probabilidades definida por la función $f(x) = \delta e^{-2\delta|x|}$. — 1. Sean dos variables aleatorias X_1, X_2 independientes que siguen la primera ley de Laplace con los parámetros a y b; la variable aleatoria suma seguirá una ley de probabilidad dada por (véase cap. III, n.° 1)

$$f(x) = \frac{ae^{-2a|x|}}{\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]} + \frac{be^{-2b|x|}}{\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]} = \frac{ab}{b^2-a^2}\left[be^{-2a|x|} - ae^{-2b|x|}\right]$$

Para hallar una función $F(x) = k_2 e^{-2k_2|x|}$ del mismo tipo que las primeras, que aproxime $f(x)$ en un entorno del origen, consideraremos el desarrollo en serie de $f(x)$, el cual para $x > o$ será

$$f(x) = \frac{ab}{b^2-a^2}\left[b\,(1-2\,ax+2\,a^2x^2\,...) - a\,(1-2\,bx+2\,b^2x^2\,...)\right] =$$

$$= \frac{ab}{b^2-a^2}\left[(b-a) - 2\,ab\,(b-a)\,x^2 + ...\right] = \frac{ab}{a+b}\left[1-2\,abx^2+...\right]$$

por lo tanto, para que $f(x)$ y $F(x)$ coincidan en el origen, debe hacerse

$$k_2 = \frac{ab}{b+a}$$

Desarrollando $F(x)$ para $x > o$ será

$$F(x) = k_2 [1 - 2 k_2 x + 2 k_2^2 x^2 \ldots]$$

y, por tanto, el error viene expresado por la serie alternada

$$f(x) - F(x) = 2 k_2^2 x - 2 [ab (b - a) - k_2^2] x^2 + \ldots$$

Y puesto que

$$f(x) - F(x) < 2 k_2^2 x$$

para que esta diferencia sea menor que ε, bastará que

$$x < \frac{\varepsilon}{2 k_2^2}$$

Ahora bien: siendo

$$k_2 = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

y teniendo en cuenta que $a < 1$ y $b < 1$, será

$$k_2 < \frac{1}{2}$$

de donde

$$\frac{\varepsilon}{2 k_2^2} > 2 \varepsilon$$

y, por tanto, bastará tomar

$$x < 2 \varepsilon$$

para asegurar un error menor que ε.

2. Pasando al caso de tres variables aleatorias X_1, X_2, X_3, que siguen la primera ley de Laplace con los parámetros a, b, c, siendo $a > b > c$, vamos a indicar un método que fácilmente podrá generalizarse para n variables.

Llamando $f(x)$ la función de distribución de la variable suma, se tendrá

$$f(x) = \frac{ab^2 c^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} e^{-2a|x|} + \frac{bc^2 a^2}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)} e^{-2b|x|} +$$
$$+ \frac{ca^2 b^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} e^{-2c|x|} = \frac{abc}{\Delta_3} [bc\, \Delta_{3,a}\, e^{-2a|x|} + ca\, \Delta_{3,b}\, e^{-2b|x|} +$$
$$+ ab\, \Delta_{3,c}\, e^{-2c|x|}]$$

habiendo designado por Δ_3 al determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$$

y por $\Delta_{3,a}$, $\Delta_{3,b}$, $\Delta_{3,c}$ los adjuntos de los elementos de la última fila de este determinante. El desarrollo en serie de $f(x)$ para $x > o$ será

$$f(x) = \frac{abc}{\Delta_3} \left[(bc\,\Delta_{3,a} + ca\,\Delta_{3,b} + ab\,\Delta_{3,c}) - 2\,abc\,(\Delta_{3,a} + \Delta_{3,b} + \Delta_{3,c})\,x + \ldots\right]$$

que teniendo en cuenta que

$$\Delta_{3,a} + \Delta_{3,b} + \Delta_{3,c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = o$$

y designando por $\overline{\Delta}_3$ al determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

puede escribirse

$$f(x) = \frac{abc}{\Delta_3} \left[\overline{\Delta}_3 + \lambda x^2 + \ldots\right]$$

La función $F(x) = k_3\,e^{-2k_3|x|}$ que aproxima a $f(x)$ en un entorno del origen deberá ser tal que

$$k_3 = \frac{abc\,\overline{\Delta}_3}{\Delta_3}$$

y el desarrollo de la diferencia $f(x) - F(x)$ tendrá la forma

$$f(x) - F(x) = 2\,k_3^2\,x - Ax^2 + \ldots < 2\,k_3^2\,x$$

Y para que sea menor que ε, deberemos tomar

$$x < \frac{\varepsilon}{2\,k_3^2}$$

Ahora bien; el determinante $\bar{\Delta}_3$ puede descomponerse en la forma

$$\bar{\Delta}_3 = (a + b + c)\, V$$

designando por V al determinante de Vandermonde

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

con lo que la expresión de k_3 será

$$k_3 = \frac{abc\, V \cdot (a + b + c)}{\Delta_3} = \frac{abc\,(a + b + c)}{(a + b)\,(a + c)\,(b + c)} = k_2 \frac{c\,(a + b + c)}{c\,(a + c)\,(b + c)}$$

de donde

$$k_3 < \frac{1}{2} \frac{c\,(a + b + c)}{c\,(a + b + c) + ab} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{c}{a} + \cfrac{c}{b} + \cfrac{c}{a} \cdot \cfrac{c}{b}}}$$

pero siendo $\frac{c}{a}$ y $\frac{c}{b}$ menores que 1 la suma $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a}\frac{c}{b}$ será menor que 3 y, por lo tanto,

$$k_3 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

de donde

$$\frac{\varepsilon}{2\,k_3^2} > \frac{8^2\,\varepsilon}{2 \cdot 3^2} = \frac{32}{9}\,\varepsilon$$

y bastará tomar

$$x > \frac{32}{9}\,\varepsilon$$

para que el error sea menor que ε.

3. La generalización de este proceso nos da, para n variables $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ con los parámetros $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, el siguiente desarrollo:

$$f(x) = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{\Delta_n} [\overline{\Delta}_n + \lambda x^2 + \ldots]$$

y para el valor de k_n

$$k_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{\Delta_n} \cdot \overline{\Delta}_n$$

siendo

$$\overline{\Delta}_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ a_1^3 & a_2^3 & \ldots a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{2n-3} & a_2^{2n-3} & \ldots a_n^{2n-3} \end{vmatrix}$$

Ahora bien; se tiene*

$$\overline{\Delta}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ V_n^1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ V_n^3 & V_n^2 & V_n^1 & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ V_n^{2n-3} & V_n^{2n-4} & V_n^{2n-5} & \ldots V_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

designando por V_n^m a la función homogénea completa de grado m con n variables, es decir, el desarrollo de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m$, haciendo todos los coeficientes iguales a la unidad.

La expresión de $\overline{\Delta}$ puede escribirse también así:

$$\overline{\Delta}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ a_1 & a^2 & \ldots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_n^1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ V_n^3 & V_n^2 & V_n^1 & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ V_n^{2n-5} & V_n^{2n-6} & V_n^{2n-7} & \ldots V_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

---

* BERZOLARI, L., *Enciclopedia delle Matematiche elementari*, vol. 1, parte II, pág. 103.

obteniéndose la expresión general de k_n

$$k_n = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\Delta_n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_n^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_n^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ V_n^3 & V_n^2 & V_n^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_n^{2n-5} & V_n^{2n-6} & V_n^{2n-7} & \dots & V_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + a_2)(a_1 + a_3) \dots (a_{n-1} + a_n)} \begin{vmatrix} V_n^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ V_n^3 & V_n^2 & V_n^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_n^{2n-5} & V_n^{2n-6} & V_n^{2n-7} & \dots & V_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

4. En particular, para $n = 4$ será

$$k_4 = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_1 + a_4)(a_2 + a_3)(a_2 + a_4)(a_3 + a_4)} \begin{vmatrix} V_4^1 & 1 \\ V_4^3 & V_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 (V_4^1 V_4^2 - V_4^3)}{(a_1 + a_2)(a_1 + a_3)(a_1 + a_4)(a_2 + a_3)(a_2 + a_4)(a_3 + a_4)}$$

que recordando la expresión de k_3 y haciendo para simplificar $V_4^1 \ V_4^2 - V_4^3 = H$, puede escribirse

$$k_4 = \frac{k_3}{a_1 + a_2 + a_3} \cdot \frac{a_4 H}{(a_1 + a_4)(a_2 + a_4)(a_3 + a_4)} =$$

$$= \frac{k_3 a_4 H}{a_4 H + a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}$$

y, por tanto,

$$k_4 < k_3$$

lo que nos indica que el entorno del origen en el cual se obtiene un error menor que ε es más amplio que en el caso de tres variables.

Este resultado parece indicar que a medida que el número de variables aleatorias independientes va aumentando, se va ampliando el intervalo en el cual se obtiene con la función $F(x) = k_n e^{-2k_n|x|}$ una aproximación menor que un número prefijado ε.

NOTA C

Sobre la extensión a dos variables de la primera ley de Laplace. — 1. Consideremos dos variables aleatorias X e Y, y designemos por $zdxdy$ la probabilidad de que un par de valores satisfaga simultáneamente a las desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} x < x_i < x + dx \\ y < y_i < y + dy \end{array}\right\} \tag{1}$$

Si las dos variables siguen la primera ley de Laplace, las probabilidades respectivas de que se verifiquen las anteriores desigualdades son

$$\delta_1 e^{-2\delta_1|x|}\, dx \qquad \text{y} \qquad \delta_2 e^{-2\delta_2|x|}$$

y si suponemos que X e Y son independientes, la probabilidad de que se verifiquen simultáneamente las condiciones (1) vendrá dada por

$$zdxdy = \delta_1 \delta_2 e^{-2\delta_1|x|-2\delta_2|y|}\, dxdy \tag{2}$$

Hagamos un cambio de variables, mediante una rotación de ejes

$$x = u \cos\alpha + v \operatorname{sen}\alpha \qquad y = -u \operatorname{sen}\alpha + v \cos\alpha$$

la probabilidad para que un par de valores u_i, v_k satisfaga simultáneamente las desigualdades

$$\begin{array}{l} u < u_i < u + du \\ v < v_k < v + dv \end{array} \tag{3}$$

la obtendremos substituyendo en (2) x e y por sus valores, o sea

$$P = e^{-2\delta_1|u\cos\alpha + v\operatorname{sen}\alpha| - 2\delta_2|-u\operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha|}\, dv\, du \tag{4}$$

2. Consideremos las derivadas parciales de la función

$$f(u,v) = K\, e^{-2\delta_1|u\cos\alpha + v\operatorname{sen}\alpha| - 2\delta_2|-u\operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha|} \tag{5}$$

respecto a u y a v

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} = f(u,v)\,[-\,2\,\delta_1 s_1 \cos\alpha + 2\,\delta_2 s_2 \operatorname{sen}\alpha]$$

$$\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} = f(u,v)\,[-\,2\,\delta_1 s_1 \operatorname{sen}\alpha - 2\,\delta_2 s_2 \cos\alpha]$$

indicando con s_1 los valores $+ 1$ ó $- 1$ según sea $u \cos \alpha + v \operatorname{sen} \alpha$ mayor o menor que cero, e igualmente s_2 es $+ 1$ ó $- 1$, según sea $- u \operatorname{sen} \alpha + v \cos \alpha$ positivo o negativo.

Las rectas perpendiculares

$$\left.\begin{aligned} v &= \operatorname{cotag} \alpha \cdot u \\ v &= \operatorname{tag} \alpha \cdot u \end{aligned}\right\}$$

forman el lugar geométrico de los puntos de discontinuidad de las derivadas parciales.

Si α es nulo, u y v son independientes; si no es nulo, el valor atribuído a una variable influye en la probabilidad de la otra modificando su curva de distribución; esta modificación es máxima cuando α es igual a $\frac{\pi}{4}$.

3. Podemos, pues, suponer como generalización a dos variables de la primera ley de Laplace la dada por la función de distribución

$$f(xy) = K\, e^{-K_1|ax+by|-K_2|-bx+ay|}$$

Las rectas, lugar geométrico de los puntos angulosos, son

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ - bx + ay &= 0 \end{aligned}$$

y el coeficiente angular $\frac{b}{a}$ nos da ya una primera idea de la correlación estocástica entre las dos variables X e Y.

BIBLIOGRAFÍA

TRATADOS Y MONOGRAFIAS

BERTRAND, J.: *Calcul des probabilités.*

BOREL, E.: *Principes et formules classiques du Calcul des probabilités*, t. I, fascículo I: Del «Traité du Calcul des probabilités et de ses applications», París, 1925.

BOREL, E.: *Leçons sur les series divergentes*, en *Col. de Mon. sur la theorie des fonctions*, París, 1901.

DARMOIS, G.: *Statistique Mathematique.*

DELTHEIL, R.: *Erreurs et moindres carrées*, t. I, fasc. II: «Del Traité du Calcul des probabilités et de ses applications». París, 1930.

DOETSCH, G.: *Theorie und Andwendung der Laplace-Transformation Berlin*, J. Springer, 1937.

DU PASQUIER, L. G.: *Le calcul des probabilités, son evolution matematique et philosophique*, París, 1926.

FRECHET, M.: *Generalités sur les probabilités. Variables aleatoires*, t. I, fasc. III: Del «Traité du Calcul des probabilités et de ses applications», París, 1937.

JORDAN, Ch.: *Statistique Mathematique*, París, 1927.

LEVY, P.: *Calcul des probabilités*, París, 1925.

LEVY, P.: *Theoria de l'addition des variables aleatoires*, París, 1937.

PEARSON, K.: *Tables of incomplete Γ function*, Londres, 1922.

POINCARÉ, H.: *Calcul des probabilités*, París, 1912.

POMEY, J. B.: *Calcul des probabilités*, París, 1936.

RISSER, R., TRAYNARD, C. E.: *Les principes de la Statistique mathematique*, t. I, fasc. IV: «Del Traité du Calcul des probabilités et de ses applications», París, 1933.

MEMORIAS Y ARTICULOS ESPECIALES

BROGGI, U.: *Sugli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre*, en *Rend. Accad. Naz. Lincei*, t. XXII, 6, 1935.

FRECHET, M.: *Sur l'hipothèse de l'additivité des erreurs partielles*, en *Bull. Sci. Math.*, t. 63, 1928.

LAPLACE, P. S.: *Sur les probabilités des causes par les evenements*, 1774, en *Oeuvres*, t. VIII.

LAPLACE, P. S.: *Memoire sur les probabilités*, 1780, en *Oeuvres*, t. IX.

LAPLACE, P. S.: *Sur les aproximations des formules qui sont fonctions du trés grandes nombres et sur applications aux probabilités*, 1810, en *Oeuvres*, t. XII.

LE ROY, E.: *Sur les series divergentes et les fonctions definies par un developement de Taylor*, en *Ann. de la Facul. des Sciencies de Toulouse*, t. II, 1900.

POLYA, G.: *Uber Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitrechnung das Moment-Problem*, en *Math. Zeit.*, 1920.

POLYA, G.: *Uber die Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, en *Mat. Zeit.*, 1929.

POLYA, G.: *Sur quelques points de la theorie des probabilités*, en *Ann. Inst. Henry Poincaré*, t. I, 1931.

TRICOMI, F.: *Transformazione di Laplace e polinomi di Laguerre*, en *Rend. Accad.* Naz. Lincei, t. XXI, 6, 1935.

WILSON, E. B.: *First and second law of error*, en *Jour. Amer. Statist. Ass.*, t. 18, 1923.

WILSON, E. B.: *The developement of a frecuency function and some comments of curve fitting*, en *Proc. Nat. Acad. of Sci. U. S. A.*, t. X, 1924.