"C-BASES EN ESPACIOS PRODUCTO"

por

CELESTINO MONTES (*)

SUMMARY

We construct a Cesàro basis in the countable topological product of spaces with Cesàro basis.

1. INTRODUCCION:

Una sucesión $(x_n)_{n=1,2,...}$ de elementos de un espacio localmente convexo E se dice que es una c-base de E, si todo elemento x de E admite una única representación en la forma $x = \sum_1^\infty a_n(x)\, x_n$ (c), donde el símbolo (c) indica que la convergencia se toma en el sentido de Cesàro, es decir

$$\lim \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_i(x)\, x_i \right) = x$$

Es trivial que los operadores a_n son lineales. La sucesión $(a_n)_{n=1,2,...}$ del dual algebraico de E se denominará sucesión de coeficientes funcionales asociados (abreviadamente s.c.f.a.) a la c-base. Son conocidos espacios con c-bases que no son bases. Por ejemplo el sistema trigonométrico en C[0, 1], y la sucesión (e_n) en el espacio CS de las sucesiones que son sumables en el sentido de Cesàro ([1]). Es un problema abierto el determinar si existen espacios de Banach que posean una c-base y no tengan base. La resolución de este problema implicaría la del problema de la base en su actual estado: ¿Debe todo espacio de Banach separable con la propiedad de la aproximación acotada tener una base?. En este trabajo obtenemos las propiedades de estabilidad de los espacios con c-base frente a los productos topológicos en el contexto de los espacios localmente convexos.

(*) Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. P. Perez Carreras.

2. RESULTADOS PREVIOS

La siguiente proposición puede obtenerse con las técnicas del caso escalar (Criterio de Stolz).

Proposición 1.

Sea $(\alpha_n)_{n=1,2,\ldots}$ una sucesión de escalares positivos estrictamente creciente y divergente. Sea $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ una sucesión en el espacio localmente convexo E. Supongamos además qué

$$\lim_n \left(\frac{1}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} (x_n - x_{n-1}) \right) = x$$

Entonces $\left(\frac{1}{\alpha_n} x_n \right)$ es convergente y $\lim_n \frac{1}{\alpha_n} x_n = x$.

El segundo resultado que necesitamos es un resultado sobre supresión de ceros en una serie c-convergente. Si en una serie covergente se suprimen todos o algunos de sus términos nulos, la serie resultante sigue siendo covergente y tiene la misma suma. Es conocido que esta situación no puede trasladarse en caso de series c-convergentes. Damos, en el teorema, siguiente, una condición suficiente para que ésto pueda hacerse, en el contexto de los espacios localmente convexos. Necesitamos antes un lema. Dada la sucesión de reales positivos $(p_n)_{n=1,2,\ldots}$ de tal forma que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ diverge, se dice que una sucesión (x_n) de elementos de un espacio localmente convexo E es $N(p_n)$-convergente a x si:

$$\lim_n \frac{1}{p_1 + \ldots + p_n} (p_1 x_1 + \ldots p_n x_n) = x$$

Nos basaremos en un resultado de inclusión de medias de Nörlund para obtener el resultado anunciado.

Lema 1.

Sean (p_n) y (q_n) dos sucesiones en las condiciones anteriores. Supongamos además que

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

Si $\sum_1^{\infty} x_n$ es una serie $N(p_n)$-convergente de un espacio localmente convexo, entonces es $N(q_n)$-convergente y tiene la misma suma.

Su demostración, que puede encontrarse en [4, pg 25], sigue la línea de [2, pg 59], basándose su demostración en el teorema de Silverman-Toeplitz. Con ella podemos demostrar el siguiente teorema, que está basado en los dos ejemplos de [2, pg. 60].

Proposición 2.

Sea $\sum_1^\infty x_n$ una serie en un espacio localmente convexo E y $\Sigma\, y_n$ la serie de témino general

$$y_n = \begin{cases} x_k & \text{si} \quad n = n_k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq n_k \end{cases}$$

donde (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

Si $n_{k+2} - n_{k+1} \geqslant n_{k+1} - n_k$ y $\sum_1^\infty y_n$ es c-convergente entronces $\sum_1^\infty x_n$ es c-convergente y tiene la misma suma.

Demostración:

Sean (S_n) y (T_n) la sucesión de sumas parciales de las series $\Sigma\, x_n$ y $\Sigma\, y_n$ respectivamente.

Se tiene entonces la siguiente igualdad:

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_{n_k} = (n_2 - n_1) S_1 + (n_3 - n_2) S_2 + \ldots + (n_k - n_{k-1}) S_{k-1} + T_{n_k}$$

De donde:

$$\frac{(n_2 - n_1) S_1 + (n_3 - n_2) S_2 + \ldots + (n_k - n_{k-1}) S_{k-1}}{n_k} =$$

$$= \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_{n_k}}{n_k} - \frac{T_{n_k}}{n_k}$$

Al ser (T_n) convergente en el sentido de Cesàro, digamos a x:

$$\frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{k} x \quad \text{y} \quad \frac{T_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{k} 0$$

De esta forma es claro que la serie $\Sigma\, x_n$ es $N(n_{k+1} - n_k)$-convergente a x.

Como $\dfrac{n_{k+2} - n_{k+1}}{n_{k+1} - n_k} \geqslant \dfrac{1}{1}$, aplicando el lema 1, obtenemos que $\Sigma\, x_n$ es N(1)-convergente a x, es decir, c-convergente a x.

3. PRODUCTOS DE ESPACIOS CON C-BASE

El caso de los productos finitos es sencillo, pudiéndose abordar directamente mediante el cálculo de las sumas en el sentido de Cèsaro. El resultado que se obtiene es el siguiente:

Proposición 3.

Sea (x_n) una c-base del espacio localmente convexo E, e (y_n) una c-base de F. La sucesión

$$z_n = \begin{cases} (x_k, 0) & \text{si} \quad n = 2k - 1 \\ \\ (0, y_k) & \text{si} \quad n = 2k \end{cases}$$

es una c-base de E x F con la topología producto.

Pasaremos entonces a estudiar el caso de productos numerables. En adelante mantendremos la siguiente notación: $(E_k)_{k=1,2,\ldots}$ representará una sucesión de espacios localmente convexos. Supondremos que para cada k,E_k posee una c-base que denotaremos por $(x_n^k)_{n=1,2,\ldots}$.

Consideremos la sucesión doble:

$$\begin{array}{ll} (x_1^1, 0, 0, \ldots), & (0, x_1^2, 0, \ldots) \ \ldots \\ (x_2^1, 0, 0, \ldots), & (0, x_2^2, 0, \ldots) \ \ldots \\ (x_3^1, 0, 0, \ldots), & (0, x_3^2, 0, \ldots) \ \ldots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

a la cual daremos la siguiente ordenación:

$$z_n = \begin{cases} (0, \ldots, x_p^{k+1}, 0, \ldots) & \text{si} \quad n = k^2 + p \quad (p = 1, \ldots, k+1) \\ \\ (0, \ldots, x_{k+1}^{k+1-p}, 0, \ldots) & \text{si} \quad n = k^2 + k + 1 + p \quad (p = 1 \ldots k) \end{cases}$$

$(f_n^k)_{n=1,2,\dots}$ será la s.c.f.a a la base (x_n^k); a partir de ella podemos construir la sucesión doble $(h_n^k)_{n,\,k=1,2,\dots}$ donde $h_n^k\colon \prod_{k=1}^{\infty} E_k \to K$ está definida por: $h_n^k\,(y^1, y^2, \dots) = f_n^k\,(y^k)$, es decir, $h_n^k = f_n^k \cdot P_k$, donde P_k es la k-ésima proyección canónica.

Ordenaremos esta sucesión doble de la misma forma que la primera, es decir, denotaremos por (h_n) a la sucesión:

$$h_n = \begin{cases} h_p^{k+1} & \text{si} \quad n = k^2 + p \qquad (p = 1, 2, \dots, k+1) \\ \\ h_{k+1}^{k+1-p} & \text{si} \quad n = k^2 + k + 1 + p \; (p = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

Finalmente usaremos las siguientes notaciones:

$$S_n^k\,(x^k) = f_1^k\,(x^k)\,x_1^k + \dots + f_n^k\,(x^k)\,x_n^k \qquad \text{si} \quad x^k \in E_k$$

$$S_n\,(x) = h_1\,(x)\,z_1 + \dots + h_n\,(x)\,z_n \qquad \text{si} \quad x \in \prod_{k=1}^{\infty} E_k$$

$$H_n^k\,(x^k) = S_1^k\,(x^k) + \dots + S_n^k\,(x^k) \qquad \text{si} \quad x^k \in E_k$$

$$H_n\,(x) = S_1\,(x) + \dots + S_n\,(x) \qquad \text{si} \quad x \in \prod_{k=1}^{\infty} E_k$$

Omitiremos las variables x y x^k cuando no haya lugar a confusión.

La prueba del siguiente Lema, de carácter laborioso aunque no involucra nuevas ideas, puede encontrarse en [4].

Lema 2.

(1) $S_{n^2}\,(x^1, x^2, \dots) = (S_n^1\,(x^1), S_n^2\,(x^2), \; \dots, S_n^n\,(x^n), 0, \dots)$

(2) Si $p = 1, 2, \dots, n+1$ entonces:

$$S_{n^2+p}\,(x^1, x^2, \dots) = (S_n^1\,(x^1), \dots, S_n^n\,(x^n), S^{n+1}\,(x^{n+1}), 0, \dots)$$

(3) Si $p = 1, 2, \dots, n$ entonces:

$$S_{n^2+n+1+p}\,(x^1, x^2, \dots) = (S_n^1\,(x^1), \dots, S_n^{n-p}\,(x^{n-p}), S_{n+1}^{n-p+1}\,(x^{n-p+1}), \dots, S_{n+1}^{n+1}\,(x^{n+1}), 0, \dots)$$

Lema 3.

Si $n > m+2$, la coordenada m-ésima de $H_{n^2}(x)$ es:

$$P_m(H_{n^2}(x)) = A_m + mS_n^m(x^m) + \sum_{i=1}^{n-1} S_i^m(x^m) + 2\sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m(x^m)$$

Donde $A_m \in E_m$ depende de m y x y no de n.

Demostración:

En primer lugar, teniendo en cuenta el lema 2:

$$H_{n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n^2} S_i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k^2+1}^{(k+1)^2} S_i = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k+1} S_{k^2+i} + \sum_{i=1}^{k} S_{k^2+k+1+i}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k+1} (S_k^1, S_k^2, \dots, S_k^k, S_i^{k+1}, 0, 0, \dots)\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} (S_k^1, \dots, S_k^{k-i}, S_{k+1}^{k-i+1}, \dots, S_{k+1}^{k+1}, 0, 0, \dots)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)S_k^1, (k+1)S_k^2, \dots, (k+1)S_k^k, H_{k+1}^{k+1}, 0, 0, \dots\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\Big(kS_k^1 + f_{k+1}^1(x^1)x_{k+1}^1, kS_k^2 + 2f_{k+1}^2(x^2)x_{k+1}^2, \dots,$$

$$, kS_k^{k-1} + (k-1)f_{k+1}^{k-1}(x^{k-1})x_{k+1}^{k-1}, kS_{k+1}^k, kS_{k+1}^{k+1}, 0, \dots\Big).$$

Con lo cual la coordenada m-ésima de H_{n^2} si $n > m+2$ será:

$$\begin{aligned} P_m(H_{n^2}(x)) = {} & H_m^m + (m+1)S_m^m + \dots + nS_{n-1}^m + \\ & + (m-1)S_m^m + mS_{m+1}^m + (m+1)S_{m+1}^m + \dots + (n-1)S_{n-1}^m + \\ & + mf_{m+2}^m(x^m)x_{m+2}^m + mf_{m+3}^m(x^m)x_{m+3}^m + \dots + \\ & + mf_n^m(x^m)x_n^m . \end{aligned}$$

Es decir:

$$P_m(H_{n^2}(x)) = H_m^m - \sum_{i=1}^{m-1}(i+1)S_i^m + \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)S_i^m + (m-1)S_m^m +$$

$$+ mS_{m+1}^m - \sum_{i=1}^{m} iS_i^m + \sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m + m(S_n^m - S_{m+1}^m).$$

De donde finalmente:

$$P_m(H_{n^2}(x)) = A_m + mS_n^m(x^m) + \sum_{i=1}^{n-1} S_i^m(x^m) + 2\sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m(x^m).$$

Donde $A_m \in E_m$ no depende de n. c.q.d.

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

Teorema.

Sea $(E_k)_{k=1,2,\ldots}$ una sucesión de espacios localmente convexos.

Sea $(x_n^k)_{n=1,2,\ldots}$ una c-base de E_k. La sucesión (z_n) definida por:

$$z_n = \begin{cases} (0,\ldots,x_p^{k+1},0,\ldots) & \text{si} \quad n=k^2+p \quad (p=1,\ldots,k+1) \\ (0,\ldots,x_{k+1}^{k+1-p},0,\ldots) & \text{si} \quad n=k^2+k+1+p \quad (p=1,\ldots,k) \end{cases}$$

es una c-base de $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$.

Demostración:

Veamos en primer lugar que $\lim_n \frac{1}{n^2} H_{n^2}(x) = x$.

Bastará para ello, manteniendo la notación precedente, demostrar que $\lim_n P_m\left(\frac{1}{n^2} H_{n^2}(x)\right) = P_m(x) = x^m$. Ahora bien, según el lema 3:

$$P_m\left(\frac{1}{n^2} H_{n^2}(x)\right) = \frac{1}{n^2}\left(A_m + mS_n^m(x^m) + \sum_{i=1}^{n-1} S_i^m(x^m) + 2\sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m(x^m)\right).$$

Teniendo en cuenta entonces que:

$$\lim_n \frac{1}{n} S_n^m = \lim_n \frac{S_1^m + \ldots + S_n^m}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{S_1^m + \ldots + S_{n-1}^m}{n-1} = 0$$

Y que, aplicando la proposición 1 (Criterio de Stolz), $\lim_n \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} S_i^m =$ $= \lim_n \frac{1}{n^2 - (n-1)^2} S_{n-1}^m = 0$, deducimos que el límite de $P_m\left(\frac{1}{n^2} H_{n^2}(x)\right)$ existirá si y sólo si existe $\lim_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{n^2} S_i^m$ y en ese caso:

$$\lim_n P_m\left(\frac{1}{n^2} H_{n^2}(x)\right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{n^2} S_i^m$$

Pero $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{n^2} S_i^m = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m = \frac{2}{n^2} (n-1) H_{n-1}^m - \left(H_1^m + \ldots + H_{n-2}^m\right) =$

$$= \frac{2(n-1)^2}{n^2} \frac{1}{n-1} H_n^m - \frac{2}{n^2}\left(H_1^m + \ldots + H_{n-2}^m\right)$$

Como $\left(\frac{1}{n-1} H_n^m\right)_n$ converge a x^m por ser x_n^m una c-base de E_m, y aplicando el criterio de Stolz, $\frac{1}{n^2}\left(H_1^m + \ldots + H_{n-2}\right)$ converge a x^m, tendremos entonces que:

$$\lim_n P_m\left(\frac{1}{n^2} H_{n^2}(x)\right) = x \text{ para todo m en } \mathbb{N}$$

De donde

$$\lim_n P_m\left(\frac{1}{n^2} H_{n^2}(x)\right) = x \text{ en } \prod_{k=1}^{\infty} E_k$$

Veamos finalmente que $\lim_n \frac{1}{n} H_n(x) = x$ en $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$.

Sea q una seminorma en E_m y $\epsilon > 0$.

Sea $k_0 > m$ de tal forma que:

(1) $\frac{2k+1}{k^2} < \frac{\epsilon}{M}$ si $k \geqslant k_0$ $\left(M = \sup_{p \in \mathbb{N}} q\left(\frac{1}{p} H_p^m(x^m)\right)\right)$

(2) $q\left(P_m\left(\frac{1}{k^2} H_{k^2}(x) - x\right)\right)$ si $k \geqslant k_0$

(3) $q\left(\frac{1}{k} S_k^m(x^m)\right)$ si $k \geqslant k_0$

Sea $n_0 = k_0^2$ y $n \geqslant n_0$.

Si $n = k^2 + p$, $(p = 1, 2, \ldots, 2k+1)$, $k \geqslant k_0$, entonces:

$$q(P_m(\frac{1}{n}H_n(x)-x)) = q(P_m(\frac{1}{k^2+p}H_{k^2+p}(x)-x))=$$

$$=q(P_m(\frac{1}{k^2+p}H_{k^2}(x)-x+\frac{1}{k^2+p}(S_{k^2+1}(x)+\ldots+S_{k^2+p}(x)))=$$

$$=q(P_m(\frac{1}{k^2}(1-\frac{p}{k^2+p})H_{k^2}(x)-x+\frac{1}{k^2+p}(S_{k^2+1}(x)+\ldots+$$

$$+S_{k^2+p}(x))))=q(P_m((1-\frac{p}{k^2+p})(\frac{1}{k^2}H_{k^2}(x)-x)-\frac{p}{k^2+p}x+$$

$$+\frac{1}{k^2+p}(S_{k^2+1}(x)+\ldots+S_{k^2+p}(x))))\leqslant$$

$$\leqslant(1-\frac{p}{k^2+p})q(P_m(\frac{1}{k^2}H_{k^2}(x)-x))+\frac{p}{k^2+p}q(x^m)+$$

$$+\frac{1}{k^2+p}q(P_m(S_{k^2+1}(x)+\ldots+S_{k^2+p}(x)))\leqslant$$

$$\leqslant q(P_m(\frac{1}{k^2}H_{k^2}(x)-x))+\frac{2k+1}{k^2}q(x^m)+\frac{1}{k^2+p}q(P_m(S_{k^2+1}(x)+$$

$$+\ldots+S_{k^2+p}(x)))\leqslant\epsilon+\frac{\epsilon}{M}q(x^m)+\frac{1}{k^2+p}q(P_m(S_{k^2+1}(x)+\ldots+$$

$$+S_{k^2+p}(x)))\leqslant 2\epsilon+\frac{1}{k^2+p}q(P_m(S_{k^2+1}(x)+\ldots+S_{k^2+p}(x))).$$

a) Si $p=1,2,\ldots,k+1$ tendremos que:

$$P_m(S_{k^2+1}(x)+\ldots+S_{k^2+p}(x))=pS_k^m(x^m) \qquad (k_0>m).$$

Con lo cual

$$q(P_m(\frac{1}{n}H_n(x)-x))\leqslant 2\epsilon+\frac{p}{k^2+p}q(S_k^m(x^m))\leqslant$$

$$\leqslant 2\epsilon+\frac{2k+1}{k^2}q(S_k^m(x^m))\leqslant 2\epsilon+\frac{2k+1}{k}q(\frac{1}{k}S_k^m(x^m))<2\epsilon+3\epsilon=5\epsilon.$$

b) Si $p=k+1+h$, $h=1,2,\ldots,k$ tendremos:

$$q(P_m(\frac{1}{n}H_n(x)-x))\leqslant 2\epsilon+\frac{1}{k^2+k+1+h}q(P_m(S_{k^2+1}(x)+\ldots+$$

$$+ S_{k^2+k+1}(x) + \ldots + S_{k^2+k+1+h}(x))) \leqslant$$

$$\leqslant 2\epsilon + \frac{1}{k^2+k+1}\, q\,(P_m(S_{k^2+1}(x) + \ldots + S_{k^2+k+1}(x))) +$$

$$+ \frac{1}{k^2+k+1+h}\, q(P_m(S_{k^2+k+2}(x) + \ldots + S_{k^2+k+1+h}(x))) \leqslant$$

$$\leqslant 5\epsilon + \frac{1}{k^2+k+1+h}\, q(P_m(S_{k^2+k+1+1}(x) + \ldots + S_{k^2+k+1+h}(x)))$$

Ahora bien:

$$P_m\,(S_{k^2+k+1+1}(x) + \ldots + S_{k^2+k+1+h}(x)) = hS_k^m(x^m) + \nu f_{k+1}^m(x^m)\, x_{k+1}^m$$

donde ν es un entero menor que h.

Por tanto:

$$\frac{1}{k^2+k+1+h}\, q(P_m(S_{k^2+k+1+1}(x) + \ldots + S_{k^2+k+1+h}(x))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h}{k^2+k+1+h}\, q(S_k^m(x^m)) + \frac{\nu}{k^2+k+1+h}\, q(f_{k+1}^m(x^m)\, x_{k+1}^m) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{k^2}\, q(S_k^m(x^m)) + \frac{k}{k^2}\, q(S_{k+1}^m(x^m) - S_k^m(x^m)) \leqslant$$

$$\leqslant 2q\,(\frac{1}{k}\, S_k^m(x^m)) + \frac{k+1}{k}\, q\,(\frac{1}{k+1}\, S_{k+1}^m(x^m)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon.$$

De donde:

$$q\,(P_m(\frac{1}{n}\, H_n(x) - x)) \leqslant 5\epsilon + 4\epsilon = 9\epsilon.$$

En definitiva, si $n \geqslant n_0$

$$q(P_m\,(\frac{1}{n}\, H_n(x) - x)) \leqslant 9\epsilon$$

Y de aquí que

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)\, z_n = x(c) \qquad \text{en} \qquad \prod_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Veamos finalmente que la c-descomposición de cualquier elemento es única. Supongamos para ello que $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n(c)$ en $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$.

Consideremos la proyección m-ésima P_m que es una aplicación lineal y continua. Tendremos entonces que

$$(3) \quad 0 = P_m(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n)(c) = \sum_{n=1}^{m^2} \alpha_n P_m(z_n) + \sum_{n=m^2+1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n)(c)$$

Estudiemos ahora la distribución de ceros en la serie

$$\sum_{m^2+1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n).$$

Como quiera que

$$z_n = \begin{cases} (0,\ldots,x_p^{k+1},0,\ldots) & \text{si } n = k^2+p \quad (p = 1,\ldots,k+1) \\ (0,\ldots,x_{k+1}^{k+1-p},0,\ldots) & \text{si } n = k^2+k+1+p \ (p = 1,\ldots,k) \end{cases}$$

Si $n = k^2+p$ $(p = 1, \ldots, k+1)$, se tendrá que $k \geqslant m$ con lo cual $P_m(z_n) = 0$.

Si $n = k^2+k+1+p$ $(p = 1, \ldots, k)$ se tendrá que $P_m(z_n) \neq 0$ si y sólo si $k+1-p = m$. Fijados entonces m y $k \geqslant m$ obtenemos que $P_m(z_n) \neq 0$ $(n = k^2+p$ $(p = 1, \ldots, 2k+1))$ si y sólo si $p = k+1-m$. De esta forma si $n \geqslant m^2+1$ y $n \neq n_k = (k+1)^2-m+1$ $(k = m, m+1, \ldots)$, $P_m(z_n) = 0$. Como quiera que $n_{k+1}-n_k = (k+1)^2 - (k+1)^2 = 2k+3$ es una sucesión creciente, aplicando la proposición 2 obtenemos que:

$$\sum_{n=m^2+1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n)(c) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{(k+1)^2-m+1} x_{k+1}^m(c).$$

Con lo cual teniendo en cuenta (3):

$$(4) \quad 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n) + \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{(k+1)^2-m+1} x_{k+1}^m(c)$$

Ahora bien si $P_m(z_n) \neq 0$ y $n = 1,2, \ldots, m^2$ no puede ser $n = k^2+k+1+p$ $(p = 1, \ldots, k)$ ya que en este caso $k+1-p = m$ y por tanto $k = m+p-1 \geqslant m$, con lo que $n \geqslant m^2+m+1+p > m$. Deberá ser entonces $n = k^2+p$ $(p = 1, \ldots, k+1)$ y por tanto $k+1 = m$ con lo cual (4) se convierte en:

$$0 = \sum_{p=1}^{m} \alpha_{(m-1)^2+p}\, x_p^m + \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{(k+1)^2-m+1}\, x_{k+1}^m \ (c).$$

El hecho de ser (x_n^m) una c-base de E_m nos permite asegurar que:

$$\alpha_{(m-1)^2+p} = 0 \qquad (p = 1,2,\ldots,m)$$

$$\alpha_{(k+1)^2-m+1} = 0 \qquad (k = m, m+1, \ldots)$$

Y esto para todo valor de m. Nuestra prueba concluirá si probamos que todo número natural n puede escribirse en la forma $(m-1)^2+p$ $(m = 1,2,\ldots,$ $p = 1,2,\ldots,m)$ o bien en la forma $(k+1)^2-m+1$ $(m = 1,2,\ldots, k = m,m+1,\ldots)$.

Ahora bien todo número natural puede escribirse como q^2+h $(h = 1,2,\ldots,q+1)$ ó $q^2+q+1+h$ $(h = 1,2,\ldots,q)$ con $q = 0,1,\ldots$. Basta tomar en el primer caso $m = 1+q$, $p = h$ y en el segundo $m = q-h+1$ y $k = q$. c.q.d.

Notas: En ningún momento se supone la continuidad de las s.c.f.a. a las c-bases. De suponer esto la demostración de la unicidad del desarrollo podría obtenerse de forma trivial.

El resultado no puede extenderse a productos de $2^{\aleph_0}$ factores debido a que salvo casos triviales dicho producto no sería sucesionalmente separable mientras que procediendo como en [3, pg 255] puede probarse que todo espacio con una c-base es sucesionalmente separable.

BIBLIOGRAFIA

1.– Florencio, M.: Sobre sumabilidad Cesáro en el espacio CS (I). Rev. R. Ac. Ci. Ex. Fis. Nat. LXXV (1185-1197).

2.– Hardy, G.H.: Divergent series. Oxford (1973).

3.– Köthe, G.: Topological Vector Spaces II (1979).

4.– Montes, C.: Sobre ciertos tipos de bases en espacios localmente convexos. Tesis. Universidad de Sevilla (1982).