GLI UNIVERSI IPERSFERICI, IL GRUPPO CONFORME ED IL CAMPO GRAVITAZIONALE DI NEWTON

por

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma) (*)

ABSTRACT

The theory of the Hyperspherical Universes S_n, based on the rotations group R_{n+1}, for n=4 gives the "Special Projective Relativity" and the equations of magnetohydrodynamics. Instead, for n=5 we obtain a generalization of the "Conformal Relativity" and an unified theory of matter and electricity based on group theory.

1. GLI UNIVERSI IPERSFERICI E LE TEORIE UNITARIE

Come é noto [1], il problema della risolubilità delle equazioni algebriche, é stato risolto da E. Galois, applicando la teoria dei gruppi delle sostituzioni.

In modo analogo, il problema di costruire una "teoria unitaria" della materia e della elettricità, che non é stato ancora risolto, può essere chiarito se applichiamo alla fisica la teoria dei gruppi, e cioé se ci poniamo dal punto di vista della "teoria degli Universi Ipersferici", da me proposta nel 1958, e poi sviluppata negli anni successivi [2]. Essa é un caso particolare della "teoria degli Universi" di Fantappié [3], quando il gruppo base é quello delle rotazioni R_{n+1} dello spazio ad $n + 1$ dimensioni, con $N = n(n + 1)/2$ parametri, che ci dà i "movimenti in sé" del modello di Universo Ipersferico S_n, ad n dimensioni. Si ha allora

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
N	6	10	15	21	28	36	45	55	66	...

ed il numero N dei parametri (che ci dà i gradi di libertà del corrispondente modello di Universo), é dato dai famosi "numeri triangolari" di Pitagora.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNFM del CNR (Italia).

E' poi interessante ricordare che il volume della ipersfera S_n di raggio r, é dato dalla semplice formula [4]:

$$V_n = V_n^\circ r^n \tag{1,1}$$

dove V_n° él il volume della sfera di raggio 1. Si dimostra allora che vale la formula ricorrente

$$V_n^\circ = (2\,\pi/n)\,V_{n-2}^\circ \tag{1,2}$$

e tenendo conto che $V_2^\circ = \pi$, mentre $V_3^\circ = 4\,\pi/3$, si deduce che

$$V_{2s}^\circ = \frac{\pi^s}{s!} \quad ; \quad V_{2s+1}^\circ = \frac{2\,(2\,\pi)^s}{1.3.5....(2s+1)} \tag{1,3}$$

La misura della superficie di S_n, si ottiene per derivazione

$$A_n = d\,(V_n^\circ r^n)/dr = n\,V_n^\circ r^{n-1} \tag{1,4}$$

ed in base alle (3) otteniamo le formule

$$A_{2s}^\circ = \frac{2\,\pi^s}{(s-1)!} \quad ; \quad A_{2s+1}^\circ = \frac{2.\,(2\,\pi)^s}{1.3.5...(2s-1)} \tag{1,5}$$

Fatti i calcoli si trova che

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
A_n°	6,28	12,56	19,73	26,31	31,00	*33,07*	32,46	29,68	25,50 ..
V_n°	3,14	4,18	4,93	*5,26*	5,16	4,72	4,05	3,29	2,55 ..

Ne segue che, mentre l'area della ipersfera S_n é massima per $n = 7$, il suo volume é massimo per $n = 5$, e poi essi tendono rapidamente ad annullarsi. Per es. per $n = 40$, abbiamo

$$A_{40}^\circ = 1{,}44 \cdot 10^{-7} \quad ; \quad V_{40}^\circ = 3{,}6 \cdot 10^{-9} \tag{1,6}$$

Abbiamo visto nei precedenti lavori, che le leggi fisiche nell'Universo Ipersferico S_n, sono date equazioni di Maxwell generalizzate

$$\boxed{\text{Rot}\, H_{ik} = J_{ikl} \quad ; \quad \text{Div}\, H_{ik} = I_k} \qquad (ikl = 0,1\,...\,n) \tag{1,7}$$

dove il campo H_{ik} ha tante componenti quanti sono i parametri N del gruppo delle rotazioni. In corrispondenza abbiamo il tensore energetico

$$T_{ik} = H_{is}\,H_{sk} + (1/4)\,H_{rs}\,H_{rs}\,\delta_{ik} \tag{1,8}$$

La teoria dei gruppi delle rotazioni ci fornisce quindi nel modo più naturale la via per le successive "sintesi" dei campi, e questo perché la teoria di Maxwell ci dà il primo esempio di una perfetta unificazione dei due campi elettrico e magnetico, in un unico campo elettromagnetico.

Come sappiamo, per $n = 4$, la "relatività speciale proiettiva" (RSP), ci permette di unificare il campo elettromagnetico con quello idrodinamico. A tale teoria corrisponde la "relatività generale proiettiva" (RGP), nella quale le equazioni di Einstein generalizzate

$$R_{AB} - \tfrac{1}{2} R \gamma_{AB} = \chi T_{AB} \qquad (AB = 0, 1 \ldots 4) \tag{1,9}$$

stabiliscono il legame tra il tensore di curvatura e torsione di Cartan ed il tensore energetico del campo magnetoidrodinamico (5). Tale teoria non unifica però il campo elettromagnetico con quello gravitazionale, ma ci dà piuttosto una generalizzazione del campo gravitazionale, che viene completato con l'aggiunta di un campo vettoriale e di un campo scalare, legati al campo magnetoidrodinamico.

Per ottenere invece una vera e propria "sintesi" tra campo elettromagnetico e campo gravitazionale (newtoniano), occorre passare all'Universo ipersferico S_5, ed alle corrispondenti equazioni (7). Si ottiene allora la "relatività conforme", nella quale i movimenti uniformemente accelerati vengono inseriti nel gruppo base. In questo lavoro ci proponiamo di studiare la relatività conforme, inserendola entro lo schema più generale della teoria degli Universi Ipersferici (per $n = 5$), e di esaminare la nuova teoria unitaria della materia e della elettricità che così si ottiene.

2. LA RELATIVITÀ CONFORME E LE ROTAZIONI DELLO SPAZIO A 6 DIMENSIONI

L'importanza del gruppo conforme in fisica, deriva dal fatto che, come hanno dimostrato nel 1910 Cunningham e Bateman (6), le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico, presentano invarianza per le trasformazioni del gruppo conforme.

Tale gruppo conforme é isomorfo a quello R_6 delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni, a 15 parametri. Infatti, seguendo Y. Murai (7), le 4 coordinate spazio-temporal x_i, sono legate alle 6 coordinate z_a (con $a = 0, 1 \ldots 5$), dalle semplici relazioni

$$x_i = \frac{z_i \sqrt{2}}{z_0 + z_5} \quad ; \quad \tfrac{1}{2} x^2 = \frac{z_0 - z_5}{z_0 + z_5} \tag{2,1}$$

con $x^2 = x_i x_i$. Si verifica subito che

$$z^2 + z_0^2 - z_5^2 = 0 \qquad \text{con } z^2 = z_i z_i \tag{2,2}$$

e tale relazione rimane invariante per le trasformazioni del gruppo R_6.

Poiché in questo modo la teoria é limitata ai punti del cono-luce, recentemente M. Pavsic ([8]), ha tolto questa limitazione, considerando le z_a nell'intero spazio E_6. Nel 1978 E. Pessa ([9]), ha generalizzato le (1) in modo da tener conto dei risultati della RSP, nel seguente modo

$$x_i = \frac{r\, z_i}{\sqrt{z_0^2 - z_5^2}} \quad ; \quad x^2 + r^2 = \frac{r^4}{z_0^2 - z_5^2} \tag{2,3}$$

le quali soddisfano alla nuova relazione

$$z^2 + z_0^2 - z_5^2 = r^2 \tag{2,4}$$

Ricordiamo infine che nel 1954, R. L. Ingraham ([10]) ha sviluppato la "relatività conforme", introducendo lo "spazio delle sfere", nel seguente modo: ad ogni sfera di centro x_i e raggio R dello spazio-tempo di Minkowski, possiamo associare le 6 coordinate omogenee X_a, così definite

$$k\, X_i = x_i \quad ; \quad k\, X_5 = \tfrac{1}{2}(x^2 - R^2) \quad ; \quad k\, X_0 = 1 \tag{2,5}$$

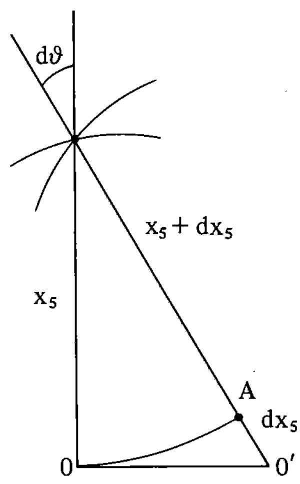
dove k é un fattore di proporzionalità. Abbiamo in questo modo uno spazio proiettivo P_5 a 5 dimensioni, nel quale il luogo delle sfere di raggio nullo (R = 0) é dato dalla quadrica Q di equazione

$$X^2 - 2\, X_0\, X_5 = 0 \qquad \text{con } X^2 = X_i\, X_i \tag{2,6}$$

La relatività conforme viene sviluppata da Ingraham, utilizzando le 5 coordinate "conformi" (x_i, x_5 = R), ottenute dalle (5) per k = 1, e cioé ponendo

$$X_i = x_i \quad ; \quad X_5 = \tfrac{1}{2}(x^2 - x_5^2) \quad ; \quad X_0 = 1 \tag{2,7}$$

In coordinate conformi, la metrica assume la forma



$$ds^2 = (1/x_5)^2 (dx^2 - dx_5^2) \tag{2,8}$$

Essa ci dà l'angolo infinitesimo $d\vartheta = ds$, tra le due sfere (x_i, x_5) ed $(x_i + dx_i, x_5 + dx_5)$. Infatti, dal triangolo rettangolo OO'A, segue che

$$dx^2 = dx_5{}^2 + x_5{}^2 \, d\,\vartheta^2 \tag{2,9}$$

e quindi l'angolo $d\,\vartheta$ é dato dalla (8). Tale angolo é in conseguenza invariante per le trasformazioni del gruppo conforme.

3. LE COORDINATE PROIETTIVE, CONFORMI, ESASFERICHE E CARTESIANE

Per inserire le ricerche sulla "relatività conforme" entro lo schema più ampio della "teoria degli Universi Ipersferici" S_n, per $n = 5$, occorre ampliarla opportunamente. A questo scopo introduciamo 4 tipi di coordinate, delle quali solo quelle "conformi" hanno un diretto significato fisico, mentre le altre ci serviranno nei calcoli.

a) *Le coordinate proiettive* – L'Universo Ipersferico S_5 può essere studiato mediante la sua "rappresentazione geodetica", e cioé introducendo lo spazio proiettivo P_5 (che generalizza il cronotopo di Castelnuovo della RSP). Occorre allora utilizzare le 6 coordinate "proiettive" $\bar{x}_a$ (con $a = 0, 1 \,..\, 5$), normalizzate nel seguente modo

$$\bar{x}^2 + \bar{x}_0^2 - \bar{x}_5^2 = r^2 \qquad \text{con } \bar{x}^2 = \bar{x}_i\,\bar{x}_i \tag{3,1}$$

Tali coordinate servono a sviluppare la "relatività conforme" nel formalismo tensoriale a sei dimensioni.

b) *Le coordinate conformi* – Tenendo conto di quanto abbiamo detto al n.° 2, esse possono essere introdotte nel modo più semplice e naturale, nel seguente modo: Dividiamo i due membri della (1) per $(\bar{x}_0 + \bar{x}_5)^2$, ed abbiamo

$$\frac{\bar{x}^2}{(\bar{x}_0 + \bar{x}_5)^2} + \frac{\bar{x}_0 - \bar{x}_5}{(\bar{x}_0 + \bar{x}_5)^2} = \frac{r^2}{(\bar{x}_0 + \bar{x}_5)^2} \tag{3,2}$$

Tale relazione é identicamente soddisfatta dalle "coordinate conformi", così definite

$$\boxed{x_i = \frac{r_o\,\bar{x}_i}{\bar{x}_0 + \bar{x}_5} \;;\; x_5 = \frac{r_o\, r}{\bar{x}_0 + \bar{x}_5} \;;\; x_5^2 - x^2 = r_o^2\,\frac{\bar{x}_0 - \bar{x}_5}{\bar{x}_0 + \bar{x}_5}} \tag{3,3}$$

In tali formule appare una nuova costante universale r_o, avente le dimensioni di una lunghezza, la quale può essere fissata in modo che $r/r_o = N$ (numero cosmico di Dirac $N = 10^{40}$). Tenendo presente che $r \sim 10^{27}$ cm, si avrà $r_o \sim 10^{-13}$ cm = 1 fermi, e la relatività conforme può essere in tal modo collegata alla cosmologia di Eddington-Dirac ed alla teoria dei "micro-universi" di Caldirola, Pavsic, Recami ([11]).

c) *Le coordinate esasferiche*, così definite

$$X_i = \overline{x}_i \quad ; \quad X_5 = \overline{x}_0 - \overline{x}_5 \quad ; \quad X_0 = \overline{x}_0 + \overline{x}_5 \tag{3,4}$$

sono utili nel calcolo delle trasformazioni del gruppo conforme.

d) *Le coordinate cartesiane*, date dalle

$$y_i = \overline{x}_i/\overline{x}_0 \quad ; \quad y_5 = \overline{x}_5/\overline{x}_0 \tag{3,5}$$

le quali possono essere utilizzato nello studio della relatività conforme, per *r* tendente all'infinito.

Partendo dalla definizione dei vari tipi di coordinate, possiamo stabilire tutta una serie di formule, che ci serviranno nei calcoli che faremo, ed é interessante osservare che le varie coordinate si possono esprimere razionalmente le une nelle altre. Per maggiore semplicità porremo $r_o = r = 1$.

I – Le *coordinate proiettive* $\overline{x}_a$, sono legate agli altri tre tipi di coordinate, dalle semplici formule:

(3,6)

$\overline{x}_i$	x_i/x_5	X_i	y_i/A
$\overline{x}_5$	$(1 - x_5^2 + x^2)/2x_5$	$\frac{1}{2}(X_0 - X_5)$	y_5/A
$\overline{x}_0$	$(1 + x_5^2 - x^2)/2x_5$	$\frac{1}{2}(X_0 + X_5)$	$1/A$

dove abbiamo posto $A^2 = 1 + y^2 - y_5{}^2$.

II – Le *coordinate conformi* (x_i, x_5) si esprimono mediante le altre, così

(3,7)

x_i	$\overline{x}_i/(\overline{x}_0 + \overline{x}_5)$	X_i/X_0	$y_i/(1 + y_5)$
x_5	$1/(\overline{x}_0 + \overline{x}_5)$	$1/X_0$	$A/(1 + y_5)$
$x_5^2 - x^2$	$(\overline{x}_0 - \overline{x}_5)/(\overline{x}_0 + \overline{x}_5)$	X_5/X_0	$(1 - y_5)/(1 + y_5)$

III – Dalle *coordinate esasferiche* X_a, si passa alle altre nel seguente modo

(3,8)

X_i	$\overline{x}_i$	x_i/x_5	y_i/A
X_5	$\overline{x}_0 - \overline{x}_5$	$(x_5^2 - x^2)/x_5$	$(1 - y_5)/A$
X_0	$\overline{x}_0 + \overline{x}_5$	$1/x_5$	$(1 + y_5)/A$

IV – Infine, il legame delle *coordinate cartesiane* (y_i, y_5) con le altre, é dato dalle formule

(3,9)

y_i	$\bar{x}_i/\bar{x}_0$	$2X_i/(X_0 + X_5)$	$2x_i/(1 + x_5^2 - x^2)$
y_5	$\bar{x}_5/\bar{x}_0$	$(X_0 - X_5)/(X_0 + X_5)$	$(1 - x_5^2 + x^2)/(1 + x_5^2 - x^2)$
A	$1/\bar{x}_0$	$2/(X_0 + X_5)$	$2x_5/(1 + x_5^2 - x^2)$

Utilizzando queste formule possiamo trascrivere le leggi fisiche (espresse nelle coordinate proiettive) nelle cordinate conformi oppure nelle altre coordinate.

4. STUDIO DELLA METRICA E DI ALCUNI CASI-LIMITI

La metrica 6-dimensionale proiettiva

$$ds^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{x}_0^2 - d\bar{x}_5^2 \qquad \text{con } d\bar{x}^2 = d\bar{x}_i\, d\bar{x}_i \tag{4,1}$$

può essere espressa in funzione delle altre coordinate, mediante le (3,6). Si hanno così i vari casi:

a) *Coordinate conformi.* Se osserviamo che si ha

$$\begin{cases} dx_i = (1/x_5^2)(x_i dx_5 - x_5 dx_i) \\ d\bar{x}_5 = (1/2x_5^2)[2x_5 x_s dx_s - (1 + x^2 + x_5^2)\, dx_5] \\ d\bar{x}_0 = (1/2x_5^2)[(1 + x^2 + x_5^2)\, dx_5 - 2x_5 x_s dx_s] \end{cases} \tag{4,2}$$

sostituendo tali valori nella (1), otteniamo la "metrica conforme" di Ingraham, cioé

$$\boxed{ds^2 = (1/x_5^2)(dx^2 - dx_5^2)} \tag{4,3}$$

In conseguenza, le coordinate conformi (x_i, x_5), si possono interpretare come coordinate x_i del centro e come raggio x_5 dello "spazio delle sfere".

b) *Coordinate esasferiche.* Dalle (3,6) si deduce che

$$d\bar{x}_i = dX_i \quad ; \quad d\bar{x}_5 = \tfrac{1}{2}(dX_0 - dX_5) \quad ; \quad d\bar{x}_0 = \tfrac{1}{2}(dX_0 + dX_5) \tag{4,4}$$

e sostituendo questi valori nella (1), abbiamo la metrica

$$ds^2 = dX^2 + dX_0\, dX_5 \tag{4,5}$$

c) *Coordinate cartesiane.* Infine, dalle (3,6), procedendo come nella RSP, abbiamo le formule

$$(4,6)\quad \begin{cases} d\overline{x}_i = [A^2 dy_i - (y_s dy_s - y_5 dy_5)\, y_i]/A^3 \\ d\overline{x}_5 = [A^2 dy_5 - (y_s dy_s - y_5 dy_5)\, y_5]/A^3 \\ d\overline{x}_0 = -(y_s dy_s - y_5 dy_5)/A^3 \end{cases}$$

e sostituendo nella (1) otteniamo la metrica di Beltrami 5-dimensionale

$$(4,7)\qquad A^4\, ds^2 = A^2\,(dy^2 - dy_5^2) - (y_s\, dy_s - y_5\, dy_5)^2$$

Dalla "relatività conforme", nella nuova versione da noi proposta, e cioé come studio dell'Universo Ipersferico S_5, si ricavano come casi particolari, una teoria simile a quella di Y. Murai e due tipi di RSP, corrispondenti agli Universi di De Sitter D^+ (4,1) e D^- (3,2) con curvatura costante positiva o negativa.

1.° CASO. Se poniamo $x_5 = 0$, la forma quadratica (3,1) si riduce alla seguente

$$(4,8)\qquad \overline{x}^2 + \overline{x}_0^2 - \overline{x}_5^2 = 0$$

e quindi si considerano solo i punti dell'assoluto di Cayley-Klein. Abbiamo in questo caso le coordinate conformi

$$(4,9)\qquad x_i = y_i/(1 + y_5) \quad ; \quad -x^2 = (1 - y_5)/(1 + y_5)$$

da cui seguono le formule inverse:

$$(4,10)\qquad y_i = 2\, x_i/(1 - x^2) \quad ; \quad y_5 = (1 + x^2)/(1 - y^2)$$

le quali sono simili a quelle usate de F. Gürsey nello studio dell'Universo di De Sitter in coordinate conformi ([12]).

2.° CASO. Se poniamo $\overline{x}_5 = 0$, ci riduciamo alla RSP, basata sull'Universo di De Sitter D^+ (4,1). Infatti, dalle (3,7) segue che

$$(4,11)\qquad x_i = \overline{x}_i/\overline{x}_0 \quad ; \quad x_5 = 1/\overline{x}_0 \quad ; \quad x_5{}^2 - x^2 = 1$$

Abbiamo allora $x_5^2 = 1 + x^2 = A^2$, e quindi ci riduciamo alle note formule della RSP, cioé

$$(4,12)\qquad \overline{x}_i = x_i/A \quad ; \quad \overline{x}_0 = 1/A$$

E' interessante poi osservare che se sostituiamo la $x_5 = A$ nella metrica conforme (4,3), essa si riduce alla metrica di Beltrami, cioé

$$(4,13)\qquad A^4\, ds^2 = A^2\, dx^2 - (x_s\, dx_s)^2$$

che ci dà la rappresentazione geodetica dell'Universo di De Sitter.

3.° CASO. Infine, per $\bar{x}_0 = 0$, dalle (3,7) segue che

(4,14) $$x_i = \bar{x}_i/\bar{x}_5 \quad ; \quad x_5 = 1/\bar{x}_5 \quad ; \quad x_5^2 - x^2 = -1$$

In conseguenza

(4,15) $$\bar{x}_i = x_i/A' \quad ; \quad \bar{x}_5 = 1/A' \qquad \text{con } A'^2 = x^2 - 1$$

Otteniamo allora un secondo tipo di RSP, basata sull'Universo di De Sitter D^- a curvatura costante negativa.

5. STUDIO DELLE TRASFORMAZIONI DEL GRUPPO CONFORME

Per scrivere esplicitamente le trasformazioni del gruppo conforme, isomorfo al gruppo R_6 delle rotazioni, la via più semplice é quella di utilizzare le coordinate esasferiche X_a, legate a quelle conformi dalle relazioni

(5,1) $$x_i = r_o\, X_i/X_0 \quad ; \quad x_5 = rr_o/X_0 \quad ; \quad x_5^2 - x^2 = r_o^2\, X_5/X_0$$

ed allora la condizione di normalizzazione (3,1) diventa

(5,2) $$X^2 + X_0 X_5 = r^2$$

E' facile controllare direttamente che tale forma quadratica rimane invariante per le seguenti trasformazioni

a) Il *gruppo di Lorentz* (a 6 parametri), dato da

(5,3) $$X'_i = a_{ik}\, X_k \quad ; \quad X'_5 = X_5 \quad ; \quad X'_0 = X_0$$

dove a_{ik} é una matrice ortogonale. Passando alle coordinate conformi (1), abbiamo

(5,4) $$\boxed{x'_i = a_{ik}\, x_k \quad ; \quad x'_5 = x_5}$$

b) Il *gruppo delle traslazioni* (a 4 parametri). Ponendo $\alpha_i = T_i/r$, esso é dato dalle trasformazioni

(5,5) $$X'_i = X_i + \alpha_i X_0 \quad ; \quad X'_5 = X_5 - 2\,\alpha_i X_i - \alpha^2 X_0 \quad ; \quad X'_0 = X_0$$

che lasciano invariante la (1). Si ha infatti

$$X'^2 + X'_0\, X'_5 = (X_i + \alpha_i X_0)^2 + X_0\,(X_5 - 2\,\alpha_i X_i - \alpha^2 X_0) = X^2 + X_0\, X_5$$

Passando alle coordinate conformi, le (5) diventano

$$(5,6) \qquad \boxed{x_i' = x_i + T_i \quad ; \quad x_5' = x_5}$$

dove abbiamo fatto la sostituzione $NT_i \to T_i$.

c) Il *gruppo dei movimenti uniformemente accelerati* (a 4 parametri). In questo caso poniamo

$$(5,7) \qquad a_i = r_o\, A_i/c^2 = A_i/a_o \qquad \text{con } a_o = c^2/r_o$$

ed allora si verifica subito che la (2) rimane invariante per la trasformazione

$$(5,8) \qquad X_i' = X_i + a_i X_5 \quad ; \quad X_o' = X_o - 2\, a_i X_i - a^2 X_5 \quad ; \quad X_5' = X_5$$

e passando alle coordinate conformi, otteniamo la trasformazione

$$(5,9) \qquad \begin{aligned} x_i' &= \frac{x_i + (A_i/c^2)(x_5^2 - x^2)}{1 - 2\, A_i x_i/c^2 - (A/c^2)^2 (x_5^2 - x^2)} \\ x_5' &= \frac{x_5}{1 - 2\, A_i x_i/c^2 - (A/c^2)^2 (x_5^2 - x^2)} \end{aligned}$$

nella quale non figurano le due costanti universali (r, r_o).

d) Il *gruppo delle dilatazioni* (ad 1 parametro). Se poniamo $d_o = D/N$, la (2) rimane invariante per la seguente trasformazione

$$(5,10) \qquad X_i' = X_i \quad ; \quad X_5' = d_o X_5 \quad ; \quad X_0' = d_o^{-1} X_0$$

Passando alle coordinate conformi (1), otteniamo le dilatazioni

$$(5,11) \qquad \boxed{x_i' = d_o\, x_i \quad ; \quad x_5' = d_o\, x_5}$$

e) La *inversione fondamentale,* data dalle

$$(5,12) \qquad X_i' = X_i \quad ; \quad X_5' = X_0 \quad ; \quad X_0' = X_5$$

la quale si scrive così, nelle coordinate conformi

$$(5,13) \qquad \boxed{x_i' = \frac{r_o^2\, x_i}{x_5^2 - x^2} \quad ; \quad x_5' = \frac{r_o^2\, x_5}{x_5^2 - x^2}}$$

che muta in sé la quadrica di equazione $x_5^2 - x^2 = r_o^2$.

Per concludere, osserviamo che nelle coordinate proiettive $\overline{x}_a$, la dilatazione (11) corrisponde alla "rotazione semplice" nel piano $(\overline{x}_5, \overline{x}_0)$.

Si ha infatti

$$x'_0 = \bar{x}_0 \cosh \delta + \bar{x}_5 \sinh \delta \quad ; \quad \bar{x}'_5 = \bar{x}_0 \sinh \delta + \bar{x}_5 \cosh \delta \tag{5,14}$$

Passando alle coordinate conformi (1), si ha

$$x'_i = r_o \frac{\bar{x}'_i}{\bar{x}'_0 + \bar{x}'_5} = \frac{r_0\,\bar{x}_i}{(\cosh \delta + \operatorname{senh} \delta)\,(\bar{x}_0 + \bar{x}_5)} = d_o\,x_i \tag{5,15}$$

In modo analogo si ottiene la x'_5. Se allora poniamo tgh $\delta = D/N$, otteniamo la interessante relazione

$$d_o = \sqrt{(N-D)/(N+D)} \qquad \text{con } -N \leqslant D \leqslant +N \tag{5,16}$$

appare così una "dilatazione limite" $D = N$, con la quale si passa dalla particella elementare ("micro-universo"), all'Universo, in accordo con la teoria dei micro-universi di Caldirola, Pavsic e Recami ([11]).

Invece, la "inversione fondamentale" (13), equivale alla *riflessione* rispetto all'iperpiano $\bar{x}_5 = 0$, cioé

$$\bar{x}'_i = \bar{x}_i \quad ; \quad \bar{x}'_5 = -\bar{x}_5 \quad ; \quad \bar{x}'_0 = \bar{x}_0 \tag{5,17}$$

Infatti, passando alle coordinate conformi, abbiamo

$$x'_i = \frac{r_o \bar{x}'_i}{\bar{x}'_0 + \bar{x}'_5} = \frac{r_o \bar{x}_i}{\bar{x}_0 - \bar{x}_5} = \frac{r_o \bar{x}_i}{\bar{x}_0 + \bar{x}_5} \cdot \frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_5}{\bar{x}_0 - \bar{x}_5} = \frac{r_o^2\, x_i}{x_5^2 - x^2} \tag{5,18}$$

ed in modo analogo otteniamo la x'_5.

Infine, i movimenti uniformemente accelerati (9) non sono delle rotazioni semplici, ma in base al teorema di Cartan, equivalgono al prodotto di rotazioni semplici. Le trasformazioni del gruppo conforme, che così abbiamo ottenuto, sono simili a quelle trovate per altra via da R. L. Ingraham ([10]), mentre, per $x_5 = 0$, ci riduciamo a quelle studiate da Pavsic ([8]).

6. Le equazioni del campo magneto-idrodinamico-gravitazionale

Il problema di costruire una teoria relativistica della gravitazione, su basi gruppali é indeterminato, e sono possibili varie teorie. Tra le molte ricerche ricordiamo la teoria della inerzia-gravità di D. W. Sciama, con equazioni simili a quelle di Maxwell, e le ricerche di L. D. Raigorodski, di D. Cattani ed altri ([13]). Invece, nel 1946 H. C. Corben ha costruito una teoria unitaria dell'elettromagnetismo e della gravitazione, scrivendo le equazioni di Maxwell nello spazio euclideo a 5 dimensioni, ed introducendo i due tempi (t, t'). Una teoria analoga hanno costruito J. G. Bennett, R. L. Brown ed M. W. Thring, i quali introducono un tempo ed un "anti-tempo", il primo legato alla energia cinetica, ed il secondo alla energia potenziale ([14]).

A partire del 1960 ho fatto vedere che il problema unitario elettromagnetismo-gravitazione, può essere affrontato nel modo più semplice, passando all'Universo Ipersferico S_5 ed alla relatività conforme. Le equazioni di Maxwell generalizzate sono state poi da me studiate nel 1977, e nel 1980 E. Pessa le ha confrontate con le altre teorie gravitazionali ([15]).

Come sappiamo, nell'Universo ipersferico S_3, le equazioni di Maxwell ci descrivono il campo *elettro-idrostatico* (E, C), mentre nell'Universo di De Sitter S_4, abbiamo il campo *magnetoidrodinamico* (E, iH, C, iC_o).

Ne segue che passando all'Universo S_5, dobbiamo introdurre un nuovo campo (iG, G_o, iC'_o) a 5 componenti, seguendo lo schema:

$$
\begin{vmatrix} O & & & \\ E_3 & O & & \\ -E_2 & E_1 & O & \\ C_1 & C_2 & C_3 & O \end{vmatrix}
\rightarrow
\begin{vmatrix} O & & & & \\ E_3 & O & & & \\ -E_2 & E_1 & O & & \\ iH_1 & iH_2 & iH_3 & O & \\ C_1 & C_2 & C_3 & iC_o & O \end{vmatrix}
\rightarrow
\begin{vmatrix} O & & & & & \\ E_3 & O & & & & \\ -E_2 & E_1 & O & & & \\ iH_1 & iH_2 & iH_3 & O & & \\ iG_1 & iG_2 & iG_3 & G_o & O & \\ C_1 & C_2 & C_3 & iC_o & iC'_o & O \end{vmatrix}
\qquad (6,1)
$$

Il nuovo campo introdotto, si può interpretare come "campo gravitazionale" newtoniano, perché esso, in accordo con il principio di equivalenza di Einstein, può apparire o sparire se ci poniamo in un sistema di riferimento uniformemente accelerato. E' poi interessante osservare che lo schema (1) é quello dei "numeri triangolari" di Pitagora.

Fatta questa premessa, le equazioni di Maxwell (1,7), per n = 5, si scrivono nel seguente modo:

$$
\bar{\partial}_a H_{bc} + \bar{\partial}_b H_{ca} + \bar{\partial}_c H_{ab} = J_{abc} \quad ; \quad \bar{\partial}_a H_{ab} = I_b \qquad (6,2)
$$

dove le derivate proiettive $\bar{\partial}_a = \partial/\partial \bar{x}_a$, tenendo conto delle (3,6) e (3,7), si scrivono così, in coordinate conformi

$$
\boxed{\bar{\partial}_i = (x_5/r_o)\,\partial_i \quad ; \quad \bar{\partial}_5 = \bar{\partial}_0 = -(x_5/r_o)\,(x_s\,\partial_s + x_5\,\partial_5)} \qquad (6,3)
$$

Per scrivere le equazioni (2) in forma 4-dimensionale, teniamo conto dei risultati della "relatività speciale proiettiva" (RSP), e poniamo

$$
H_{i5} = iG_i \quad ; \quad H_{io} = C_i \quad ; \quad H_{5o} = iC'_o \qquad (6,4)
$$

Si ha inoltre

$$
J_{ik5} = i\Omega'_{ik} \quad ; \quad J_{iko} = \Omega_{ik} \quad ; \quad J_{i5o} = i\,I'_i \quad ; \quad I_5 = i\sigma' \quad ; \quad I_0 = \sigma \qquad (6,5)
$$

In conseguenza, le equazioni (2) si scrivono così, in forma 4-dimensionale[16]:

(6,6)	$\mathrm{Rot}\, H_{ik} = J_{ikl}$	$\mathrm{Div}\, H_{ik} + \bar\partial_5\, G_k + \bar\partial_0\, C_k = I_k$
	$\mathrm{Rot}\, G_i + \bar\partial_5\, H_{ik} = \Omega'_{ik}$	$\mathrm{Div}\, G_i + \bar\partial_0\, C'_0 = \sigma'$
	$\mathrm{Rot}\, C_i + \bar\partial_0\, H_{ik} = \Omega_{ik}$	
	$\mathrm{Grad}\, C'_0 - \bar\partial_5\, C_i + \bar\partial_0\, G_i = I'_i$	$\mathrm{Div}\, C_i + \bar\partial_5\, C'_0 = \sigma$

Come abbiamo detto, esse si possono interpretare come equazioni del campo magneto-idrodinamico-gravitazionale, e la loro struttura matematica ci appare meglio, se esaminiamo i vari casi-limite che si presentano:

1.° CASO. Se il campo non dipende da $\bar{x}_5$, si ha $\bar\partial_5 = 0$, ed allora le (6) si scompongono in due gruppi di equazioni indipendenti:

(6,7)	$\mathrm{Rot}\, H_{ik} = J_{ikl}$	$\mathrm{Rot}\, G_i = \Omega'_{ik}$
	$\mathrm{Rot}\, C_i + \bar\partial_0\, H_{ik} = \Omega_{ik}$	
	$\mathrm{Div}\, H_{ik} + \partial_0\, C_k = I_k$	$\mathrm{Div}\, G_i + \bar\partial_0\, C'_0 = \sigma'$
	$\mathrm{Div}\, C_i = \sigma$	$\mathrm{Grad}\, C'_0 + \bar\partial_0\, G_i = I'_i$

In conseguenza abbiamo la seguente decomposizione del campo

$$H_{ab} = (H_{ik}\,, C_i) + (G_i, C'_0) \tag{6,8}$$

e cioé otteniamo le equazioni del campo magnetoidrodinamico proiettivo e quelle del campo gravitazionale proiettivo.

2.° CASO. Per r tendente all'infinito, abbiamo $\bar\partial_0 = 0$, ed allora le equazioni (6) si scompongono così

(6,9)	$\mathrm{Rot}\, H_{ik} = J_{ikl}$	$\mathrm{Rot}\, C_i = \Omega_{ik}$
	$\mathrm{Rot}\, G_i + \bar\partial_5\, H_{ik} = \Omega'_{ik}$	
	$\mathrm{Div}\, H_{ik} + \bar\partial_5\, G_k = I_k$	$\mathrm{Div}\, C_i + \bar\partial_5\, C'_0 = \sigma$
	$\mathrm{Div}\, G_i = \sigma'$	$\mathrm{Grad}\, C'_0 - \bar\partial_5\, C_i = I'_i$

In questo caso abbiamo

$$H_{ab} = (H_{ik}\,, G_i) + (C_i\,, C'_0) \tag{6,10}$$

cioé otteniamo le equazioni del campo "elettromagneto-gravitazionale", simili a quelle proposte de H. C. Corben [14] (nel caso in cui $\Omega'_{ik} = 0$, mentre $\sigma' = 4\,\pi\mu$), e le equazioni del campo idrodinamico 5-dimensionale, scritte nello spazio euclideo E_5.

3.° CASO. Infine se il campo non dipende dalle due variabili $(\bar{x}_5, \bar{x}_0)$, ricadiamo nella relatività ristretta, e le equazioni (6) si decompongono in quattro gruppi di equazioni indipendenti, cioé

$$(6{,}11)\qquad \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Rot}\, H_{ik} = J_{ikl} \\ \mathrm{Div}\, H_{ik} = I_k \end{array}} \qquad \boxed{\mathrm{Grad}\, C'_o = I'_i}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Rot}\, C_i = \Omega_{ik} \\ \mathrm{Div}\, C_i = \sigma \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Rot}\, G_i = \Omega'_{ik} \\ \mathrm{Div}\, G_i = \sigma' \end{array}}$$

Otteniamo così le equazioni del campo elettromagnetico H_{ik} (scritte in forma duale), le equazioni del campo C'_o, mentre le equazioni del campo idrodinamico C_i e quelle del campo gravitazionale G_i, risultano formalmente identiche. Nella nostra teoria quindi appare una profonda analogia tra campo idrodinamico e campo gravitazionale, a differenza delle precedenti teorie, in cui viene ipotizzata una analogia tra campo gravitazionale e campo elettromagnetico.

Nel caso statico, e per $\Omega'_{ik} = 0$, mentre $\sigma' = 4\,\pi\mu$, dalle (11) si deducono le equazioni del campo di gravitazione di Newton

$$(6{,}12)\qquad \mathrm{rot}\, G = 0 \quad ; \quad \mathrm{div}\, G = 4\,\pi g\mu$$

Dalla prima equazione segue che $G = \mathrm{grad}\,\varphi$, dove φ é il potenziale gravitazionale newtoniano, e sostituendo nella seconda equazione, otteniamo l'equazione di Poisson

$$(6{,}13)\qquad \Delta\varphi = 4\,\pi g\mu$$

del campo gravitazionale di Newton.

7. Studio del tensore energetico del campo magneto-idrodinamico-gravitazionale

Per concludere, esaminiamo la interessante struttura algebrica del tensore energetico del campo, dato da

$$(7{,}1)\qquad \boxed{T_{ab} = H_{ac}\, H_{cb} + (1/4)\, H_{cd}\, H_{cd}\, \delta_{ab}} \qquad (abcd = 0, 1\, ..\, 5)$$

che ci descrive le "interazioni" tra le varie componenti del campo.

a) La parte spaziale del tensore energetico, generalizza il "tensore degli sforzi" di Maxwell, ed é data da

$$T_{\alpha\beta} = (E_\alpha E_\beta - \tfrac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta}) - (H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2} H^2 \delta_{\alpha\beta}) - (G_\alpha G_\beta - \tfrac{1}{2} G^2 \delta_{\alpha\beta}) +$$

$$(7{,}2)\qquad + (C_\alpha C_\beta - \tfrac{1}{2} C^2 \delta_{\alpha\beta}) - \tfrac{1}{2} (C_o^2 + G_o^2 - C_o'^2)\, \delta_{\alpha\beta}$$

con $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

b) L'*energia* del campo viene generalizzata nel seguente modo

$$(7,3)\quad \begin{cases} T_{44} = \frac{1}{2}(E^2 + H^2 + C^2 + C_o^2) - \frac{1}{2}(G^2 + G_o^2 + C_o'^2) \\ T_{55} = \frac{1}{2}(E^2 + C^2 + G^2 + C_o'^2) - \frac{1}{2}(H^2 + C_o^2 + G_o^2) \\ T_{00} = \frac{1}{2}(E^2 + C_o^2 + G_o^2 + C_o'^2) - \frac{1}{2}(H^2 + C^2 + G^2) \end{cases}$$

c) Nella "relatività conforme" abbiamo tre vettori di Poynting generalizzati, legati alla propagazione dei vari tipi di onde, e dati da

$$(7,4)\quad \begin{gathered} T_{\alpha 4} = i\,(C_o C + G_o G + E \wedge H)\ ;\ T_{\alpha 5} = i\,(C_o' C + G_o H + E \wedge G) \\ T_{\alpha 0} = -(C_o H + C_o' G + C \wedge E) \end{gathered}$$

d) infine abbiamo i seguente tre scalari

$$(7,5)\quad \begin{gathered} T_{40} = i((G_o C_o' + H \times C)\quad ;\quad T_{50} = i\,(C_o G_o + G \times C) \\ T_{45} = -(C_o C_o' + H \times G) \end{gathered}$$

Concludiamo calcolando i tre "invarianti" (J_2, J_4, J_6) del campo magneto-idrodinamico-gravitazionale, con il metodo di Lie-Cartan, e cioé a partire dalla equazione caratteristica della matrice del campo

$$(7,6)\qquad |H_{ab} - x\,\delta_{ab}| = x^6 + J_2\,x^4 + J_4\,x^2 + J_6$$

Fatti i calcoli, otteniamo l'invariante quadratico

$$(7,7)\qquad J_2 = (E^2 + C^2 + G_o^2) - (H^2 + G^2 + C_o^2 + C_o'^2)$$

Poi si ha un invariante di 4.º grado, dato da

$$(7,8)\quad \begin{gathered} J_4 = (C \times E)^2 - (E \times H)^2 - (G \times E)^2 + (G_o C - C_o G - C_o' H)^2 + \\ + (G_o E - G \wedge H)^2 - (C_o E + C \wedge H)^2 - (C_o' E + G \wedge C)^2 \end{gathered}$$

Infine, abbiamo l'invariante di 6.º grado

$$(7,9)\qquad J_6 = [(G_o C - C_o G - C_o' H) \times E - H \times (G \wedge C)]^2$$

Possiamo quindi concludere che la "teoria degli Universi Ipersferici", per n = 5, ci permette di generalizzare la "relatività conforme" e ci fornisce nel modo più semplice e naturale una teoria unitaria della materia e della elettricità, rimanendo entro lo schema della teoria dei gruppi ([16]).

BIBLIOGRAFIA

(1) R. FRANCI, L. TOTI RIGATELLI, *Storia della teoria delle equazioni algebriche,* Mursia, Milano (1979).

(2) G. ARCIDIACONO, *La relatività di Fantappiè,* Coll. Math. X, 85 (1958); *Gli Universi Ipersferici multitemporali, la cosmologia e le teorie unitarie,* Coll. Math. XXXI, 259 (1980).

(3) L. FANTAPPIÉ, *Sui fondamenti gruppali della fisica,* Coll. Math. XI, 77 (1959); *Opere Scelte,* Ed. Unione Mat. Italiana, Bologna, 1973; G. ARCIDIACONO, *Fantappiè e gli Universi,* Ed. Il Fuoco, Via G. Carini 28, Roma, 1986.

(4) P. LEVY, *Problèmes concrètes d'analyse functionnelle,* Gauthier-Villars, Paris, 1951.

(5) G. ARCIDIACONO, *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie,* Coll. Math. XVI, 149 (1964); *Il tensore di curvatura-torsione di Cartan e la relatività generale proiettiva,* Coll. Math. XXXIV, 95 (1983).

(6) E. CUNNINGHAM, *The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof,* Proc. Lond. Math. Soc. (2), **8**, 77 (1910); H. BATEMAN, *The transformation of the electrodynamical equations,* Proc. Lond. Math. Soc. (2), **8**, 228 (1910).

(7) Y. MURAI, *On the group of transformations in six-dimensional space.* Progr. Theor. Phys. II, 441 (1954).

(8) M. PAVSIC, *Unified theory of gravitation and electromagnetism, based on the conformal group SO (4,2).* PP 500, Ist. Fis. teor. Catania, 1976.

(9) E. PESSA, *Il gruppo delle rotazioni di E_6 e le trasformazioni conformi,* Boll. UMI (5) 15B, 761 (1978).

(10) R. L. INGRAHAM, *Conformal geometry and elementary particles,* Nuovo Cimento, A **12**, 825 (1954).

(11) P. CALDIROLA, M. PAVSIC, E. RECAMI, *Explaining the large numbers by a hierarchy of Universes,* Nuovo Cimento, 48 B, 205 (1978).

(12) F. GÜRSEY, *Introduction to the De Sitter group,* in F. GÜRSEY, *Group concepts and methods in elementary particle physics,* New York 1964, pág. 365.

(13) D. W. SCIAMA, *On the origin of inertia,* Mont. Not. **12**, 75 (1959); D. CATTANI, *Linear equations for the gravitational field,* Nuovo Cimento, 60B, 67 (1980): L. D. RAIGOROSKI, *On variational principles and generalized equations of inertial-gravitational field.* Acta Phys. Hung. 37, 133 (1974).

(14) H. C. CORBEN, *A classical theory of electromagnetism and gravitation,* Phys. Rev. **69**, 225 (1946); J. G. BENNETT, R. L. BROWN, M. W. THRING, *Unified field theory in a curvature-free five-dimensional manifold,* Proc. Royal Soc. 98A, 39 (1949). Vedi pure B. S. RAJPUT, *Unification of generalized electromagnetic and gravitational field,* J. Math. Phys. **25**, 351 (1984).

(15) G. ARCIDIACONO, *Relatività finale e cosmologia*, Coll. Math. XII, 3 (1960); *Tachioni e monopoli magnetici nell'Universo di De Sitter*, Coll. Math. XXVIII, 261 (1977); E. PESSA, *A new unified theory based on the conformal group*, Gen. Rel. Grav. **12**, 875 (1980). *Sulle transformazioni finite dei gruppi delle rotazioni*, Coll. Math. XV, 259 (1963).

(16) G. ARCIDIACONO, *Projective relativity, Cosmology, Gravitation*, Hadronic Press, Harvard Grounds (96, Prescott Street), Cambridge, Mass. 02136 (USA).

(17) Relazione tenuta al LXXI Congresso della Società Italiana di Fisica, a Trieste, il 4 ottobre del 1985.

Prof. Giuseppe Arcidiacono
Via Acq. del Peschiera 96
Italia 00135 Roma