ARITMETICA DE LAS SUCESIONES
$6n - 1, 6n + 1$
Y DE LOS PRIMOS GEMELOS

por

NORBERTO CUESTA DUTARI

Dedicado al Rector Felipe Lucena Conde (9-10-1923 ≡ 30-9-1976)
con quien están en deuda de gratitud Salamanca y su Universidad.

ABSTRACT

This paper considers questions equivalent and similar to those of twin numbers. Two prime numbers are said to be twin if they differ in two units. Except for the pair (3,5), they may be expressed as $(6n-1, 6n+1)$. The set of the multiples of 6 which separate twin numbers is studied. A theorem of relative density is included (§ 10) as well an inductiv process of functional generation of the prime numbers (§ 11).

1. INTRODUCCION HISTORICA

Salvo el 2 y el 3, los restantes primos, cuando menos, difieren en dos unidades. Tal es el caso de los pares (3,5), (5,7), (11.13), (17,19) etc. Son pares de primos gemelos los que difieren en dos unidades.

Nos dice Sierpiñski (1882-1969). (Las citas aluden al índice bibliográfico) que fué Polignac quien, el año 1849, propuso el problema de si es finito o infinito el conjunto de pares de primos gemelos.

Dickson, en la página 7 del tomo 1º de su repertorio, y Loria (1862-1954) en la página 406 de su Storia, nos hablan del LIBER DE NUMERIS PERFECTIS de Charles de Bouvelles (1470-1533), impreso en París el 1510. Y afirma que uno, o ambos, de los números $6n - 1$, $6n + 1$, es primo. Asimismo que los primos aparecen en una u otra de esas sucesiones.

Tanto Dickson como Loria, nos dicen que Cataldi (1552-1626), en su TRATATTO DEI NUMERI PERFETTI (Bologna 1603), corrigió la primera afirmación de Bouvelles, demostrando la segunda, que es verdadera para los primos mayores que 3.

Gauss (1777-1855) en sus DISQUISITIONES ARITHMETICAE (1801). sólamente de pasada, en los §§117,120, se refirió a las sucesiones 6n + 1, 6n + 5.

Lucas, en su THEORIE DES NOMBRES (1891), en la página 351, entre los problemas difíciles, propone el de los primos gemelos.

Otros varios autores, de los que mencionamos en la lista bibliográfica, proponen el problema, ponderando su dificultad.

A quien haya leido este artículo, le serán evidentes dos causas de ésta. Primera, el escaso número de primos, aunque sean infinitos, frente al muy abundante número de los compuestos que existen en ambas sucesiones $6n - 1$ y $6n + 1$. Segunda, que nada sabemos de cuánto se separan los primos de la sucesión $6n - 1$ de los primos de la sucesión $6n + 1$.

La segunda causa, nos plantea el problema siguiente, similar, y emparentado con el de los primos gemelos, y cuya solución parece más fácil: ¿Existen infinitos intervalos separados, $(u_i < v_i)$, todos de longitud k constante, dentro de los cuales haya al menos dos primos, uno de la sucesión $6n - 1$, y otro de la $6n + 1$?. Las relaciones lógicas entre las contestaciones "si" y "no" de éste problema, y las "si" y "no" del problema de los primos gemelos, son inmediatas.

2. EL NUMERO QUE SEPARA A DOS PRIMOS GEMELOS MAYORES QUE 3 ES MULTIPLO DE 6

En la sucesión de números naturales $q - 1 < q < q + 1$, si $q - 1$ y $q + 1$ fueran primos, y $q - 1$ mayor que 3, se ve inmediátamente que q es múltiplo de 2 y de 3. Podemos por tanto afirmar:

TEOREMA 1. Todos los pares de primos gemelos, salvo el (3,5), tienen la forma $(6n - 1, 6n + 1)$.

Mas, aunque "están todos los que son, no son todos los que están", que decía un loco ingenioso del manicomio donde lo tenían encerrado sus familiares.

Es muy sugerente la tabla que sigue, variando n desde 1 hasta 41. En ella van señalados los primos con un asterisco.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
6n – 1	*5	*11	*17	*23	*29	35	*41	*47	*53	*59	65	*71	77	*83	*89	95	*101	*107	*113	119	125	*131
6n + 1	*7	*13	*19	25	*31	*37	*43	49	55	*61	*67	*73	*79	85	91	*97	*103	*109	115	121	*127	133
g(n)	2	2	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	2	2	1	0	1	1

23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
*137	143	*149	155	161	*167	*173	*179	185	*191	*197	203	209	215	221	*227	*233	*239	245
*139	145	*151	*157	*163	169	175	*181	187	*193	*199	205	*211	217	*223	*229	235	*241	247
2	0	2	1	1	1	1	2	0	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0

g(n) es el número de primos contenidos en la columna n-sima.

Dispuestos en forma lineal, los pares engendrados por $(6n - 1, 6n + 1)$ son los de la sucesión

$$(5 < 7) < (11 < 13) < (17 < 19) < (23 < 25) < (29 < 31) < (35 < 37) <$$
$$< (41 < 43) \text{ etc.}$$

Cada par se deduce del precedente, sumando a sus dos números 6 unidades. Los múltiplos de 6 separan a los de cada pareja.

3. Clases residuales del divisor 6, disposicion helicoidal de los numeros naturales e intervalos de numeros compuestos entre primos consecutivos

Las clases residuales del divisor 6, que son $6n + 0$, $6n + 1$, $6n + 2$, $6n + 3$, $6n + 4$, $6n + 5$, contienen todos los números naturales, cero incluido, cuando n tome todos los valores 0,1,2,3,4,5,6,7, etc.

Todos los múltiplos de 2 se los reparten las sucesiones

$$6n + 0 = 2(3n + 0),\ 6n + 2 = 2(3n + 1),\ 6n + 4 = 2(3n + 2)$$

Todos los múltiplos de 3, se los reparten las sucesiones

$$6n + 0 = 3(2n + 0),\ 6n + 3 = 3(2n + 1)$$

En las clases $6n + 1$ y $6n + 5$ no hay ya múltiplos de 2 ni de 3. En cambio, en ellas figuran todos los primos mayores que 3. Que cada una de ellas contiene infinitos primos, lo demuestran muchos libros, y utilizando sólamente recursos aritméticos. Ello también se sigue del celebrado y potente Teorema descubierto por Legendre (1752-1833), y demostrado por Dirichlet (1805-1859) usando recursos del Análisis matemático, es decir recursos de Matemática infinita.

Pero

$$\{6n + 5\}_{0 \leqslant n < \omega} = \{6n + 6 - 1\}_{0 \leqslant n < \omega} = \{6(n+1) - 1\}_{0 \leqslant n < \omega} =$$
$$= \{6n - 1\}_{1 \leqslant n < \omega}$$

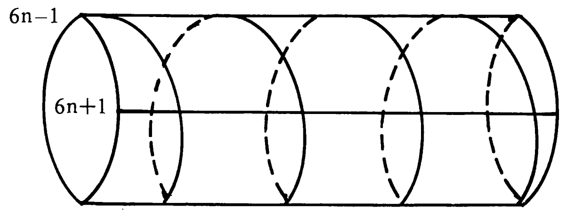
luego las sucesiones $6n - 1$, $6n + 1$, que son las de Bouvelles, para n = 1, 2, 3, 4, 5, etc., además de infinitos números compuestos, pero ni uno múltiplo de 2 ni de

3, se reparten, entre ambas, todos los primos restantes, habiendo, en cada una, infinitos primos. Designaremos genéricamente a estos primos, con las notaciones $6a - 1$, $6b + 1$, poniendo, para individualizarlos en orden aritmético creciente,

$6a_i - 1$ con $i = 1,2,3,4$, etc. para los primos de $6n - 1$

$6b_j + 1$ con $j = 1,2,3,4$, etc. para los primos de $6n + 1$

La tabla del §2 se completa en la siguiente forma que es muy sugestiva



*6n−1	*5	*11	*17	*23	*29	35	*41 ...
6n+0	6	12	18	24	30	36	42 ...
*6n+1	*7	*13	*19	25	*31	*37	*43 ...
6n+2	8	14	20	26	32	38	44 ...
6n+3	9	15	21	27	33	39	45 ...
6n+4	10	16	22	28	34	40	46 ...

Pegada esta tabla sobre el cilindro adjunto, con un corto desplazamiento hacia la derecha, de modo que se superpongan los números de las horizontales extremas en la siguiente forma

10 16 22 28 34 40 ...
11 17 23 29 35 41 ...

los números naturales, desde el 5 en adelante, formarán una hélice sobre el cilindro. (1)

(1) Esta disposición helicoidal, porque acrecienta las evidencias, permite descubrir propiedades recónditas de la sucesión de los números naturales. Quien asentó el apotegma presuntuoso "el progreso consiste en reducir las evidencias", jamás hizo descubrimiento matemático alguno, ni supo nada de los sistemas deductivos construidos sobre bases proposicionales infinitas, en que éstas pueden reducirse quitándoles proposiciones, sin ganar consecuencia alguna, ni un átomo de rigor.

Si $p < q$ fueran dos primos consecutivos, y designáramos con (pq) al conjunto de números compuestos n que verificaran $p < n < q$, la disposición helicoidal nos evidencia el Teorema siguiente sobre el cardinal del conjunto (pq) según los cuatro casos posibles para los primos p y q.

TEOREMA 2.

$p \in 6n-1$	$6n-1$	$6n+1$	$6n+1$	
$q \in 6n-1$	$6n+1$	$6n-1$	$6n+1$	
$\|(pq)\| = 6k+5$	$6k+1$	$6k+3$	$6k+5$	$k = 0,1,2,3,4,5$, etc.

Este Teorema sugiere el siguiente Problema, más general que el de los primos gemelos al que comprende:

PROBLEMA. Cualquiera que sea el número natural $k \geqslant 0$, ¿cuántos segmentos completos (pq) de números compuestos existen, formados por $6k + 1$, $6k + 3$, $6k + 5$ números?. ¿Hay infinitos para cada valor de k?.

Ilustra el Teorema 2 y el Problema, la siguiente tabla:

En la primera línea se han escrito los primos hasta el 263. Debajo, y en los huecos entre cada dos primos consecutivos, va el número de compuestos comprendidos.

3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
1	1	3	1	3	1	3	5	1	5	3	1	3	5	5

59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
1	5	3	1	5	3	5	7	3	1	3	1	3	13

127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191
3	5	1	9	1	5	5	3	5	5	1	9	1

193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
3	1	11	11	3	1	3	5	1	9	5	5	

Los intervalos, existentes en la tabla, formados por

	1	3	5	7	9	11	13	números compuestos
son	17	15	15	1	3	2	1	

El primer intervalo formado por 15 números compuestos, lo limitan los primos (1831, 1847).

Hay 33 números compuestos entre los primos (1327, 1361).

En el §10 demostraremos que no está acotado el cardinal $|(pq)|$ de los posibles intervalos maximales de números compuestos. Es un hecho de los más asombrosos de la distribución de primos y compuestos en la serie de los números naturales.

La tabla que está hacia la mitad de este §3, nos evidencia que los intervalos engendrados por la expresión $(6n + 2, 6n + 3, 6n + 4)$, los cuales se deducen sumando 6 unidades al precedente, los forman números compuestos; pero, en general, son ampliables. He aquí los primeros

$$(8 < 9 < 10) < (14 < 15 < 16) < (20 < 21 < 22) < (26 < 27 < 28) \text{ etc.}$$

4. Las cuatro clases de parejas $(6n - 1, 6n + 1)$

La tabla del §2 nos evidencia son posibles estas cuatro clases:

Clase C_1	$6n - 1$	es compuesto	y	$6n + 1$	es compuesto
Clase C_2	$6n - 1$	es compuesto	y	$6n + 1$	es primo
Clase C_3	$6n - 1$	es primo	y	$6n + 1$	es compuesto
Clase C_4	$6n - 1$	es primo	y	$6n + 1$	es primo

TEOREMA 3. Cada unas de las clases C_1, C_2, C_3, contiene infinitos pares.

DEMOSTRACION:

Clase 1ª. Tomemos $m = 5 \cdot 7n + 1$. Se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} 6m - 1 &= 6(5 \cdot 7n + 1) - 1 = 5 \cdot 6 \cdot 7n + 5 = 5(6 \cdot 7n + 1) \\ 6m + 1 &= 6(5 \cdot 7n + 1) + 1 = 5 \cdot 6 \cdot 7n + 7 = 7(5 \cdot 6n + 1) \end{aligned}\right\} \text{Todos compuestos}$$

Clase 2ª. Tomemos $m = 5n + 1$. Se tendrá:

$6m - 1 = 6(5n + 1) - 1 = 5 \cdot 6n + 5 = 5(6n + 1)$ Todos compuestos.

$6m + 1 = 6(5n + 1) + 1 = 5 \cdot 6n + 7$ Que engendra infinitos primos según el Teorema de Legendre-Dirichlet.

Clase 3ª. Tomemos $m = 7n + 1$. Se tendrá:

$6m - 1 = 6(7n + 1) - 1 = 6 \cdot 7n + 5$ Que engendra infinitos primos.

$6m + 1 = 6(7n + 1) + 1 = 6 \cdot 7n + 7 = 7(6n + 1)$ Todos compuestos.

Cuántas sean las parejas de la clase 4ª es la pregunta que nos hace el problema de los primos gemelos. Y precísamente si hubiera infinitos, existiría una función $m = \psi(n)$ para la cual

$$\left.\begin{array}{l} 6m - 1 = 6\psi(n) - 1 \\ 6m + 1 = 6\psi(n) + 1 \end{array}\right\} \text{sólo engendrarían primos para todo valor de n.}$$

Sierpiñski, página 117, nos informa que Brun demostró el año 1919 que, aunque fueran infinitos los pares de primos gemelos, la serie formada por sus inversos sería convergente. Es claro que si la suma hubiera sido infinita, habría quedado demostrado que existían infinitos pares de primos gemelos. Fué, en efecto, demostrando que la suma de los inversos de los números primos era infinita, como Euler (1707-1783) demostró, muy geniálmente, que existían infinitos números primos.

5. PROBLEMA SOBRE EL NUMERO DE PRIMOS DE LA SUCESION $6a + 1$

Conforme a la notación del §3, $6a - 1$ designa, en forma genérica, a los primos contenidos en la sucesión $6n - 1$.

Es evidente que el conjugado $6a + 1$ no está obligado a ser primo. También es evidente que el cardinal del conjunto de primos contenidos en la sucesión $6a_i + 1$, $i = 1,2,3,4,5$, etc. coincide con el cardinal del conjunto de pares de primos gemelos. Según esto, el Problema de los primos gemelos es equivalente al siguiente:

PROBLEMA. ¿Cuántos son los primos contenidos en la sucesión $6a_i + 1$?

Designemos con

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, \text{etc.}$$

la sucesión de los primos, en su orden aritmético creciente. Euclides (330?-275), en la Proposición 20, theorema, del Libro 9º de los Elementos, demostró la acotación

$$p_{k+1} \leqslant 1 + \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} p_i$$

TEOREMA 4. El número primo inmediátamente siguiente al $6a - 1$, está contenido en la sucesión finita

$$6a + 1 \leqslant n \leqslant (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (6a - 1)) + 1$$

Es claro que, para efectos prácticos, sería muy conveniente obtener una cota superior $k(6a - 1)$ mucho menor que la de Euclides, más teniendo en cuenta que son infinitos los valores posibles de $6a - 1$. Esta búsqueda, empero, no es aritméticamente esencial.

ESCOLIO. A priori, todos los números de la sucesión finita, definida por el Teorema 4, son posibles candidatos al título de "primo inmediátamente siguiente al $6a-1$", y eso para las infinitas sucesiones posibles definidas por los números $6a - 1$. Esto muestra es poco plausible excluir a todos los $6a + 1$ mayores que un determinado número, pues el que en todas esas sucesiones figura, por mucho que se logre disminuir la cota superior $k(6a - 1)$, es el $6a + 1$. Es plausible, por tanto, pensar que son infinitos los primos contenidos en la sucesión $6a_i + 1$. Y esto mismo sugieren las numerosísimas sucesiones de parejas de primos gemelos construidas. Nos informa Sierpiñski, en la página 117, que se sabe existen 152892 pares de primos gemelos menores que 30 millones.

6. DESCOMPOSICION EN FACTORES PRIMOS DE LOS NUMEROS CONTENIDOS EN LAS SUCESIONES DE BOUVELLES $6n - 1$, $6n + 1$, DONDE $n > 0$

Ya sabemos que ni uno de esos números es múltiplo ni de 2, ni de 3. Por consiguiente, los divisores primos posibles de esos números son los 5,7,11,13, 17,19, etc. contenidos en las sucesiones $6n - 1$, $6n + 1$. Descompuestos, por tanto, en sus factores primos, los números m de las sucesiones $6n - 1$, $6n + 1$, agrupando los factores primos, según que pertenezcan a la primera o a la segunda, se tendrá:

TEOREMA 5. Descompuestos en sus factores primos, los números m de las sucesiones $6n - 1$, $6n + 1$, adoptan la forma:

$$m = \prod_{a \in A} (6a - 1)^{\alpha(a)} \cdot \prod_{b \in B} (6b + 1)^{\beta(b)}$$

donde $\alpha(a)$ y $\beta(b)$ son determinados números naturales y

$$\left.\begin{matrix} A \\ \\ B \end{matrix}\right\} \text{ es un subconjunto finito del conjunto } \left\{\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, \ldots \\ \\ b_1, b_2, b_3, \ldots \end{matrix}\right.$$

sucesiones de las que se habló ya en el §3.

TEOREMA 6. El número m es compuesto, precísamente si

$$\sum_{a \in A} \alpha(a) + \sum_{b \in B} \beta(b) > 1$$

y además

$$m \in \begin{cases} 6n - 1 \\ \\ 6n + 1 \end{cases} \text{precísamente cuando } \sum_{a \in A} \alpha(a) \text{ fuera } \begin{cases} \text{im-par} \\ \\ \text{par (o cero)} \end{cases}$$

NOTACION. Pondremos m_1, m_2 según que, respectívamente, m pertenezca a $6n - 1$ $6n + 1$.

7. MULTIPLOS DE 6 QUE SEPARAN A LOS PARES DE PRIMOS GEMELOS

En lo siguiente, supondremos que m sea compuesto: Es inmediata la verdad de la proposición.

TEOREMA 7. El conjunto $\{ m_1 + 1 \} \cup \{ m_2 - 1 \}$ lo forman, precisamente, los múltiplos de 6 que separan a los del par $(6n - 1, 6n + 1)$, cuando uno de ellos, al menos, sea compuesto.

En consecuencia, se tendrá:

TEOREMA 8. Los múltiplos de 6 que separan a los pares de primos gemelos, son, precísamente, los del conjunto

$$\{6n\}_{1 \leqslant n < \omega} - (\{ m_1 + 1 \} \cup \{ m_2 - 1 \})$$

Es claro que el problema de los primos gemelos consiste en decidir si este conjunto es finito o infinito.

Son inmediatos los tres Escolios siguientes:

ESCOLIO 1° El conjunto de múltiplos de 6 que separan a los pares de la Clase C_1 es el $\{ m_1 + 1 \} \cap \{ m_2 - 1 \}$.

ESCOLIO 2° El conjunto de múltiplos de 6 que separan a los de la clase C_2, es el $\{ m_1 + 1 \} - (\{ m_1 + 1 \} \cap \{ m_2 - 1 \})$.

ESCOLIO 3° El conjunto de múltiplos de 6 que separan a los de la clase C_3, es el $\{ m_2 - 1 \} - (\{ m_1 + 1 \} \cap \{ m_2 - 1 \})$.

Ya sabemos que estos tres conjuntos constan de infinitos números, todos ellos múltiplos de 6.

8. Una consecuencia extraña de la proposicion "Es finito el numero de pares de primos gemelos"

Del número $6b - 1$, conjugado del primo $6b + 1$, podemos pensar, tanto que sea primo como compuesto, al variar b.

Si $6b - 1$ fuera compuesto, tendría un divisor primo de la forma $6x - 1$ perteneciente a la sucesión $6n - 1$. Se tendrían, por tanto, dos números naturales x, y que verificarían

$$6b - 1 = (6x - 1)(6y + 1) = (6x - 1) \cdot 6y + (6x - 1)$$

Esta ecuación es equivalente a esta otra

$$6b = (6x - 1) \cdot 6y + 6x$$

De ésta se sigue

$$6x < 6b \quad , \quad 6y < 6b$$

Haciendo el cambio de variables

$$6x = X \quad , \quad 6y = Y$$

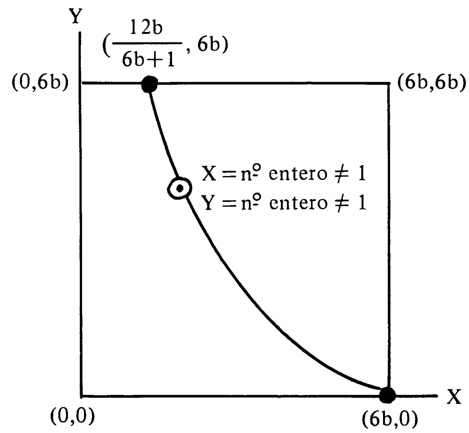
obtendríamos la conjunción

$$(6b = (X - 1) \cdot Y + X) \wedge (X < 6b) \wedge (Y < 6b)$$

En el plano cartesiano de los números reales, esta conjunción define el conjunto de puntos del arco de hipérbola dibujado en la figura adjunta.

En la hipótesis de ser compuesto el número natural $6b - 1$, ese arco de hipérbola tendría al menos un punto, cuyas dos coordenadas serían números naturales $\neq 1$. Esto resulta bastante extraño, porque, en el cuadrado, sólo existe un número finito de puntos cuyas dos coordenadas son números naturales. En cambio es $2^{\aleph_0}$ el número de puntos interiores al cuadrado una de cuyas coordenadas, al menos, es un número no entero.

Y esto resultaría más extraño todavía, si existiera un número natural k tal que, para $6b > k$, el número $6b - 1$ fuera compuesto, ya que, en los $\aleph_0$ cuadra-



dos en que 6b > k, el arco de hipérbola correspondiente, tendría que pasar por un punto cuyas dos coordenadas serían números naturales distintos de la unidad.

Ahora bien: es evidente que, si el conjunto de los primos gemelos fuera finito, existiría el dicho número natural k, para el cual 6b > k, implicaría que el número 6b – 1 sería compuesto.

9. APLICACION DEL TEOREMA DE LEIBNITZ-WILSON AL PROBLEMA DE LOS PRIMOS GEMELOS

Según Dickson (T° 1°, página 59), en los papeles de Leibnitz (1646-1716), se encuentra el llamado Teorema de Wilson (1741-1793), según el cual, el número p es primo, precísamente si

$$\frac{1 + (p - 1)!}{p}$$

fuera un número entero (2).

Según esto, (6a – 1, 6a + 1) sería un par de primos gemelos, precísamente si se verificara la conjunción

$$\frac{1 + (6a - 2)!}{6a - 1} = u \ n^{\circ}\ \text{natural} \ \wedge \ \frac{1 + (6a)!}{6a + 1} = v\ n^{\circ}\ \text{natural.}$$

(2) Es un importante Teorema en que la prioridad corresponde a Leibnitz. Pero a Leibnitz corresponde otra prioridad mucho más importante, que sólamente Lagrange (1736-1813) le ha reconocido: la de la invención del método de las ECUACIONES DIFERENCIALES (1684). Lo he demostrado documentálmente en mi monografía de 281 páginas HISTORIA DE LA INVENCION DEL ANALISIS INFINITESIMAL Y DE SU INTRODUCCION EN ESPAÑA (Acta Salmanticensia 1985).

Conforme a la notación, $6a - 1$ es siempre primo; luego u es siempre un número natural.

De las ecuaciones que forman la conjunción, se sigue:

$$(6a - 2)\,! = u\,(6a - 1) - 1 \ \wedge\ 1 + (6a)\,! = v\,(6a + 1)$$

Llevando la primera a la segunda, se tendrá:

$$1 + (u\,(6a - 1) - 1)\,(6a - 1)\,6a = v\,(6a + 1)$$

De ésta se deduce:

$$v = \frac{1 + u(6a - 1)^2\,6a - (6a - 1)\,6a}{6a + 1}$$

Se verifica, por tanto:

TEOREMA 9. En la hipótesis de que sea primo el número $6a - 1$, también será primo el conjugado $6a + 1$, si fuera entero el número

$$\frac{1 + u\,(6a - 1)^2\,6a - (6a - 1)\,6a}{6a + 1} = v$$

TEOREMA 10. El número de pares de primos gemelos coincidirá con el número de valores enteros de la función v del Teorema 9, cuando su variable, $6a - 1$, recorra los primos contenidos en la sucesión $6n - 1$.

Conviene notar que, tanto el numerador como el denominador, de la expresión que nos da v, són números naturales de la sucesión $6n + 1$.

10. DENSIDAD RELATIVA DE PRIMOS Y COMPUESTOS EN LOS SEMI-RAYOS INICIALES DE LA SUCESION DE LOS NUMEROS NATURALES Y SU EVOLUCION AL CRECER ESTOS

La vieja expresión factorial de los números naturales según sus factores primos, que es unívoca, evidencia que los números compuestos abundan más que los primos, en el sentido preciso del siguiente.

TEOREMA 11. Designando con P(m) y C(m), respectívamente, el número de primos y compuestos, contenidos en el semi-rayo inicial $1 \leqslant n \leqslant m$, la fracción P(m)/C(m) tiende a cero, para m tendiendo a infinito.

DEMOSTRACION. En la página 150, del libro de Sierpiñski, se demuestra, con recursos aritméticos, la proposición

$$\bigwedge_m \left(P(m) < \frac{4m}{\log m}\right) \text{ que es equivalente a } \bigwedge_m \left(\frac{P(m)}{m} < \frac{4}{\log m}\right)$$

De ésta se sigue que la fracción $\frac{P(m)}{m}$ tiende a cero para m tendiendo a infinito.

Se tendrá, en consecuencia,

$$\frac{P(m)}{C(m)} = \frac{P(m)}{m - P(m)} = \frac{P(m) : m}{1 - \frac{P(m)}{m}} \text{ que tiende a } \frac{0}{1-0} = 0$$

para m tendiendo a infinito.

TEOREMA 12. Cualquiera que sea el número natural k, existen intervalos (pq) que contienen más de k números compuestos.

DEMOSTRACION. (Por reducción al absurdo). Si, cualquiera que fuera el intervalo (pq), existiera un número natural k, para el cual $|(pq)| \leqslant k$, se tendría para todo m,

$$C(m) \leqslant kP(m) \text{ que nos daría } 1 \leqslant k\,\frac{P(m)}{C(m)}$$

Y esto es imposible, pues $\frac{P(m)}{C(m)}$ tiende a cero.

11. Generacion funcional recurrente de los primos

Las letras $x_1, x_2, x_3, \ldots$ designan variables que recorren líbremente el conjunto $N = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$ de los números naturales. En relación a la notación del §5 para los primos, se demuestra fácilmente el siguiente

TEOREMA 13. El primo P_{n+1} es el menor número natural olvidado por la función

$$P_1^{x_1} \cdot P_2^{x_2} \cdot P_3^{x_3} \cdot \ldots \cdot P_n^{x_n}$$

Según esto, los números primos se forman por el siguiente proceso recurrente:

$P_1 = 2$

$P_2 =$ mínimo número natural olvidado por $P_1^{x_1} = 3$

$P_3 =$ mínimo número natural olvidado por $P_1^{x_1} \cdot P_2^{x_2} = 5$

$P_4 =$ mínimo número natural olvidado por $P_1^{x_1} \cdot P_2^{x_2} \cdot P_3^{x_3} = 7$

etc.

TEOREMA 14. El primo P_{n+1} es el menor número natural olvidado por la función

$$1^{x_1} \cdot 2^{x_2} \cdot 3^{x_3} \cdot 4^{x_4} \cdot 5^{x_5} \cdot 6^{x_6} \cdot \ldots \cdot p_n^{x_{p_n}}$$

NOTAS

1ª. Escolio adicional al Teorema 7 del §7.

Consideremos el semi-rayo inicial $6 < 6n < 6k$ de múltiplos de 6. Sería muy interesante obtener la función $\psi(6k)$ que nos diera el número de los múltiplos de 6, no mayores que 6k, contenidos en los conjuntos

$$\{m_1 + 1\}, \{m_2 - 1\}$$

Es claro, en efecto que $6k - \psi(6k)$ nos daría el número de primos gemelos contenidos en la sucesión finita de pares

$$(6n - 1, 6n + 1) \text{ para } 1 < n < k.$$

Por tanto, según que la función $6k - \psi(6k)$, al crecer ilimitádamente k, acabará estacionándose, o creciera ilimitádamente, sería finito, o, respectivamente infinito, el número de primos gemelos.

2ª. EL TRACTATUS DE NUMERORUM DOCTRINA, es un manuscrito de la obra de Euler (1707-1783) que se conserva en la Acad. Scientiarum Petropolitanae, reproducido en el TIV (1944) de las LEONARDI EULERI OPERA OMNIA. El editor, R. Fueter, razona que fué escrito entre el 1748-1750. Está dividido en 16 capítulos, y consta de 586 parágrafos.

En el N° 31, los primos son el conjunto restante, al suprimir, en la sucesión de los números naturales, los números compuestos.

En el N° 41 clasifica a los números naturales por el número de sus factores primos, contando cada uno por su grado de multiplicidad. Si se aplica esta clasificación a cada una de las clases del §11, cada una de éstas se subdivide en infinitas clases, todas ellas finitas.

En los N^{os} 52 y 53 observa que, en la sucesión de los números naturales, empieza habiendo más primos que compuestos, pero, cuanto más se avanza, los compuestos son muchos, y los primos cada vez más pocos.

En el N° 147 menciona, exprésamente, las clases 6m, 6m + 1, 6m + 2, 6m + 3, 6m + 4, 6m + 5.

En el N° 251 da una lista de primos engendrados por 6m + 1.

En el N° 382 dice, expresamente, que 6q + 1, 6q – 1 dan todos los primos excepto el 2 y el 3. Da también una característica de los números de la forma 6q – 1.

En los N^{os} 384, 385, 386 da una característica de los números cuya forma es 6q + 1,

De los números de la forma 6q + 1 habla en los N^{os} 387, 388, 389, 390, 393, 395, 397, 401, 403, 404, 405, 408, 409.

CONCLUSIONES

1^a.– Designando con 6a – 1 al primo genérico de la sucesión 6n – 1, el número de primos gemelos coincide con el número de primos existentes en la sucesión 6a + 1.

2a.– Designando con 6b + 1 al primo genérico de la sucesión 6n + 1, el número de primos gemelos coincide con el número de primos de la sucesión 6b – 1.

3^a. El Teorema 8 del §7, da el conjunto de los múltiplos de 6 que separan a los pares de primos gemelos.

4^a. El número de pares de primos gemelos coincide con el número de valores enteros de la función v del Teorema 9.

5^a. El Teorema 2 demuestra que los intervalos saturados de números compuestos tienen un cardinal cuya forma es 6k + 1, 6k + 3, 6k + 5.

6^a.– En el Teorema 12 se demuestra que, cualquiera que sea el entero k, existen infinitos intervalos formados exclusivamente por más de k números compuestos.

7^a.– En el Teorema 13 y 14 se da el primo P_{n+1} inmediato siguiente al P_n. Esto permite definir la sucesión de los números primos a partir de $P_1 = 2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] APOSTOL: Introduction to analytic number theory (1978)

[2] BACHMANN: Niedere Zahlentheorie (1901/1968)

[3] BOUVELLES: Liber de numeris perfectis (1510)

[4] CATALDI: Trattato dei numeri perfetti (1603)

[5] COHEN: Théorie des nombres (1900)

[6] DICKSON: History of the Theory of numbers (T°1°, 1919; T°2°, 1920; T°3°, 1923/1971)

[7] DIRICHLET: Mathematische Werke (1889/1969, págs. 307-342)

[8] DIRICHLET: Vorlesungen über Zahlentheorie (1901/1968)

[9] ERATOSTENES: Eratosthenica (1822/1968. Seminario de Filología Clásica de la Univ. de Salamanca. El cribado en las págs. 173, 174).

[10] EUCLIDIS: Elementorum Libri XV (Lipsiae 1769. Libros 7°, 8°, 9°)

[11] EULER: Tractatus de numerorum doctrina (1748-1750. Vol. 4° 1944 Opera Omnia).

[12] GAUSS: Disquisitiones Arithmeticae (1801 n° 111. Werke T°1° pág. 88).

[13] GUY: Unsolved problems in Number theory (1981).

[14] HARDY, WRIGHT: An introdution to the theory of Numbers (1956).

[15] HUA LOO KENG: Introduction to Number theory (1982).

[16] KRONECKER: Vorlesungen über Zahlentheorie (1901/1978 págs. 438, 439, 440).

[17] LANDAU: Handbuch der Lehre von Verteilung der Primzahlen (1909/1974).

[18] LEGENDRE: Recherches d'Analyse indeterminé (Hist. Acad. Roy. Scien. París 1785 pág. 466).

[19] LEGENDRE: Théorie des nombres (1978, 2ª ed. 1830/1955).

[20] LEIBNIZ: Essais de Theodicée (1710/1965 Die Philosophischen Schriften T°6°. Escribe, reiterádamente, sobre Ontología de la Aritmética.

[21] LORIA: Storia delle Matematiche (1950/1982).

[22] LUCAS: Théorie des nombres (1891).

[23] REY PASTOR: Elementos de Análisis algebráico (1922).

[24] SHANKS: Solved and unsolved problems in Number theory (3ª ed. 1985).

[25] SIERPIÑSKI: Elementary theory of numbers (1964).

[26] TANNERY: Leçons d'Arithmétique (1^a ed. 1894; 7^a ed. 1917).

[27] VINOGRADOV: Fundamentos de la teoria de números (edit. Mir 1977).

MATHEMATICAL REVIEWS. De los últimos años, se han visto:
T° 52 (1976) pág. 787, donde aparecen las sucesiones 6k – 1, 6k + 1.
T° 55 (1978) pág. 762. Gibt es unendliche Primzahl zwillinge?.
El autor del artículo se llama Kofler (Praxis Math. 15 (1974) 285-288). Da la probabilidad de que haya primos gemelos entre $n_1 < n_2$, y demuestra que ésta tiende a cero, para n_1 tendiendo a infinito.
Año 1981, 81/a. Pág. 47.
Año 1984, 84/m. Pág. 4892: Heath, Brown.– Prime twins and Siegel zeros (Proc. London Math. Soc. 47 (1983, pags. 193-224). La reseña dice que trata más de los Siegel zeros, que de los prime twins.

Prof. N. Cuesta Dutari
Avda. de Portugal 72
SALAMANCA. Spain