LA CATEGORIA-BASE DE LOS ABIERTOS REGULARES DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

por

J.M. AYERBE TOLEDANO

ABSTRACT

In this paper we study, for a given topological space the category base of the regular open sets. We apply the results to the study the Lebesgue's density topology in $\mathbb{R}$.

En el año 1977 J.C. Morgan II definió el concepto de categoría-base el cual es una generalización del concepto de topología. A partir de aquí el autor ha desarrollado una teoría abstracta de categoría de Baire cuya consecuencia más importante es unificar algunas de las analogías observadas entre los conjuntos medibles y los conjuntos con la propiedad de Baire.

En este artículo estudiamos en concreto la categoría-base de los abiertos regulares de un espacio topológico y aplicamos los resultados obtenidos a la topología de la densidad de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

1. INTRODUCCION

En esta sección recordaremos algunas definiciones y teoremas establecidos en (4).

Definición. Un par (X, Ω), donde Ω es una familia no vacía de subconjuntos de X, es llamada una categoría-base si los conjuntos no vacíos en Ω, llamados regiones satisfacen los siguientes axiomas:

1. Cada punto de X pertenece a alguna región.
2. Sea A una región y sea ω cualquier familia no vacía de regiones disjuntas la cual tiene potencia menor que la de Ω. Entonces
   (a) Si $A \cap (\cup\, \omega)$ contiene una región puedo afirmar que existe $D \in \omega$ tal que $A \cap D$ contiene una región.

(b) Si $A \cap (\cup\, \omega)$ no contiene ninguna región, entonces existe una región B contenida en A la cual es disjunta con cada región en ω.

Respecto de una categoría-base dada (X, Ω) vamos a definir los conceptos de categoría de Baire generalizada para subconjuntos de X.

Definición. Un conjunto es singular si cada región contiene una subregión disjunta con él. Una unión numerable de conjuntos singulares es llamada un conjunto magro. Un conjunto que no es magro es llamado un conjunto abundante.

Notación. La familia de todos los conjuntos magros respecto de una categoría-base dada (X, Ω) será denotada por $\mathcal{M}(\Omega)$.

Teorema. La familia de todos los conjuntos singulares forma un ideal y la familia de todos los conjuntos magros un σ-ideal.

Definición. Un conjunto S tiene la propiedad de Baire si cada región A tiene una subregión en la cual o S o X-S es un conjunto magro.

Notación. La familia de todos los conjuntos con la propiedad de Baire respecto de una categoría-base dada (X, Ω) será denotada por $\mathcal{B}(\Omega)$.

Teorema. Los conjuntos que tienen la propiedad de Baire forman un σ-álgebra el cual contiene a todas las regiones y a todos los conjuntos magros.

Definición. Dos categorías-base (X, Ω) y (X, Σ) son llamadas equivalentes si tienen los mismos conjuntos magros y los mismos conjuntos con la propiedad de Baire.

2. La categoria-base de los abierto regulares de un espacio topologico

Sea (X, T) un espacio topológico y sea $R(X)$ la familia de todos los abiertos regulares de X, esto es, $R(X)$ es la familia de todos los abiertos que coinciden con el interior de su clausura.

Proposición 2.1. $R(X)$ es una categoría-base

Nuestro objetivo será ahora estudiar su relación con la categoría-base (X, T).

Proposición 2.2. Sea (X, T) un espacio topológico y sea $R(X)$ la familia de los abiertos regulares de X. Entonces

$$\mathcal{M}(R(X)) \subseteq \mathcal{M}(T)$$

$$\mathcal{B}(R(X)) \subseteq \mathcal{B}(T)$$

Además si $\mathcal{M}(R(X)) = \mathcal{M}(T)$, entonces $\mathcal{B}(R(X)) = \mathcal{B}(T)$.
Demostración:

Sea A un conjunto R(X)-singular.
Entonces para cada abierto regular G, existe un subconjunto abierto regular H cuya intersección con A es vacía.

Supongamos que A no es T-singular. Entonces debe existir un abierto U tal que todo subconjunto abierto V de U corta a A.

Dado el abierto U en virtud de (5, Th 4,5) debe existir un abierto regular H y un conjunto raro N de forma que pueda escribirse $U = H - \bar{N}$.

Dado el abierto regular H existe un subconjunto H' también abierto regular y disjunto con A.

Puesto que cada subconjunto abierto de U debe cortar a A, ha de ser H' un subconjunto de $\bar{N}$, pues en otro caso $H' \cap U \subseteq U$ y $(H' \cap U) \cap A = \emptyset$, lo que no puede suceder.

Obtengo pues que H' es un subconjunto del conjunto raro $\bar{N}$, lo cual es absurdo. Así A ha de ser T-singular.

Si ahora A es magro en R(X) resulta que debe poder expresarse como una unión numerable de conjuntos R(X)-singulares. Todos estos conjuntos serán también T-singulares, y por tanto A es magro en T. Sigue que $\mathcal{M}(R(X)) \subseteq \mathcal{M}(T)$.

Sea ahora A un conjunto que tiene la propiedad de Baire para R(X). Entonces para cada abierto regular G debe existir un subconjunto abierto regular H tal que $H \cap A$ o $H \cap A^c$ es magro en R(X), y por tanto en T.

Dado cualquier abierto G, existe un abierto regular H que lo contiene y que difiere de él en un conjunto raro.

Dado el abierto regular H, debe existir otro abierto regular H' contenido en él y tal que $H' \cap A$ o $H' \cap A^c$ es un conjunto magro en T.

De los dos últimos resultados sigue que, dado el abierto G, puedo considerar el abierto $H' \cap G$ que es un subconjunto de G tal que $(H' \cap G) \cap A$ o $(H' \cap G) \cap \cap A^c$ es magro en T. (Observa que $H' \cap G$ no es vacío pues en ese caso H' estaría contenido en un conjunto raro, lo que no puede suceder). Sigue que A tiene la propiedad de Baire respecto de T.

Supongamos ahora que los conjuntos magros en R(X) y en T coinciden.

Sea A un conjunto que tiene la propiedad de Baire para T. Entonces para cada abierto G existe un subconjunto abierto G' tal que $G' \cap A$ o $G' \cap A^c$ es magro en T, y por tanto en R(X) según nuestra hipótesis.

Dado en particular un abierto regular G, existirá un abierto G' contenido en él tal que $G' \cap A$ o $G' \cap A^c$ es magro en T, y por tanto en R(X).

Dado el abierto G', existe un abierto regular H que difiere de él en un conjunto raro. Por tanto $H \cap G$ es un abierto regular contenido en G y que difiere de G' en un conjunto raro. Así $(H \cap G) \cap A$ o $(H \cap G) \cap A^c$ es magro en T, y por tanto en R(X).
Hemos probado pues que para todo abierto regular G existe un subconjunto abierto regular V tal que $V \cap A$ o $V \cap A^c$ es un conjunto magro en R(X). Sigue que A tiene la propiedad de Baire respecto de R(X).
Con esto hemos obtenido que $\mathfrak{B}(T) \subseteq \mathfrak{B}(R(X))$ y como la otra inclusión ya se tenía de la primera parte de la proposición, sigue la igualdad. #

Nota: Este hecho no se da desde luego en general en el caso de tener dos topologías una más fina que otra.

Contraejemplo: En el conjunto de los nº reales consideramos una topología que cumpla la siguiente condición: los conjuntos magros para esta topología son los que tienen medida de Lebesgue nula y los conjuntos que tienen la propiedad de Baire para la topología son los medibles Lebesgue.

Una topología de este tipo puede efectivamente construirse en $\mathbb{R}$ (6, cap 22) y además resulta ser más fina que la topología euclídea. Sin embargo, hay conjuntos magros en la topología euclídea que no lo son en esta topología, esto es, que no tienen medida de Lebesgue nula. En efecto, es conocido (Th.1.6 de (6)) que $\mathbb{R}$ puede escribirse como la unión de un conjunto magro para la topología euclídea y uno de medida nula. Dicho conjunto magro, pues, no puede tener medida nula, y por tanto no será magro en la topología considerada.

Tampoco la segunda parte de la proposición es cierta entre dos topologías.

Contraejemplo: Consideremos sobre un espacio X las topologías trivial y discreta. Respecto de ambas el único conjunto magro es el vacío. Sin embargo mientras que para la primera el único conjunto con la propiedad de Baire es el vacío, para la segunda todos los subconjuntos de X tienen la propiedad de Baire.

Colorario 2.1. (X, T) es equivalente a (X, R(X)) si y sólo si tienen los mismos conjuntos magros.

Proposición 2.3. (X, T) es equivalente a (X, R(X)) si y sólo si cada abierto de la topología contiene un abierto regular.

Demostración:

Supongamos que (X, T) es equivalente a (X, R(X)) y, sin embargo existe un abierto V que no contiene ningún abierto regular.

Por ser V abierto, debe existir un abierto regular H de forma que pueda escribirse $V = H - \overline{N}$, donde N es raro.

Así $H - V \subseteq \bar{\bar{N}}$, y por tanto $H - V$ ha de ser un conjunto singular en (X, T).

Como (X, T) y (X, R(X)) son equivalentes, ha de ser $H - V$ singular también en R(X). Sin embargo, dado el abierto regular H no hay ningún abierto regular contenido en él y disjunto con $H - V$, pues si lo hubiera habría de estar contenido en V.

Así resulta que (X, T) no es equivalente a (X, R(X)), y hemos llegado a contradicción.

Veamos el recíproco. Supongamos que dado cualquier abierto V existe un abierto regular H contenido en él.

Para probar que (X, T) es equivalente a (X, R(X)), en virtud del corolario anterior basta ver que coinciden los conjuntos magros en ambas categorías-base y para ello, en virtud de la proposición (2.2), basta demostrar que $\mathcal{M}(T) \subseteq \mathcal{M}(R(X))$ puesto que la otra inclusión se tiene siempre.

Sea pues A un conjunto T-singular. Entonces para cada abierto H existe un subconjunto abierto V disjunto con A.

Dado el abierto regular G, existirá un subconjunto abierto V contenido en G y disjunto con A.

Dado el abierto V debe existir un abierto regular H contenido en él.

De estas dos últimas afirmaciones sigue que dado el abierto regular G, existe otro abierto regular H contenido en él y disjunto con A.

Se tiene así que A es R(X)-singular.

Sea ahora A un conjunto T-magro. Entonces A puede escribirse como una unión numerable de conjuntos T-singulares, que por lo anterior serán también R(X)-singulares. Sigue así que A debe ser R(X)-magro. #

Nota: Topologías que cumplan la condición exigida en esta proposición hay muchas. En concreto la topología euclídea de $\mathbb{R}$ o de cualquier $\mathbb{R}^n$ la cumple. Más aún, los espacios llamados semirregulares (8, cap 5, pag 98), esto es, que poseen una base de la topología formada por abiertos regulares cumplen con exceso esta condición. Estos espacios verifican las dos condiciones siguientes:

1. Todo espacio regular es semirregular
2. Todo espacio puede ser sumergido en un espacio semirregular.

Por tanto todo espacio regular está en las condiciones de la proposición 2.3, y todo espacio topológico puede ser sumergido en uno que cumpla la condición de la proposición.

3. TOPOLOGIA ASOCIADA A LA CATEGORIA-BASE DE LOS ABIERTOS REGULARES

Ya hemos dicho que Morgan II utilizando la noción de categoría-base, la cual sabemos es una generalización de la noción de topología, ha conseguido desarrollar una teoría general en la cual las analogías entre la medida de Lebesgue y la categoría de Baire pueden ser unificadas.

El siguiente problema planteado por este autor fue el de asociar a cada categoría-base una topología. Este problema fue abordado en (5) de la forma que reseñamos a continuación:

Dada una categoría-base (X, Ω) Morgan II define el conjunto derivado de un conjunto A como el conjunto $D(A)$ de todos los puntos de X en los cuales A es localmente abundante. Esto es, un punto x pertenece a $D(A)$ si y sólo si existe una región B conteniendo a x tal que cada subregión C de B que contenga a x cumple que $C \cap A$ es un conjunto abundante.

Si llamo conjunto cerrado a todo aquel que contiene a su conjunto derivado, se verifica que la familia F de todos los conjuntos cerrados cumple las propiedades necesarias para ser una familia de cerrados de una topología.

Por tanto, si llamo conjunto abierto al complemento de un conjunto cerrado, obtendré que la familia Ω^* formada por todos los conjuntos abiertos es una topología. A dicha topología Morgan II la llama topología básica asociada a la categoría-base (X, Ω).

Así pues Morgan II consigue asociar a cada categoría-base una topología a la que llama básica. Sin embargo, dicha topología no es en general equivalente a la categoría-base de la que parte. Más aún, ni siquiera en el caso de que la categoría-base sea una topología se obtiene que la topología básica sea equivalente a ella. Esto muestra los graves inconvenientes de esta topología.

Vamos a estudiar ahora la relación que existe entre las topologías básicas asociadas a la categoría-base de los abiertos regulares y a la topología del espacio.

Proposición 3.1. Si cada abierto de la topología contiene un abierto regular, entonces las topologías básicas asociadas a (X, T) y $(X, R(X))$ coinciden.

Nota: En virtud de la proposición 2.3 un enunciado equivalente de 3.1 sería: Si (X, T) es equivalente a $(X, R(X))$, entonces $T^* = R(X)^*$, es decir las topologías básicas coinciden.

Demostración:

Basta ver que para cada subconjunto A de X se tiene

$$D_{R(X)}(A) = D_T(A).$$

Sea x un punto de $D_{R(X)}(A)$. Entonces existe un abierto regular G que contiene a x, tal que cualquier abierto regular V contenido en él y que contiene a x, corta a A en un conjunto abundante.

Veamos que dado cualquier abierto H que contiene a x y que está contenido en G, puedo encontrar un abierto regular W contenido en G, conteniendo a x, y tal que H puede escribirse en la forma $H = W - \overline{N}$, donde N es raro.

En efecto:

Dado el abierto H, existe un abierto regular U que contiene a H y tal que $H = U - \overline{N}$, con N raro.

Considero el conjunto $U \cap G$ que es un abierto regular que contiene a x y tal que $H = (U \cap G) - \overline{N}$. Por tanto basta tomar $W = U \cap G$.

Se verifica que $W \cap A$ es abundante. Además $H \cap A$ difiere de $W \cap A$ en un conjunto singular. Sigue que $H \cap A$ es abundante, y por tanto $x \in D_T(A)$.

Veamos el recíproco. Supongamos que x es un punto de $D_T(A)$. Esto significa que existe un abierto H que contiene a x tal que cualquier subconjunto abierto que contiene a x corta a A en un conjunto abundante.

Dado el abierto H, existe un abierto regular W que contiene a x y H, y tal que H y W difieren en un conjunto raro.

Sea G un abierto regular contenido en W y que contiene a x. Se verifica que G contiene a $G \cap H$, x pertenece a $G \cap H$ que está contenido en H y $(G \cap H) \cap A$ es un conjunto abundante. De todo esto sigue que $G \cap A$ es un conjunto abundante, y por tanto x pertenece a $D_{R(X)}(A)$. #

Nota: Veamos que la condición que hemos impuesto en la proposición es esencial.

Contraejemplo:

Sea la categoría-base (X, T) donde X es el conjunto de los números naturales y T es la topología confinita sobre dicho conjunto.

Es fácil ver que la topología básica asociada a esta categoría-base es la topología discreta. Veamos ahora cuales son los abiertos regulares de esta topología.

Se verifica que para cada subconjunto A de X

$$\operatorname{int}(A) = \begin{cases} A \text{ si } X-A \text{ es finito} \\ \emptyset \text{ si } X-A \text{ no es finito} \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{cases} A \text{ si } A \text{ es finito} \\ X \text{ si } A \text{ no es finito} \end{cases}$$

Por tanto $R(X) = \{\emptyset, X\}$ y (X, R(X)) es la topología trivial cuya topología básica asociada es la propia topología trivial como facilmente puede mostrarse (es inmediato que para cada A no vacío $D(A) = X$).

Hemos visto pues un ejemplo de un espacio topológico en el que no se cumple la condición exigida en 3.1 y en el cual las topologías básicas asociadas a (X, T) y a (X, R(X)) no sólo son distintas, sino que son la más fina y la menos fina respectivamente que pueden definirse sobre cualquier espacio.

Nota: Veamos ahora que la proposición 3.1 no puede generalizarse al caso de dos categorías-base cualesquiera.

Contraejemplo:

Hemos de encontrar dos categorías-base equivalentes que tengan asociadas topologías básicas distintas. Son las siguientes:

Sea (X, M, m) un espacio de medida σ-finito, completo y no atómico. Sea Ω la familia de todos los conjuntos de medida positiva. Los conjuntos magros coinciden con los conjuntos de medida nula y los conjuntos que tienen la propiedad de Baire coinciden con los medibles. Puede mostrarse facilmente que cada conjunto S de medida exterior positiva cumple D(S) = X. Esto implica que la topología básica Ω^* está formada únicamente por $\emptyset$, X y todos los conjuntos cuyo complemento tiene medida cero.

En particular el espacio de medida de Lebesgue sobre el conjunto de los números reales está en las condiciones del ejemplo anterior.

Consideremos ahora sobre el espacio de medida ($\mathbb{R}$, M, m) la categoría-base Θ formada por todos los conjuntos cerrados que tienen medida de Lebesgue positiva en cada entorno de cada uno de sus puntos. Los conjuntos magros en esta categoría-base coinciden con los de medida de Lebesgue cero, y los que tienen la propiedad de Baire con los medibles Lebesgue. Morgan II ha probado en (5) que la topología básica Θ^* está formada por todos los conjuntos de la forma G-N, donde G es un abierto en la topología euclídea y N es un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Hemos encontrado pues dos categorías-base (X, Ω) y (X, Θ) que son equivalentes pero que tienen asociadas topologías básicas distintas.

4. EJEMPLO: LA TOPOLOGIA DE DENSIDAD DE LEBESGUE

Sea (X, M, m) un espacio de medida. Por definición una densidad inferior para m será una aplicación

$$\Phi : M \longrightarrow M$$

que cumple las siguientes propiedades:

1) $\Phi(A) \sim A$
2) Si $A \sim B$, entonces $\Phi(A) = \Phi(B)$

3) $\Phi(\emptyset)=\emptyset$, $\Phi(X)=X$

4) $\Phi(A \cap B)=\Phi(A) \cap \Phi(B)$

donde $A \sim B$ cuando la medida de la diferencia simétrica entre A y B es nula.

D. Maharam ha probado en (3) que sobre el σ-álgebra de los conjuntos medibles de cualquier espacio de medida finito y completo puede definirse siempre una tal aplicación.

Esta aplicación Φ permite definir, siempre que exista, aunque el espacio de medida no sea finito, una topología a la que llamamos de densidad, dada por

$$Td = \{\Phi(A) - N : A \in M, N \in \mathcal{N}\} \qquad \mathcal{N} = \{A \in M : m(A) = 0\}$$

Respecto de esta topología, los conjuntos que tienen la propiedad de Baire son los conjuntos medibles, y los conjuntos de primera categoría son los de medida nula. Tiene evidente interés esta topología desde el punto de vista de la teoría de categorías-base, puesto que la consecuencia más importante de ésta es la unificación de ciertas analogías que habían sido observadas entre los conjuntos medibles y los que tienen la propiedad de Baire. La topología de densidad ha sido particularmente estudiada por A. y C. Ionescu Tulcea en (2, Cap. V).

La topología de densidad más conocida y que ha sido estudiada más abundantemente es la de Lebesgue. Es la que se obtiene definiendo sobre el espacio de medida de Lebesgue ($\mathbb{R}$, M, m) la densidad inferior Φ definida en (6, pág. 16 y 90). Las propiedades de esta topología han sido estudiadas abundantemente en (1, 6 y 7). Se verifica en particular que esta topología es semirregular y su familia de abiertos regulares es $R(Td) = \{\Phi(A) : A \in M\}$.

Del hecho de ser el espacio semirregular sigue que las topologías básicas asociadas a Td y a R(Td) coinciden. En general, como ya hemos indicado, no tienen porqué coincidir con la propia topología del espacio. Veamos en este caso que topología es Td*.

Se verifica que

$x \epsilon D_{T_d}(A)$ sii cada abierto de la topología de densidad que contenga a x, corta a A en un conjunto abundante en dicha topología de densidad.

Esta última afirmación es equivalente a la siguiente:

Cada abierto de la topología de densidad que contenga a x corta a A en un conjunto que no es de medida nula.

A su vez esta afirmación es equivalente a esta otra:

Cada abierto regular de la topología de densidad que contenga a x corta a A en un conjunto que no es de medida nula.

Veamos ahora como es el conjunto derivado en la topología de densidad:

$x \epsilon d_{T_d}(A)$ (x es punto de acumulación de A en Td) sii cualquier abierto de la topología de densidad que contenga a x corta a $A - \{x\}$.

Esta afirmación es equivalente a la siguiente:
Cada abierto regular de la topología de densidad que contenga a x corta a A en un conjunto que no tiene medida nula.

En efecto:

Supongamos que cualquier abierto de la topología de densidad que contenga a x corta a $A - \{x\}$, pero existe un abierto regular Φ (C) que contiene a x y que corta a A en un conjunto de medida nula N.

Considero entonces el abierto de la topología de densidad $\Phi(C) - (N - \{x\})$, que contiene a x y que es disjunto con $A - \{x\}$, lo cual no puede suceder.

El recíproco se prueba inmediatamente.

Por tanto, cada subconjunto A de X verifica

$$D_{Td}(A) = d_{Td}(A)$$

y así la topología de densidad en $\mathbb{R}$ coincide con su topología básica Td*, por lo que se deduce.

Corolario 4.1. La topología de densidad en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{R}^n$) coincide con la topología básica asociada a la categoría-base R(Td) y con la topología básica asociada a la propia topología de densidad.

REFERENCIAS

(1) Goffman, C., Neugebauer, C.J., Nishiura, T.: Density topology and approximate continuity, Duke Math. J. 28, 497-505 (1961).

(2) Ionescu Tulcea, A. y C.: Topics in the theory of lifting, Springer-Verlag (1969).

(3) Maharam, D.: On a theorem of Von Neumann, Proc. Amer. Math. Soc. 9, 987-994 (1958).

(4) Morgan II, J.C.: Baire category from an abstract viewpoint, Fund. Math. 94, 13-23 (1977).

(5) Morgan II, J.C.: On equivalent category bases, Pacific J. Math. 105, 207-215 (1983).

(6) Oxtoby, J.C.: Measure and Category, Springer-Verlag (1980)

(7) Tall, F.D.: The density topology, Pacific J. Math. 62, 275-284 (1976).

(8) Willard, S.: General topology, Addison-Wesley (1970).