Collect. Math. **39** (1988), 97–114

Condiciones suficientes de estabilidad para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con retardos

Tomás Caraballo

Depto. Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas,

Univ. Sevilla, Apartado de Correos 1160, 41080 Sevilla, Spain

Received 24/FEB/89

Abstract

Sufficient conditions for pathwise exponential stability of the zero solution of stochastic PDE with deviating argument $dx_t = Ax_t\,dt + Bx_{\rho(t)}\,dw_t$ are given. The assumptions on the operators A and B are the same that in the case without delay, but the proof is different. In fact, our method shows an alternative proof for the results in the particular case $\rho(t) = t$. First, we obtain sufficient conditions for the second moment of x_t to decay exponentially. Next, asymptotic exponential stability of paths (with probability one) is deduced. Finally, an example is given in order to illustrate our theory.

1. Introducción y preliminares

El principal objetivo de este trabajo es establecer condiciones suficientes para garantizar la estabilidad asintótica de las soluciones de una clase de ecuaciones en derivadas parciales estocásticas con retardo. Estas intervienen, como es bien sabido, en la modelización de numerosos fenómenos con origen en Física, Biología, Economía, etc. ...(véase Chow [3] para fenómenos físicos, Fleming [5] para fenómenos de genética de poblaciones, Pardoux [9] para modelización y simulación de problemas de filtraje ...).

La situación general en la que se va a desenvolver nuestro trabajo es la siguiente: Consideraremos fijados un espacio de probabilidad filtrado y completo

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P),$$

un proceso de Wiener real normalizado, w_t, relativo a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, (véase Pardoux [8,9] para todos los resultados relativos a integración estocástica).

Sean V, H espacios de Hilbert reales separables verificando $V \hookrightarrow H$ (con inclusión continua y densa). Identificando, como es habitual, H con su dual H' se tiene la relación

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V'.$$

Se denotará por $\|\cdot\|$ la norma de V, por $|\cdot|$ la de H, por $\|\cdot\|^*$ la de V'. El producto escalar de H será $(\cdot,\cdot)$ y la dualidad V', V será $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Dados $h, T \geq 0$ se denota por $I^2(-h,T;V)$ el espacio de los procesos estocásticos $(x_t)_{t\in[-h,T]}$ (brevemente se escribirá x_t), medibles (como aplicación definida de $[-h,T]\times\Omega$ en V), tomando valores en el espacio de Hilbert V y verificando además:

i) x_t es $\mathcal{F}_t$-medible c.p.d. en t (donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ para $t \in [-h,0]$)

ii)

$$E\int_{-h}^{T} |x_t|^2\, dt < +\infty.$$

Es fácil comprobar que $I^2(-h,T;V)$ es un subespacio cerrado (y por tanto completo) del espacio $L^2(\Omega\times[-h,T], \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}([-h,T]), dP\otimes dt; V)$.

Por comodidad de notación se escribirá $L^2(\Omega; C(-h,T;H))$ en lugar de $L^2(\Omega,\mathcal{F},dP; C(-h,T;H))$, donde $C(-h,T;H)$ denota el espacio de las funciones continuas definidas sobre $[-h,T]$ y tomando valores en H.

Sean $A: V \to V'$ un operador lineal continuo (i.e. $A \in \mathcal{L}(V,V')$) y B un elemento de $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(H,H)$, verificándose la condición de coercividad siguiente:

$$(c) \qquad \exists\, \nu \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0: \qquad -2\langle Ax, x\rangle + \nu|x|^2 \geq \varepsilon\|x\|^2, \qquad \forall x \in V.$$

Dada la función (de retardo) $\rho: [0,+\infty) \to [-h,+\infty)$ con $\rho \in C^1(0,+\infty;\mathbb{R})$, $\inf_{t\geq 0}\{\rho'(t)\} = \rho_* > 0$, y dado el proceso inicial $\psi: \Omega\times[-h,0] \to V$ con $\psi \in I^2(-h,0;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,0;H))$, se verifica [10,11] que existe un único proceso $x_t \in I^2(-h,T;V)\cap L^2(\Omega;C(-h,T:H))(\forall T\geq 0)$ y tal que es solución del siguiente problema

$$(Q) \qquad \begin{cases} x_t = \psi(0) + \int_0^t Ax_s\,ds + \int_0^t Bx_{\rho(s)}\,dw_s \quad P-\text{c.s.}, & \forall t \geq 0 \\ x_t = \psi(t) & \text{si } t \in [-h,0], \end{cases}$$

donde la primera igualdad se entiende en el espacio V'.

Este problema se suele escribir en términos de diferenciales estocásticas como

$$(Q^*) \qquad \begin{cases} dx_t = Ax_t\,dt + Bx_{\rho(t)}\,dw_t, & \forall t \geq 0 \\ x_t = \psi(t), & t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

A un tal proceso se le llama *solución en sentido fuerte* (o simplemente *solución fuerte*) de (Q).

De otro lado, es bien conocido [4] que de la condición (c) se deduce que el operador A genera un semigrupo de operadores, $\{U_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(H)$, de tipo c_0, y en consecuencia se puede definir el concepto de *solución generalizada* ("mild-solution") de (Q) asociada al proceso x_t, y que no es más que el proceso y_t solución de

$$y_t = U_t\,\psi(0) + \int_0^t U_{t-s}By_{\rho(s)}dw_s \quad \text{(igualdad en } H\text{)}.$$

En estas condiciones, se verifica [2] que la solución fuerte coincide con la generalizada asociada, es decir,

$$x_t = U_t\,\psi(0) + \int_0^t U_{t-s}Bx_{\rho(s)}dw_s, \qquad P-\text{c.s.}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Pues bien, en la situación que acabamos de describir, vamos a establecer condiciones suficientes para obtener resultados de estabilidad asintótica exponencial para las trayectorias del proceso solución fuerte de (Q). Previamente se obtienen condiciones suficientes para la estabilidad exponencial del segundo momento de x_t. Este mismo esquema es usado por Haussmann [6] en el caso sin retardo, es decir, cuando $\rho(t) = t$, pero hace uso de un funcional de Liapunov construído a partir de un cierto operador $P \in \mathcal{L}(H)$. El método que vamos a desarrollar proporciona una demostración en la que se prescinde de tal funcional.

En la Sección 2 se establece la estabilidad exponencial para el segundo momento. En la Sección 3 se deduce la estabilidad trayectorial. Un interesante ejemplo de aplicación se encuentra en la Sección 4.

2. Estabilidad exponencial del segundo momento

Comencemos fijando definitivamente las hipótesis que van a ser efectuadas sobre los operadores A y B, la función de retardo ρ y el dato inicial ϕ.

Para ρ:

$$(2.1) \qquad \rho \in C^1(0,+\infty;\mathbb{R}),\ \exists h > 0 : \qquad t - h \leq \rho(t) \leq t,\ \rho'(t) \geq 1,\ \forall t \geq 0.$$

Esto implica automáticamente que existe la inversa, ρ^{-1}, y además

$$(2.2) \qquad \exists k > 0 : \qquad t \leq \rho^{-1}(t) \leq t + k, \quad \forall t \geq 0.$$

Para A:

(A_1) $A \in \mathcal{L}(V,V')$, con $-A$ coercivo, es decir:

$$(c) \qquad \exists \nu \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 : \qquad -2\langle Ax, x\rangle + \nu|x|^2 \geq \varepsilon \|x\|^2, \qquad \forall x \in V.$$

La siguiente hipótesis exige que A o, lo que es lo mismo, el semigrupo generado por él, U_t, sea exponencialmente estable:

$$(H_1) \qquad \exists \gamma > 0,\ c > 0 : \qquad |U_t| \leq ce^{-\gamma t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Aquí por $|\cdot|$ denotamos también la norma en $\mathcal{L}(H)$.

Para el operador B:

$$(B_1) \qquad B \in \mathcal{L}(H),$$

$$(H_2) \qquad \left|\int_0^\infty B^* U_t^* U_t B\, dt\right| < 1.$$

Obsérvese que, gracias a (H_1), la integral precedente posee sentido en $\mathcal{L}(H)$. Recuérdese que

$$(2.3) \qquad \left|\int_0^\infty B^* U_t^* U_t B\, dt\right| = \sup_{x \in H \setminus \{\theta\}} \frac{\displaystyle\int_0^\infty (B^* U_t^* U_t Bx, x)\, dt}{|x|^2}.$$

Por último, para el dato inicial ϕ:

$$(2.4) \qquad \phi \in L^2(-h, 0; V) \cap L^2(\Omega; C(-h, 0; H)).$$

En las condiciones (2.1), (A_1), (B_1), (2.4), se tiene asegurada la existencia y unicidad de solución x_t del problema (Q). Añadiendo las hipótesis (H_1), (H_2), vamos a obtener estabilidad exponencial del segundo momento de x_t.

Un resultado que juega un papel fundamental es el hecho de que la solución fuerte de (Q) es también solución generalizada.

Teorema 2.1

Bajo las hipótesis (2.1), (A_1), (B_1), (H_1), (H_2), *(2.4), la solución* x_t *de* (Q) *verifica:*

$$\exists \lambda,\ K > 0 \quad \textit{tales que} \quad E|x_t|^2 \le K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \quad \forall t \ge 0, \tag{2.5}$$

donde

$$\|\psi\|_1^2 = \max\left\{ E|\psi(0)|^2, \int_{-h}^{0} E|\psi(s)|^2\, ds \right\}.$$

Demostración. La efectuaremos en dos etapas. En la primera probaremos la existencia de $\lambda > 0$, $K_1 > 0$, tales que

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} E|x_t|^2\, dt \le K_1 \|\psi\|_1^2.$$

En la segunda, haciendo uso de la estimación anterior y de la Fórmula de Itô [7,8], obtendremos la estimación (2.5).

Etapa 1: La solución x_t de (Q) se puede escribir como

$$\begin{cases} x_t = U_t\,\psi(0) + \displaystyle\int_0^t U_{t-s} B x_{\rho(s)}\, dw_s, & t \ge 0, \\ x_t = \psi(t), & t \in [-h, 0], \end{cases} \tag{2.6}$$

(igualdades en H), de donde sigue

$$\begin{aligned} |x_t|^2 = {} & |U_t\,\psi(0)|^2 + \left| \int_0^t U_{t-s}\, B x_{\rho(s)}\, dw_s \right|^2 \\ & + 2\left(U_t\,\psi(0), \int_0^t U_{t-s}\, B x_{\rho(s)}\, dw_s \right), \qquad \forall t \ge 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

De aquí,

$$E|x_t|^2 = E|U_t\,\psi(0)|^2 + \int_0^t E|U_{t-s}\, B x_{\rho(s)}|^2\, ds, \qquad \forall t \ge 0, \tag{2.8}$$

ya que, por las propiedades de la integral estocástica [8,9]

$$E\left| \int_0^t U_{t-s}\, B x_{\rho(s)}\, dw_s \right|^2 = \int_0^t E|U_{t-s}\, B x_{\rho(s)}|^2\, ds,$$

y por otro lado, como $U_t\,\psi(0)$ es $\mathcal{F}_0$ medible,

$$\begin{aligned}
E\left(U_t\,\psi(0), \int_0^t U_{t-s}\,Bx_{\rho(s)}\,dw_s\right) &= E\left[E^{\mathcal{F}_0}\left(U_t\,\psi(0), \int_0^t U_{t-s}\,Bx_{\rho(s)}\,dw_s\right)\right] \\
&= E\left(U_t\,\psi(0), E^{\mathcal{F}_0}\left[\int_0^t U_{t-s}\,Bx_{\rho(s)}\,dw_s\right]\right) \\
&= E(U_t\,\psi(0), 0) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde $E^{\mathcal{F}_0}$ denota la esperanza condicionada.

Tomemos $\lambda > 0$ (todavía por determinar), multipliquemos la ecuación (2.8) por $e^{\lambda t}$ e integremos:

$$\begin{aligned}
(2.9)\qquad \int_0^\infty e^{\lambda t}\,E|x_t|^2\,dt &= \int_0^\infty e^{\lambda t} E|U_t\,\psi(0)|^2\,dt \\
&\quad + \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t E|U_{t-s}\,Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

A continuación, llevaremos a cabo una estimación de cada uno de los sumandos del segundo miembro de (2.9).

Por (H_1),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\lambda t}\,E|U_t\,\psi(0)|^2\,dt &\le c^2 \int_0^\infty e^{(\lambda-2\gamma)t}\,E|\psi(0)|^2\,dt \\
&\le c^2\|\psi\|_1^2 \int_0^\infty e^{(\lambda-2\gamma)t}\,dt \\
&= \frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\,\|\psi\|_1^2,
\end{aligned}$$

siempre que λ verifique $0 < \lambda < 2\gamma$. Luego, para un tal λ,

$$(2.10)\qquad \int_0^\infty e^{\lambda t}\,E|U_t\,\psi(0)|^2\,dt \le \frac{c^2}{2\gamma-\lambda}\,\|\psi\|_1^2.$$

Para el segundo sumando, aplicando el Teorema de Fubini, tenemos:

$$\begin{aligned}
(2.11)\qquad &\int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t E|U_{t-s}\,Bx_{\rho(s)}|^2\,ds\,dt \\
&\qquad = \int_0^\infty \int_s^\infty e^{\lambda t}\,E|U_{t-s}\,Bx_{\rho(s)}|^2\,dt\,ds
\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda(t+s)} E|U_t\, Bx_{\rho(s)}|^2\, dt\, ds$$
$$= \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} E(U_t Bx_{\rho(s)}, U_t\, Bx_{\rho(s)})\, dt\, ds$$
$$= \int_0^\infty e^{\lambda s} \int_0^\infty e^{\lambda t} E(B^* U_t^* U_t\, Bx_{\rho(s)}, x_{\rho(s)})\, dt\, ds$$
$$\leq \int_0^\infty e^{\lambda s} E|x_{\rho(s)}|^2 \left| \int_0^\infty e^{\lambda t} B^* U_t^* U_t\, B\, dt \right| ds$$
$$\leq \int_0^\infty e^{\lambda s} E|x_{\rho(s)}|^2\, ds \left| \int_0^\infty e^{\lambda t} B^* U_t^* U_t\, B\, dt \right|.$$

Por otro lado, efectuando el cambio de variables $u = \rho(s)$, se sigue:

$$\int_0^\infty e^{\lambda s} E|x_{\rho(s)}|^2\, ds = \int_{\rho(0)}^\infty e^{\lambda \rho^{-1}(u)} E|x_u|^2 \frac{1}{\rho'(\rho^{-1}(u))}\, du$$
$$\leq \int_{-h}^\infty e^{\lambda u} e^{\lambda k} E|x_u|^2\, du$$
$$= e^{\lambda k} \int_{-h}^0 e^{\lambda s} E|x_s|^2\, ds + e^{\lambda k} \int_0^\infty e^{\lambda s} E|x_s|^2\, ds$$
$$\leq e^{\lambda k} \|\psi\|_1^2 + e^{\lambda k} \int_0^\infty e^{\lambda t} E|U_t\, \psi(0)|^2\, dt$$
$$+ e^{\lambda k} \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t E|U_{t-s}\, Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt,$$

gracias a (2.1), (2.2) y (2.9). Tomando de nuevo $0 < \lambda < 2\gamma$, resulta:

$$\int_0^\infty e^{\lambda s} E|x_{\rho(s)}|^2\, ds \leq e^{\lambda k} \left(1 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda}\right) \|\psi\|_1^2$$
$$+ e^{\lambda k} \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t E|U_{t-s}\, Bx_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt$$
$$\leq e^{\lambda k} \left(1 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda}\right) \|\psi\|_1^2$$
$$+ e^{\lambda k} \left| \int_0^\infty e^{\lambda t} B^* U_t^* U_t\, B\, dt \right| \int_0^\infty e^{\lambda s} E|x_{\rho(s)}|^2 ds.$$

Así, para

$$f(\lambda) = \left| \int_0^\infty e^{\lambda t} B^* U_t^* U_t\, B dt \right|$$

llegamos a la desigualdad siguiente, válida para $0 < \lambda < 2\gamma$:

$$\int_0^\infty e^{\lambda s}\, E|x_{\rho(s)}|^2\, ds \le e^{\lambda k}\left(1 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda}\right) \|\psi\|_1^2 + e^{\lambda k} f(\lambda) \int_0^\infty e^{\lambda s}\, E|x_{\rho(s)}|^2\, ds. \tag{2.12}$$

Ahora bien, por (H_2) y por la continuidad de las funciones definidas por integrales dependientes de parámetros, resulta inmediato que existe $\lambda > 0$ (suficientemente pequeño y además menor que 2γ), de tal suerte que

$$e^{\lambda k} f(\lambda) < 1.$$

Luego de (2.12) se deduce que

$$\int_0^\infty e^{\lambda s}\, E|x_{\rho(s)}|^2\, ds \le e^{\lambda k}\left(1 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda}\right) \frac{1}{1 - e^{\lambda k} f(\lambda)} \|\psi\|_1^2. \tag{2.13}$$

Sustituyendo en (2.11), obtenemos :

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} \int_0^t E|U_{t-s}\, B x_{\rho(s)}|^2\, ds\, dt \le \frac{\left(1 + \frac{c^2}{2\gamma - \lambda}\right) e^{\lambda k} f(\lambda)}{1 - e^{\lambda k} f(\lambda)} \|\psi\|_1^2. \tag{2.14}$$

Uniendo (2.10) y (2.14) llegamos a que existen λ, $0 < \lambda < 2\gamma$, y $K_1 > 0$ tales que

$$\int_0^\infty e^{\lambda t}\, E|x_t|^2\, dt \le K_1 \|\psi\|_1^2. \tag{2.15}$$

Nota 2.1. De hecho, hemos probado algo más fuerte: "Para cada $\lambda > 0$ suficientemente pequeño, existe una constante $K_1 = K_1(\lambda)$ (que podemos encontrar explícitamente) tal que tiene lugar (2.15)".

Etapa 2: En virtud de la Fórmula de Itô [7–9] aplicada al proceso $e^{\lambda t}|x_t|^2$, se deduce

$$e^{\lambda t}|x_t|^2 = |\psi(0)|^2 + \lambda \int_0^t e^{\lambda s}|x_s|^2\, ds + 2\int_0^t e^{\lambda s}\langle A x_s, x_s\rangle\, ds + \int_0^t e^{\lambda s}|B x_{\rho(s)}|^2\, ds + 2\int_0^t e^{\lambda s}(B x_{\rho(s)}, x_s)\, dw_s. \tag{2.16}$$

De aquí, tomando esperanza y aplicando las propiedades de la integral estocástica resulta

$$(2.17)\qquad e^{\lambda t}E|x_t|^2 = E|\psi(0)|^2 + E\int_0^t e^{\lambda s}\left(\lambda|x_s|^2 + 2\langle Ax_s, x_s\rangle + |Bx_{\rho(s)}|^2\right) ds.$$

En virtud de la coercividad de $-A$ y de las desigualdades (2.13) y (2.15), obtenemos:

$$\begin{aligned}(2.18)\qquad e^{\lambda t}E|x_t|^2 &\leq \|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^t e^{\lambda s}E|x_s|^2 ds \\ &\quad + |B|^2\int_0^t e^{\lambda s}E|x_{\rho(s)}|^2 ds \\ &\leq \|\psi\|_1^2 + (\lambda+\nu)\int_0^\infty e^{\lambda s}E|x_s|^2 ds \\ &\quad + |B|^2\int_0^\infty e^{\lambda s}E|x_{\rho(s)}|^2 ds \\ &\leq (1+(\lambda+\nu)K_1)\|\psi\|_1^2 + \frac{\left(1+\dfrac{c^2}{2\gamma-\lambda}\right)e^{\lambda k}|B|^2}{1-e^{\lambda k}f(\lambda)}\|\psi\|_1^2,\end{aligned}$$

siendo esto válido para todo $t \geq 0$. Luego, para una cierta constante $K > 0$,

$$(2.19)\qquad e^{\lambda t}E|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2, \qquad \forall t \geq 0,$$

o, lo que es igual,

$$(2.20)\qquad E|x_t|^2 \leq K\|\psi\|_1^2 e^{-\lambda t}, \qquad \forall t \geq 0. \ \Box$$

Nota 2.2. Naturalmente, el comentario realizado en la Nota 2.1 precedente permanece válido para el enunciado del Teorema.

Nota 2.3. En el caso en que la función de retardo verifique

$$\inf_{t\geq 0}\{\rho'(t)\} = \rho_* > 0,$$

el Teorema precedente sigue siendo cierto sin más que suponer que existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\rho(t) \geq t - m, \qquad \forall t \geq 0,$$

y sustituir la condición (H_2) por

$$(H_{2\rho}) \qquad \left| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B \, dt \right| < \rho_* .$$

El efectuar esta hipótesis adicional sobre ρ (i.e., que $\rho(t) \geq t - m$), en el caso en que $\rho_* < 1$, no supone pérdida de generalidad ya que esta situación es la que se suele presentar en la práctica: con frecuencia, en la evolución en el tiempo de un determinado proceso, regido por ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, influye, no sólo el presente, sino también el pasado, es decir, la historia del mismo. Ahora bien, como el pasado que ejerce una mayor influencia es el "pasado cercano", por eso limitamos nuestro estudio a la consideración de funciones de retardo cumpliendo esta condición.

Nota 2.4. No obstante lo expuesto anteriormente, existe una condición más fuerte que (H_1), (H_2) que, junto con la Fórmula de Itô, implican directamente la estimación (2.5). Dicha condición es

$$(H_{12}) \qquad \exists\, \mu > 0 : \quad -2\langle Ax, x\rangle \geq \mu |x|^2 + |Bx|^2, \qquad \forall x \in V.$$

Teorema 2.2

Sea x_t la solución de (Q). Si se verifican (H_{12}), (c) y (2.4), entonces se tiene (2.5).

Demostración. Sea $\lambda > 0$ (todavía por determinar). Gracias a la hipótesis (H_{12}), la Fórmula de Itô conduce a:

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} E|x_t|^2 - E|x_0|^2 &= \lambda \int_0^t e^{\lambda s} E|x_s|^2 \, ds + 2 \int_0^t e^{\lambda s} \langle A x_s, x_s\rangle \, ds \\ &\quad + \int_0^t e^{\lambda s} E|B x_{\rho(s)}|^2 \, ds \\ &\leq (\lambda - \mu) \int_0^t e^{\lambda s} E|x_s|^2 \, ds + \int_0^t e^{\lambda s} E|B x_{\rho(s)}|^2 \, ds \\ &\quad - \int_0^t e^{\lambda s} E|B x_s|^2 \, ds. \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variables en la integral que contiene la función de retardo ρ, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda t}E|x_t|^2 &\le E|x_0|^2 + (\lambda-\mu)\int_0^t e^{\lambda s}E|x_s|^2\,ds \\
&\quad + \int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{e^{\lambda\rho^{-1}(u)}E|Bx_u|^2}{\rho'(\rho^{-1}(u))}\,du - \int_0^t e^{\lambda s}E|Bx_s|^2\,ds \\
&\le \|\psi\|_1^2 + (\lambda-\mu)\int_0^t e^{\lambda s}E|x_s|^2\,ds \\
&\quad + \int_{-h}^t e^{\lambda(u+k)}E|Bx_u|^2\,ds - \int_0^t e^{\lambda s}E|Bx_s|^2\,ds \\
&\le \|\psi\|_1^2 + \int_{-h}^0 e^{\lambda k}e^{\lambda u}E|Bx_u|^2\,du \\
&\quad + (\lambda-\mu)\int_0^t e^{\lambda s}E|x_s|^2\,ds + (e^{\lambda k}-1)|B|^2\int_0^t e^{\lambda s}E|x_s|^2\,ds \\
&\le \left(1+e^{\lambda k}|B|^2\right)\|\psi\|_1^2 \\
&\quad + \left[\lambda-\mu+|B|^2(e^{\lambda k}-1)\right]\int_0^t e^{\lambda s}E|x_s|^2\,ds\,.
\end{aligned}
$$

Como

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\left[\lambda-\mu+|B|^2(e^{\lambda k}-1)\right] = -\mu < 0,$$

es posible determinar $\lambda > 0$ tal que $\lambda-\mu+|B|^2(e^{\lambda k}-1) < 0$, con lo que la expresión anterior se convierte en

$$e^{\lambda t}E|x_t|^2 \le \left(1+e^{\lambda k}|B|^2\right)\|\psi\|_1^2, \qquad \forall t > 0.$$

De aquí se sigue (2.5). □

3. Estabilidad trayectorial

Antes de establecer el resultado de estabilidad de las trayectorias, probaremos un Lema previo.

Lema 3.1

Si la solución de (Q), x_t, satisface (2.5) (cosa que ocurre si se verifican, por ejemplo, los Teoremas de la Sección 2), entonces existe una constante $K_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$E\left[\sup_{0\le t<+\infty}|x_t|^2\right] \le K_2\|\psi\|_1^2\,. \tag{3.1}$$

En particular, $x_t \in L^2(\Omega; C(0,+\infty; H))$.

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la de Haussmann [6] sin más que utilizar un adecuado cambio de variables. □

Establezcamos ya la propiedad de estabilidad trayectorial para la solución del problema (Q).

Teorema 3.1

Si x_t, solución fuerte de (Q), verifica (2.5), y por otra parte, $-A$ es coercivo (es decir, se satisface (c)), entonces existen $\alpha, \beta > 0$, y existe $\Lambda \subset \Omega$ con $P(\Lambda) = 0$, tales que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \Lambda \quad \exists T(\omega) \in \mathbb{R} : \quad |x_t(\omega)|^2 \leq \alpha \|\psi\|_1^2 e^{-\beta t} \qquad \forall t \geq T(\omega). \tag{3.2}$$

Demostración. Sea N_0 el primer número natural tal que $\rho(N_0) \geq 0$. Por ser $\rho'(t) \geq 1 > 0$, resulta que $\rho(N) > 0$, para todo $N > N_0$.

Tomemos, pues, N natural con $N \geq N_0$. Aplicando la Igualdad de la Energía (Fórmula de Itô para el proceso $|x_t|^2$),

$$|x_t|^2 = |x_N|^2 + 2\int_N^t \langle Ax_s, x_s \rangle \, ds + \int_N^t |Bx_{\rho(s)}|^2 \, ds + 2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) \, dw_s \, , \tag{3.3}$$

de donde se deduce, gracias a la condición (c), que

$$\begin{aligned} |x_t|^2 = |x_N|^2 + \nu \int_N^t |x_s|^2 \, ds + \int_N^t |Bx_{\rho(s)}|^2 \, ds \\ + 2\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) \, dw_s, \quad \forall t \geq N. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Llamemos I_N al intervalo $[N, N+1]$. Se tiene entonces que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, se verifica

$$\begin{aligned} P\left[\sup_{t \in I_N} |x_t| \geq \varepsilon\right] &= P\left[\sup_{t \in I_N} |x_t|^2 \geq \varepsilon^2\right] \\ &\leq P\left[|x_N|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right] + P\left[\nu \int_N^{N+1} |x_s|^2 ds \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right] \\ &\quad + P\left[\int_N^{N+1} |Bx_{\rho(s)}|^2 ds \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right] \\ &\quad + P\left[2 \sup_{t \in I_N} \left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)}, x_s) dw_s\right| \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por la desigualdad de Chebyshev y por (2.5),

$$P\left[|x_N|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right] \leq \frac{4}{\varepsilon^2}\, E|x_N|^2 \leq \frac{4K\|\psi\|_1^2}{\varepsilon^2}\, e^{-\lambda N}. \tag{3.6}$$

Por las mismas razones anteriores,

$$\begin{aligned} P\left[\nu \int_N^{N+1} |x_s|^2 ds \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right] &= P\left[\int_N^{N+1} |x_s|^2 ds \geq \frac{\varepsilon^2}{4\nu}\right] \\ &\leq \frac{4\nu}{\varepsilon^2} \int_N^{N+1} E|x_s|^2 ds \\ &\leq \frac{4\nu K\|\psi\|_1^2}{\varepsilon^2} \int_N^{N+1} e^{-\lambda s} ds \\ &\leq \frac{4\nu K\|\psi\|_1^2}{\lambda\varepsilon^2}\, e^{-\lambda N}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Además, utilizando de nuevo el cambio de variables $u = \rho(s)$ y (2.5),

$$\begin{aligned} P\left[\int_N^{N+1} |Bx_{\rho(s)}|^2 ds \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right] &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \int_N^{N+1} E|Bx_{\rho(s)}|^2 ds \\ &= \frac{4}{\varepsilon^2} \int_{\rho(N)}^{\rho(N+1)} \frac{E|Bx_u|^2\, du}{\rho'(\rho^{-1}(u))} \\ &\leq \frac{4\,|B|^2}{\varepsilon^2} \int_{\rho(N)}^{\rho(N+1)} E|x_u|^2\, du \\ &\leq \frac{4\,|B|^2 K\,\|\psi\|_1^2}{\varepsilon^2} \int_{\rho(N)}^{\rho(N+1)} e^{-\lambda u}\, du \\ &\leq \frac{4\,|B|^2 K\,\|\psi\|_1^2\, e^{-\lambda\rho(N)}}{\lambda\,\varepsilon^2}\,. \end{aligned}$$

Como $\rho'(t) \geq 1$, tenemos $\rho(t) \geq t - h$, para todo t; luego

$$P\left[\int_N^{N+1} |Bx_{\rho(s)}|^2 ds \geq \frac{\varepsilon^2}{4}\right] \leq \frac{4\,|B|^2 K\,\|\psi\|_1^2\, e^{\lambda h}\, e^{-\lambda N}}{\lambda\varepsilon^2}\,. \tag{3.8}$$

Usando sucesivamente las desigualdades de Chebyshev, Burkholder-Davis-Gundy y Hölder y aplicando el Lema 3.1, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
P\left[2\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)},x_s)\,dw_s\right|\geq\frac{\varepsilon^2}{4}\right] &= P\left[\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)},x_s)dw_s\right|\geq\frac{\varepsilon^2}{8}\right]\\
&\leq\frac{8}{\varepsilon^2}E\left[\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)},x_s)dw_s\right|\right]\\
&\leq\frac{24}{\varepsilon^2}E\left(\int_N^{N+1}|(Bx_{\rho(s)},x_s)|^2ds\right)^{1/2}\\
&\leq\frac{24|B|}{\varepsilon^2}E\left(\int_N^{N+1}|x_{\rho(s)}|^2|x_s|^2ds\right)^{1/2}\\
&\leq\frac{24|B|}{\varepsilon^2}E\left[\left(\sup_{s\in I_N}|x_s|^2\right)^{1/2}\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\int_N^{N+1}|x_{\rho(s)}|^2ds\right)^{1/2}\right]\\
&\leq\frac{24|B|}{\varepsilon^2}\left(E\sup_{t\in I_N}|x_t|^2\right)^{1/2}\left(E\int_N^{N+1}|x_{\rho(s)}|^2ds\right)^{1/2}\\
&\leq\frac{24\,|B|\,K_2^{1/2}\|\psi\|_1}{\varepsilon^2}\left(\int_N^{N+1}E|x_{\rho(s)}|^2ds\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Introduciendo una vez más el cambio de variables habitual y razonando como antes, se llega a :

$$
(3.9)\quad P\left[2\sup_{t\in I_N}\left|\int_N^t (Bx_{\rho(s)},x_s)dw_s\right|\geq\frac{\varepsilon^2}{4}\right]\leq\frac{24\,|B|\,K_2^{1/2}K^{1/2}\|\psi\|_1^2\,e^{\lambda h/2}}{\lambda^{1/2}\varepsilon^2}e^{-\lambda N/2}.
$$

De (3.6) (3.9) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
(3.10)\qquad P\left[\sup_{t\in I_N}|x_t|\geq\varepsilon\right] &\leq\left(4K+\frac{4\,|B|^2Ke^{\lambda h}}{\lambda}+\frac{4\nu K}{\lambda}\right)\frac{e^{-\lambda N}}{\varepsilon^2}\,\|\psi\|_1^2\\
&\quad+\frac{24|B|K_2^{1/2}K^{1/2}e^{\lambda h/2}e^{-\lambda N/2}}{\lambda^{1/2}\,\varepsilon^2}\,\|\psi\|_1^2,
\end{aligned}
$$

y tomando para cada $N\geq N_0$, $\varepsilon=\varepsilon_N=\|\psi\|_1e^{-\lambda N/8}$ se sigue que

$$
(3.11)\qquad P\left[\sup_{t\in I_N}|x_t|\geq\varepsilon_N\right]\leq Me^{-\lambda N/4},
$$

donde M es independiente de N.

Por último vamos a aplicar el Lema de Borel-Cantelli para conseguir el resultado deseado.

Dados $N \geq N_0$, $\varepsilon_N = \|\psi\|_1 e^{-\lambda N/8}$ denotamos por A_N el conjunto

$$A_N := \left\{\omega \in \Omega : \sup_{t \in I_N} |x_t(\omega)| \geq \varepsilon_N\right\}.$$

Gracias a (3.11), podemos afirmar que la serie numérica $\sum_{n=N_0}^{\infty} P(A_n)$ es convergente. Por el Lema de Borel-Cantelli, se deduce que

$$P\left[\limsup_{N \geq N_0} A_N\right] = 0, \tag{3.12}$$

o lo que es igual

$$P\left[\bigcap_{N \geq N_0} \bigcup_{j \geq N} A_j\right] = 0. \tag{3.13}$$

Llamemos Λ al conjunto

$$\Lambda := \bigcap_{N \geq N_0} \bigcup_{j \geq N} A_j.$$

Se verifica que $P(\Lambda) = 0$. Para cada $\omega \in \Omega \setminus \Lambda$, existirá $N(\omega) \geq N_0$ tal que $\omega \notin A_j$, para todo $j \geq N(\omega)$, es decir

$$\sup_{t \in I_j} |x_t(\omega)| < \varepsilon_j, \qquad \forall j \geq N(\omega); \tag{3.14}$$

teniendo en cuenta el valor de ε_j, resulta

$$\sup_{t \in I_j} |x_t(\omega)| < \|\psi\|_1 e^{-\lambda j/8}, \qquad \forall j \geq N(\omega). \tag{3.15}$$

Ahora bien, si $t \in I_j$ tenemos $-j \leq -(t-1)$; luego de (3.15) se obtiene que

$$\sup_{j \leq t \leq j+1} |x_t(\omega)| < \|\psi\|_1 e^{-(\lambda/8)(t-1)}, \qquad \forall t \in I_j, \qquad \forall j \geq N(\omega), \tag{3.16}$$

de donde se sigue

$$|x_t(\omega)| < \|\psi\|_1 e^{\lambda/8} e^{-\lambda t/8}, \qquad \forall t \in I_j, \quad \forall j \geq N(\omega), \tag{3.17}$$

y por tanto,

$$|x_t(\omega)|^2 \leq \alpha \, \|\psi\|_1^2 \, e^{-\beta t}, \qquad \forall t \geq N(\omega), \tag{3.18}$$

con $\alpha = e^{\lambda/4}$, $\beta = \lambda/4$. $\square$

4. Ejemplo

Los ejemplos más interesantes aparecen cuando los operadores A y B son operadores en derivadas parciales, y en particular, cuando el primero de ellos es de segundo orden y de tipo elíptico, mientras que el segundo es un operador de multiplicación (i.e. de orden cero). Veamos a continuación un ejemplo que se puede interpretar como un fenómeno de difusión (por ejemplo, de calor) en el que se presenta una perturbación estocástica:

Sea $\mathcal{O}$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Sean $V = H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{R})$, $H = L^2(\mathcal{O};\mathbb{R})$, que, como sabemos, satisfacen las inyecciones densas y continuas usuales [1].

Sean

$$A = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad B = r(x)I,$$

donde $r(.) \in L^\infty(\mathcal{O};\mathbb{R})$, e I es el operador identidad.

También es conocido que la semi-norma

$$\|u\|^2 = \int_{\mathcal{O}} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]^2 dx,$$

es, de hecho, una norma en V, equivalente a la norma usual. Para la función de retardo y el dato inicial se suponen las hipótesis de las Secciones precedentes.

Escribamos explícitamente qué significa que el proceso u_t es solución fuerte del correspondiente problema (Q):

$$u_t \in I^2(-h,T;V) \cap L^2(\Omega; C(-h,T;H)) \qquad \forall T > 0,$$

$$\int_{\mathcal{O}} u_t.v\,dx + \int_0^t \left[\int_{\mathcal{O}} \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] dx\right] ds = \int_{\mathcal{O}} u_0.v\,dx + \int_0^t \left[\int_{\mathcal{O}} r(x) u_{\rho(s)}.v\,dx\right] dw_s$$

$$\forall v \in V, \qquad P - \text{c.s.}, \qquad \forall t \geq 0,$$

$$u_t = \psi(t) \qquad \text{c.p.d. en } \mathcal{O}, \qquad P - \text{c.s.}, \qquad \forall t \in [-h,0].$$

Denotemos por r_0 la cantidad $r_0 := \|r\|_{L^\infty(\mathcal{O};\mathbb{R})}$.

Se verifica que

$$-\langle Au, u\rangle = \int_{\mathcal{O}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \|u\|^2, \qquad \forall u \in V,$$

$$|Bu|^2 = \int_{\mathcal{O}} r(x)^2\, u(x)^2\, dx \leq r_0^2\, \|u\|^2.$$

Para que se cumpla la condición (c), hace falta encontrar ε y ν tales que

$$\varepsilon\, \|u\|^2 \leq \nu |u|^2 + 2\, \|u\|^2.$$

Pero esto es cierto sin más que tomar $\nu = 0$ y $\varepsilon \leq 2$.

Por otra parte, también es conocido [12] que la condición (H_1) es cierta con $c = \gamma = 1$. Por lo tanto, para poder aplicar los resultados de las Secciones 2 y 3 necesitamos comprobar que se verifica (H_2).

Ahora bien,

$$\left| \int_0^\infty B^* U_t^* U_t B\, dt \right| \leq \|r\|^2_{L^\infty(\mathcal{O};\mathbf{R})} \int_0^\infty |U_t|^2\, dt = \frac{1}{2} \|r\|^2_{L^\infty(\mathcal{O};\mathbf{R})}.$$

Luego si $r(.)$ es tal que

$$\frac{1}{2}\, \|r\|^2_{L^\infty(\mathcal{O};\mathbf{R})} < 1$$

entonces se tiene estabilidad exponencial asintótica del segundo momento, y consecuentemente, estabilidad exponencial de las trayectorias de u_t con probabilidad uno.

Siguiendo con la interpretación del ejemplo, podemos decir que los resultados obtenidos nos vienen a decir que si la perturbación estocástica que se produce en el fenómeno de difusión de calor es "pequeña" (es decir, se verifica (H_2)) y el fenómeno sin perturbar es exponencialmente asintóticamente estable (lo que se deduce de (H_1)), entonces el fenómeno perturbado mantiene el carácter de exponencialmente estable.

Agradecimiento. Quiero manifestar mi profundo agradecimiento a J. Real Anguas por los valiosos consejos y comentarios que me ha proporcionado.

Referencias

1. H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
2. A. Chojnowska-Michalik, *Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces and Their Applications*, Thesis, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, 1976.
3. P. L. Chow, Stochastic partial differential equations: Turbulence and related problems, in *Probabilistic Analysis and Related Topics 1*, ed. A. T. Bharucha-Reid, Academic Press, New York, 1978.

4. R. Dautray and J. L. Lions, *Analyse Mathèmatique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, Masson, Paris, 1984.
5. W. H. Fleming, *Distributed Parameter Stochastic Systems in Population Biology*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 107, Springer, Berlin-New York, 1975.
6. U. G. Haussmann, Asymptotic stability of the linear Itô equation in infinite dimensions, *J. Math. Anal. Appl.* **65** (1978), 219–235.
7. A. Ichikawa, Stability of semilinear stochastic evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **90** (1982), 12–44.
8. E. Pardoux, *Équations aux Dérivées Partielles Stochastiques non Linéaires Monotones*, Thesis, University of Paris XI, Paris, 1975.
9. E. Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics* **3** (1979), 127–167.
10. J. Real, *Contribución al estudio de una clase de Ecuaciones en Derivadas Parciales Estocásticas con Retardo*, Thesis, University of Sevilla, Sevilla, 1980.
11. J. Real, Stochastic Partial Differential Equations with Delays, *Stochastics* **8** (1982–83), 81–102.
12. H. F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations*, Blaisdell, New York, 1965.