

Espacios semi- L_pB

CARMEN FERNÁNDEZ

Departamento de Análisis Matemático,

Facultad de Matemáticas, Universidad de Valencia, 46100 Burjassot, Spain

Received 22/SEP/89

ABSTRACT

This paper is devoted to the study of the semi- L_pB spaces, which coincide with the semi-LB spaces defined by Valdivia when $p = 1$. We give new results in localization and lifting. We study the relation between the class of semi- L_pB spaces and the class of webbed spaces. Finally, we obtain localization theorems without any convexity assumptions.

1. Preliminares

Las definiciones y resultados elementales, así como la notación, pueden encontrarse en [4] con la salvedad de que, por comodidad, hemos tomado la definición de p -seminorma de [2].

Siguiendo a De Wilde [3], una sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de un espacio vectorial E se dice que es completante si existe una sucesión de escalares positivos (λ_n) , tal que si $x_n \in A_n$, y si $0 \leq |\mu_n| \leq \lambda_n$, $\mu_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$$

es convergente.

Este trabajo es parte de la tesis doctoral del autor realizada bajo la dirección del Profesor Valdivia

Llamaremos red en un espacio vectorial topológico F a una familia de subconjuntos de F ,

$$\mathcal{W} = \{C_{m_1, m_2, \dots, m_n} : n, m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}\},$$

que cumple las siguientes condiciones:

(i) $E = \bigcup \{C_n : n \in \mathbb{N}\}.$

(ii) $C_{m_1, m_2, \dots, m_n} = \bigcup \{C_{m_1, m_2, \dots, m_n, m} : m \in \mathbb{N}\}, n = 1, 2, \dots$

Diremos que la red es absolutamente p -convexa si los conjuntos que la definen lo son. La red es completante si para cada sucesión de enteros positivos (m_n) , $(C_{m_1, m_2, \dots, m_n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión completante. Si la red es absolutamente p -convexa y si la sucesión (λ_n) se puede escoger de manera que la serie

$$\sum_{n=p}^{\infty} \mu_n x_n$$

converge hacia un elemento de $C_{m_1, m_2, \dots, m_{p-1}}$, la red se llama p -estricta.

Un espacio E es totalmente p -tonelado [7] si dada una sucesión de subespacios que cubre E , (E_n) , existe un entero positivo n tal que E_n es p -tonelado y su clausura en E tiene codimensión finita, o equivalentemente si dada una red en E ,

$$\mathcal{W} = \{C_{m_1, m_2, \dots, m_n} : n, m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}\},$$

existe una sucesión de enteros positivos (n_k) tal que $E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \text{LIN}(C_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ es p -tonelado y su clausura en E tiene codimensión finita.

1. Subconjuntos absolutamente p -convexos

Dedicamos este apartado al estudio de algunas propiedades de los subconjuntos absolutamente p -convexos.

1. Proposición

Sea (A_n) una sucesión de p -discos de Banach en un espacio E localmente p -convexo. Si para cada sucesión en E , (x_n) , tal que $x_n \in A_n$, $n = 1, 2, \dots$, existe un p -disco de Banach B en E tal que $x_n \in B$, $n = 1, 2, \dots$, entonces existe un p -disco de Banach D en E tal que $A_n \subset D$, $n = 1, 2, \dots$.

Demostración. Sea $\|\cdots\|_n$ la p -norma del p -espacio de Banach E_{A_n} , $n = 1, 2, \dots$. Consideremos el espacio vectorial F de las sucesiones (x_n) de E tales que $x_n \in E_{A_n}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n < \infty,$$

con la p -norma

$$\|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n.$$

De la completitud de cada E_{A_n} se sigue que $(F, \|\cdot\|)$ es un p -espacio de Banach, cuya bola unidad cerrada denotaremos por M .

Dados (x_m) en F y un entero positivo m hacemos

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[p]{2\|x_m\|_m}} & \text{si } x_m \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_m = 0. \end{cases}$$

Se tiene que $a_m x_m \in A_m$, $m = 1, 2, \dots$, y por tanto existe un p -disco de Banach en E tal que para cada n , $a_n x_n \in B$. Puesto que la sucesión de números reales positivos $(1/a_n) \in \ell_p$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[p]{2\|x_n\|_n} a_n x_n$$

converge en E_B , y, por tanto, en E . Así pues, la inyección $J : F \rightarrow E$ dada por

$$J((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

está bien definida. Ponemos $D = J(M)$.

El conjunto $A := \bigcup \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un acotado de E . Entonces si U es un entorno del origen en E , absolutamente convexo y cerrado, existe un entero positivo q tal que A está contenido en qU . Tomamos $(y_n) \in M$ y ponemos

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[p]{2\|y_n\|_n}} & \text{si } y_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } y_n = 0, \end{cases}$$

luego $b_n y_n \in A_n$ para cada entero positivo n y, por lo tanto, $b_n y_n \in qU$, $n = 1, 2, \dots$. Al ser qU absolutamente convexo y cerrado y, como $(1/b_n) \in \ell_p$, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \in 2qU.$$

Luego $D \subset 2qU$, de aquí que D sea un subconjunto acotado de E . Como $J : F \rightarrow E_D$ es continua y abierta, E_D es un p -espacio de Banach, es decir, D es un p -disco de Banach.

Por último si j es un entero positivo y $x_j \in A_j$, denotamos por (z_n) el vector de F cuyas coordenadas son todas cero excepto la j -ésima que es x_j . Entonces $\|(z_n)\| = \|x_j\| \leq 1$, claramente $J((z_n)) = x_j$ y, por tanto, D contiene a A_j . $\square$

Sea M un subconjunto acotado en un espacio localmente p -convexo E y B su envoltura absolutamente p -convexa. Llamamos envoltura absolutamente p -convexa y localmente cerrada de M al conjunto de los vectores de E que son límites en E de sucesiones de Cauchy en E_B contenidas en B .

2. Proposición

Sea (x_n) una sucesión en un espacio localmente p -convexo E , de manera que existe una sucesión de enteros positivos $m_1 < m_2 < \dots < m_j < \dots$ tal que cada subsucesión (x_{n_j}) con $n_j \geq m_j$, $j = 1, 2, \dots$ está contenida en un p -disco de Banach de E . Si A es la envoltura absolutamente p -convexa y localmente cerrada de $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, entonces A es un conjunto acotado y E_A es totalmente p -tonelado.

Demostración Claramente $\{x_1, x_2, \dots\}$ es un subconjunto acotado de E . Si B es su envoltura absolutamente p -convexa, se tiene que la clausura de B en E_A coincide con A .

Sea (E_n) una sucesión de subespacios de E_A que cubre este espacio y denotemos por F_n la envoltura lineal de $E_n \cup \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots\}$, $n = 1, 2, \dots$. Supongamos que F_n no es p -tonelado para cada entero positivo n . Hallamos un p -tonel U_n en F_n que no es entorno del origen. Sea

$$p_{1,1} < p_{1,2} < \dots < p_{n,1} < p_{2,n-1} < \dots < p_{n-1,2} < p_{n,1} < \dots$$

cuyos términos son todos los de la sucesión (m_n) . Tomamos un entero positivo $n_{1,1} > p_{1,1}$ de forma que $x_{1,1}$ no esté en U_1 . Dado un entero positivo j , supongamos que hemos obtenido el entero positivo $n_{j,1}$. Hallamos los enteros

$$n_{1,j+1} < n_{2,j} < \dots < n_{j,2} < n_{j,1} < n_{j+1,1}$$

tales que

$$n_{1,j+1} > n_{j,1}, \quad n_{r,j-r+2} > p_{r,j-r+2}, \quad x_{n_{r,1-r+2}} \notin (j+1)^2 U_r, \quad r = 1, 2, \dots$$

Entonces existe un p -disco de Banach D en E tal que $x_{n_{i,j}} \in D$, $i, j = 1, 2, \dots$. La sucesión

$$x_{n_{1,1}}, 2^{-1}x_{n_{1,2}}, 2^{-1}x_{n_{2,1}}, \dots, m^{-1}x_{n_{1,m}}, \dots, m^{-1}x_{n_{m,1}}, \dots$$

converge al origen en E_D y también en E_B . Para simplificar la notación escribiremos $x_{i,j}$ en lugar de $x_{n_{i,j}}$. La envoltura absolutamente p -convexa y cerrada en E_D del conjunto de los términos de dicha sucesión es un compacto en E_D que coincide con:

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j-1} x_{i,j} : a_{i,j} \in \mathbb{K}, i, j = 1, 2, \dots, \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^p \leq 1 \right\} :$$

Fijemos $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $i, j = 1, 2, \dots$, tal que

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^p \leq 1,$$

y denotemos por $\|\cdot\|$ la p -norma en E_B , se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \left\| a_{i,j} \frac{1}{i+j-1} x_{i,j} \right\| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|^p \|x_{i,j}\|,$$

de modo que la serie

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j-1} a_{i,j} x_{i,j}$$

converge en E y es el límite en E de una sucesión de Cauchy en E_B , contenida en B , lo que nos permite afirmar que $M \subset A$ y, por tanto, la inyección de E_M en E_A es continua. E_M es un p -espacio de Banach, por tanto es totalmente p -tonelado, luego existe un entero positivo k tal que $E_M \cap F_k$ es p -tonelado con la topología inducida por E_M . Pero $U_k \cap E_M$ es un p -tonel en $E_M \cap F_k$, por lo que $M \subset U_k \cap E_M$, en particular, U_k absorbe el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{i+j-1} x_{i,j} : i, j = 1, 2, \dots \right\}$$

en contra de que $x_{i,j} \notin (k+j-1)^2 U_k$, $j = 1, 2, \dots$

Entonces existe un entero positivo s tal que F_s es p -tonelado. Como E_s es un subespacio de codimensión numerable de F_s , E_s es p -tonelado. Si E_s es la clausura de E_s en E_A y G_r es la envoltura lineal de $E_s \cap F_s \cup \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, G_r es cerrado en F_s . La sucesión (G_r) es creciente y cubre el espacio p -tonelado, p -normado F_s , entonces de acuerdo con [1], existe un entero positivo k tal que G_k es entorno del origen en F_s y, por tanto, $G_k = F_s$. Entonces el subespacio cerrado de E_A , $E_s \cup \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, contiene a F_s , de aquí que coincida con E_A . Por tanto, E_s tiene codimensión finita en E_A . $\square$

3. Proposición

Sea A un subconjunto absolutamente p -convexo y acotado en un espacio localmente p -convexo E . Sea (λ_n) una sucesión estrictamente decreciente de escalares positivos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p = \lambda < 1.$$

Si para cada sucesión (x_n) de A , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

converge en E a un punto de A , entonces A es un p -disco de Banach.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en E_A contenida en $2^{-1}\lambda_1 A$. Podemos hallar una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos (n_k) de manera que

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \lambda_{k+1}^p, \quad k = 1, 2, \dots,$$

siendo $\|\cdot\|$ la p -norma en E_A . Ponemos

$$y_1 = \lambda_1^{-1} x_{n_1}, \quad y_j = \lambda^{-1}(x_{n_j} - x_{n_{j+1}}), \quad j = 2, 3, \dots,$$

entonces $y_n \in A$, y, por tanto, la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j y_j$$

converge en E a un punto z de A . Entonces (x_{n_j}) converge a z en E . Si B es la envoltura localmente cerrada de $2^{-1}\lambda_1 A$, E_B es un p -espacio de Banach, pero $2^{-1}\lambda_1 A \subset B \subset A$, luego A es un p -disco de Banach. $\square$

2. Sucesiones $\mathcal{B}$ -completantes

En esta sección $\mathcal{B}$ será una familia de p -discos de Banach en un espacio vectorial F , que cubre F y que está dirigido por inclusión. Siguiendo a Valdivia [7], una sucesión (A_k) de subconjuntos de F es $\mathcal{B}$ -completante si es decreciente y existe una sucesión (λ_k) de números positivos tal que, dados $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k$, y $x_k \in A_k$, existe un $B \in \mathcal{B}$ de modo que $x_k \in F_B$, $k = 1, 2, \dots$, y la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$$

converge en F_B . Como consecuencia de [5, teorema 2], podemos tomar $\lambda = 2^{-1/p}$ y $0 \leq |\mu_k| \leq \lambda_k$. Además es trivial que si $v_1, v_2, \dots, v_n \in F$, la sucesión

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$$

es $\mathcal{B}$ -completante. Se sigue entonces de [8] que si (A_k) es $\mathcal{B}$ -completante y si A es numerable con $A \sim A_k$ finito para todo k , la sucesión B_k definida por

$$B_k = F_p(A \cup A_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

es $\mathcal{B}$ -completante.

Una sucesión (P_n) de subconjuntos de F es $\mathcal{B}$ -estricta si es $\mathcal{B}$ -completante, P_n es absolutamente p -convexo para $n = 1, 2, \dots$, y dada una sucesión cualquiera de F , (x_n) , tal que $x_n \in P_n$ para $n = 1, 2, \dots$ existe un B en $\mathcal{B}$ tal que $(x_n) \subset B$, y, para cada $m = 1, 2, \dots$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{2^n}} x_{m+n-1}$$

converge en F_B a un vector que pertenece a P_m .

Si (P_m) es una sucesión $\mathcal{B}$ -completante de subconjuntos absolutamente p -convexos, la sucesión (Q_n) definida como sigue:

$$Q_n := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{2^{n+j-1}}} x_j : x_j \in P_{n+j-1}, j = 1, 2, \dots \right\}$$

es $\mathcal{B}$ -estricta y además $2^{n/p} P_n \subset Q_n$.

Dada una sucesión $\mathcal{B}$ -estricta (P_n) , denotaremos por P^n la envoltura lineal de P_n , y por

$$F^{(P_n)} := \bigcap \{P^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

El espacio vectorial $F^{(P_n)}$ lo supondremos dotado de la topología localmente p -convexa que tiene a $\{r^{-1}(P_r \cap F^{(P_n)}) : r \in \mathbb{N}\}$ como sistema fundamental de entornos del origen. De acuerdo con [5], $F^{(P_n)}$ es un (F) -espacio localmente p -convexo. Puesto que $\mathcal{B}$ está dirigida por inclusión, es fácil comprobar que la gráfica de la inyección canónica de $F^{(P_n)}$ en F es cerrada en $F^{(P_n)} \times F_B$, para cada $B \in \mathcal{B}$.

1. Proposición

Sean (P_n) una sucesión $\mathcal{B}$ -estricta en un espacio vectorial F y $\{T_i : i \in I\}$ una familia de aplicaciones lineales de un subespacio G de un espacio vectorial topológico metrizable E en F , de manera que:

(i) Para cada $i \in I$, y cada $B \in \mathcal{B}$, la gráfica de T_i corta a $E \times F_B$ en un subespacio cerrado.

(ii) Para cada $n = 1, 2, \dots$, la clausura M_n de

$$R_n := \bigcap \{T_i^{-1}(P_n) : i \in I\}$$

en E es un entorno del origen en este espacio.

Entonces el interior de M_n en E está contenido en R_n , para $n = 1, 2, \dots$

Demostración. Fijemos un entero positivo r . Tomemos un punto x de M_r . Podemos encontrar un $\lambda > 1$ tal que $\lambda^{1/p}x \in M_r$. Sea $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fundamental de entornos del origen en E , de manera que $B_m \subset M_{r+m}$, $m = 1, 2, \dots$. Tomamos x_1 en R_r tal que

$$y_1 := \sqrt[p]{\lambda}x - x_1 \in \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^2}} B_1.$$

Procedemos por recurrencia y suponemos que para un entero positivo m hemos obtenido

$$y_m \in \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^{m+1}}} B_m.$$

Hallamos un $x_{m+1} \in R_{r+m}$ tal que

$$y_{m+1} := y_m - \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^{m+1}}} x_{m+1} \in \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^{m+2}}} B_{m+1}.$$

La sucesión (y_n) converge al origen en E , y además

$$y_n = \sqrt[p]{\lambda}x - x_1 - \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^2}} x_2 - \dots - \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^n}} x_n,$$

así que en el espacio E ,

$$x = \frac{1}{\sqrt[p]{\lambda}} x_1 + \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^2\lambda}} x_2 + \dots + \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{2^n\lambda}} x_n + \dots.$$

Fijemos $i \in I$, para cada entero positivo j , $T_i x_j \in P_{r+j-1}$. Hacemos

$$z_1 = 0, \quad z_j = T_i x_j, \quad j \geq 2,$$

entonces $z_j \in P_{r+j-1}$ para $j = 1, 2, \dots$ y por tanto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $z_j \in B$ para $j = 1, 2, \dots$ y además la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{2^j}} z_j = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{2^j}} T_i x_j$$

converge en F_B a un elemento $u \in P_r$. Como la gráfica de T_i es cerrada en $E \times F_B$,

$$T_i \frac{\sqrt[p]{\lambda} x + x_1}{\sqrt[p]{\lambda} + 1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{2^j}} T_i x_j,$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{\sqrt[p]{\lambda} + 1} \left(\sqrt[p]{\lambda} T_i x + T_i x_1 \right) = u,$$

y como P_r es absolutamente p -convexo,

$$T_i x = \sqrt[p]{\frac{\lambda-1}{\lambda}} u + \frac{1}{\sqrt[p]{\lambda}} T_i x_1 \in P_r,$$

lo que termina la prueba. $\square$

En la siguiente proposición consideraremos una aplicación lineal T de un espacio vectorial F sobre un espacio localmente p -convexo metrizable. Veremos que bajo ciertas condiciones es posible levantar sucesiones convergentes y conjuntos precompactos.

2. Proposición

Sea (S_n) una sucesión $\mathcal{B}$ -estricta en un espacio vectorial F . Sea T una aplicación lineal de un subespacio H de F sobre un espacio localmente p -convexo metrizable E , de manera que la gráfica de T corta a $F_B \times E$ en un subespacio cerrado, para cada $B \in \mathcal{B}$, y la clausura de $T(S_n \cap H)$ en E es un entorno del origen para todo $n = 1, 2, \dots$. Entonces:

(i) Si (x_n) es una sucesión en E que converge al origen, existen un $B \in \mathcal{B}$ y una sucesión (u_n) en $B \cap H$, que converge al origen en F_B , tal que $Tu_n = x_n$ para $n = 1, 2, \dots$

(ii) Si P es un subconjunto precompacto de E , existen un $B \in \mathcal{B}$ y un subconjunto M precompacto de F_B , contenido en $B \cap H$, de modo que $T(M) = P$.

(iii) Si (y_n) es una sucesión de Cauchy en E , existen un $B \in \mathcal{B}$ y una sucesión (v_n) en $B \cap H$, convergente en F_B , tal que $Tv_n = y_n$ para $n = 1, 2, \dots$

Demostración. Para cada B de $\mathcal{B}$, $T^{-1}(0) \cap F_B$ es un subespacio cerrado de F_B y, en consecuencia, si denotamos por Φ la aplicación canónica cociente de F sobre $F/\ker T$, se tiene que $\{\Phi(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es una familia de p -discos de Banach en $F/\ker T$, que cubre este espacio y que está dirigida por inclusión. Sea S la aplicación lineal de E en $F/\ker T$ tal que $T = S^{-1} \circ \Phi$. Entonces la gráfica de S corta a $E \times (F/\ker T)_{\Phi(B)}$ en un subespacio cerrado para cada B de $\mathcal{B}$. Es obvio que la familia $(\Phi(S_n))$ es una sucesión $\Phi(\mathcal{B})$ -completante.

Tomemos ahora una sucesión (z_n) en $F/\ker T$ tal que $z_n \in \Phi(S_n)$, para $n = 1, 2, \dots$. Podemos determinar t_n en S_n de manera que $T(t_n) = z_n$ para $n = 1, 2, \dots$. Al ser (S_n) $\mathcal{B}$ estricta, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $t_n \in B$ para todo n , y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{2^n}} t_{m+n-1}$$

converge en F_B a un vector de S_m , para $m = 1, 2, \dots$. Entonces $z_n \in \Phi(B)$ para $n = 1, 2, \dots$, y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{2^n}} z_{m+n-1}$$

converge en $(F/\ker T)_{\Phi(B)}$ a un vector de $\Phi(S_m)$. Como cada $\Phi(S_m)$ es absolutamente p -convexo, $(\Phi(S_m))$ es una sucesión $\Phi(\mathcal{B})$ -estricta.

Pasamos a demostrar ahora las tres afirmaciones del enunciado.

(i) Al ser (x_n) una sucesión nula en un espacio vectorial topológico metrizable, podemos tomar una sucesión de escalares (λ_n) que diverge a $+\infty$, $\lambda_n \geq 1$, $n = 1, 2, \dots$, de manera que $(\lambda_n x_n)$ converge al origen en E . Dado un entero positivo k , existe sólo una cantidad finita de elementos de $(\lambda_n x_n)$ que no están en $T(S_k \cap H)$ y por tanto, podemos hallar una sucesión (w_n) en H con $T w_n = \lambda_n x_n$ para $n = 1, 2, \dots$, de modo que si R es el conjunto formado por los términos de la sucesión (w_n) , el conjunto $R \sim S_n$ es finito para todo n . Basta hacer $u_n = \lambda_n^{-1} w_n$ para obtener una sucesión que cumpla (i).

(ii) Por [7], si P es precompacto en E , podemos determinar una sucesión (x_n) nula en E tal que su envoltura absolutamente p -convexa y cerrada contenga a $2^{1/p} P$. Sean B y (u_n) el elemento de $\mathcal{B}$ y la sucesión en $B \cap H$ que podemos determinar de acuerdo con (i). Si D es la envoltura absolutamente p -convexa y cerrada de $\{2^{-1/p} u_n : n \in \mathbb{N}\}$ en F_B , D es un compacto en F_B y, por tanto, $\Phi(D)$ es un compacto en $(F/\ker T)_{\Phi(B)}$. Como la gráfica de S corta a cada $E \times (F/\ker T)_{\Phi(B)}$ en un cerrado, $S^{-1}(\Phi(D))$ es cerrado en E , y, por tanto, contiene a P . Si ponemos $M := T^{-1}(P) \cap D$, obtenemos (ii).

(iii) Sea (y_n) una sucesión de Cauchy en E . El conjunto $\{6^{1/p}y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un precompacto en E , y, por tanto, existen un B en $\mathcal{B}$ y una sucesión precompacta (w_n) en F_B , contenida en $B \cap H$, tal que $Tw_n = 6^{1/p}y_n$ para $n = 1, 2, \dots$. Sean z y z_0 dos puntos adherentes de (w_n) en F_B . Existen dos subsucesiones (w_n^1) y (w_n^2) que convergen a z y z_0 respectivamente. La sucesión $(Tw_n^1 - Tw_n^2)$ converge al origen en E y la gráfica de S corta al p -espacio de Banach $E \times (F/\ker T)_{\Phi(B)}$ en un cerrado para cada $B \in \mathcal{B}$, luego $\Phi(z) = \Phi(z_0)$, de donde se deduce que $(\Phi(w_n - z))$ converge al origen en $(F/\ker T)_{\Phi(B)}$. Es claro que $w_n - z \in 3^{1/p}B$ y $z \in 2^{1/p}B$ para $n = 1, 2, \dots$. Entonces existe una sucesión (t_n) en F_B que converge al origen y tal que

$$\Phi(t_n) = \Phi(w_n - z), \quad t_n \in 4^{1/p}B, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora ponemos

$$v_n = (1/6)^{1/p}t_n + 6^{1/p}z_n$$

y resulta que

$$v_n \in (1/6^{1/p})B + (2/6^{1/p})B = B$$

y entonces

$$Tv_n = S^{-1} \circ \Phi v_n = S^{-1}((1/6^{1/p})\Phi t_n + 6^{1/p}\Phi z_n).$$

Claramente (v_n) converge en F_B y está contenida en $B \cap H$, lo que termina la demostración. $\square$

3. Espacios semi- $L_p B$

Nos ocuparemos en esta sección de definir los espacios semi- $L_p B$ y de estudiar sus propiedades. Cuando $p = 1$, dichos espacios coinciden con los introducidos por Valdivia [9].

DEFINICIÓN. Una representación semi- $L_p B$ en un espacio vectorial F es una familia de p -discos de Banach $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, que cumple las dos siguientes condiciones:

(i) $F = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$.

(ii) Si (α_n) es una sucesión semiestacionaria de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, existe un α de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que A_{α_n} está contenido en A_α para $n = 1, 2, \dots$

Si F es un espacio localmente p -convexo, la anterior familia diremos que es una representación semi- $L_p B$ de F , si cada p -disco de Banach A_α es un subconjunto acotado de F . En tal caso diremos que F es un espacio semi- $L_p B$.

Como en el caso de los espacios semi-LB [9], los espacios semi- L_p B son estables por cocientes, productos y sumas directas numerables, y en consecuencia por límites inductivos numerables, y por subespacios cerrados.

Si $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, pondremos

$$A^{a_1 a_2 \dots a_r} = \bigcup \{A_\beta : \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, b_n = a_n, n = 1, 2, \dots\}.$$

A partir de este momento $\mathcal{B}$ será la familia de todos los p -discos de Banach de F .

2. Proposición

Si $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(A^{a_1 a_2 \dots a_r})$ es una sucesión $\mathcal{B}$ -completante.

Demostración. Sea A un subconjunto numerable de F tal que $A \sim A^{a_1 a_2 \dots a_r}$ es finito para cada entero positivo r . Podemos hallar una sucesión (B_n) de subconjuntos finitos, no vacíos de F , tal que

$$A \sim A^{a_1} \subset B_1,$$

$$B_{n+1} \subset A^{a_1 a_2 \dots a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$A \subset \bigcup \{B_n : n \in \mathbb{N}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para cada entero positivo n , sea q_n el número de elementos de B_n . Podemos hallar q_n elementos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\alpha_{n,j} = (a_{n,j,i})$, $j = 1, 2, \dots, q_n$, de manera que

$$a_{n,j,i} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, q_n,$$

$$B_n \subset \bigcup \{A_{\alpha_{n,j}}, j = 1, 2, \dots, q_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La sucesión

$$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,q_1}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,q_2}, \dots$$

es semiestacionaria y, por tanto, existe B en $\mathcal{B}$ tal que

$$A_{\alpha_{n,j}} \subset B, \quad j = 1, 2, \dots, q_n, n = 1, 2, \dots,$$

y entonces $A \subset B$.

Dado $\alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, denotamos por $(A_{\alpha,n})$ la sucesión $\mathcal{B}$ -estricta asociada a la sucesión $\mathcal{B}$ -completante $(\Gamma_p(A^{a_1 a_2 \dots a_n}))$. El espacio $F^{(A_{\alpha,n})}$ lo representaremos por F'_α y diremos que $\{(F'_\alpha, t_\alpha) : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es la familia de (F)-espacios localmente p -convexos asociada a $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. $\square$

3. Teorema

Sea F un espacio con semi- L_pB representación $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, cuya familia de (F) -espacios asociada es $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Sea T un aplicación lineal de un subespacio denso G de un espacio localmente p -convexo E . Si G es totalmente p -tonelado y la gráfica de T es cerrada en $E \times F$, entonces E coincide con G y existe un $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que F_β contiene a $T(E)$ y $T \in \mathcal{L}(E, F_\beta)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que T es inyectiva. Como la familia

$$\{T^{-1}(A^{b_1, b_2, \dots, b_n}) : n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}\}$$

es una red en G , podemos obtener un α en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de modo que, si G_j es la envoltura lineal de $T^{-1}(A^{a_1, a_2, \dots, a_j})$ en G , G_j es p -tonelado y su clausura en G tiene codimensión finita para $j = 1, 2, \dots$. Sea (M_j) una sucesión de subconjuntos finitos de G tales que

$$M_j \subset T^{-1}(A^{a_1, a_2, \dots, a_{j+1}}), \quad j \geq 1,$$

y la envoltura absolutamente p -convexa y cerrada en G de

$$\left(\bigcup \{M_j : 1 \leq j \leq n\} \right) \cup T^{-1}(A^{a_1, a_2, \dots, a_n})$$

es un entorno del origen para $n = 1, 2, \dots$. Si

$$D := \bigcup \{T(M_j) : j \in \mathbb{N}\},$$

es inmediato que D es numerable y que $D \sim A^{a_1, a_2, \dots, a_n}$ es finito, para $n = 1, 2, \dots$. Para cada entero positivo n , sea P_n la envoltura absolutamente p -convexa de $D \cup A^{a_1, a_2, \dots, a_n}$. La sucesión (P_n) es $\mathcal{B}$ -completante. Si (Q_n) es la sucesión $\mathcal{B}$ -estricta asociada a (P_n) , la clausura en E de $T^{-1}(Q_n)$ es un entorno del origen en E para cada n en $\mathbb{N}$.

Como la gráfica de T es cerrada, podemos tomar en F una topología localmente p -convexa τ , menos fina que la original, de manera que $T : G \rightarrow (F, \tau)$ es continua. Si V es un entorno cerrado del origen en (F, τ) , encontramos un entero positivo k tal que $k^{-1}Q_k \subset V$. Por tanto

$$k^{-1} \overline{T^{-1}(Q_k)}^G \subset T^{-1}(V),$$

y en consecuencia

$$\left\{ k^{-1} \overline{T^{-1}(Q_k)}^G : k \in \mathbb{N} \right\}$$

es un sistema fundamental de entornos del origen en G para una topología localmente p -convexa metrizable σ menos fina que la original. Además T es una aplicación lineal continua de (G, σ) en (F, τ) . Aplicamos 2.1 y obtenemos que

$$\overline{T^{-1}(Q_n)}^\sigma \subset T^{-1}(Q_n)$$

de donde se sigue que $T(G) \subset F^{(Q_n)}$ y T es continua entre esos dos espacios, entonces es continua cuando se considera G con la topología original. Sea $\tilde{T} : E \rightarrow F^{(Q_n)}$ la extensión lineal y continua de T a E . Como la gráfica de T es cerrada en $E \times F^{(Q_n)}$, $E = G$.

Sea J la inyección canónica de $F^{(Q_n)}$ en F . Como $F^{(Q_n)}$ es metrizable y completo, podemos determinar una sucesión de enteros positivos (m_n) de modo que $J^{-1}(A^{m_1 m_2 \dots m_n})$ sea de segunda categoría en $F^{(Q_n)}$. Denotemos por β la sucesión (m_n) . La sucesión $(A_{\beta, n})$ es $\mathcal{B}$ -estricta y si U_n es la clausura de la imagen recíproca por T de $A_{\beta, n}$, U_n es un entorno del origen en $F^{(Q_n)}$. Por 2.1 el interior de U_n está contenido en $T^{-1}(A_{\beta, n})$, de donde $T \in \mathcal{L}(E, F_\beta)$. $\square$

4. Corolario

Sea E un espacio totalmente p -tonelado. Si E es un espacio semi- $L_p B$ entonces E es un (F) -espacio.

5. Corolario

Sea E el límite inductivo de una familia de espacios totalmente p -tonelados. Si E es un espacio semi- $L_p B$, entonces E es un límite inductivo de una familia de (F) -espacios.

6. Teorema

Sea F un espacio con representación semi- $L_p B$ $\{\Lambda_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$. Sea T una aplicación de un subespacio H de F sobre un espacio totalmente p -tonelado E . Si la gráfica de T es cerrada en $F \times E$, entonces existe una topología localmente p -convexa metrizable τ sobre E , menos fina que la original, que cumple:

- (i) $T : H \rightarrow (E, \tau)$ es abierta.
- (ii) Si (x_n) es una sucesión en (E, τ) que converge al origen, existen un $\beta \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ y una sucesión (u_n) en $A_\beta \cap H$ que converge al origen en F_{A_β} , tal que $Tu_n = x_n$ para $n = 1, 2, \dots$.
- (iii) Si P es un subconjunto precompacto de (E, τ) , existen un $\beta \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ y un subconjunto precompacto M en F_{A_β} , contenido en $A_\beta \cap H$, de modo que $T(M) = P$.
- (iv) Si (y_n) es una sucesión de Cauchy en (E, τ) , existen un $\beta \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ y una sucesión (v_n) convergente en F_{A_β} , contenida en $A_\beta \cap H$, tal que $Tv_n = y_n$ para $n = 1, 2, \dots$.

Demostración. Razonando como en anteriores ocasiones obtenemos una sucesión (R_n) que es estricta para la familia $\mathcal{B} = \{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$, de modo que la clausura de $T(R_n \cap H)$ en E es un entorno del origen.

El núcleo de T es un subespacio cerrado de F . Sea Φ la aplicación canónica cociente de F sobre $F/\ker T$ y S la aplicación inyectiva de E en $F/\ker T$ tal que $T = S^{-1} \circ \Phi$. La gráfica de S es cerrada en $E \times (F/\ker T)$, lo que nos permite tomar una topología localmente p -convexa y metrizable en E , menos fina que la original, que tiene a

$$\left\{ \overline{n^{-1}T(R_n \cap H)}^E : n \in \mathbb{N} \right\}$$

como base de entornos. Resulta que $T : H \rightarrow (E, \tau)$ es abierta y basta aplicar 2.2. $\square$

4 Espacios con red p -estricta

Supongamos que F es un espacio localmente p -convexo con una red p -estricta $\mathcal{W}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ponemos

$$A_\alpha = \left\{ 2^{n/p} C_{m_1 m_2 \dots m_n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De acuerdo con [5], $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una familia de p -discos de Banach de F que cubre F y tal que si (α_n) es semiestacionaria existe un p -disco de Banach tal que $A_{\alpha_n} \subset B$, para $n = 1, 2, \dots$

1. Proposición

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los p -discos de Banach de un espacio localmente p -convexo F . Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ una familia de p -discos de Banach que cumple las dos siguientes condiciones:

(i) $F = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$.

(ii) Si (α_n) es una sucesión semiestacionaria de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que A_{α_n} está contenido en B , para $n = 1, 2, \dots$

Entonces si A es un subconjunto absolutamente p -convexo y acotado de F tal que F_A es totalmente p -tonclado, A está contenido en un p -disco de Banach de F .

Demostración. La inyección canónica J de F_A en F es continua, así que su gráfica corta a $F_A \times F_B$ en un cerrado para cada B de $\mathcal{B}$. Por 3.3 existe un β en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $J(F_A) \subset F_\beta$ y J es continua entre esos dos espacios. Al ser F_β un (F)-espacio localmente p -convexo, existe un p -disco de Banach B en F_β que contiene a A . Pero B es también un p -disco de Banach en F . $\square$

2. Teorema

Si E es un espacio con red p -estricta, entonces E es un espacio semi- $L_p B$.

Demostración. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ponemos $\alpha'' = (a_{2n-1})$ y denotamos por B_α el conjunto

$$B_\alpha = \bigcap \{a_{2n} (F_\alpha \cap C_{a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}})\}$$

siendo F_α el (F) -espacio asociado a la sucesión B -estricta $(C_{a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}})$. Claramente B_α es un p -disco de Banach de F . Veamos que $\{B_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una representación semi- $L_p B$ de F . Dado un vector cualquiera x de F , hallamos un $b = (b_n)$ tal que $x \in A_\beta$. Sea $g = (c_n)$ de manera que

$$c_{2n-1} = b_n, \quad c_{2n} = 1, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Entonces $\beta = \gamma''$ y $x \in A_\beta \subset B_\alpha$, luego la familia $\{B_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ cubre F .

Sea $\alpha_j = (a_{j,n})$, $j = 1, 2, \dots$, una sucesión semiestacionaria en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Encontramos un entero positivo m_1 tal que

$$a_{m_1,1} = a_{j,1}, \quad \text{para } j = m_1, m_1 + 1, \dots$$

Procedemos por recurrencia y suponemos que para un entero positivo h , hemos obtenido el entero positivo m_h . Determinamos un número entero $m_{h+1} > m_h$ de manera que

$$a_{m_{h+1}, 2h+1} = a_{j, 2h+1}, \quad \text{para } j = m_{h+1}, m_{h+1} + 1, \dots$$

Para cada j , tomamos un x_j en B_{α_j} . Elegimos una subsucesión (x_{n_j}) de (x_j) , con la condición

$$n_j \geq m_j, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

Sea $\beta = (b_n)$ con

$$b_n = a_{m_n, 2n-1}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Para cada par de enteros positivos $h \leq j$ se tiene que

$$\begin{aligned} x_{n_j} &\in B_{\alpha_{n_j}} \subset a_{n_j, 2h} C_{a_{n_j, 1}, a_{n_j, 3}, \dots, a_{n_j, 2h-1}} \\ &= a_{n_j, 2h} C_{a_{m_1, 1}, a_{m_2, 3}, \dots, a_{m_h, 2h-1}} \\ &= a_{n_j, 2h} C_{b_1, b_2, \dots, b_h} \end{aligned}$$

Ponemos M_m para la envoltura absolutamente p -convexa de

$$\left\{ \frac{1}{a_{n_j, 2j}} x_{n_j} : j = 1, 2, \dots, m \right\} \cup C_{b_1, b_2, \dots, b_m}$$

obteniendo así una sucesión B -completante. Escribimos (P_m) para la sucesión B -estricta asociada. Obviamente $x_{n_j} \in F^{(P_m)}$. Veamos que $P := \{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}$ es un acotado de $F^{(P_m)}$. Fijemos un entero positivo r . Como la sucesión (α_n) es semiestacionaria, existe $b > 0$ tal que

$$a_{n_j, 2r} \leq b, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots$$

Entonces

$$x_{n_j} \in bC_{b_1, b_2, \dots, b_r}, \quad \text{para } j = r, r+1, \dots,$$

y, por tanto, P_r absorbe P . Consecuentemente, P está contenido en un p -disco de Banach en dicho espacio y, por tanto, en F . Por 1.4, si A es la envoltura absolutamente p -convexa y localmente cerrada en F del conjunto $Q = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, A es acotado y F_A es totalmente p -tonelado. De 1 se sigue que Q está contenido en un p -disco de Banach de F tal que $B_{\alpha_j} \subset B$ para $j = 1, 2, \dots$. La inyección $F_B \rightarrow F$ es continua y, por tanto, existe $\gamma = (c_n)$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que B es acotado en F_γ . Pero entonces, existe una sucesión de enteros positivos (d_n) de modo que

$$B \subset \bigcap \{d_n(F_\gamma \cap C_{c_1, c_2, \dots, c_n}) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\eta = (\epsilon_n)$ es el elemento de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$c_{2n} = d_n, \quad c_{2n-1} = c_n, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots,$$

se tiene que $B_{\alpha_j} \subset B_\eta$ para $j = 1, 2, \dots$, lo que demuestra que $\{B_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{|\mathbb{N}|}\}$ es una representación semi- $L_p B$ de F . $\square$

5. Localización en espacios con red

Sea $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión completante en un espacio vectorial topológico (E, t) , en la que cada A_k es equilibrado. Sea (p_n) la sucesión creciente de los números primos. Por inducción vamos a definir una sucesión doble de números naturales $(d_{n,m})$ cumpliendo las siguientes condiciones:

- (i) $d_{n+1, n_k+1} > d_{n, n_k+1}$ para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$ y $n_k = \sum_{j=1}^k 2^j$
- (ii) $d_{n+1, 1} > d_{n, 2}$
- (iii) $d_{n, m} < d_{n, m+1}$
- (iv) el k -ésimo elemento del conjunto $\{d_{n, m} : m \in \mathbb{N}, n \geq q+1\}$ es mayor que $d_{q, k}$ para cualesquiera naturales k y q .

Empezamos tomando $n_1 = 1+2$ elementos de la primera fila, $d_{1,1} = 2, d_{1,2} = 2^2, d_{1,3} = 2^3$, y $n_0 = 1$ de la segunda $d_{2,1} = 3^3$. Los $d_{i,j}$ así definidos cumplen (i), (ii), (iii). Supongamos que para un entero positivo k tenemos contruidos

$$d_{1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{1, n_k}$$

$$d_{2,1}, d_{2,2}, \dots, d_{2, n_{k-1}} \\ \dots \dots \dots$$

$$d_{k,1}, d_{k,2}, d_{k,3}$$

$$d_{k+1,1}$$

siendo $d_{r,j}$ potencia de p_r y cumpliendo (i), (ii), (iii). Determinamos d_{1, n_k+1} , potencia de p_1 mayor que $\max\{d_{i, n_k+1-i} : 1 \leq i \leq k+1\}$ y elegimos $d_{1, n_k+i}, 2 \leq i \leq 2^{k+1}$, todos ellos potencias de p_1 cumpliendo (iii). Tomamos ahora $d_{2, n_{k-1}+1}$ como una potencia de p_2 mayor que

$$\max(\{d_{i, n_k+1-i} : 1 \leq i \leq k+1\} \cup \{d_{1, n_k+1}\}).$$

Elegimos $d_{2, n_{k-1}+i}, 2 \leq i \leq 2^k$, todos ellos potencias de p_2 cumpliendo (ii). Procediendo de este modo, tomamos $d_{k+1, 2}$ como una potencia de p_{k+1} que sea mayor que $\max\{d_{i, n_k+2-i} : 2 \leq i \leq k\}$ y determinamos $d_{k+1, 3}$, potencia de p_{k+1} mayor que $d_{k+1, 2}$. Finalmente $d_{k+2, 1}$ será una potencia mayor que $d_{k+1, 3}$.

La sucesión construida de este modo cumple (i), (ii), (iii). En cuanto a (iv) bastará hacer la comprobación para $q = 1$.

Dado $k \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_m < k < n_{m+1}$, es decir, $d_{1, k}$ ha sido construido en el $(m+1)$ -ésimo paso de inducción. El k -ésimo elemento de

$\{d_{i,j} : j \in \mathbb{N}, i \geq 2\}$ es el construido en k -ésimo lugar de dicho conjunto. Tratamos de averiguar en qué paso de la inducción ha sido determinado.

El número de elementos construidos entre las filas 2 y $m+1$, ambas inclusive, en el m -ésimo paso de inducción es:

$$S_m = m + \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)2^j.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2S_m - S_m &= 2m + \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)2^{j+1} - m - \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)2^j \\ &= m + \sum_{j=2}^m 2^j - 2(m-1) \\ &= \sum_{j=1}^m 2^j - m \\ &< n_m. \end{aligned}$$

Entonces el k -ésimo elemento de $\{d_{i,j} : j \in \mathbb{N}, i \geq 2\}$ ha sido construido en el h -ésimo paso de inducción, para algún $h > m$, por (i) debe ser mayor que $d_{1,k}$, lo que demuestra que $\{d_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ cumple (iv).

Por otra parte la sucesión (A_k) es completante, luego existe una sucesión (λ_k) de números positivos, de modo que si $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k$, y si $x_k \in A_k$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k$$

es convergente. Para cada número natural n , definimos B_n como el siguiente conjunto

$$B_n := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k : 0 \leq \mu_k \leq \lambda_{d_{n,k}}, x_k \in A_{d_{n,k}} \right\}.$$

1. Proposición

La sucesión (B_n) es creciente y $B_{n+1} + B_{n+1} \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Las condiciones (i) y (ii) nos garantizan que $d_{n+1,k} < d_{n,k}$ para cualesquiera naturales n y k , y como (A_n) es decreciente, también lo es (B_n) . Veamos ahora que $B_{n+1} + B_{n+1} \subset B_n$. Sean $x, y \in B_{n+1}$, entonces,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x_k, \quad 0 \leq \mu_k \leq \lambda_{d_{n+1,k}}, \quad x_k \in A_{d_{n+1,k}},$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k y_k, \quad 0 \leq \eta_k \leq \lambda_{d_{n+1,k}}, \quad y_k \in A_{d_{n+1,k}}.$$

Como $d_{n+1,k} > d_{n,2k} > d_{n,2k-1}$ y (λ_j) es decreciente, se tiene que

$$x_k \in A_{d_{n,2k-1}}, \quad 0 \leq \mu_k \leq \lambda_{d_{n,2k-1}},$$

$$y_k \in A_{d_{n,2k}}, \quad 0 \leq \eta_k \leq \lambda_{d_{n,2k}},$$

con lo cual $x+y \in B_n$. Además, como cada A_k es equilibrado, también lo es cada B_k . $\square$

2. Proposición

Sean

$$L_n = \bigcup \{k B_n : k = 1, 2, \dots\},$$

$$L = \bigcap \{L_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces L es un subespacio vectorial de E y la sucesión $\{B_n \cap L : n \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos para una topología metrizable y completa, más fina que la restricción a L de la topología de E .

Demostración. En primer lugar comprobemos que L es un subespacio vectorial de E . Desde luego, $L \neq \emptyset$, pues $0 \in L$. Si $x, y \in L$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, fijamos n entero positivo arbitrario. Existen k_1 y k_2 , enteros positivos, tales que $x \in k_1 B_{n+1}$, $y \in k_2 B_{n+1}$. Si $k = \max(k_1, k_2, |\alpha|, |\beta|)$, al ser B_{n+1} equilibrado,

$$\alpha x + \beta y \in k B_{n+1} + k B_{n+1} \subset k B_n,$$

luego

$$\alpha x + \beta y \in L_n,$$

para cada n en $\mathbb{N}$.

Además $B_n \cap L$ es absorbente en L , lo que junto con la proposición anterior nos permite afirmar que $(B_n \cap L)$ es base de entornos del origen para una topología vectorial pseudometrizable σ . Veamos que es más fina que $t|_E$. En efecto, si no fuese así, podríamos tomar un t -entorno del origen, V , que podemos suponer cerrado, tal que $B_m \not\subset V$ para $m = 1, 2, \dots$. Sea $n_1 = 1$, existe un $x_1 \in B_1 \sim V$, y por ser de B_1 , x_1 puede expresarse

$$x_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{1,j} x_{1,j}, \quad \text{con } 0 \leq \mu_{1,j} \leq \lambda_{d_{1,j}}, \quad x_{1,j} \in A_{d_{1,j}}.$$

es decir, x_1 es el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\left(\sum_{j=1}^N \mu_{1,j} x_{1,j} \right).$$

Como V es cerrado y $x_1 \notin V$, existe N_1 tal que la correspondiente suma parcial no pertenece a V . Determinamos un entero positivo n_2 tal que $d_{n_2,1} > d_{1,N_1}$. Como $B_{n_2} \not\subset V$, razonando como antes, existe un N_2 tal que

$$\sum_{j=1}^{N_2} \mu_{2,j} x_{2,j} \notin V, \quad \text{con } 0 \leq \mu_{2,j} \leq \lambda_{d_{n_2,j}}, \quad x_{2,j} \in A_{d_{n_2,j}}.$$

Procediendo por recurrencia, obtenemos dos sucesiones crecientes de números naturales (n_j) y (N_j) , tales que $d_{n_{p+1},1} > d_{n_p, N_p}$ y un x^p de la forma

$$\sum_{j=1}^{N_p} \mu_{p,j} x_{p,j}, \quad \text{con } 0 \leq \mu_{p,j} \leq \lambda_{d_{n_p,j}}, \quad x_{p,j} \in A_{d_{n_p,j}}$$

que no pertenece a V . Puesto que la sucesión (A_k) es completante, y por la forma de los x^p , la sucesión (x^p) debe ser nula, en contra de que $x^p \notin V$, $p = 1, 2, \dots$. Entonces existe algún B_m contenido en V , lo que demuestra que σ es más fina que $t|_E$. En particular σ es separada y, por tanto, metrizable.

Para terminar veamos que es completa. Sea (x^k) una sucesión de Cauchy en (L, σ) . Determinamos una subsucesión (y^k) de modo que $y^{k+1} - y^k \in B_k$. Para q entero positivo arbitrario se tiene que

$$\begin{aligned} y^{q+k+1} - y^{q+1} &= y^{q+k+1} - y^{q+k} + y^{q+k} - y^{q+k-1} + \dots + y^{q+2} - y^{q+1} \\ &\subset B_{q+k} + B_{q+k-1} + \dots + B_{q+1} \subset B_q. \end{aligned}$$

Por la definición de B_n tenemos que

$$y^{k+q+1} - y^{k+q} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{k,j} x_{d_{k+q,j}}, \quad \text{con } 0 \leq \mu_{k,j} \leq \lambda_{d_{k+q,j}}, \quad x_{d_{k+q,j}} \in A_{d_{k+q,j}}$$

para cada entero positivo k . El conjunto numerable $\{\mu_{k,j} x_{d_{k+q,j}} : k, j = 1, 2, \dots\}$ lo ordenamos en sucesión, (z_n) , de forma que los subíndices $\{d_{k+q,j} : k, j = 1, 2, \dots\}$ formen una sucesión creciente. Por ser (A_h) completante, la serie de término general (z_n) es convergente en E a un cierto z . Para cada k , existe una sucesión creciente de números naturales (k_n) , tal que

$$y^{k+q+1} - y^{k+q} = \sum_{n=1}^{\infty} z_{k_n},$$

luego dado un entero positivo p tenemos q

$$z - \sum_{k=1}^p y^{q+k+1} - y^{q+k} = \sum_{H} z_h$$

siendo $H = \mathbb{N} \sim \{k_n : 1 \leq k \leq p, n = 1, 2, \dots\}$. Ahora bien, el conjunto $\{z_h : h \in H\}$ no es más que el conjunto $\{\mu_{r,j} x_{d_{q+r,j}} : j = 1, 2, \dots, r > p\}$ ordenado de modo que la sucesión de los subíndices $\{d_{q+r,j} : j = 1, 2, \dots, r > p\}$ sea creciente. Por la condición (iv), la aplicación

$$\nu : \{d_{q+r,j} : j = 1, 2, \dots, r > p\} \longrightarrow \{d_{q+p,j} : j = 1, 2, \dots\}$$

que hace corresponder al k -ésimo elemento del primer conjunto el k -ésimo del segundo, para cada k , está bien definida y además $\nu(d_{q+r,j}) < d_{q+r,j}$, de donde

$$x_{d_{q+r,j}} \in A_{\nu(d_{q+r,j})} \quad \text{y} \quad 0 \leq \mu_{r,j} \leq \lambda_{\nu(d_{q+r,j})}.$$

Lo anterior nos permite afirmar que

$$\sum_H z_h$$

tiene la forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m t_m \quad \text{con } 0 \leq \delta_m \leq \lambda_{d_{p+q,m}}, \quad t_m \in A_{d_{p+q,m}},$$

es decir, pertenece a B_{p+q} , o dicho de otro modo $z - (y^{p+q+1} - y^{q+1}) \in B_{p+q}$.

Por otra parte $y^{p+q+1} - y^{q+1} \in L$, luego existe un $\lambda > 0$ tal que $y^{p+q+1} - y^{q+1} \in \lambda B_{p+q}$ y, en consecuencia, $z \in (\lambda + 1)B_{p+q-1}$. Como esto es cierto para p arbitrario, $z \in L$. Entonces la sucesión (y^{p+q+1}) converge a $u := z + y^{q+1} \in L$ en la topología σ , por tanto, (x^n) converge a u en σ , lo que demuestra la completitud de (L, σ) . $\square$

3. Proposición

Sean (F, s) , (E, t) espacios vectoriales topológicos, y $T : E \rightarrow F$ lineal con gráfica cerrada. Supongamos que en (E, t) existe una sucesión completante (A_n) , formada por subconjuntos equilibrados, tal que $\overline{T^{-1}(A_n)}$ no es vacío, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si (L, σ) es el espacio métrico completo asociado a (A_n) , $T(E) \subset L$ y T es continua como aplicación de (E, t) en (L, σ) .

Referencias

1. N. Adasch, B. Ernst and D. Keim, *Topological Vector Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 639, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
2. B. Cascales, *Algunas Estructuras en Espacios Vectoriales Topológicos: Teoremas de Localización, Gráfica Cerrada y Metrizabilidad de Precompactos*, Tesis Doctoral, Universidad de Murcia, Murcia, 1985.
3. M. De Wilde, *Closed Graph Theorems and Webbed Spaces*, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1978.
4. H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, Teubner, Stuttgart, 19981.
5. J. Orihuela, Sobre espacios semi-Suslin y espacios con red de tipo τ , *Collectanea Math.* 36 (1985), 177–196.
6. A. Todd and S. Saxon, A property of locally convex Baire spaces, *Math. Ann.* 206 (1973), 23–35.
7. M. Valdivia, Barrelled spaces related with the closed graph theorem, *Port. Math.* 40 (1984), 345–366.
8. M. Valdivia, Quasi-LB-spaces, *J. London Math. Soc.* (2) 35 (1987), 149–168.
9. M. Valdivia, Completing sequences and semi-LB-spaces, *Note di Matematica* 7 (1987), 55–82.

