Collect. Math. **41**, 1 (1990), 35–44

Une caractérisation du fibré transverse

Tong Van Duc

Institut Fourier, B.P. 74, 38402 St. Martin d'Hères Cedex, France

Received 29/NOV/89

Abstract

We prove that the Lie algebra of infinitesimal automorphisms of the transverse structure on the total space of the transverse bundle of a foliation is isomorphic to the semi-direct product of the Lie algebra of the infinitesimal automorphism of the foliation by the vector space of the transverse vector fields. The derivations of this algebra are entirely determined and we prove that this Lie algebra characterises the foliated structure of a compact Hausdorff foliation.

Soit M une variété différentiable connexe, paracompacte de dimension n. Tous les objets considérés sont de classe C^∞. On suppose donné sur M un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q défini par un atlas $A = \{U, x^u, x^a\}$ $(u, v, \ldots = 1, \ldots, n-q;\ a, b, \ldots = 1, \ldots, q)$, les feuilles de $\mathcal{F}$ étant localement définies par $x^a = \mathrm{c^{te}}$. Soient (Q, p, M) le fibré transverse de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$. Si X est un champ de vecteurs sur M, on notera $\bar{X}$ la section de Q définie par X. Soient $L_\mathcal{F}$ l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de $\mathcal{F}$ et $l_\mathcal{F} = L_\mathcal{F}/\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ est un idéal de $L_\mathcal{F}$, $l_\mathcal{F}$ est une algèbre de Lie dont les éléments seront appelés champs de vecteurs transverses.

Soit $x \in M$ et $X \in T_xM$. Si l'on pose $X = X^u\, \partial/\partial x^u + X^a\, \partial/\partial x^a$ dans une carte locale adaptée (U, x^u, x^a), on a $\bar{X} = X^a\, \bar{\partial}/\partial x^a$. X^a ne dépend que de $\bar{X}$ et on la note $z^a(\bar{X})$. On prendra (x^u, x^a, z^a) comme coordonnées locales dans l'ouvert $p^{-1}(U)$ de Q et on obtient ainsi sur la variété Q un atlas dont les fonctions de transition sont de la forme:

$$x^{u'} = x^{u'}(x^u, x^a), \qquad x^{a'} = x^{a'}(x^a), \qquad z^{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}\, z^a.$$

Ainsi, il existe sur la variété Q un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de codimension $2q$ dont les feuilles sont des revêtements des feuilles de $\mathcal{F}$; les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont localement définies par $x^a = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$, $z^a = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$. On appellera $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage relevé.

Un champ transverse $\bar{X}$ a pour expression locale:

$$\bar{X} = X^a(x^b)\,\frac{\bar{\partial}}{\partial x^a}\,.$$

On peut donc considérer les champs transverses comme des sections de (Q,p,M) qui sont en même temps des morphismes de la variété feuilletée $(M,\mathcal{F})$ dans la variété feuilletée $(Q,\tilde{\mathcal{F}})$.

Soit X un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$ et soit (φ_t) son groupe local à un paramètre. Comme chaque φ_t est un automorphisme du feuilletage, $(\varphi_t)_*$ induit un automorphisme $(\bar{\varphi}_t)_*$ de (Q,q,M). Soit $\tilde{X}$ le champ de vecteurs associé au groupe local à un paramètre $(\bar{\varphi}_{t^*})$.

Un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$ a pour expression locale:

$$X = X^u(x^v,x^b)\,\frac{\partial}{\partial x^u} + X^a(x^b)\,\frac{\partial}{\partial x^a}\,,$$

celle de son relèvement $\tilde{X}$ est:

$$\tilde{X} = X^u\,\frac{\partial}{\partial x^u} + X^a\,\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial X^b}{\partial x^a}\,z^b\,\frac{\partial}{\partial z^a}\,.$$

On notera $\tilde{L}_{\mathcal{F}}$ l'algèbre de Lie des relèvements des éléments de $L_{\mathcal{F}}$. D'autre part, comme le fibré vertical VQ de (Q,p,M) est isomorphe à $Q\times_M Q$, toute section $\bar{X}$ de Q induit une section $\bar{X}^v$ de VQ, appelée relèvement vertical de $\bar{X}$ [1].

Si $\bar{X} = X^a\,\bar{\partial}/\partial x^a$, alors $\bar{X}^v = X^a\,\partial/\partial z^a$.

Par ailleurs, on a, puisque $\mathcal{L}$ est un idéal de $L_{\mathcal{F}}$, une action canonique de $L_{\mathcal{F}}$ sur l_F définie par:

$$\begin{aligned} &L_{\mathcal{F}}\times l_{\mathcal{F}} \longrightarrow l_{\mathcal{F}}\\ &(X,\bar{Y}) \longrightarrow X\cdot\bar{Y} = \left[\overline{X,Y}\right]. \end{aligned}$$

Soit C le champ canonique sur (Q,p,M), $C = z^a\,\partial/\partial z^a$.

Proposition 1

On a:

$$[\tilde{X},\tilde{Y}] = [\widetilde{X,Y}],\quad [\tilde{X},\bar{Y}^v] = (X\cdot\bar{Y})^v,\quad [\bar{X}^v,\bar{Y}^v] = 0$$

$$[C,\tilde{X}] = 0,\quad [C,\bar{Y}^v] = -\bar{Y}^v,\ \forall X,Y\in L_{\mathcal{F}}.$$

On va introduire maintenant les fibrés vectoriels d'un type particulier qu'on recontrera dans la suite.

DÉFINITION. Un fibré vectoriel (E,p,M) de rang $2q$ est un fibré presque-tangent s'il existe un endomorphisme J de (E,p,M) de rang q et tel que $J^2 = 0$.

On va montrer que le groupe structural d'un fibré vectoriel presque-tangent se réduit à $O(q)$; ceci généralise un résultat de C. S. Houh [6].

Soit g une métrique riemannienne sur (E,p,M). Soient $E_1 = \operatorname{Im} J = \operatorname{Ker} J$ et soit E_2 l'orthogonal de E_1. On a $E = E_1 \oplus E_2$. Puisque $J_{|E_2}$ est un isomorphisme de E_2 sur E_1, soit $K : E_1 \to E_2$ son inverse. On prolonge K en un endomorphisme noté encore K de E tel que $K_{|E_2} = 0$. On a $K^2 = 0$ et $JK + KJ = \mathrm{id}_E$. Soit $F = J - K$, alors F est une structure presque-complexe sur (E,p,M) et $F(E_1) = E_2$ et $F(E_2) = E_1$.

Soit h la métrique riemannienne sur (E,p,M) définie par:

$$h(\hat{X},\hat{Y}) = g(\hat{X},\hat{Y}) + g(F\hat{X},F\hat{Y}), \quad \forall \hat{X},\hat{Y} \in \underline{E}.$$

E_1 et E_2 sont orthogonaux par rapport à h et on a:

$$h(F\hat{X},F\hat{Y}) = h(\hat{X},\hat{Y}).$$

Si (e_a) est une base orthonormée des sections locales de E_1 par rapport à h, $(e_a, e_{a^*} = F(e_a))$ est une base orthonormée des sections locales de E. Il en résulte que le groupe structural de (E,p,M) se réduit au sous-groupe $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ de $Gl(2q,\mathbb{R})$ où $A \in O(q)$.

D'autre part, (E,p,M) muni de la structure presque-complexe F et de la métrique h est un fibré vectoriel complexe hermitien. Un repère unitaire local adapté à cette structure est donné par:

$$\mathcal{E}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_a - \sqrt{-1}\, e_{a*}\right).$$

On en déduit que le groupe structural de (E,p,M) se réduit au groupe unitaire $\mathcal{U}(q)$.

Soit $I(\mathcal{U}(q))$ l'algèbre des polynômes invariants définis sur l'algèbre de Lie $u(q)$ de $\mathcal{U}(q)$. On sait que:

$$I(\mathcal{U}(q)) = \mathbb{R}[c_1,\ldots,c_n]$$

où les c_k sont déterminés par:

$$\det\left(\lambda I_q - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} A\right) = \sum_{k=0}^{q} c_k(A)\lambda^{n-k}, \quad A \in u(q).$$

De plus la classe d'Euler $e(E)$ du fibré vectoriel (E,p,M) est défini par:

$$e(E) = W(c_q)$$

où $W : I(\mathcal{U}(q)) \to H^*(M,\mathbb{R})$ est l'homomorphisme de Chern-Weil.

Comme le groupe structural de E se réduit à $\mathcal{U}(q)$ et à $O(q)$ et puisque $o(q) \subset u(q)$, on a $e(E) = 0$ si q est impair, car le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Théorème 1

Tout fibré vectoriel presque-tangent est orientable et sa classe d'Euler est nulle si q est impair.

Sur la variété Q, il existe une 1-forme vectorielle $\tilde{J}$ définie de la façon suivante:

$$\tilde{J}(A) = \left(\overline{p * A}\right)^{v}_{\bar{X}}, \qquad \forall A \in T_{\bar{X}}Q \text{ et } \forall \bar{X} \in Q.$$

$\tilde{J}$ a pour expression locale: $\tilde{J} = dx^a \otimes \partial/\partial z^a$. On a $\tilde{J}^2 = 0$ et $\tilde{J}$ est de rang q.

Soient $\tilde{E}$ le fibré de vecteurs tangents au feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\pi : TQ \to \tilde{Q} = TQ/\tilde{E}$. Puisque le noyau de $\tilde{J}$ est $\tilde{E} \oplus VQ$, il existe sur le fibré vectoriel $(\tilde{Q},\tilde{q},Q)$ un endomorphisme J tel que $J \circ \pi = \pi \circ \tilde{J}$ et $J^2 = 0$; d'où le:

Théorème 2

Le fibré transverse du feuilletage relevé est un fibré presque-tangent.

Corollaire

La classe d'Euler du fibré transverse du feuilletage relevé est nulle si q est impair.

L'atlas $\tilde{\mathcal{A}} = \{p^{-1}(U), x^u, x^a, z^a\}$ définit sur la variété Q une G-structure qu'on appellera structure transverse et dont les éléments de G sont de la forme:

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & D & C \end{bmatrix}$$

où $A \in Gl(n-q,\mathbb{R})$, $C \in Gl(q,\mathbb{R})$.

Cette structure transverse est subordonnée à la G-structure définie par le tenseur $\tilde{J}$ et à la G-structure définie par le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$. Réciproquement, on a la:

Proposition 2

Si les G-structures définies par le feuilletage relevé et le tenseur $\tilde{J}$ admettent une structure subordonnée commune, cette structure est la structure transverse.

Preuve. Le groupe de la G-structure définie par le feuilletage relevé est composé des matrices de la forme:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & G & H \end{bmatrix}.$$

Cette matrice appartient au groupe de la G-structure définie par $\tilde{J}$ si:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & G & H \end{bmatrix}$$

où I désigne la matrice unité; ce qui implique que $C = 0$, $E = 0$ et $G = D$. On retrouve ainsi les matrices du groupe de la structure transverse.

Soit L l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de la structure transverse et soit

$$A = A^u \frac{\partial}{\partial x^u} + A^a \frac{\partial}{\partial x^a} + A^{a*} \frac{\partial}{\partial z^a}$$

un élément de L. Le fait que L laisse invariant $\tilde{J}$ se traduit, puisque $\tilde{J} = dx^a \otimes \partial/\partial z^a$, par:

$$\frac{\partial A^u}{\partial z^b} = 0, \quad \frac{\partial A^a}{\partial z^b} = 0, \quad \frac{\partial A^a}{\partial x^v} = 0, \quad \frac{\partial A^{a*}}{\partial z^b} = \frac{\partial A^a}{\partial x^b}.$$

En plus, puisque A est un automorphisme infinitésimal du feuilletage relevé, on a:

$$\frac{\partial A^{a*}}{\partial x^v} = 0.$$

On en déduit que les éléments de L sont de la forme:

$$A = A^u(x^v, x^b) \frac{\partial}{\partial x^u} + A^a(x^b) \frac{\partial}{\partial x^a} + \left(\frac{\partial A^a}{\partial x^b} z^b + B^a(x^b) \right) \frac{\partial}{\partial z^a}.$$

Ainsi les éléments de L sont projetables sur M et on a un morphisme surjectif d'algèbres de Lie φ de L sur $L_{\mathcal{F}}$ défini par

$$\varphi(A) = \widetilde{(p_* A)} \qquad \forall A \in L.$$

D'où la suite exacte scindée:

$$0 \longrightarrow \tilde{l}_{\mathcal{F}} \longrightarrow L \longrightarrow \tilde{L}_{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

où $\tilde{l}_{\mathcal{F}}$ désigne le relèvement vertical de l'espace des champs transverses.

Théorème 3

$L = \tilde{L}_{\mathcal{F}} \oplus \tilde{l}_{\mathcal{F}}.$

On déduit de la proposition 1 et du théorème 2, le:

Théorème 4

L est isomorphe au produit semi-direct de l'algèbre de Lie $L_{\mathcal{F}}$ par l'espace vectoriel $l_{\mathcal{F}}$ considéré comme algèbre de Lie abélienne.

On rappelle que le crochet dans $L_{\mathcal{F}} \times l_{\mathcal{F}}$ est défini par:

$$[(X,\bar{Y}),(X',\bar{Y}')] = ([X,X'], X\cdot\bar{Y}' - X'\cdot\bar{Y}) \qquad \forall X,Y,X',Y' \in L_{\mathcal{F}}.$$

On va maintenant étudier les dérivations de L. Soit D une dérivation de L identifiée à $L_{\mathcal{F}} \times l_{\mathcal{F}}$. Alors, il existe des applications $\mathbb{R}$-linéaires G, H, R et S telles que:

$$D((X,\bar{Y})) = (G(X) + H(\bar{Y}), R(X) + S(\bar{Y})), \qquad \forall X,Y \in L_{\mathcal{F}}.$$

Le fait que D est une dérivation implique que G, H, R et S sont solutions des équations suivantes:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & G([X,X']) &= [G(X),X'] + [X,G(X')]\\
&(2) & H(X\cdot\bar{Y}) &= [X,H(\bar{Y})]\\
&(3) & H(\bar{Y})\cdot\bar{Y}' &= H(\bar{Y}')\cdot\bar{Y}\\
&(4) & R([X,X']) &= X\cdot R(X') - X'\cdot R(X)\\
&(5) & S(X\cdot\bar{Y}) &= G(X)\cdot\bar{Y} + X\cdot S(\bar{Y}).
\end{aligned}$$

D'après (1), G est une dérivation de $L_{\mathcal{F}}$. Or toute dérivation de $L_{\mathcal{F}}$ est intérieure d'après un théorème d'A. Lichnerowicz [7]. Il existe donc $X_0 \in L_{\mathcal{F}}$ tel que

$$D(X) = [X_0, X] \qquad \forall X \in L_{\mathcal{F}}.$$

Les équations (2), (4) et (5) montrent que H, R et S sont des opérateurs locaux.

Si l'on pose $H(\bar{\partial}/\partial x^a) = H_a^u\, \partial/\partial x^u + H_a^b\, \partial/\partial z^b$ et si l'on choisit $\bar{Y} = \bar{\partial}/\partial x^a$, pour $X = \partial/\partial x^v$, l'équation (2) donne $\partial H_a^u/\partial x^v = 0$ et pour $X = x^v\, \partial/\partial x^w$, on trouve $H_a^u = 0$; pour $X = x^d\, \partial/\partial x^v$, on trouve $H_a^d = 0$.

De même, si l'on pose $H(x^b\, \partial/\partial x^a) = H_a^{bu}\, \partial/\partial x^u + H_a^{bc}\, \partial/\partial x^c$, et si l'on choisit, $\bar{Y} = x^b\, \partial/\partial x^a$, pour $X = \partial/\partial x^v$, on trouve $\partial H_b^{au}/\partial x^v = 0$ et pour $X = x^u\, \partial/\partial x^v$, on obtient $H_a^{bu} = 0$ et pour $X = x^d\,\partial/\partial x^v$, il vient $H_a^{bc} = 0$. Un raisonnement par récurrence montre que $H \equiv 0$.

L'application $R : L_{\mathcal{F}} \to l_{\mathcal{F}}$ vérifie l'équation (4):

$$R\big([X,Y]\big) = X \cdot R(Y) - Y \cdot R(X).$$

Puisque R est local, on va se restreindre à des cartes adaptées (U, x^u, x^a) où U est contractile.

Si l'on pose $R(\partial/\partial x^u) = R_u^c\,\bar\partial/\partial x^c$ et $R(\partial/\partial x^a) = R_a^c\,\bar\partial/\partial x^c$, pour $X = x^d\,\partial/\partial x^v$, $Y = \partial/\partial x^u$, l'équation (4) montre que $R_u^c = 0$; pour $X = \partial/\partial x^a$, $Y = \partial/\partial x^b$, on trouve $\partial R_b^c/\partial x^a = \partial R_a^c/\partial x^b$; il existe donc des fonctions f^c définies sur U, qui ne dépendent que de x^b et telles que $\partial f^c/\partial x^a = R_a^c$. Soit $\bar Y_1$ le champ transverse défini sur U par $\bar Y_1 = f^c\,\bar\partial/\partial x^c$. Si l'on pose $P(X) = R(X) + X \cdot \bar Y_1$, alors P vérifie la même équation que R

$$P\big([X,Y]\big) = X \cdot P(Y) - Y \cdot P(X), \tag{6}$$

et on a $P(\partial/\partial x^u) = P(\partial/\partial x^a) = 0$.

Si l'on pose $P(x^i\,\partial/\partial x^u) = P_u^{ic}\,\bar\partial/\partial x^c$, $(i = 1,\ldots,n)$ et $P(x^a\,\partial/\partial x^b) = P_b^{ac}\,\bar\partial/\partial x^c$, pour $X = x^a\,\partial/\partial x^v$, $Y = x^v\,\partial/\partial x^u$, on trouve $P_v^{ac} = 0$ et pour $X = \partial/\partial x^v$, $Y = (x^v)^2\,\partial/\partial x^u$, il vient: $P_u^{vc} = 0$. Pour $X = \partial/\partial x^d$, $Y = x^a\,\partial/\partial x^b$, on trouve $\partial P_b^{ac}/\partial x^d = 0$; donc P_b^{ac} sont des constantes; pour $X = x^a\,\partial/\partial x^b$, et $Y = x^e\,\partial/\partial x^d$, l'équation (6) devient:

$$\delta_b^e P_d^{ac}\,\frac{\bar\partial}{\partial x^c} - \delta_a^d P_d^{ec}\,\frac{\bar\partial}{\partial x^c} = -P_d^{ea}\,\frac{\bar\partial}{\partial x^b} + P_b^{ae}\,\frac{\bar\partial}{\partial x^d}\,.$$

En faisant $a = b = d \neq e$, on trouve $P_a^{ec} = 0$ si $c \neq a$, puis en faisant $e = b$, $a \neq d$, on obtient $P_d^{ad} = P_b^{ab}$. Soit C_a^{aa} la valeur commune des P_b^{ab} et soit $\bar Y_2 = C_a^{aa}\,\bar\partial/\partial x^a$.

Soit N l'opérateur différentiel défini par

$$N(X) = P(X) + X \cdot \bar Y_2.$$

Alors N vérifie la même équation que P:

$$N\big([X,Y]\big) = X \cdot N(Y) - Y \cdot N(X). \tag{7}$$

De plus, $N(\partial/\partial x^i) = N(x^i\,\partial/\partial x^u) = N(x^a\,\partial/\partial x^b) = 0$.

Un raisonnement par récurrence montre encore que $N \equiv 0$.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on pose $\bar Y_0 = \bar Y_1 + \bar Y_2$ alors $R(X) = -X \cdot \bar Y_0$.

Puisque $G(X) = [X_0, X]$, l'application $S : l_{\mathcal{F}} \to l_{\mathcal{F}}$ vérifie l'équation:

$$S(X \cdot \bar{Y}) = [X_0, X] \cdot \bar{Y} + X \cdot S(\bar{Y}). \tag{8}$$

Si l'on pose $S(\bar{\partial}/\partial x^b) = S_b^c \, \bar{\partial}/\partial x^c$, et si l'on choisit $\bar{Y} = \bar{\partial}/\partial x^b$, pour $X = \partial/\partial x^a$, on obtient $S_b^c = -\partial X_0^c/\partial x^b + C_b^c$, où C_b^c sont des constantes; pour $X = x^d \, \partial/\partial x^a$, on trouve $C_b^d = 0$ si $d \neq b$ et $C_b^b = C_a^a$; pour $X = x^v \, \partial/\partial x^a$, il vient: $\partial X_0^c/\partial x^b = 0$.

Soit k la valeur commune des C_a^a et soit T l'application de $l_{\mathcal{F}}$ dans lui-même définie par:

$$T(\bar{X}) = S(\bar{X}) - X_0 \cdot \bar{X} - k\bar{X}.$$

Alors T vérifie l'équation:

$$T(X \cdot \bar{Y}) = X \cdot T(\bar{Y}). \tag{9}$$

T est un opérateur local et on a $T(\bar{\partial}/\partial x^a) = 0$. Si l'on pose $T(x^a \, \partial/\partial x^b) = T_b^{ac} \, \bar{\partial}/\partial x^c$ et si l'on choisit $\bar{Y} = x^a \, \partial/\partial x^b$ pour $X = \bar{\partial}/\partial x^d$, on trouve $\partial T_b^{ac}/\partial x^d = 0$, pour $X = x^e \, \bar{\partial}/\partial x^a$, l'équation (9) devient:

$$\delta_d^a \, T_b^{ec} \, \frac{\bar{\partial}}{\partial x^c} - \delta_b^e \, T_d^{ac} \, \frac{\bar{\partial}}{\partial x^c} = -T_b^{ae} \, \frac{\bar{\partial}}{\partial x^d},$$

d'où $T_b^{ae} = 0$ si $e \neq b$; en faisant $a = d$ et $b = e$, il vient: $T_a^{aa} = T_b^{ab} = 0$ ainsi $T(x^a \, \bar{\partial}/\partial x^b) = 0$. En procédant de nouveau comme pour H, on trouve $T \equiv 0$. Par suite $S(\bar{X}) = X_0 \cdot \bar{X} + k\bar{X}$.

Comme G, H, R et S sont des opérateurs locaux, il en est de même de D et on vient de montrer que, pour tout domaine U d'une carte adaptée, il existe Y_{0U} et une constante k_U tels que pour chaque $(X, \bar{Y}) \in L_{\mathcal{F}} \times l_{\mathcal{F}}$, la restriction D_U de D à U soit donnée par:

$$D_U\big((X_U, \bar{Y}_U)\big) = \big([X_0, X]_U, X_{0U} \cdot \bar{Y}_U - X \cdot \bar{Y}_{0U} - k_U \bar{Y}_U\big).$$

On en déduit que sur $U \cap V \neq \emptyset$ où V est le domaine d'une autre carte adaptée:

$$X_{U \cap V}(Y_{0U} - Y_{0V}) - (k_U - k_V)\bar{Y}_{U \cap V} = 0 \qquad \forall (X, \bar{Y}) \in L_{\mathcal{F}} \times l_{\mathcal{F}};$$

ce qui implique que $k_U = k_V$ et $Y_{0U} = Y_{0V}$.

Ainsi, pour toute dérivation D de $L_{\mathcal{F}} \times l_{\mathcal{F}}$, il existe $(X_0, \bar{Y}_0) \in L_{\mathcal{F}} \times l_{\mathcal{F}}$ et une constante k tels que:

$$D(X, \bar{Y}) = \big([X_0, X], X_0 \cdot \bar{Y} - X \cdot \bar{Y}_0 + k\bar{Y}\big).$$

Il est facile de voir que le triplet (X_0, Y_0, k) ainsi déterminé est unique. En vertu de la proposition 1 et du théorème 4, on a le

Théorème 5

Pour toute dérivation D de L, il existe un élément unique A_0 de L et une constante k tels que pour chaque $A \in L$, $D(A) = [A_0 + kC, A]$; le premier espace de cohomologie de Chevalley $H_1(L; L)$ a pour dimension 1.

On va noter D_k les dérivations de L de la forme:

$$D_k = ad(\tilde{X}_0 + \bar{Y}_0^v + kC).$$

Si l'on cherche les dérivations D_k telles que $D_k \circ D_k = lD_k$, $l \in \mathbb{R}$, alors:
1) si $l = 0$, il vient $X_0 = 0$ et $k = 0$; d'où $D_k = ad(\bar{Y}_0^v)$;
2) si $l \neq 0$, il vient $X_0 = 0$ et $l = -k$; d'où $D_k = ad(\bar{Y}_0^v + kC)$.
Les dérivations $ad(\bar{Y}_0^v + kC)$ ont pour valeurs propres 0 et $-k$. L'espace propre associé à la valeur propre $-k$ est $l_{\mathcal{F}}^v$, le relèvement vertical de $l_{\mathcal{F}}$.

Soient $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ deux variétés feuilletées et soient L et L' les algèbres de Lie attachées aux structures transverses sur Q et Q'. Soit ψ un isomorphisme de L sur L'. D'après l'étude faite sur les espaces propres des dérivations de L et L', ψ induit un isomorphisme de $l_{\mathcal{F}}^v$ sur $l_{\mathcal{F}'}^v$ et par suite un isomorphisme de $L/l_{\mathcal{F}}^v \simeq \tilde{L}_{\mathcal{F}}$ sur $L'/l_{\mathcal{F}'^v} \simeq \tilde{L}_{\mathcal{F}'}$; d'après un théorème de K. Fukui et N. Tomita [5], si les feuilletages $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont compacts Hausdorff, i. e. si toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont compactes et les espaces des feuilles sont séparés, alors il existe un difféomorphisme de M sur M' qui envoie $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$, d'où le:

Théorème 6

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des feuilletages compacts Hausdorff sur deux variétés M et M'. Alors $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ sont isomorphes si et seulement si les algèbres de Lie L et L' attachées aux structures transverses sont isomorphes.

Références

1. T. V. Duc, Sur la géométrie différentielle des fibrés vectoriels, *Kodai Math. Sem. Report* **26** (1975), 349–408.
2. T. V. Duc, Forme canonique sur le dual du fibré transverse, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* **7** (1985), 169–177.
3. T. V. Duc, Tenseur covariant canonique sur le fibré cotangent d'ordre 2, *Bull. Soc. Math. France* (2) **110** (1986), 289–301.
4. T. V. Duc, Algèbre de Lie attachée à la structure presque-tangente, *Geom. Dedicata* **23** (1987), 347–352.

5. K. Fukui and N. Tomita, Lie algebra of foliation preserving vector fields, *J. Math. Kyoto Univ.* **22** (1983), 685–699.
6. C. S. Houh, On a Riemannian manifold M_{2n} with an almost-tangent structure, *Canad. Math. Bull.* **12** (1969), 759–769.
7. A. Lichnerowicz, Algèbres de Lie attachés à un feuilletage, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* **1** (1979), 45–76.
8. F. Takens, Derivations of vector fields, *Comp. Math.* **26** (1975), 95–99.