Collect. Math. **41**, 1 (1990), 13–19

Teorema de Ramsey aplicado a álgebras de Boole

F. Benítez Trujillo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Apartado 40, Puerto Real, Cádiz, Spain

Received 25/MAY/90

Abstract

Some properties of Boolean algebras are characterized through the topological properties of a certain space of countable sequences of ordinals. For this, it is necessary to prove the Ramsey theorems for an arbitrary infinite cardinal. Also, we define continuous mappings on these spaces from vector measures on the algebra.

1. Teorema de Ramsey para un cardinal infinito cualquiera

Definición 1.1 (a) Llamaremos *secuencia* a una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ de ordinales tal que $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ para todo $k \geq 1$. Mientras no haya lugar a confusión denotaremos las secuencias en la forma (α_n).

(b) Para un cardinal κ infinito representamos por $[\kappa]$ el conjunto de todas las secuencias numerables de ordinales de κ y por $[\kappa]^{<\omega}$ el de las secuencias finitas.

(c) Si $A \in [\kappa]^{<\omega}$ y $M \in [\kappa]$ diremos que A es un *segmento inicial* de M si al ser $A = (\alpha_n)_{n=1}^{m}$ y $M = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\beta_n = \alpha_n$ para cada $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

(d) Para $A \in [\kappa]^{<\omega}$ y $M \in [\kappa]$ definimos

$$A^{[M]} = \{L \in [\kappa] : A \text{ segmento inicial de } L,\ L \backslash A \in [M]\}.$$

Proposición 1.2

La familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos de $[\kappa]$ de la forma $A^{[M]}$ con $A \in [\kappa]^{<\omega}$ y $M \in [\kappa]$ es base para una topología τ sobre $[\kappa]$ la cual es T_2 y 0-dimensional.

Demostración. Sean $A^{[M]}, B^{[L]} \in \mathcal{B}$ y $(\alpha_m) \in A^{[M]} \cap B^{[L]}$. Supongamos, por ejemplo, que $A \subseteq B$ y sea $n_0 \in \omega$ tal que $(\alpha_n)_{n \leq n_0} = B$, entonces, si llamamos $N = (\alpha_n)_{n > n_0}$ se verifica que $N \subset M$ y $N \subset L$ por lo que $[N] \subset [M]$ y $[N] \subset [L]$ y de aquí:

$$(\alpha_n) \in B^{[N]} \subset A^{[M]} \cap B^{[L]}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es base para alguna topología a la que llamamos τ.

Para ver que τ es T_2, sean $s_1 = (\alpha_n)$ y $s_2 = (\beta_n)$ dos secuencias distintas en $[\kappa]$. En tal caso, sea $n_0 \in \omega$ el primer natural que cumple $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$. Definamos $A_1 = (\alpha_n)_{n \leq n_0}$, $A_2 = (\beta_n)_{n \leq n_0}$, $M_1 = (\alpha_n)_{n > n_0}$ y $M_2 = (\beta_n)_{n > n_0}$. Entonces, por ser A_1 distinto de A_2,

$$s_1 \in A_1^{[M_1]}, \qquad s_2 \in A_2^{[M_2]} \quad \text{y} \quad A_1^{[M_1]} \cap A_2^{[M_2]} = \phi.$$

Veamos para terminar que para $A \in [\kappa]^{<\omega}$ y $M \in [\kappa]$ es $A^{[M]}$ cerrado y así $\mathcal{B}$ será base de abiertos y cerrados para τ.

Pongamos $A = (\beta_n)_{n \leq n_0}$. Si $(\alpha_n) \notin A^{[M]}$ puede ocurrir que

(a) $\alpha_n \neq \beta_n$ para algún $n \leq n_0$. Definiendo entonces $B = (\alpha_n)_{n \leq n_0}$ y $N = (\alpha_n)_{n > n_0}$ se tiene $(\alpha_n) \in B^{[N]} \subset [\kappa] \backslash A^{[M]}$.

(b) $\alpha_n = \beta_n$ para todo $n \leq n_0$ y existe $\alpha_m \notin M$. En este caso poniendo $B = (\alpha_n)_{n \leq m}$ y $M = (\alpha_n)_{n > m}$ obtenemos el mismo resultado. □

DEFINICIÓN 1.3. a) Diremos que un conjunto $\mathcal{A} \subset [\kappa]$ es *de Ramsey* si para cada $M \in [\kappa]$ existe $L \in [M]$ tal que se cumple una de las siguientes alternativas:

$$[L] \subset \mathcal{A} \qquad \text{o} \qquad [L] \subset [\kappa] \backslash \mathcal{A}$$

b) Para $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]$, diremos que $M \in [\kappa]$ *acepta* a $A \in [\kappa]^{<\omega}$ si $A^{[M]} \subseteq \mathcal{A}$. Se dirá que M *rechaza* a A si para todo $L \in [M]$, $A^{[L]} \not\subseteq \mathcal{A}$.

c) $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]$ se llama *completamente Ramsey* si para cada $A \in [\kappa]^{<\omega}$ y $M \in [\kappa]$ existe $L \in [M]$ tal que se tiene alguna de las siguientes alternativas:

$$A^{[L]} \subset \mathcal{A} \qquad \text{o} \qquad A^{[L]} \subset [\kappa] \backslash \mathcal{A}.$$

Los siguientes resultados pueden probarse con demostraciones análogas a las que aparecen en [4] para el caso $\kappa = \omega$.

Teorema 1.4 (Teorema de Ramsey)

Sea $\mathcal{A} \subset [\kappa]$, para cada $M \in [\kappa]$ existe $L \in [M]$ tal que se verifica una de las siguientes alternativas:

(a) L acepta a cada uno de sus subconjuntos finitos.

(b) L rechaza a cada uno de sus subconjuntos finitos.

Proposición 1.5

(a) *Si $\mathcal{A}$ es τ-abierto, es completamente Ramsey y, por tanto, de Ramsey.*

(b) *Si $\mathcal{D} \subset [\kappa]$ es de τ-primera categoría, entonces es completamente Ramsey, cumpliéndose la segunda alternativa de la Definición 1.3.c.*

2. Aplicaciones al estudio de álgebras de Boole

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole y sea κ el cardinal de $\mathcal{F}$. Consideremos un buen orden para $\mathcal{F}$ y representemos a $\mathcal{F}$ como la familia $\{H_\alpha : \alpha \in \kappa\}$. Dada una secuencia $(\alpha_n) \in [\kappa]$, la sucesión $(H_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ será una sucesión de elementos del álgebra y recíprocamente, dada una sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ de elementos distintos de $\mathcal{F}$ queda determinada (reordenando convenientemente la sucesión) una secuencia $(\alpha_n) \in [\kappa]$.

Denotemos por $\mathcal{A}_\mathcal{F}$, o simplemente por $\mathcal{A}$, al conjunto

$$\{(\alpha_n) \in [\kappa] : (H_{\alpha_n})_{n\in\omega} \text{ es de disjuntos}\}.$$

Proposición 2.1

El conjunto $\mathcal{A}$ es abierto y cerrado en la topología τ.

Demostración. Es claro que toda subsucesión de una sucesión de disjuntos es igualmente de disjuntos, luego $\mathcal{A}$ es abierto.

Sea $(\alpha_n) \in [\kappa]\backslash\mathcal{A}$, entonces $(H_{\alpha_n})_{n\in\omega}$ no es de disjuntos, luego existe un segmento inicial A de (α_n) tal que $(H_\alpha)_{\alpha\in A}$ no es de disjuntos. Poniendo entonces $A = (\alpha_n)_{n\leq n_0}$ y $M = (\alpha_n)_{n>n_0}$ resulta $(\alpha_n) \in A^{[M]} \subset [\kappa]\backslash\mathcal{A}$. □

Si P es una propiedad relativa a sucesiones de conjuntos en un álgebra $\mathcal{F}$, denotemos por $\mathcal{A}_P$ el conjunto de las secuencias $M \in \mathcal{A}$ tales que $(H_\alpha)_{\alpha\in M\cup A}$ tiene la propiedad P para cada secuencia finita A, y por $\mathcal{A}_{nP}$ el conjunto de las secuencias sin la citada propiedad.

DEFINICIÓN 2.2. Diremos que el álgebra $\mathcal{F}$ tiene la *propiedad (SP)* si cada sucesión de disjuntos tiene una subsucesión con la propiedad P. Diremos que $\mathcal{F}$ tiene la *propiedad (SSP)* si cada sucesión de disjuntos tiene una subsucesión tal que ella y toda subsucesión suya tienen la propiedad P. Y, finalmente, diremos que un álgebra de Boole tiene la *propiedad (UDSP)* si toda sucesión que tiene la propiedad P verifica que cada subsucesión de ella tiene igualmente la propiedad P.

Teorema 2.3

Dada un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ se tiene:
(a) $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (SP) si y sólo si $\mathcal{A}_P$ es denso en $\mathcal{A}$.
(b) $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (SSP) si y sólo si $\mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_P$ es diseminado.
(c) $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (UDSP) si y sólo si $\mathcal{A}_P$ es abierto.

Demostración. (a) Sean $M \in \mathcal{A}$ y $A^{[L]}$ cualquier entorno de M. Entonces al ser la sucesión $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ de disjuntos y por nuestra hipótesis sobre $\mathcal{F}$, existe $L_1 \in [M]$, que podemos suponer que tiene a A como segmento inicial, ya que éste es finito, tal que $L_1 \in \mathcal{A}_P$ y $L_1 \in A^{[L]}$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}_P$ es denso en $\mathcal{A}$. Si $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ es cualquier sucesión de disjuntos, entonces $M \in \mathcal{A}$ y $[M]$ será entorno abierto de M, por nuestra hipótesis, debe existir $L \in \mathcal{A}_P \cap [M]$, y de aquí que $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ sea una subsucesión de la dada con la propiedad P.

(b) Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (SSP) y supongamos que existe una secuencia finita A y otra infinita M tal que $A^{[M]} \subset \overline{\mathcal{A}}_{nP}$, donde la clausura se toma respecto a la topología τ. Ahora bien, al no ser posible

$$A^{[M]} \subset \overline{\mathcal{A}}_{nP}\backslash\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}_{nP}\backslash\mathcal{A}_{nP},$$

debe existir $L \in [M]$ tal que $(H\alpha)_{\alpha\in A\cup L}$ es de disjuntos. Puesto que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (SSP) debe existir una subsucesión $L_1 \in [L]$ tal que $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ tiene la propiedad P y $A^{[L]} \subset \mathcal{A}_P$.

Pero $A^{[L]} \subset A^{[M]} \subset \overline{\mathcal{A}}_{nP}$, luego $A^{[L]} \subset \overline{\mathcal{A}}_{nP}\backslash\mathcal{A}_{nP}$, lo cual es imposible.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}_{nP}$ es diseminado y, por tanto, de Ramsey cumpliendo la segunda alternativa de la definición 1.3.a. Sea $(H_\alpha)_{\alpha\in M}$ una sucesión de disjuntos, existirá $L \in [M]$ tal que $[L] \subset [\kappa]\backslash\mathcal{A}_{nP}$, pero al ser $(H_\alpha)_{\alpha\in L}$ de disjuntos

$$[L] \subset \mathcal{A}\backslash\mathcal{A}_{nP} = \mathcal{A}_P,$$

y $(H\alpha)_{\alpha\in L}$ tiene la propiedad P y toda subsucesión suya también la tiene.

(c) Si $L = (\alpha_n) \in \mathcal{A}_P$ y el álgebra $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (UDSP) entonces es $(\alpha_n) \in [L] \subseteq \mathcal{A}_P$ y $\mathcal{A}_P$ será abierto. Recíprocamente, si $(A_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de disjuntos con la propiedad P, existirá $(\alpha_n) \in \mathcal{A}_P$ tal que $(A_n)_{n\in\omega} = (H_{\alpha_n})$, puesto que $\mathcal{A}_P$ es abierto deben existir una secuencia finita A y una infinita M tales que $(\alpha_n) \in A^{[M]} \subseteq \mathcal{A}_P$. Y de aquí toda sucesión de $(A_n)_{n\in\omega}$ tiene la propiedad P. $\square$

Sustituyendo la propiedad P por la de tener supremo resultaría que (SP) es la propiedad subsecuencialmente completa de Haydon [2], (SSP) es la propiedad (E) de Schachermayer [5] y (UDSP) es la propiedad "up down semicomplete" [5]. Denotando ahora por $\mathcal{A}_\sigma$ el conjunto de las secuencias que corresponden a las sucesiones de disjuntos con supremo, resultará:

Corolario 2.4

Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de Boole de cardinal infinito κ, se tiene:
(a) $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (SC) si y sólo si el conjunto $\mathcal{A}_\sigma$ es denso en $\mathcal{A}$,
(b) $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (E) si y sólo si el conjunto $\mathcal{A}_{n\sigma}$ es diseminado,
(c) $\mathcal{F}$ tiene la propiedad (UDSC) si y sólo si $\mathcal{A}_\sigma$ es abierto.

Otras propiedades que podrían ser caracterizadas de esta forma son, por ejemplo, la propiedad de interpolación de Seever, propiedad de interpolación subsecuencial de Freniche [1] y la propiedad de Moltó [3].

En el siguiente teorema se va a caracterizar un álgebra de Boole con la propiedad (SP) y, a la vez, con la (SnP), esto es, toda sucesión de disjuntos de dicha álgebra tiene una subsucesión con la propiedad P y otra que no tiene dicha propiedad.

Teorema 2.5

Un álgebra de Boole $\mathcal{F}$ tiene las propiedades (SP) y (SnP) si y sólo si para las familias $\mathcal{A}_P$ y $\mathcal{A}_{nP}$ y todo $M \in [\kappa]$ se verifica la segunda alternativa del teorema de Ramsey.

Demostración. Supongamos $\mathcal{F}$ con las citadas propiedades. Siendo $M \in [\kappa]$, si para todo $L \in [M]$ fuera $L \notin \mathcal{A}$ entonces se tendría evidentemente la opción (b) del teorema de Ramsey. Supongamos entonces que existe $L \in [M]$ con $L \in \mathcal{A}$. En tal caso, como para cada $L_1 \in [L]$ existe una subsucesión con la propiedad P y otra sin esta propiedad, no es posible $A^{[L]} \subset \mathcal{A}_P$ ni tampoco $A^{[L]} \subset \mathcal{A}_{nP}$, para ninguna secuencia finita A de L. Así pues se verifica de nuevo la opción (b) del teorema de Ramsey.

Recíprocamente, si para cada $M \in \mathcal{A} \subset [\kappa]$ existe L tal que se verifica la segunda alternativa del teorema de Ramsey; esto es, que L rechaza a sus subconjuntos finitos, esto implica que $[L] \not\subset \mathcal{A}_P$ y $[L] \not\subset \mathcal{A}_{nP}$. Luego existe una subsucesión de M que tiene la propiedad P y otra que no la tiene. $\square$

En esta situación, veamos como puede conectarse con la teoría de la medida.

Proposición 2.6

Dada una medida fuertemente aditiva $\mu : \mathcal{F} \to X$, donde X es un espacio de Banach, existe una aplicación $\varphi : \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \to c_0(X)$ definida por $\varphi\big((\alpha_n)\big) = \big(\mu(H_{\alpha_n})\big)$ tal que es continua.

Demostración. Si μ es fuertemente aditiva φ está bien definida, veamos que es continua.

Sea (α_n) una secuencia de $\mathcal{A}$ y sea $y_0 = (y_n)_{n\in\omega} = \big(\mu(H_{\alpha_n})\big)_{n\in\omega} \in c_0(X)$. Consideremos la bola $B(y_0,\varepsilon)$ en $c_0(X)$. Veamos como puede determinarse un abierto en $\mathcal{A}$ cuya imagen esté contenida en $B(y_0,\varepsilon)$.

Puesto que $y_n \longrightarrow 0$ podemos hallar $n_0 \in \omega$ tal que para cada $p,q \geq n_0$ se verifique $|y_p - y_q| < \varepsilon$. Sean entonces $A = \{\alpha_n : n \leq n_0\}$ y $M = \{\alpha_n : n > n_0\}$. Para cada $\beta \in A^{[M]}$ poniendo $\beta = (\beta_n)$ y $z_n = \mu(H_{\beta_n})$ se tendrá, por construcción, para cada $n \leq n_0$, $|y_n - z_n| < \varepsilon$. Por lo que $\varphi(A^{[M]}) \subseteq B(y_0,\varepsilon)$, y φ es continua. □

Teorema 2.7

Sea (μ_n) una sucesión de medidas fuertemente aditivas sobre $\mathcal{F}$ y valoradas en un espacio de Banach X. (μ_n) es uniformemente fuertemente aditiva si y sólo si las correspondientes aplicaciones $\varphi_n : \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \to c_0(X)$ son equicontinuas.

Demostración. Supongamos (μ_n) uniformemente fuertemente aditiva. Sean $\varepsilon > 0$ y $(\alpha_n) \in \mathcal{A}$. Para $k \geq 1$ sea

$$y_k = \big(y_n^{(k)}\big) = \big(\mu_k(H_{\alpha_n})\big) \in c_0(X).$$

Por hipótesis se puede determinar $n_0 \in \omega$ tal que si $p,q > n_0$ se cumpla $|y_p^{(k)} - y_q^{(k)}| < \varepsilon$, para todo $k \geq 1$.

Así pues, poniendo $A = \{\alpha_n : n \leq n_0\}$ y $M = \{\alpha_n : n > n_0\}$ si $\beta \in A^{[M]}$ y $\beta = (\beta_n)$, y llamando $z_n^{(k)} = \mu_k(H_{\beta_n})$, resulta que para cada $n \leq n_0$ es $\alpha_n = \beta_n$, y por tanto $|z_n^{(k)} - y_n^{(k)}| = 0$ para todo $k \geq 1$. Y, por otra parte, para cada $n > n_0$ se verifica $|z_n^{(k)} - y_n^{(k)}| < \varepsilon$ para todo $k \geq 1$. Por tanto, $\varphi_k(A^{[M]}) \subset B(y_k,\varepsilon)$, para todo $k \geq 1$.

Recíprocamente, usando la misma notación anterior, se tiene que para cada secuencia $(\alpha_n) \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$ existe $A^{[M]}$ tal que $\varphi_k(A^{[M]}) \subset B(y_k,\varepsilon)$. Si $(\alpha_n) \in A^{[M]}$ y $A = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n_0}\}$, para cada $p,q > n_0$ es $|\mu_k(H_{\alpha_p}) - \mu_k(H_{\alpha_q})| < \varepsilon$, para todo $k \geq 1$. Luego (μ_k) es uniformemente fuertemente aditiva. □

Referencias

1. F. J. Freniche, The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interpolation property, *Proc. Amer. Math. Soc.* **92** (1984), 362–366.
2. R. Haydon, A non reflexive Grothendieck space that does not contain ℓ_∞, *Israel J. Math.* **40** (1981), 65–73.
3. A. Moltó, On the Vitali-Hahn-Saks theorem, *Proc. Royal Soc. Edinb.* **90**A (1981), 163–173.
4. E. Odell, Applications of Ramsey Theorems to Banach Space Theory, in *Notes in Banach Spaces*, pp. 379–404, University of Texas Press, Austin, 1980.
5. W. Schachermayer, On some classical measure theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras, *Dissertationes Mathematicae* **204** (1982), 1–36.